

Martin Kübbeler

# **Simulation der mikrostruktur- bestimmten Kurzrissausbreitung unter dem Einfluss lokaler Phasenumwandlung**

Schriftenreihe der Arbeitsgruppe  
für Technische Mechanik  
im Institut für Mechanik und Regelungs-  
technik - Mechatronik

Herausgeber: Claus-Peter Fritzen

Band 13

**Impressum**

Prof. Dr.-Ing. Claus-Peter Fritzen

Arbeitsgruppe für Technische Mechanik

Institut für Mechanik und Regelungstechnik - Mechatronik

Universität Siegen

57068 Siegen

ISSN 2191-5601

URN urn:nbn:de:hbz:467-11229

Zagl.: Siegen, Univ., Diss., 2017

**Simulation der mikrostrukturbestimmten  
Kurzzrissausbreitung unter dem Einfluss lokaler  
Phasenumwandlung**

genehmigte  
DISSERTATION  
zur Erlangung des Grades eines Doktors  
der Ingenieurwissenschaften

vorgelegt von  
Dipl.-Ing. Martin Kübbeler  
geb. in Leverkusen

eingereicht bei der Naturwissenschaftlich-Technischen Fakultät  
der Universität Siegen

Referent: Prof. Dr.-Ing. C.-P. Fritzen  
Korreferent: Prof. Dr.-Ing. U. Krupp

Tag der mündlichen Prüfung  
17. Februar 2017



# Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand im Rahmen meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Mechanik und Regelungstechnik - Mechatronik der Universität Siegen im Rahmen eines interdisziplinären Projekts mit dem Institut für Werkstofftechnik.

Allen, die zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen haben, danke ich ganz herzlich; insbesondere meinem Doktorvater Herrn Prof. Dr.-Ing. Claus-Peter Fritzen für seine stete Unterstützung und die zahlreichen Anregungen während der Erstellung dieser Arbeit sowie für die motivierende Atmosphäre in der Arbeitsgruppe. Weiter danke ich Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. Ulrich Krupp, der das Forschungsprojekt geleitet und durch viele interessante Diskussionen häufig zu neuen Arbeitsschritten und Erkenntnissen geführt hat.

Ebenso herzlich danke ich Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. Hans-Jürgen Christ und Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. Chuanzeng Zhang für ihre Beiträge im Rahmen des Promotionsverfahrens.

Besonderer Dank gilt meinem ehemaligen Kollegen Herrn Dr.-Ing. Philipp Köster für die hilfreichen fachlichen Diskussionen und die kritische Durchsicht der Arbeit. Herrn Dr.-Ing. Ingmar Roth danke ich für die gute Zusammenarbeit im Rahmen des gemeinsamen Forschungsprojektes und für die experimentellen Untersuchungsergebnisse, die für diese Arbeit eine unerlässliche Basis bilden. Darüber hinaus danke ich meinen ehemaligen Kollegen am Institut für die angenehme Arbeitsatmosphäre und allen studentischen Hilfskräften, Studien- und Diplomarbeitern, die zu dieser Arbeit beigetragen haben.

Für die finanzielle Unterstützung des Gemeinschaftsprojekts danke ich der Deutschen Forschungsgemeinschaft.

Meinen langjährigen Freunden gilt besonderer Dank für die motivierende Unterstützung, die für das Gelingen der Promotion wichtig war. Abschließend möchte ich ganz herzlich meinen Eltern Hella und Helmut Kübbeler danken, die mich stets nach Kräften gefördert haben.

Versmold, im April 2017

Martin Kübbeler



# Inhalt

<b>Nomenklatur</b> .....	<b>IV</b>
<b>Kurzfassung</b> .....	<b>XVII</b>
<b>Abstract</b> .....	<b>XVIII</b>
<b>1 Einleitung</b> .....	<b>1</b>
1.1 Problemstellung und Motivation .....	1
1.2 Ziele und Aufbau der Arbeit.....	3
<b>2 Grundlagen</b> .....	<b>5</b>
2.1 Ermüdung metallischer Werkstoffe.....	5
2.1.1 Rissentstehung.....	5
2.1.2 Rissausbreitung .....	7
2.2 Ermüdungsverhalten von metastabilen austenitischen Edelstählen .....	13
2.2.1 Charakterisierung des Versuchswerkstoffs .....	13
2.2.2 Phasentransformation bei metastabilen austenitischen Edelstählen.....	14
2.2.3 Rissinitiierungs- und Ausbreitungsverhalten im Versuchswerkstoff.....	16
2.2.4 Riss schließen .....	18
2.3 Mechanische Grundlagen .....	20
2.3.1 Elastisches Materialverhalten.....	20
2.3.2 Plastisches Materialverhalten .....	23
2.4 Modelle zur Beschreibung der Rissentstehung .....	25
2.4.1 Rissinitiierung auf Zwillingsgrenzen .....	25
2.4.2 Rissinitiierung auf Gleitbändern .....	26
2.5 Modelle zur Beschreibung des Risswachstums.....	27
2.5.1 Kurzrissmodelle.....	27
2.5.2 Modelle zur Beschreibung der Langrissausbreitung.....	36
2.6 Modelle zur Beschreibung der martensitischen Phasentransformation.....	39

### **3 Modell zur Beschreibung des Kurzrissswachstums unter dem Einfluss lokaler Phasenumwandlung.....46**

3.1 Ein neues Modell zur Simulation des Kurzrissswachstums unter Einbeziehung martensitischer Phasenumwandlung an der Rissspitze .....	47
3.1.1 Aktivierung einander kreuzender Gleitbänder in der Rissspitzenumgebung.....	47
3.1.2 Bestimmung der Größe der Martensitbereiche .....	49
3.1.3 Rissausbreitung .....	51
3.1.4 Volumenzunahme des Umwandlungsbereiches.....	54
3.1.5 Anforderungen an ein numerisches Lösungsverfahren.....	56
3.2 Verfahren zur numerischen Lösung des Kurzrisssproblems .....	57
3.2.1 Randelemente mit Absolutverschiebungsansätzen .....	64
3.2.2 Randelemente mit Relativverschiebungsansätzen .....	72
3.2.3 Kopplung von Randelementen mit Absolut- und Relativverschiebungsansätzen	77
3.2.4 Implementierung der Volumendehnung .....	85
3.2.5 Numerische Verbesserungen und Erweiterungen .....	87
3.2.6 Modellierung mehrerer Phasen und Gefügekörner .....	96
3.2.7 Validierung.....	100

### **4 Simulation des mikrostrukturbestimmten Kurzrissswachstums .....110**

4.1 Rissausbreitung im Stadium I .....	110
4.1.1 Einfluss unterschiedlicher elastischer Eigenschaften der Körner .....	110
4.1.2 Einfluss der Volumendehnung innerhalb einzelner Körner.....	116
4.2 Rissausbreitung im mikrostrukturbestimmten Stadium II .....	119
4.2.1 Einfluss unterschiedlicher elastischer Eigenschaften der Körner .....	119
4.2.2 Einfluss der Volumendehnung innerhalb einzelner Körner.....	122
4.3 Rissausbreitung unter dem Einfluss martensitischer Phasentransformation an der Rissspitze.....	124
4.3.1 Einfluss der Volumendehnung des umgewandelten Werkstoffs .....	125
4.3.2 Einfluss der Größe des Transformationsbereichs .....	130
4.3.3 Einfluss der Gleitebenenorientierung an der Rissspitze.....	132
4.3.4 Einfluss des Elastizitätsmoduls der Umwandlungsbereiche .....	134
4.3.5 Einfluss des Spannungsverhältnisses .....	135

---

<b>5 Anwendung.....</b>	<b>142</b>
5.1 Riss im Einflussbereich von Einschluss und Pore.....	142
5.2 Simulation der Langrissausbreitung in einer Dreipunktbiegeprobe .....	144
5.3 Simulation der Ausbreitung eines realen Kurzrisses .....	146
<b>6 Zusammenfassung und Diskussion .....</b>	<b>151</b>
<b>7 Literaturverzeichnis .....</b>	<b>165</b>

# Nomenklatur

## Lateinische Zeichen

Symbol	Bedeutung
$\mathbf{0}$	Nullmatrix
$a$	halbe Risslänge
$a$	Kantenlänge einer Elementarzelle
$a^*$	auf die Richtung senkrecht zur Zugachse projizierte halbe Risslänge
$a_c$	kritische Risslänge
$\Delta a$	Rissverlängerung
$A$	Anisotropiefaktor
$A$	Faktor in der Versetzungsdichteverteilungsfunktion
$\mathbf{A}$	Matrix bei der Lösung eines Gleichungssystems
$\mathbf{A}$	Einflussmatrix der Absolutverschiebungen auf Spannungen im Gebietsinneren
$\mathbf{A}^*$	dimensionslose Einflussmatrix der Absolutverschiebungen auf Spannungen
$A_B$	Bruchdehnung
$\mathbf{A}^G, \mathbf{A}^F$	Einflussmatrix für gemeinsamen / freien Rand zweier benachbarter Bereiche
$\mathbf{A}^R$	Einflussmatrix bei Lage eines Risses auf einem Gebietsrand
$b$	Betrag des BURGERS-Vektors
$b$	Breite eines Bereiches bei der Validierung der Martensitdehnungsnachbildung
$b$	Proportionalitätsfaktor bei der Approximation des Konvergenzverhaltens
$\mathbf{b}$	volumenbezogener Kraftvektor
$\mathbf{b}$	Vektor der Relativverschiebungen
$b^*$	Normierungsfaktor für Relativverschiebungen
$b, b_n, b_t$	Relativverschiebung / Relativverschiebung in Normal- / Tangentialrichtung
$b_1, b_2$	Relativverschiebungen eines Verschiebungssprungs

$\mathbf{b}_1$	Versetzung
$\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$	Partialversetzungen
$b_k$	Einträge des volumenbezogenen Kraftvektors
$b_l^*$	Einträge des virtuellen volumenbezogenen Kraftvektors
$b_R, b_{RP}$	Resultierende Abgleitung an einer Rissspitze / projiziert auf eine Gleitebene
$\mathbf{b}^R$	Relativverschiebungen Rissufer bei Lage des Risses auf einem Gebietsrand
$b_{1l}, b_{12}$	Tangentialverschiebung in die 1. / 2. Gleitrichtung an einer Rissspitze
$\mathbf{b}_{x_1x_2}, \mathbf{b}_m$	Vektor der Spannungen im Gebietsinneren im $x_1$ - $x_2$ -/ Elementkoordinatensystem
$B(\xi)$	Funktion innerhalb der Versetzungsdichteverteilungsfunktion
$\mathbf{B}$	Einflussmatrix der Randspannungen auf Spannungen im Gebietsinneren
$\mathbf{B}^*$	dimensionslose Einflussmatrix der Randspannungen auf Spannungen im Gebiet
$B_1, B_2$	Breite des Bereichs mit aktiven Gleitebenen in die 1. / 2. Gleitrichtung
$\mathbf{B}^G, \mathbf{B}^F$	Einflussmatrix für gemeinsamen / freien Rand zweier benachbarter Bereiche
$\mathbf{B}^R$	Einflussmatrix bei Lage eines Risses auf einem Gebietsrand
$c$	halbe Gleitbandlänge
$c$	Konstante bei der Approximation des Konvergenzverhaltens
$c^i$	Vorfaktor der Verschiebung zur Berücksichtigung der Lage des Punktes $i$
$C$	Proportionalitätsfaktor im Risswachstumsgesetz von Wilkinson et al. (1998)
$C, C'$	Proportionalitätsfaktoren im Risswachstumsgesetz von Tanaka et al. (1986)
$\mathbf{C}$	Einflussmatrix der Relativverschiebungen auf Spannungen
$\mathbf{C}$	Steifigkeitsmatrix
$\mathbf{C}^*$	dimensionslose Einflussmatrix der Relativverschiebungen auf Spannungen
$C^P$	Proportionalitätsfaktor im Risswachstumsgesetz von PARIS
$C_{ijkl}$	Einträge des Elastizitätstensors
$C_{klm}^{ij}$	Einträge der Einflussmatrix der Relativverschiebungen auf Spannungen
$C_{pq}$	Einträge des Elastizitätstensors
$CTSD$	Rissspitzenabgleitung ( <i>engl. crack tip slide displacement</i> )

$\Delta CTSD$	zyklische Rissspitzenableitung
$\Delta CTSD_{1/2}$	zyklische Rissspitzenableitung an der 1. / 2. plastischen Zone einer Rissspitze
$\Delta CTSD_{GB}^R$	Rissspitzenableitung bei Spannungsverhältnis $R$
$CTOD$	Rissspitzenöffnung ( <i>engl. crack tip opening displacement</i> )
$\Delta CTOD$	zyklische Rissspitzenöffnung
$d$	Abstand zwischen Punkten, an denen Spannungen ermittelt werden
$d$	Abstand zwischen Riss und Einschluss
$d$	mittlerer Abstand zwischen zwei aktiven Gleitebenen einer Gleitrichtung
$da$	Gesamtrissfortschritt an einer Rissspitze
$da_{1/2}$	Rissfortschritt in Richtung der 1. / 2. plastischen Zone einer Rissspitze
$da/dN$	Risswachstumsrate
$D$	Korndurchmesser
$\mathbf{D}$	Einflussmatrix der Relativverschiebungen auf Randspannungen
$D_{kij}$	Tensor der Einflüsse von Gebietsrandspannungen auf Spannungen innerhalb
$e_l$	Einheitsvektor in Richtung $l$
$E, E_0, E_1$	Elastizitätsmodul / Elastizitätsmoduln einzelner Gefügekörner
$E$	Energie
$E_{11}^K, E_{11}^S$	Elastizitätsmodul in Zugrichtung eines Gefügekornes / einer großen Scheibe
$\Delta E_I, \Delta E_{II}$	Energiedifferenz bei Rissöffnung im Modus I / II
$E_M$	Elastizitätsmodul eines Martensitbereichs
$f$	Verhältnis zwischen realer und modellmäßiger Dehnung bei Phasenumwandlung
$\mathbf{f}$	Vektor der Randbedingungen bei der Lösung eines Gleichungssystems
$f(\xi)$	Versetzungsdichteverteilung
$f^{a'}$	Martensitvolumengehalt
$F$	Kraft
$F$	Index für den freien Rand zweier benachbarter Bereiche
$\mathbf{F}$	Einflussmatrix der Relativ- auf Absolutverschiebungen

$\mathbf{F}^*$	dimensionslose Einflussmatrix der Relativ- auf Absolutverschiebungen
$F_{lk}^{ij}$	Einträge der Einflussmatrix der Relativ- auf Absolutverschiebungen
$g(\eta)$	Ableitung der Elementkoordinaten
$\mathcal{G}$	Energiefreisetzungsrate
$\mathcal{G}_I, \mathcal{G}_{II}$	Energiefreisetzungsrate bei Rissöffnungsmode I / II
$G$	freie Energie
$G$	Index für den gemeinsamen Rand zweier benachbarter Bereiche
$G, G_1, G_2$	Schubmodul / Schubmoduln einzelner Bereiche
$\mathbf{G}$	Einflussmatrix der Spannungen auf Absolutverschiebungen
$\mathbf{G}^*$	dimensionslose Einflussmatrix der Spannungen auf Absolutverschiebungen
$G(\xi)$	JACOBI-Determinante
$\mathbf{G}^G, \mathbf{G}^F$	Einflussmatrix für gemeinsamen / freien Rand zweier benachbarter Bereiche
$\mathbf{G}^R$	Einflussmatrix bei Lage eines Risses auf einem Gebietsrand
$\Delta G$	kritische freie Energie für spontane martensitische Transformation
$\Delta G_{mech}$	Verformungsenergie
$\Delta G_{therm}$	thermische Energiedifferenz
$\mathbf{H}$	Einflussmatrix der Absolutverschiebungen auf Gebietsrandspannungen
$\mathbf{H}^*$	dimensionslose Einflussmatrix der Absolutverschiebungen auf Spannungen
$\mathbf{H}^G, \mathbf{H}^F$	Einflussmatrix für gemeinsamen / freien Rand zweier benachbarter Bereiche
$\mathbf{H}^R$	Einflussmatrix bei Lage eines Risses auf einem Gebietsrand
$i$	Index / Richtung
$I$	Integral bei der Ermittlung von Spannungen in der Nähe eines Gebietsrandes
$I_l$	Integral bei der Kopplung unterschiedlicher Randelementtypen
$\mathbf{I}$	Einheitsmatrix
$j$	Index / Richtung
$k$	Index / Richtung
$\mathbf{k}$	Einflussvektor der Martensitdehnung auf Absolutverschiebungen

$\mathbf{k}^*$	dimensionsloser Einflussvektor der Martensitdehnung auf Verschiebungen
$K$	Spannungsintensitätsfaktor
$K_I, K_{II}, K_{III}$	Spannungsintensitätsfaktor bei Rissöffnungsmodi I / II / III
$K_{IRef}$	Referenzspannungsintensitätsfaktor aus Murakami (1987)
$K_c$	kritischer Spannungsintensitätsfaktor
$K_{min}, K_{max}$	kleinster und größter Spannungsintensitätsfaktor bei zyklischer Beanspruchung
$\Delta K$	Schwingbreite des Spannungsintensitätsfaktors
$\Delta K_I$	Abweichung des Spannungsintensitätsfaktors in Modus I von der Referenz
$\Delta K_{th}$	Schwellenwert des Spannungsintensitätsfaktors
$l$	Index / Richtung
$l$	Länge eines Randelementes mit Relativverschiebung
$l$	Länge eines Bereiches bei der Validierung der Martensitdehnungsnachbildung
$l_1, l_2, l_3$	Kantenlängen eines Quaders
$\Delta l_1, \Delta l_2, \Delta l_3$	Zunahme der Kantenlängen eines Quaders infolge Phasentransformation
$m$	Exponent im Risswachstumsgesetz von Wilkinson et al. (1998)
$m, m'$	Exponenten im Risswachstumsgesetz von Tanaka et al. (1986)
$\mathbf{m}$	Gleitrichtung innerhalb einer kristallographischen Gleitebene
$\mathbf{m}$	Einflussvektor der Martensitdehnung auf Spannungen
$m^*$	Faktor zur Berücksichtigung der Missorientierung von Gleitbändern
$\mathbf{m}^*$	dimensionsloser Einflussvektor der Martensitdehnung auf Spannungen
$m_P$	Exponent im Risswachstumsgesetz von PARIS
$M$	Anzahl der Elemente mit Relativverschiebungen
$M_S$	Martensitstarttemperatur
$n$	Elementnormale
$n$	Exponent im Martensitbildungsmodell von Olson und Cohen (1975)
$n$	Verhältnis aus halber Risslänge und halber Gleitbandlänge
$\mathbf{n}$	Normale einer kristallographischen Gleitebene

<b>n</b>	Normale eines Gebietsrandes (vom Gebiet wegzeigend)
$n_k$	Komponente der Normale eines Gebietsrandes
$n_B^1, n_B^2$	Komponenten der Normale der 1. / 2. Scherebene in Beanspruchungsrichtung
$n_k^1, n_k^2$	Komponenten der Normale der 1. / 2. Scherebene bei der Phasenumwandlung
$N, N_{Rand}$	Anzahl der einen Gebietsrand vernetzenden Elemente
$N$	Anzahl Lastwechsel
$N_1, N_2$	Anzahl paralleler Gleitebenen in die 1. / 2. Gleitrichtung an einer Rissspitze
$N_{Riss}$	Anzahl der einen Riss vernetzenden Elemente
<b>p</b>	Spannungen tangential und normal zum Gebietsrand
$\mathbf{p}^b, \mathbf{p}^c$	Vektor der Gebietsrandspannungen verursacht vom Gebietsrand / Riss
$\mathbf{p}^G, \mathbf{p}^F$	Gebietsrandspannungen auf dem gemeinsamen / freien Rand zweier Bereiche
$p_k$	Spannungen auf dem Gebietsrand in Richtung $k$
$p_k^*$	virtuelle Spannungen auf dem Gebietsrand in Richtung $k$
$p_k^j, (p_k^j)_s$	Spannung am Element $j$ / Spannung am Knoten $s$ des Elementes $j$
$p_{lk}^*$	virtuelle Spannung verursacht von einer Punktlast in Richtung $l$
$p_n, p_t$	Spannungen auf dem Gebietsrand normal / tangential zum Randelement
$\mathbf{p}^R$	Gebietsrandspannungen bei Lage eines Risses auf dem Rand
$\mathbf{p}_{x_1 \times x_2}, \mathbf{p}_m$	Vektor der Gebietsrandspannungen im $x_1$ - $x_2$ -/ Elementkoordinatensystem
$q, q_s$	mechanische Größe / mechanische Größe am Knoten $s$
$q_a, q_b$	mechanische Größe am verschobenen Knoten $a$ bzw. $b$
<b>Q</b>	Matrix zur Verschiebung von Elementknoten
$r$	Abstand eines Punktes zu einem Verschiebungssprung
$r$	Abstand zur Rissspitze
$r$	Abstand zwischen dem Ort einer Punktlastaufbringung und einem Randpunkt
<b>r</b>	Vektor zur Beschreibung eines Punktes relativ zu einem Verschiebungssprung
$r_0$	Abstand einer Versetzungsquelle zur Korngrenze
$r_0$	kleinster Abstand vom Ort der Spannungsermittlung zu einem Element

$R$	Radius
$R$	Spannungsverhältnis
$R_m$	Zugfestigkeit
$R_{p0,2}$	Streckgrenze
$S$	SCHMID-Faktor
$S_{kij}$	Tensor der Einflüsse von Gebietsrandverschiebungen auf Spannungen innerhalb
$t$	Elementtangente
$t$	Probendicke
$t$	Zeit
$\mathbf{t}$	Spannungsvektor innerhalb eines Gebietes / in einer unendlichen Scheibe
$\mathbf{t}$	Tangente eines Gebietsrandes
$\mathbf{t}^b, \mathbf{t}^c$	Spannungsvektor im Gebietsinneren verursacht vom Gebietsrand / Riss
$\mathbf{t}^R$	Spannungsvektor entlang eines Risses bei dessen Lage auf einem Gebietsrand
$\mathbf{t}_{x_1x_2}, \mathbf{t}_m$	Spannungsvektor im Gebietsinneren im $x_1$ - $x_2$ - / Elementkoordinatensystem
$T$	Betrag einer Partialversetzung
$T$	Temperatur
$T_0$	Temperaturuntergrenze für martensitische Phasentransformation
$\mathbf{T}^b, \mathbf{T}^t$	Transformationsmatrizen für Relativverschiebungen / Spannungen im Gebiet
$\mathbf{T}^p, \mathbf{T}^u$	Transformationsmatrizen für Gebietsrandspannungen / Absolutverschiebungen
$\mathbf{u}$	(Absolut-) Verschiebung
$u_1, u_2$	Absolutverschiebungen verursacht von einem Verschiebungssprung
$\mathbf{u}^b, \mathbf{u}^c$	Vektor der Gebietsrandverschiebungen verursacht vom Gebietsrand / Riss
$\mathbf{u}^G, \mathbf{u}^F$	Gebietsrandverschiebungen auf gemeinsamem / freiem Rand zweier Bereiche
$u_k$	Verschiebung in Richtung $k$
$u_k^*$	Gewichtungsfunktion; als virtuelle Verschiebung interpretierbar
$u_k^j, (u_k^j)_s$	Verschiebung am Element $j$ / Verschiebung am Knoten $s$ des Elementes $j$
$u_l^i$	Verschiebung am Punkt $i$ in Richtung $l$

---

$u_{lk}^*$	virtuelle Verschiebung verursacht von einer Punktlast in Richtung $l$
$\mathbf{u}^R$	Gebietsrandverschiebungen bei Lage eines Risses auf dem Rand
$\mathbf{u}_{x_1x_2}, \mathbf{u}_m$	Vektor der Gebietsrandverschiebungen im $x_1$ - $x_2$ -/ Elementkoordinatensystem
$v_F$	Randverschiebung einer rissbehafteten Probe
$V$	Volumen eines Quaders
$\Delta V$	Volumenzunahme eines Quaders infolge Phasentransformation
$w$	halbe Breite einer Martensitzone
$w$	halbe Breite einer Zugprobe
$x, y, z$	kartesische Koordinaten
$\mathbf{x}$	Vektor der unbekanntenen Größen bei der Lösung eines Gleichungssystems
$x_0$	Koordinate ab der ein Riss innerhalb einer Martensitzone geöffnet ist
$x_1, x_2, x_3$	kartesische Koordinaten
$x_1^0, x_2^0$	Koordinaten eines Verschiebungssprungs
$x'_1, x'_2, x'_3$	Transformierte kartesische Koordinaten
$x_k$	Koordinatenachse mit Richtung $k$
$x_R, x_{GB}$	Koordinate des Risses / des Gleitbandes
$Y$	Geometriefaktor innerhalb des Spannungsintensitätsfaktors

## Griechische Zeichen

Symbol	Bedeutung
$\alpha$	Parameter im Martensitbildungsmodell von Olson und Cohen (1975)
$\alpha$	Verhältnis aus minimalem Elementabstand und JACOBI-Determinante
$\alpha$	Winkel zwischen Relativverschiebungselementtangente und Abszisse
$\alpha_{ki}$	Kosinus des Winkels zwischen $x_k$ -Achse und $x'_i$ -Achse
$\beta$	Parameter im Martensitbildungsmodell von Olson und Cohen (1975)
$\beta$	Winkel zwischen Absolutverschiebungselementtangente und Abszisse
$\delta$	Vorlauf des Martensitbereichs vor einer Rissspitze
$\delta_{ij}$	KRONECKER-Delta
$\Delta^i$	DIRAC'sche Deltafunktion zur Repräsentation einer Punktlast in Richtung $i$
$\varepsilon_{kl}$	Einträge des Dehnungstensors
$\varepsilon_{kl}^M$	Dehnungen infolge martensitischer Phasentransformation
$\varepsilon_{pl}$	plastische Dehnung
$\varepsilon_M$	aus der Volumenzunahme der Martensitumwandlung resultierende Dehnung
$\varepsilon_n^1, \varepsilon_n^2$	Dehnung senkrecht zur 1. / 2. Scherebene im realen Werkstoff
$\varepsilon_n^{M1}, \varepsilon_n^{M2}$	Dehnung senkrecht zur 1. / 2. Scherebene im Modell (Bogers u. Burgers 1964)
$\varepsilon_q$	Vektor der Einträge des Dehnungstensors
$\phi_s$	Formfunktion des Knotens $s$
$\varphi$	Winkel / Koordinate an der Rissspitze
$\varphi_0$	Rissablenkwinkel
$\gamma$	Scherung im Austenit in der Umgebung eines Martensitbereiches
$\gamma$	Vorfaktor der Martensitdehnung im EVZ
$\gamma_{kl}$	Gleitungen
$\eta$	(Element-) Koordinate
$\eta_1, \eta_2$	Elementkoordinate bei unterer / oberer Integrationsgrenze

$\eta$	Gleitbandkoordinate
$\Gamma$	Bruchflächenenergie
$\Gamma$	Rand eines Gebietes
$\Gamma$	Verhältnis der Elastizitätsmoduln bzw. Schubmoduln zweier Bereiche
$\Gamma_b, \Gamma_c$	Rand des rissfreien Gebietes / den Riss repräsentierender Gebietsrand
$\Gamma_D, \Gamma_N$	Rand mit DIRICHLET / NEUMANN Randbedingung
$\Gamma_j$	vom Element $j$ repräsentierter Teil eines Gebietsrandes
$\Gamma_R, \Gamma_{R1}, \Gamma_{R2}$	Rissufer als Gebietsrand / Rissufer als Rand des 1. / 2. Teilgebietes
$\Gamma_{T1}, \Gamma_{T2}$	Gemeinsamer Rand des 1. / 2. Teilgebietes
$\kappa$	Materialkonstante (abhängig von ESZ oder EVZ)
$\lambda$	LAMÉ-Konstante
$\lambda$	Winkel zwischen Gleitrichtung und Zugachse
$\mu$	LAMÉ-Konstante entspricht dem Schubmodul
$\mu_{eff}$	effektiver SCHMID-Faktor
$\nu$	Querkontraktionszahl
$\Pi$	potentielle Energie
$\Delta\Pi, d\Pi$	freigesetzte Energie, infinitesimale freigesetzte Energie
$\theta$	Eckinnenwinkel an einem nicht glatten Gebietsrand
$\theta$	Winkel zwischen Gleitebenennormale und Zugachse
$\theta$	Winkel zwischen Abszisse und einem Punkt in einer unendlichen Scheibe
$\sigma$	Zugspannung
$\sigma$	Spannungstensor
$\Delta\sigma$	Spannungsdifferenz zwischen Ober- und Unterspannung
$\sigma^\infty$	äußere Normalspannung
$\Delta\sigma^\infty$	Schwingbreite der äußeren Normalspannung
$\sigma_0$	äußere Normalspannung
$\sigma_{11}, \sigma_{22}$	Von einem Verschiebungssprung verursachte Normalspannungen

$\sigma^D$	Dauerfestigkeit
$\sigma_{max}, \sigma_{min}$	Ober-, Unterspannung bei zyklischer Beanspruchung
$\sigma_{kj}$	Einträge des Spannungstensors
$\sigma_{kj}^*$	Einträge des virtuellen Spannungstensors
$\sigma_{kj}^0, \sigma_{kj}^t$	initiale / totale Spannung
$\sigma_p$	Vektor der Einträge des Spannungstensors
$\sigma_{nn}, \sigma_{tt}$	Normalspannung normal / senkrecht zum Randelement
$\sigma_{rr}, \sigma_{\varphi\varphi}$	Normalspannung in $r$ -, $\varphi$ -Richtung
$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}$	Normalspannung in $x$ -, $y$ -Richtung
$\tau_{eff}$	auf eine Zwillingsgrenze wirkende effektive Schubspannung
$\tau(x)$	singulärer Schubspannungsverlauf auf einem Gleitsystem im Nachbarkorn
$\tau^\infty$	äußere Fließschubspannung
$\tau_{12}$	Von einem Verschiebungssprung verursachte Schubspannungen
$\tau^c$	kritische Schubspannung zur Aktivierung eines neuen Gleitbandes
$\tau^F$	Fließschubspannung
$\tau^{GS}$	Schubspannungen auf einem Gleitsystem
$\tau^Q$	auf eine Versetzungsquelle wirkende Schubspannung
$\tau_{xy}, \tau_{r\varphi}, \tau_{\xi\eta}$	Schubspannung im $x$ - $y$ - / $r$ - $\varphi$ - / $\xi$ - $\eta$ -Koordinatensystem
$\tau_{in}$	Schubspannung im Elementkoordinatensystem
$\Omega, \Omega_1, \Omega_2$	Gebiet / Teilgebiet 1 / 2
$\psi$	Winkel
$\xi$	(Element-) Koordinate
$\xi$	Gleitbandkoordinate
$\xi_c$	Elementkoordinate bei kleinstem Abstand zum Ort der Spannungsermittlung

## Abkürzungen

BEM	Randelementemethode ( <i>engl. boundary element method</i> )
CTOD	Rissspitzenöffnung ( <i>engl. crack tip opening displacement</i> )
CTSD	Rissspitzenabgleitung ( <i>engl. crack tip slide displacement</i> )
EBSB	Rückstreuelektronenbeugung ( <i>engl. electron backscatter diffraction</i> )
ESZ	ebener Spannungszustand
EVZ	ebener Verzerrungszustand
FEM	Finite-Elemente-Methode
GB	Gleitband
HCF	Ermüdung bei hohen Lastspielzahlen ( <i>engl. high cycle fatigue</i> )
kfz	kubisch flächenzentriert
krz	kubisch raumzentriert
LEBM	linear elastische Bruchmechanik
PGB	persistentes Gleitband
PZ	plastische Zone
REM	Rasterelektronenmikroskop
VHCF	Ermüdung bei sehr hohen Lastspielzahlen ( <i>engl. very high cycle fatigue</i> )



## Kurzfassung

Strukturen und Bauteile sind in zahlreichen praktischen Fällen zyklischen Beanspruchungen mit hohen Lastspielzahlen ausgesetzt, unter denen ihre Lebensdauer vom mikrostrukturellen Wachstum kurzer Ermüdungsrisse bestimmt wird. Eine wichtige Grundlage, um die Resistenz von Werkstoffen gegenüber der Rissausbreitung zu steigern, ist das Verständnis ihrer Mechanismen. Hierzu stellt die vorliegende Arbeit ein neues zweidimensionales Modell zur Beschreibung des Kurzrisswachstums in einem metastabilen austenitischen Edelstahl vor, das durch lokale Phasenumwandlung beeinflusst wird. Sie tritt an der Risspitze auf, wenn zwei sich kreuzende Gleitsysteme an ihr aktiv sind. Durch das größere Volumen des umgewandelten Werkstoffs ist der Riss gegenüber transformationsfreiem Wachstum für einen größeren Teil des Beanspruchungszyklus geschlossen. Dies verlängert die Lebensdauer von Bauteilen, da die zyklische Risspitzenabgleitung reduziert wird, die die Rissausbreitungsgeschwindigkeit bestimmt.

Basierend auf experimentellen Untersuchungen liegen dem Rissfortschritt und der ihm überlagerten Phasentransformation die folgenden wesentlichen Modellschritte zugrunde:

- Während eines Lastzyklus wird das Spannungsfeld an der Risspitze ausgewertet. Reicht es zur Aktivierung zweier Gleitsysteme aus, werden an der Spitze Gleitebenen mit entsprechender Orientierung und elastisch ideal-plastischem Verhalten angesetzt.
- Auf ihnen werden die Abgleitungen berechnet und daraus der Rissfortschritt sowie die Zunahme der Phasentransformationszone an der Risspitze bestimmt.
- Die Rissverlängerung und die Vergrößerung der Umwandlungszone werden in das Modell einbezogen und anschließend ein neuer Beanspruchungszyklus durchlaufen.

Die numerische Lösung des Modells erfolgt durch eine Randelementemethode, bei der Elemente mit Absolut- und Relativverschiebungsansätzen gekoppelt werden. Erstere beranden die Martensitbereiche, was das Aufbringen der Volumenzunahme ermöglicht. Zweitere diskretisieren den Riss und die Gleitebenen.

Das Modell wird zur Simulation des mikrostrukturbestimmten Kurzrisswachstums angewendet, wobei neben der Phasentransformation auch die Barrierewirkung von Korngrenzen und individuelle isotrope Steifigkeiten der Gefügekörner einbezogen werden. Hieraus resultierende Effekte des Kurzrisswachstums werden herausgestellt und Parameterstudien durchgeführt. Neben anderen Ergebnissen wird die Verringerung der zyklischen Risspitzenabgleitung durch die Phasentransformation nachvollzogen. Die exemplarische Simulation des Wachstums eines realen Risses zeigt gute Übereinstimmung mit dem zugehörigen Experiment.

## Abstract

In various practical situations, structures and components are exposed to high-cycle fatigue loading. In such conditions, their lifetime is determined by the growth of microstructurally short fatigue cracks. In order to increase the resistance of materials against short crack propagation, understanding its mechanisms is an important basis. Hence, this thesis presents a new two-dimensional model representing short crack growth in a metastable austenitic steel. It is influenced by phase transformation, provided two intersecting slip systems are activated at the crack tip. Due to the increased volume of the transformed material, the crack is closed for a longer part of the load cycle compared to transformation-free crack growth. This reduces the cyclic crack tip slide displacement determining the crack propagation rate and results in an increased lifetime of components.

Based on experimental investigations, crack propagation and phase transformation – both occurring at the same time – are modelled performing the following main steps:

- The stress field in the vicinity of the crack tip is evaluated during one load cycle. If it activates two slip systems, slip planes with the determined orientations are introduced at the crack tip. They represent elastic ideal-plastic material behaviour.
- Crack propagation and the increase of transformed material at the crack tip are determined resulting from slip which has been computed along the slip planes.
- Crack extension and the increased transformed regions are included into the model and subsequently, a new load cycle is simulated.

In order to solve the model numerically, a boundary element method is used, which couples two types of boundary elements: Those with absolute displacements enclose the martensite regions which allows to assign volume increase to these areas. Elements with relative displacements discretise the crack and the slip planes.

The model is applied to simulate the growth of microstructurally short cracks. Besides of phase transformation, barrier effects of grain boundaries and individual isotropic stiffnesses of the grains of a microstructure are considered. Effects of short crack propagation resulting from these features are highlighted and parameter studies are performed. Besides of other results, reduction of cyclic crack tip slide displacement due to phase transformation is reproduced. Exemplarily, the propagation of a real crack is simulated yielding a good agreement with the experiment.

# 1 Einleitung

## 1.1 Problemstellung und Motivation

Bauteile und Strukturen unterliegen in vielen Anwendungen zyklischen Beanspruchungen, die zur Ermüdung der eingesetzten Werkstoffe führen können. Hierbei kommt es zu Veränderungen der Werkstoffeigenschaften, wobei vor allem die Verringerung der mechanischen Belastbarkeit von technischer Bedeutung ist. Von den verschiedenen Arten der Ermüdung, zu denen beispielsweise auch die thermomechanische Ermüdung, Kriech- und Korrosionsermüdung zählen, wird in dieser Arbeit nur die rein mechanische Ermüdung betrachtet. Sie erfolgt bei metallischen Werkstoffen bereits bei Beanspruchungsamplituden, die weit unterhalb der Festigkeit für einsinnige Belastung liegen. Dabei kommt es zunächst zur Bewegung von Versetzungen, in deren Folge Risse innerhalb einzelner Gefügekörner oder auf deren Grenzen initiieren können.

Klassische Auslegungsmethoden für Bauteile sehen meist so geringe Beanspruchungsamplituden vor, dass die gebildeten Risse nicht wachstumsfähig sind. Hierbei wird von einer dauerfesten Auslegung gesprochen, die jedoch mit einer geringen Materialausnutzung und hohen Strukturgewichten einhergeht. Diese Philosophie ist mit den heutigen Anforderungen an den Leichtbau und die Umweltverträglichkeit oft nicht mehr vereinbar. Es werden daher zeitfeste Auslegungskonzepte eingesetzt, bei denen ein Bauteil auf Basis der im Betrieb zu erwartenden Lastspielzahl dimensioniert wird. Die zyklische Beanspruchung wird gesteigert, so dass es zu einem Wachstum der initiierten Risse kommt. Dieses wird zunächst stark von der Mikrostruktur des Werkstoffs bestimmt (Miller 1993) und als Stadium I-Risswachstum bezeichnet. Mit zunehmender Risslänge verliert sich dieser Einfluss bis sich die mikrostrukturunabhängige Stadium II-Rissausbreitung einstellt. Erreicht der dominante Riss eine kritische Länge, kommt es zum Bruch und damit zum schlagartigen Versagen des betroffenen Bauteils.

Eine endliche Lebensdauer von Bauteilen wird somit bereits in der Konstruktion bewusst in Kauf genommen. Ein Bauteilversagen muss jedoch unbedingt vermieden werden, da es das Versagen der gesamten Struktur verursachen kann, was häufig mit großen Sachschäden und der Gefahr für Menschenleben verbunden ist. Zum sicheren Betrieb einer Struktur oder technischen Anlage ist es daher notwendig, die (Rest-)Lebensdauer von Bauteilen vorhersagen zu können. Dies erfordert, die Ermüdungsvorgänge einer mathematischen Beschreibung zu unterziehen, wozu neben der Kenntnis des Beanspruchungsverlaufs vor allem ein vertieftes Verständnis der Ermüdungsmechanismen des eingesetzten Werkstoffs notwendig ist.

Das mikrostrukturunabhängige Ausbreitungsverhalten langer Risse lässt sich in vielen Fällen im Rahmen der linear-elastischen Bruchmechanik (LEBM) durch die Schwingbreite des Spannungsintensitätsfaktors  $\Delta K$  quantifizieren (Paris et al. 1963). Da der Werkstoff hier als Kontinuum betrachtet wird, lässt sich dieses Konzept jedoch nicht auf kurze Risse anwenden, deren Wachstumsverhalten maßgeblich von mikrostrukturellen Barrieren, wie z.B. Korn- und Phasengrenzen, bestimmt wird (Morris 1980). Zudem ist die Wachstumsgeschwindigkeit kurzer Risse größer als sie von der LEBM vorhergesagt würde (Pearson 1975). Die in vielen Anwendungen auftretende zyklische Beanspruchung ungekerbter Bauteile im Bereich hoher Lastspielzahlen (*engl. high cycle fatigue* – HCF) kann jedoch dazu führen, dass deren Lebensdauer beinahe vollständig von der Phase der Initiierung und Ausbreitung kurzer Ermüdungsrissse eingenommen wird (Tokaji et al. 2003).

Das in dieser Arbeit im Vordergrund stehende transkristalline Stadium I-Risswachstum erfolgt auf kristallographisch vorgegebenen Gleitebenen. Mit Annäherung der Riss Spitze an eine mikrostrukturelle Barriere, wie eine Korn- oder Phasengrenze, verringert sich die Rissausbreitungsgeschwindigkeit und nimmt sprunghaft zu, wenn die Barriere überwunden wird. Navarro und de los Rios (1988) beschreiben dieses oszillierende Ausbreitungsverhalten durch ein eindimensionales, analytisches Modell, das die plastische Zone vor der Riss Spitze als Fließstreifen berücksichtigt. Korngrenzen beschränken die Ausdehnung des plastischen Bereiches und werden erst überwunden, wenn eine kritische Schubspannung auf einer Versetzungsquelle im Nachbarkorn überschritten wird, die zur Aktivierung einer zusätzlichen Gleitebene führt.

Schick (2004) und Floer (2003) greifen diesen Ansatz in einem Gemeinschaftsprojekt des Instituts für Werkstofftechnik und des Instituts für Mechanik und Regelungstechnik - Mechanik an der Universität Siegen auf. Ziel des Projektes ist die mechanismenbasierte Simulation der Kurzrissausbreitung in einer  $\beta$ -Titanlegierung. Dabei wird das eindimensionale Modell erweitert, um zweidimensionale Riss- und Korngeometrien sowie die reale Orientierung der Gefügekörner einzubeziehen. Die Differentialgleichungen, die das Kurzrissproblem beschreiben, lassen sich nun nicht mehr analytisch lösen, so dass hierfür eine Randelementemethode zur Diskretisierung eingesetzt wird. Düber (2007) und Künkler (2007) führen das Gemeinschaftsprojekt fort und erweitern das Modell zur Anwendung auf einen zweiphasigen Duplexstahl. Basierend auf diesen bereits abgeschlossenen Forschungsprojekten soll in der vorliegenden Arbeit die Kurzrissausbreitung unter dem Einfluss martensitischer Phasenumwandlung in einem metastabilen austenitischen Edelstahl simuliert werden. Sie beinhaltet den Teil

der Modellentwicklung des interdisziplinären DFG-Forschungsprojektes „Rasterelektronenmikroskopische in-situ Beobachtung und mechanismenorientierte Modellierung der Ermüdungsrisssinitiierung und -ausbreitung in rostfreien Edelstählen“.

Bei metastabilen austenitischen Edelstählen verursachen plastische Dehnungen eine Transformation von der kubisch flächenzentrierten austenitischen in die kubisch raumzentrierte martensitische Phase, wobei letztere ein größeres Volumen einnimmt (Padilha und Rios 2002). Da an einer Rissspitze hohe plastische Dehnungen auftreten, findet bevorzugt in ihrer Umgebung eine Phasenumwandlung statt. Hier beeinflusst die neu gebildete Phase die Rissausbreitung stark: Martensit ist spröder als Austenit, wodurch das Risswachstum begünstigt wird. Die Volumendehnung führt dagegen zu Druckspannungen an der Rissspitze, so dass transformationsinduziertes Riss schließen eine Verringerung der Triebkraft für die Rissausbreitung bewirkt (z.B. Huo und Gao 2005). In der Fachliteratur finden sich nur wenige Informationen über die tatsächlichen mikrostrukturellen Abläufe bei der Kurzrissausbreitung in metastabilen austenitischen Edelstählen. Die wesentlichen Mechanismen der Phasenumwandlung und des frühen Risswachstums konnten jedoch in einer parallel durchgeführten Arbeit (Roth 2012) im Rahmen des Forschungsvorhabens identifiziert werden.

Zur Beschreibung der Transformation von der austenitischen in die martensitische Phase existieren bereits Modelle, die den Volumengehalt der sich bildenden Martensitphase kontinuumsmechanisch in Abhängigkeit der plastischen Dehnung betrachten (Olson und Cohen 1975) oder zusätzlich mikrostrukturelle Einflüsse wie die Kornorientierung berücksichtigen (Han et al. 2004). In der Umgebung der Spitze langer Risse ermitteln Hallberg et al. (2012) die Form und Größe des Umwandlungsbereichs kontinuumsmechanisch aus energetischen Betrachtungen. Mei und Morris (1991) entwickeln ein Modell zur Untersuchung von Riss schließen bei langen Rissen, das von der Volumenzunahme eines den Riss umschießenden Martensitbereiches hervorgerufen wird. Eine Übertragung dieser Ansätze auf die Martensitbildung an der Spitze kurzer Ermüdungsrisse scheint jedoch nicht oder nur eingeschränkt möglich.

## **1.2 Ziele und Aufbau der Arbeit**

Ziel dieser Arbeit ist die Entwicklung eines zweidimensionalen Modells zur Kurzrissimulation, das die Mechanismen der Phasenumwandlung unter Berücksichtigung mikrostruktureller Vorgänge nachbildet und die Rückwirkung der neu entstandenen Phase auf das Risswachstum einbezieht. Zur Lösung der das Kurzrissproblem beschreibenden Differentialgleichungen wird

eine numerische Methode entwickelt, die das Aufbringen der Volumendehnung im Umwandlungsbereich ermöglicht. Dabei werden der Riss und die aktiven Gleitbänder durch Randelemente mit Relativverschiebungsansätzen vernetzt und Korn- bzw. Phasengrenzen durch Randelemente mit Absolutverschiebungsansätzen diskretisiert. Ein Superpositionsverfahren erlaubt die Verwendung dieser beiden unterschiedlichen Elementtypen in einem Modell. Innerhalb der von Elementen mit Absolutverschiebungen eingegrenzten Bereiche kann die Volumendehnung nachgebildet werden, die die Phasentransformation verursacht. Es können aber auch die einzelnen Gefügekörner umschlossen werden, um ihnen individuelle isotrope Steifigkeiten zuzuweisen. So lässt sich den Auswirkungen ihrer anisotropen Elastizität im Gefügeverbund näherungsweise Rechnung tragen.

Das Modell wird verwendet, um die Auswirkungen unterschiedlicher elastischer Eigenschaften der Gefügekörner und der lokal an der Rissspitze auftretenden Martensitbildung auf das Kurzrissswachstum systematisch zu untersuchen. Insbesondere wird hierbei der Einfluss der Größe des Umwandlungsbereiches, des Maßes der Volumenzunahme, der Steifigkeit der neu entstehenden Martensitphase und des Spannungsverhältnisses betrachtet.

In der vorliegenden Arbeit wird zunächst das Ermüdungsverhalten metallischer Werkstoffe beschrieben und dabei im Speziellen auf die Besonderheiten der metastabilen austenitischen Edelmärte eingegangen. Zusätzlich werden existierende Modelle vorgestellt, die die verschiedenen Ermüdungsstadien und die martensitische Phasentransformation beschreiben. Anschließend wird das Kurzrissswachstumsmodell von Düber (2007) und Künkler (2007) hinsichtlich der Einbeziehung der lokalen Phasentransformation an der Rissspitze erweitert sowie ein Verfahren zur numerischen Lösung des Kurzrisssproblems entwickelt und validiert. Es folgt die Untersuchung des Einflusses der individuellen elastischen Eigenschaften der Gefügekörner und der lokalen Phasenumwandlung auf das Wachstum kurzer Ermüdungsrisse anhand von prinzipiellen Studien mit Hilfe des neu entwickelten Modells. Danach wird das Modell exemplarisch auf einen realen Riss und das numerische Lösungsverfahren auf weiterführende Rissprobleme angewendet bevor abschließend die wichtigsten Ergebnisse zusammengefasst und diskutiert werden.

## 2 Grundlagen

### 2.1 Ermüdung metallischer Werkstoffe

Zyklische Beanspruchungen verursachen Veränderungen in metallischen Werkstoffen, die deren mechanische Belastbarkeit bis hin zum Versagen vermindern können. Diese mit der Zeit bzw. Zyklenzahl fortschreitende Veränderung wird als Materialermüdung bezeichnet und kann nach Suresh (2001) unter dem Einfluss von Kriechen, Korrosion, Kontakt- und Reibvorgängen oder thermomechanischer Beanspruchung stattfinden. In dieser Arbeit wird jedoch nur die durch reine zyklische Beanspruchung verursachte mechanische Ermüdung untersucht. Radaj und Vormwald (2007) nehmen eine erste Einteilung der hierbei auftretenden Vorgänge in die Phasen Risseinleitung und Rissfortschritt vor, wobei letztere mit dem schlagartigen Versagen des ermüdeten Werkstoffs endet. Oftmals liegen in Bauteilen – beispielsweise infolge der Fertigung – bereits Risse vor, so dass die Risseinleitung vor Beginn der Nutzung abgeschlossen ist. Im Folgenden werden jedoch glatte, ungekerbte Bauteile betrachtet, die in technischen Anwendungen ebenfalls häufig vorzufinden sind.

#### 2.1.1 Rissentstehung

Manson (1953) und Coffin (1954) finden die Ursache für die Ermüdung metallischer Werkstoffe in der zyklischen plastischen Dehnung. Auch bei global rein elastischer Beanspruchung weit unterhalb der Fließgrenze treten plastische Effekte auf, die bei der Entstehung von Rissen eine wichtige Rolle spielen. Während die eigentliche Bildung von Rissen lokal stattfindet, betreffen die plastischen Prozesse zu Beginn der Ermüdung das gesamte Werkstoffvolumen. So teilt Mughrabi (1985) die Vorgänge bis zum Ermüdungsbruch in die Phase der zyklischen Verformung und die sich mit Lokalisierung der plastischen Aktivität daran anschließende Phase der Ermüdungsschädigung ein.

Die plastischen Vorgänge der zyklischen Verformung, die auch bei geringen Beanspruchungsamplituden auftreten, sind bei technischen Werkstoffen durch den vielkristallinen Aufbau begründet. Die einzelnen Gefügekörner, die individuelle Orientierungen und richtungsabhängiges (anisotropes) elastisches Verhalten aufweisen, sind in ihrem Verbund zu kompatibler Verformung gezwungen. Dadurch entsteht ein inhomogenes Spannungsfeld, das lokal – aber an vielen Stellen im Werkstoff – hohe Spannungswerte annimmt. Zudem können nach Suresh (2001) Einschlüsse, mikro- und makroskopische Spannungskonzentrationen sowie Inhomogenitäten der Mikrostruktur oder in der Werkstoffzusammensetzung zu Spannungsüberhöhungen führen.

So kommt es bereits zu Beginn der Ermüdung zur Bewegung von Versetzungen, deren Bildung, Interaktion, Auslöschung und Umgruppierung je nach Werkstoff zunächst eine Ent- und/oder Verfestigung bewirken. Dabei stellt sich ein Sättigungszustand ein, in dem bei kubisch flächenzentrierten (kfz) Werkstoffen die charakteristische Versetzungsanordnung der persistenten Gleitbänder (PGB) vorzufinden ist. Kubisch raumzentrierte (krz) Werkstoffe weisen bei ausreichend hoher Temperatur und niedriger plastischer Verformungsgeschwindigkeit ein ähnliches Verhalten auf (Christ 1991). Auf die Vorgänge vor und während der Bildung der PGB soll hier nicht eingegangen, sondern z.B. auf Christ (1991) oder Suresh (2001) verwiesen werden. Wichtige Merkmale der persistenten Gleitbänder sind ihre Lage parallel zu kristallographisch vorgegebenen Gleitebenen – meist auf Ebenen mit höchster Schubbelastung – und ihre Fähigkeit, große plastische Verformungen aufzunehmen. Die PGB treten an der Oberfläche aus dem Werkstoffvolumen aus, so dass es zu Ex- und Intrusionen und damit zu einer Aufrauung der Oberfläche kommt. Infolgedessen ist ihre Bildung bei Vielkristallen in Oberflächenkörnern wahrscheinlicher als bei Körnern im Volumen. Bei den PGB handelt es sich um stabile Versetzungsanordnungen, da sie nach dem Abpolieren der Probenoberfläche an gleicher Stelle erneut entstehen (Thompson et al. 1956).

Da die persistenten Gleitbänder im Vergleich zum umgebenden Material sehr große plastische Verformung erfahren, kann es in ihnen zur Dehnungslokalisation kommen. Sie bildet den Übergang von der Phase der zyklischen Dehnung zur Ermüdungsschädigung, wobei die Rissbildung zu letzterer zählt. Die Aufrauung der Oberfläche infolge der hohen Gleitaktivität der PGB führt zu Mikrokerben, an denen aufgrund der dort konzentrierten Spannung transkristalline Risskeime initiieren können (Mughrabi 2009, Tanaka und Mura 1981).

Als Orte für die Entstehung von Rissen kommen neben dem Korninneren auch Korngrenzen in Frage. Stoßen persistente Gleitbänder auf eine solche Grenze, kann ein Versetzungsaufstau das Aufreißen der Korngrenze bewirken (Tanaka und Mura 1981, Figueroa und Laird 1983), was durch stark unterschiedliche Orientierungen der beiden benachbarten Körner unterstützt wird. Einen Spezialfall von Korngrenzen stellt die sog. Zwillingsgrenze dar, bei dem die aneinandergrenzenden Körner einen durch den Kristallaufbau festgelegten, großen Orientierungsunterschied aufweisen und die Grenze eine Gleitebene bildet. Durch die anisotrope Elastizität der Körner entstehen Schubspannungen auf dieser Ebene und überlagern sich der Schubspannung, die aus der äußeren Beanspruchung resultiert. Je nach Orientierung der Zwillingsgrenze können die darauf wirkenden Schubspannungen so groß werden, dass es zur Bildung eines persistenten Gleitbandes kommt (Heinz und Neumann 1990), das als Rissinitiationort dient.

Bei den zuvor beschriebenen Rissinitiierungsarten entstehen Risse innerhalb eines Kornes oder auf der Grenze zwischen Körnern mit nur wenigen  $\mu\text{m}$  Länge, womit die physikalische Risseinleitung jedoch abgeschlossen ist. Aus technischer Sichtweise liegt dagegen meist erst dann ein Anriss vor, wenn er mit zerstörungsfreien Prüfmethode detektiert werden kann und damit eine Länge von etwa 1mm aufweist. Bis zum Erreichen dieser Risslänge entfallen bei Ermüdung im Bereich hoher Lastspielzahlen 90% der Beanspruchungsdauer auf das Wachstum kurzer Risse (Heitmann et al. 1984). Daher wird hier die physikalische Sichtweise angenommen.

Ist ein Riss entstanden, ist der Lauf der Ermüdung mit Rissausbreitung und Bruch noch nicht vorgezeichnet. Mikrostrukturelle Barrieren, wie z.B. Korn- und Phasengrenzen, können eine Rissausbreitung über die Grenze hinweg verhindern, so dass die Risse nicht wachstumsfähig sind und der Werkstoff dauerhaft ist (Miller 1993). Reicht die äußere Beanspruchung jedoch aus, um ein Risswachstum hervorzurufen, schließt sich an die Phase der Rissentstehung die Rissausbreitung an.

### 2.1.2 Rissausbreitung

Bei den nach der Initiierung vorliegenden Rissen handelt es sich um Mikrorisse bzw. kurze Risse, zu denen nach Suresh und Ritchie (1984) die folgenden Untergruppen gehören:

- Risse mit einer Länge in der Größenordnung mikrostruktureller Abmessungen, wie z.B. der Korngröße, werden als mikrostrukturell kurze Risse bezeichnet. Ihr Ausbreitungsverhalten ist stark durch die Mikrostruktur beeinflusst.
- Mechanisch kurze Risse, deren Wachstum mikrostrukturunabhängig erfolgt, weisen in der Umgebung der Risspitze eine im Verhältnis zur Risslänge nicht vernachlässigbare plastische Zone auf.
- Bei Rissen, die keine große plastische Zone besitzen, deutlich länger als die mikrostrukturellen Abmessungen sind und kein ausgeprägtes Riss schließen aufweisen aber mit weniger als typischerweise etwa 0,5 bis 1mm Länge als kurz bezeichnet werden, handelt es sich um physikalisch kurze Risse.

Die in dieser Arbeit hauptsächlich betrachteten Risse weisen stark mikrostrukturabhängiges Verhalten auf und sind somit den mikrostrukturell kurzen Rissen zuzuordnen. Ihr Wachstum wird durch im Gefüge vorliegende Barrieren, wie z.B. Korn- und Phasengrenzen, behindert. Mit Annäherung der Risspitze an eine solche Grenze sinkt die Ausbreitungsgeschwindigkeit

und steigt nach dem Überschreiten des Hindernisses sprunghaft an, was eine oszillierende Wachstumsrate bewirkt, die für kurze Ermüdungsrissen typisch ist.

Mit zunehmender Risslänge verringert sich der Einfluss der Mikrostruktur auf das Ausbreitungsverhalten bis er sich schließlich ganz verliert. Sind zudem plastische Bereiche in der Umgebung der Rissspitze vernachlässigbar klein, wird von langen Rissen gesprochen, deren Wachstum kontinuumsmechanisch beschreibbar ist. Paris et al. (1961) entwickeln einen empirischen Zusammenhang zwischen der Risswachstumsrate und der Schwingbreite des Spannungsintensitätsfaktors  $\Delta K$ , bei dem es sich um eine Kenngröße der linear-elastischen Bruchmechanik (LEBM) zur Charakterisierung des elastischen Spannungsfeldes an der Rissspitze handelt (siehe Abschnitt 2.5.2). Dieses Spannungsfeld weist eine Singularität an der Rissspitze auf und resultiert aus der Rissöffnung, die in der LEBM als Überlagerung der drei in Bild 2.1 dargestellten Grundöffnungsmoden angesehen wird, die auch bei kurzen Rissen gelten: Modus I beschreibt eine reine Rissöffnung senkrecht zur Rissebene, während eine Abgleitung parallel zur Rissebene als Modus II bezeichnet wird, wenn sie senkrecht zur Rissfront erfolgt und als Modus III bei Abgleitung parallel zur Rissfront.

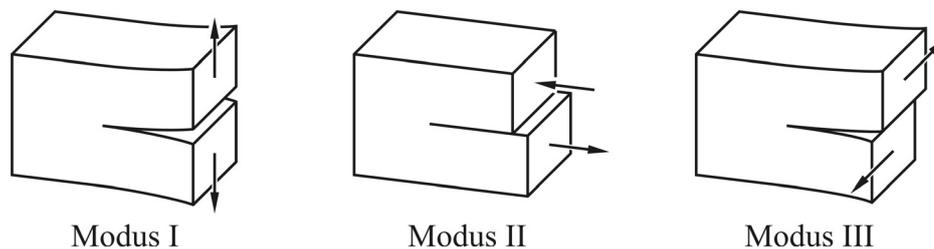


Bild 2.1: Bruchmechanische Grundtypen der Rissöffnung.

Im Vergleich zwischen langen und mikrostrukturell kurzen Rissen ist nicht nur ein substantieller Unterschied in den Ausbreitungsmechanismen festzustellen (mikrostrukturunabhängig bzw. -abhängig), sondern auch, dass kurze Risse unterhalb des Schwellenwertes der Schwingbreite des Spannungsintensitätsfaktors  $\Delta K_{th}$  für lange Risse wachsen (vgl. Bild 2.2). Zudem kann ihre Ausbreitungsrate  $da/dN$  bei gleicher Beanspruchungsamplitude erheblich über der von langen Rissen liegen (z.B. Rao et al. 1988). Während die Wachstumsgeschwindigkeit langer Risse von der Risslänge bestimmt wird, ist bei den kurzen Rissen der Abstand der Rissspitze zu mikrostrukturellen Barrieren und damit die Länge der plastischen Zone entscheidend (Morris 1980). Aus diesem Grund muss gefolgert werden, dass kontinuumsmechanische Ansätze zur Quantifizierung des mikrostrukturbestimmten Kurzrissswachstums nicht geeignet sind.

Es ist daher notwendig, die mikrostrukturellen Abläufe bei der Beschreibung der Kurzrisssausbreitung einzubeziehen. Zu diesem Zweck wird das Risswachstum nachfolgend anhand der dabei wirkenden Mechanismen eingeteilt, wobei nach Forsyth (1962) zwischen den Stadien I und II unterschieden wird.

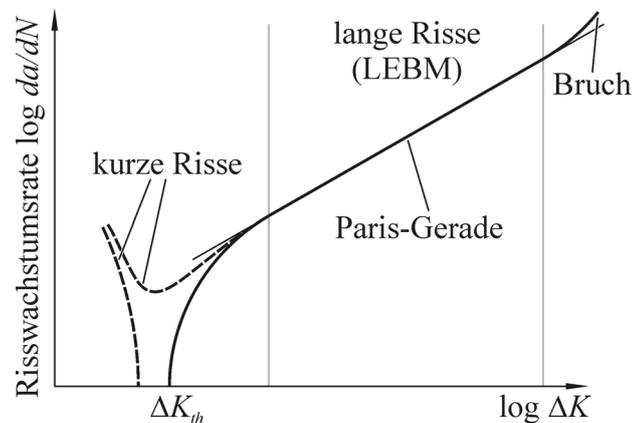


Bild 2.2: Ausbreitungsverhalten kurzer und langer Ermüdungsrisse sinngemäß nach Rao et al. (1988).

### Rissausbreitung im Stadium I

Die auf kristallographischen Gleitebenen ablaufenden plastischen Vorgänge, die die Rissinitiierung bewirken, zeichnen auch für die nachfolgende Rissausbreitung verantwortlich (Forsyth 1962). Daher erfolgt das Wachstum des Risses auf dem gleichen Gleitband, auf dem er entstanden ist, so dass die hohen Schubspannungen, die zur Initiierung des Risses erforderlich gewesen sind, nun auch die Rissausbreitung antreiben. Da die aus der äußeren Beanspruchung resultierenden Schubspannungen unter einem Winkel von  $45^\circ$  zur Zugachse maximal sind, liegen auch die Gleitbänder, auf denen sich das Stadium I-Risswachstum an die Rissentstellung anschließt, unter etwa diesem Winkel vor. Infolgedessen erfährt ein Stadium I-Riss eine aus den Moden I und II kombinierte Beanspruchung. Hieraus resultieren Schubspannungsverläufe auf rissparallelen Gleitebenen, die bezüglich der Rissebene nicht symmetrisch sind. Daraus leiten Wilkinson et al. (1998) einen Risswachstumsmechanismus bei über die Zeit  $t$  veränderlicher äußerer Beanspruchung  $\sigma^\infty$  ab: Unter Zugbeanspruchung werden Versetzungsquellen auf Gleitebenen unterhalb der Rissebene aktiviert (Bild 2.3b), wogegen bei Lastumkehr die Aktivierung von Versetzungsquellen auf Gleitebenen oberhalb der Rissebene bevorzugt wird (Bild 2.3c). Auf diese Weise kommt es zur irreversiblen Bewegung von Versetzungen, bei der die Risspitze interstitielle Versetzungsdipole auf den Gleitebenen aussendet, während sie durch die Aufnahme von Versetzungsdipolen des Leerstellentyps voranschreitet (Bild 2.3d). Zwar bewirkt die Modus I-Rissöffnung das asymmetrische Schubspannungsfeld,

das zur wechselweisen Aktivierung der Versetzungsquellen erforderlich ist, zum Risswachstum selbst leistet sie jedoch keinen Beitrag.

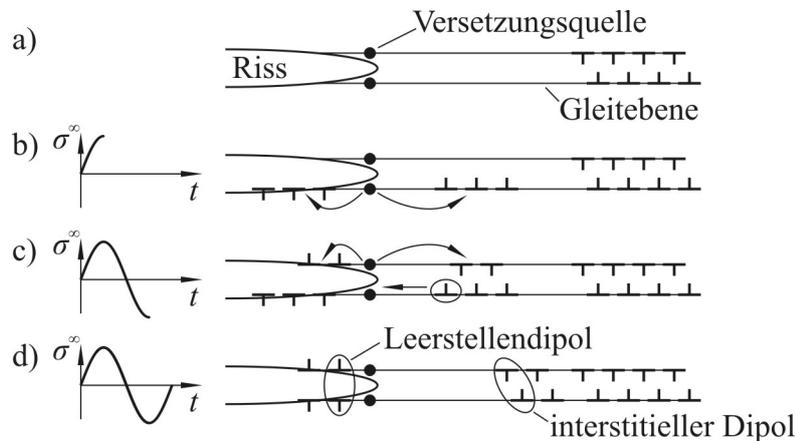


Bild 2.3: Schematische Darstellung des Risswachstumsmechanismus im Stadium I resultierend aus irreversiblen Versetzungsbewegungen nach Wilkinson et al. (1998).

In einem Vielkristall enden die Gleitebenen vor der Risspitze an Korngrenzen, die die Versetzungen zunächst nicht durchdringen können. Bei Annäherung der Risspitze an eine solche Grenze kommt es vor ihr zu einem Versetzungsaufstau, der den oben beschriebenen Mechanismus erschwert. Dabei ist die Behinderung umso größer, je geringer der Abstand zwischen Risspitze und Korngrenze ist, der die zur Verfügung stehende Länge des Gleitbandes vorgibt. Somit resultiert aus der Verringerung der Gleitbandlänge eine Abnahme der Risswachstumsgeschwindigkeit (Lankford 1982).

Der Versetzungsaufstau vor der Korngrenze erzeugt ein Spannungsfeld im Nachbarkorn, das auf günstig orientierten Gleitebenen zu erhöhten Schubspannungen führt. Diese können die Aktivierung einer Versetzungsquelle verursachen, wodurch sich ein neues Gleitband bildet. Die plastische Zone erstreckt sich nun über dieses zusätzliche Gleitband und die Versetzungen können die Korngrenze passieren, so dass die Risswachstumsgeschwindigkeit sprunghaft ansteigt. Das neu aktivierte Gleitband weist in der Regel eine andere Orientierung als das ursprüngliche auf, wodurch der Riss an der Korngrenze abknickt und ein gezackter Risspfad entsteht. Daher ist ein erheblicher Einfluss geometrischen Risschließens auf das Risswachstumsverhalten möglich.

Der Riss kann im Stadium I auf nur einem aktivierten Gleitband vor der Risspitze über mehrere Körner hinweg wachsen (Tokaji und Ogawa 1992). Dies ist besonders bei der Ermüdung im Bereich hoher Lastspielzahlen der Fall (*engl. high cycle fatigue – HCF*), da die hierbei vorherrschende niedrige äußere Beanspruchung zunächst nicht zur Aktivierung eines weiteren Gleitbandes an der Risspitze ausreicht (Düber 2007). Führt der Spannungszustand vor der

Risspitze dagegen zur Ausbildung eines zweiten Gleitbandes, beginnt die Rissausbreitung im Stadium II (Forsyth 1962).

### Rissausbreitung im Stadium II

Mit zunehmender Risslänge oder bei ausreichend hoher Beanspruchungsamplitude steigt die Spannungsintensität an der Risspitze an, so dass dort ein zusätzliches Gleitband aktiviert wird. Der Riss breitet sich nun nicht mehr nur auf einem diskreten Gleitband aus, sondern nutzt die alternierende Abgleitung auf zwei Bändern zum Wachstum. Von der durch die Lage der Gleitebene vorgegebenen Ausbreitungsrichtung im Stadium I schwenkt der Riss allmählich auf eine Richtung senkrecht zur maximalen Normalspannung um und wächst somit zunehmend unter Modus I-Beanspruchung. Entsteht ein Riss an einer Korngrenze oder einem Einschluss, kann das Risswachstum im Stadium II sofort nach der Initiierung eintreten.

Den Mechanismus der Rissausbreitung auf alternierenden Gleitbändern beschreibt Neumann (1969): Zu Beginn des Zugzyklus wird zunächst eine Gleitebene aktiviert, auf der Abgleitung erfolgt (Bild 2.4a) bis das Gleitband so weit verfestigt, dass es auf einem zweiten Gleitsystem zur Gleitung kommt (Bild 2.4b). Da auch dieses verfestigt, werden bis zum Abschluss des Zugzyklus beide Gleitbänder alternierend betätigt. Im Druckzyklus erfolgt die Abgleitung in umgekehrter Richtung, wobei es aber aufgrund der Irreversibilität der Gleitvorgänge nicht zu einem Wiederverschweißen der im Zugzyklus geschaffenen Oberfläche (Bild 2.4c) kommt. Das Risswachstum findet auf den diskreten Gleitbändern statt, so dass hierbei keine Abstumpfung der Risspitze erfolgt. Das Modell bezieht sich zudem auf einen Einkristall und berücksichtigt daher keine mikrostrukturellen Barrieren, wie Korn- oder Phasengrenzen.

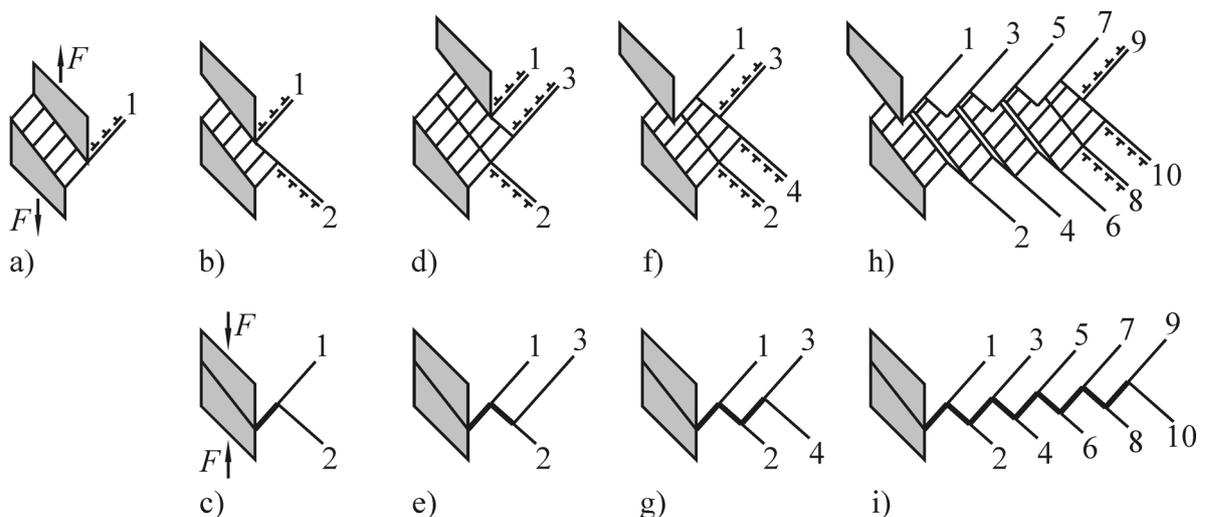


Bild 2.4: Modell des Risswachstums im Stadium II infolge alternierender Betätigung zweier Gleitsysteme nach Neumann (1969).

Der von Neumann (1969) beschriebene Wachstumsmechanismus ist durch die Abgleitung auf aktivierten Gleitbändern weiterhin mikrostrukturbestimmt. Da in einem Vielkristall die Länge der Gleitebenen durch die Korngrenzen vorgegeben ist, wird das Risswachstum wie im Stadium I durch diese Grenzen beeinflusst. Zudem beobachten Blochwitz und Richter (1999), dass sich an eine Rissausbreitung mit zwei aktiven Gleitbändern an der Rissspitze ein Wachstum auf einem diskreten Gleitband anschließen kann. Dies wird auch von Düber et al. (2006) in einem zweiphasigen Stahl festgestellt, wenn die Rissspitze von einem austenitischen in ein ferritisches Korn übertritt. Da die Beeinflussungen der Rissausbreitung durch den vielkristallinen Werkstoffaufbau für das Stadium I charakteristisch sind, schlagen Düber et al. (2006) vor, die mikrostrukturbestimmte Phase des Stadium II-Risswachstums in Stadium Ib zu benennen, während das ursprüngliche Stadium I als Stadium Ia bezeichnet wird.

Nimmt die Risslänge noch weiter zu, können auch Gleitbänder aktiviert werden, die nicht direkt an der Rissspitze liegen oder sich sogar in weiter entfernten Körnern befinden. Es kommt zu Abgleitungen auf zahlreichen Gleitbändern und damit zur Ausbildung einer schmetterlingsförmigen plastischen Zone vor der Rissspitze. Die Rissausbreitung folgt einer Richtung senkrecht zur maximalen Normalspannung und kann mit Hilfe der elastisch-plastischen Bruchmechanik kontinuumsmechanisch berechnet werden, da ein Einfluss der Mikrostruktur auf das Risswachstum nun nicht mehr feststellbar ist. Bei vielen Metallen kommt es zur Bildung von Schwingstreifen (Zappfe und Worden 1951), die infolge der irreversiblen plastischen Verformung an der Rissspitze entstehen. Ihr Bildungsmechanismus wird von Laird und Smith (1962) beschrieben, bei dem es wechselweise zu einer plastischen Abstumpfung und zur Wiederanspitzung der Rissspitze kommt. Sie korrelieren zudem den Abstand der Schwingstreifen mit dem Rissfortschritt je Beanspruchungszyklus.

Hat ein Riss in den beschriebenen Ausbreitungsphasen und -mechanismen durch stabiles Wachstum eine kritische Länge erreicht, kommt es zu einer schlagartigen, instabilen Rissausbreitung, bei dem die Rissspitze mit Schallgeschwindigkeit voranschreitet. Damit schließt die Lebensdauer des Bauteils mit dem Bruch ab – der Werkstoff versagt.

Die in diesem Abschnitt vorgestellten und für metallische Werkstoffe gültigen Ermüdungsmechanismen bilden die Basis für das Verständnis des Verhaltens von metastabilen austenitischen Edelstählen unter Ermüdungsbeanspruchung. Bei dieser Werkstoffgruppe kann es jedoch in Bereichen hoher plastischer Dehnungen zu einer Phasenumwandlung kommen. Da hohe plastische Dehnungen an einer Rissspitze auftreten, kommt es insbesondere dort zur Umwandlung und das Risswachstum wird durch die neu gebildete Phase beeinflusst. Das Er-

müdungsverhalten eines metastabilen austenitischen Edelstahl wird nachfolgend beschrieben, wobei auf die Wirkung der Umwandlungsbereiche besonders eingegangen wird.

## 2.2 Ermüdungsverhalten von metastabilen austenitischen Edelstählen

Im Rahmen des Gemeinschaftsprojektes wurde das durch lokale Phasenumwandlung beeinflusste Ermüdungsverhalten von metastabilen austenitischen Edelstählen am Institut für Werkstofftechnik der Universität Siegen untersucht (Roth 2012), wobei neue Erkenntnisse gewonnen werden konnten, die als Basis für die in dieser Arbeit vorgestellte Modellierung der Kurzrissausbreitung dienen. Der Versuchswerkstoff wird im folgenden Abschnitt vorgestellt, bevor anschließend auf die Phasentransformation und sein Ermüdungsverhalten eingegangen wird.

### 2.2.1 Charakterisierung des Versuchswerkstoffes

Die von Roth (2012) durchgeführten Untersuchungen des Ermüdungsverhaltens finden an einem metastabilen austenitischen Edelstahl (Werkstoffnummer 1.4307, X2CrNi18-9) statt, dessen Anwendungsbereiche beispielsweise in der Automobil- und Lebensmittelindustrie sowie der chemischen Industrie liegen. Neben Eisen enthält er die Hauptbestandteile Nickel (8,42% Massenanteil in der untersuchten Charge) und Chrom (18,28%).

Reines Eisen liegt im festen Zustand in sog. Allotropen vor, d.h. es nimmt je nach Temperatur verschiedene Gitterstrukturen an. Unterhalb von 911°C weist es die kubisch raumzentrierte (krz) Phase auf, die als  $\alpha$ -Eisen oder Ferrit bezeichnet wird. Oberhalb dieser Temperatur aber unterhalb von 1392°C liegt Eisen in der kubisch flächenzentrierten (kfz) Phase vor ( $\gamma$ -Eisen, Austenit), darüber bis zum Schmelzpunkt erneut in der kubisch raumzentrierten Phase, dem  $\delta$ -Ferrit (Marshall 1984).

Durch Zumischen von Legierungselementen lassen sich die Temperaturgrenzen der Allotrope des Eisens verschieben, wobei Chrom und Nickel die größte Bedeutung zukommt (Heimann et al. 1985). Beide Elemente tragen zur Korrosionsbeständigkeit bei, bezüglich der Phasenbildung verhalten sie sich jedoch gegensätzlich. Während Chrom die Bildung des kubisch raumzentrierten Ferrits begünstigt, unterstützt Nickel die Bildung von kubisch flächenzentriertem Austenit. Durch entsprechende Legierungszusammensetzung können Stähle auch bei Raumtemperatur und weit darunter der austenitischen Phase zugehören, wie es beim Versuchswerkstoff der Fall ist. Auch andere Elemente tragen zur Begünstigung der kfz oder krz Phase bei, worauf in dieser Arbeit jedoch nicht eingegangen werden soll. Die Legierungselemente und ihre Massenanteile im untersuchten Werkstoff können der Arbeit von Roth (2012) entnom-

men werden. Hier und z.B. von Heimann et al. (1985) wird die Wirkung der Elemente umfassend beschrieben.

Der untersuchte metastabile austenitische Edelstahl wird einer Lösungsglühung unterzogen, was die vom Herstellverfahren (Rundwalzen) hervorgerufenen Eigenspannungen minimiert. Plastische Verformungen im Werkstoff werden abgebaut und es entstehen Austenitkörner, deren mittlere Korngröße ohne Berücksichtigung von Zwillingsgrenzen  $74\mu\text{m}$  beträgt. Roth (2012) ermittelt für den Versuchswerkstoff die in Tabelle 2.1 angegebenen mechanischen Kennwerte:

*Tabelle 2.1: Mechanische Kennwerte des metastabilen austenitischen Edelstahls 1.4307 nach der Lösungsglühung (vgl. Roth (2012)).*

Elastizitätsmodul $E$	177GPa
Streckgrenze $R_{p0,2}$	237MPa
Zugfestigkeit $R_m$	588MPa
Dauerfestigkeit $\sigma^D$	240MPa
Bruchdehnung $A_B$	56%

Aufgrund der Zusammensetzung des Werkstoffs ist seine austenitische Phase metastabil, so dass eine Transformation in eine energetisch günstigere Gitterstruktur möglich ist. Die hierfür notwendigen Bedingungen und ihre Auswirkungen auf die Ermüdung werden in den nachfolgenden Abschnitten beschrieben.

### 2.2.2 Phasentransformation bei metastabilen austenitischen Edelstählen

Bei metastabilen austenitischen Edelstählen kann eine diffusionslose und damit sehr schnell ablaufende Phasentransformation erzielt werden, indem entweder die Temperatur gesenkt oder Verformungsenergie eingebracht wird. Ausgehend von der kubisch flächenzentrierten austenitischen  $\gamma$ -Phase entsteht entweder hexagonal dichtest gepackter  $\varepsilon$ -Martensit oder kubisch raumzentrierter  $\alpha'$ -Martensit. Nach Nishiyama (1978) handelt es sich jedoch bei ersterem in einem 18-8-CrNi-Stahl um eine Übergangsphase von  $\gamma$  nach  $\alpha'$ . Die Umwandlung von der dichtest gepackten kfz Gitterstruktur in die lediglich dicht gepackte krz Struktur ist mit einer Volumenzunahme der transformierten Bereiche von 2,57% verbunden (Padilha und Rios 2002).

Um ein metastabiles System aus seiner Gleichgewichtslage in eine energetisch günstigere Lage zu überführen, ist zunächst ein Energieaufwand erforderlich. Dies illustrieren Krupp et al. (2008) durch Bild 2.5, in dem die freien Energien  $G$  der austenitischen Ausgangsphase und

des Martensits qualitativ über der Temperatur  $T$  dargestellt sind. Oberhalb der Temperatur  $T_0$  ist das Energieniveau des Austenits geringer als das des Martensits, so dass hier keine Phasenumwandlung stattfinden kann. Darunter kehren sich die Verhältnisse um, wodurch eine Energiedifferenz entsteht, die mit abnehmender Temperatur eine steigende Triebkraft zur Transformation darstellt. Unterhalb der Martensitstarttemperatur  $M_S$  ist die kritische freie Energie  $\Delta G$  überschritten, die eine spontane Phasentransformation bewirkt. Zwischen beiden Temperaturen verlässt das System seine metastabile Gleichgewichtslage nicht, da die Energiedifferenz der Phasen nicht ausreicht. Durch das Einbringen von mechanischer Beanspruchung – und somit von Verformungsenergie – kann jedoch auch hier eine Umwandlung erfolgen. Dies ist der Fall, wenn die Summe aus der thermischen Energiedifferenz  $\Delta G_{therm}$  und der Verformungsenergie  $\Delta G_{mech}$  den kritischen Wert  $\Delta G$  erreicht.

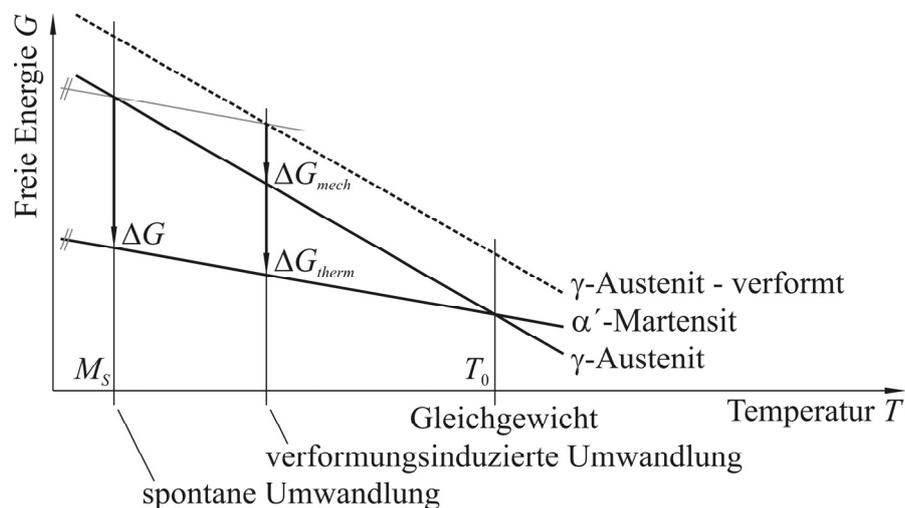


Bild 2.5: Freie Energien der Austenit- und Martensitphase mit der zur Transformation erforderlichen thermischen Energie und Verformungsenergie nach Krupp et al. (2008).

Die Phasentransformation kann oberhalb der Martensitstarttemperatur bei rein elastischer Verformung eintreten, wobei der Umwandlungsmechanismus dem der spontanen Transformation unterhalb von  $M_S$  gleicht. Nach Maxwell et al. (1974) tritt jedoch bei 50 bis 70°C oberhalb der Martensitstarttemperatur keine durch elastische Verformung erzielte Transformation mehr auf. Da Roth (2012) sicherstellt, dass die Martensitstarttemperatur des Versuchswerkstoffes unterhalb von  $-196^\circ\text{C}$  (dem Siedepunkt von Stickstoff) liegt, ist die Phasenumwandlung durch elastische Verformung für die bei Raumtemperatur durchgeführten Ermüdungsversuche nicht von Bedeutung. Durch plastische Verformung kann die Martensitbildung jedoch bis zu Temperaturen nahe der Gleichgewichtstemperatur  $T_0$  erfolgen (Maxwell et al. 1974).

Plastische Verformung tritt bei Beanspruchungen im HCF-Bereich an günstig orientierten Gleitbändern sowie an der Spitze von Ermüdungsrissen und damit nur lokal im Werkstoff auf, wobei es lediglich zu sehr geringen Martensitvolumenanteilen kommt. Durch ihre Lage an der Rissspitze üben die Umwandlungsbereiche jedoch auf das Ermüdungsverhalten metastabiler austenitischer Edelstähle einen erheblichen Einfluss aus, der nachfolgend vorgestellt wird.

### 2.2.3 Rissinitiierungs- und Ausbreitungsverhalten im Versuchswerkstoff

Das Ermüdungsverhalten des Versuchswerkstoffs wird von Roth (2012) an zylindrischen, flach gekerbten Proben untersucht, wobei die Kerben zu einer gegenüber der Nennspannung um den Faktor 1,1 und damit nur wenig erhöhten Spannung führen. Hierdurch ist jedoch die Entstehung von Rissen auf eine kleine Oberfläche begrenzt, so dass diese leicht unter dem Rasterelektronenmikroskop (REM) zu finden sind. In der Endbearbeitung wird die Probe elektrolytisch poliert, um eine glatte und verformungsfreie Oberfläche zu erzielen. Die Ermüdungsversuche erfolgen unter symmetrischer Wechselbelastung (Spannungsverhältnis  $R = \sigma_{min} / \sigma_{max} = -1$  aus der Minimalspannung  $\sigma_{min}$  und Maximalspannung  $\sigma_{max}$ ) an einer servohydraulischen Prüfmaschine bei einer Prüffrequenz von 5Hz und einer Beanspruchungsamplitude, die mit  $\Delta\sigma/2 = 245\text{MPa}$  etwas oberhalb der Dauerfestigkeit liegt. Die Probenlebensdauern betragen dabei  $3 \cdot 10^5$  bis  $5 \cdot 10^5$  Zyklen.

#### Rissinitiierung

Während der zyklischen Verformung zu Beginn der Ermüdung erfolgt die Bildung von  $\alpha'$ -Martensit bereits nach wenigen tausend Zyklen. Dabei entstehen innerhalb einzelner Körner Martensit-Lamellen oder -Nadeln, die parallel zu aktivierten Gleitbändern verlaufen und einen nur sehr geringen globalen Volumenanteil einnehmen. Die Phasentransformation erfolgt bevorzugt in Oberflächenkörnern und bringt hier aufgrund der Volumendehnung Druckspannungen ein, wodurch die Bildung von Rissen behindert wird (McEvily und Velazquez 1992). Aus diesem Grund verfestigt der Versuchswerkstoff, so dass dessen Dauerfestigkeit  $\sigma^D$  oberhalb der Streckgrenze  $R_{p0,2}$  liegt.

Bei der von Roth (2012) im Experiment aufgebrachten Beanspruchung initiieren Risse dennoch und können bereits nach  $1,5 \cdot 10^4$  bis  $4,5 \cdot 10^4$  Zyklen bei einer Risslänge von  $10\mu\text{m}$  bis  $15\mu\text{m}$  gefunden werden, was etwa 15% der Probenlebensdauer entspricht. Die Hauptentstehungsorte für Risse sind Zwillingsgrenzen, an denen keine Martensitbildung stattgefunden hat (65% der gefundenen Risse) und Korngrenzen (19%). Darüber hinaus können Risse auch an Zwillingsgrenzen mit Phasenumwandlung, auf Gleitbändern und an Phasengrenzen entstehen,

diese haben allerdings zusammengenommen nur einen Anteil von 16% an den Rissentstehungsereignissen. Die große Häufigkeit der Rissinitiierung an Zwillingsgrenzen ist – wie bereits in Abschnitt 2.1.1 erläutert – auf die erhöhten Schubspannungen auf diesen Grenzen infolge der elastischen Anisotropie der Zwillingskörner zurückzuführen. Nach der Entstehung verlässt der Riss die Zwillings- oder Korngrenze und beginnt sein transkristallines Wachstum.

### **Rissausbreitung**

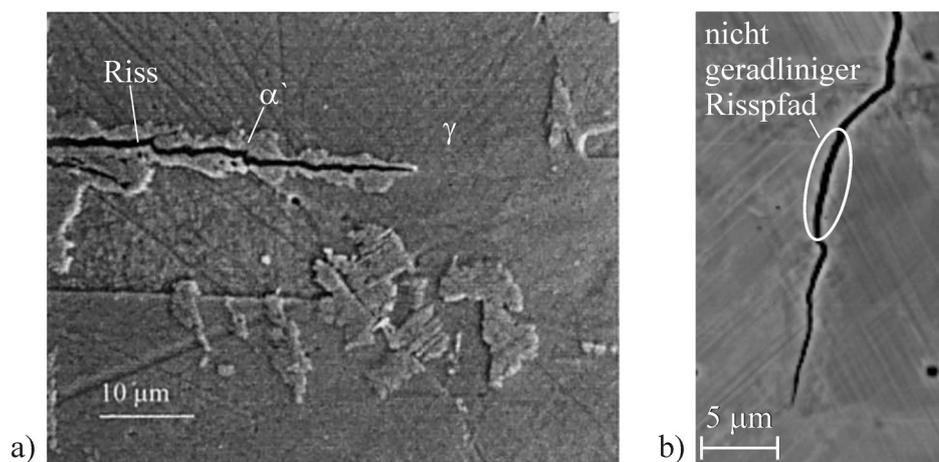
An die Rissentstehung schließt sich die transkristalline Rissausbreitung im Stadium I an. Dabei kann ein einzelnes Gleitsystem des  $\gamma$ -Austenits genutzt werden, sofern nicht zuvor eine Phasenumwandlung vor der Rissspitze stattgefunden hat. Das Risswachstum erfolgt in diesem Fall wie in Abschnitt 2.1.2 beschrieben. Ist das Spannungsfeld vor der Rissspitze jedoch ausreichend, um zwei Gleitsysteme im Austenit zu aktivieren, erfolgt in ihrer Umgebung eine Transformation in die Martensitphase. Die innerhalb eines Austenitkornes gebildete Umwandlungszone weist dabei keine sprunghaften Orientierungsänderungen auf, d.h. es entstehen keine Korngrenzen im Martensit. Erst nach dem Überschreiten einer Austenitkorngrenze, bei der sich die Orientierung der Ausgangsphase verändert, liegt auch eine neue Ausrichtung des gebildeten Martensits vor. Innerhalb eines Kornes kann es zu einer allmählichen Orientierungsänderung infolge der Volumenzunahme der umgewandelten Phase und den daraus resultierenden Eigenspannungen kommen, so dass die Gleitebenen nicht mehr geradlinig sondern gekrümmt sind.

Kommt es im Bereich um die Rissspitze zur Phasentransformation, wächst der Riss innerhalb des neu gebildeten Martensitbereichs, was auch von Stolarz et al. (2001) (vgl. Bild 2.6a) beobachtet wird, wobei der Vorlauf des Umwandlungsbereiches vor der Rissspitze gering ist. Roth (2012) zeigt, dass die Ausbreitung des Risses auf einem einzelnen Gleitsystem der transformierten Phase erfolgt. Der Risspfad weist dabei den kurvenförmigen Verlauf auf, der von den infolge der Eigenspannungen gekrümmten Gleitebenen vorgegeben wird (Bild 2.6b).

Bereits Hornbogen (1978) stellt eine Beeinflussung des Risswachstums durch die Phasenumwandlung fest. Während die Volumendehnung zu einer Entlastung der Rissspitze führt und damit die Triebkraft der Rissausbreitung verringert, ist die gebildete Martensitphase spröder als Austenit und begünstigt somit das Risswachstum. Im von Roth (2012) untersuchten Werkstoff ist gegenüber einem stabilen austenitischen Edelstahl (Blochwitz und Richter 1999) eine starke Verringerung der Rissausbreitungsgeschwindigkeit festzustellen.

Die Risspfade breiten sich schon bei geringen Risslängen in eine Richtung senkrecht zur äußeren Normalspannung oder mit geringen Abweichungen hierzu aus, was auf stark normal-

spannungskontrolliertes Risswachstum schließen lässt. Dennoch wird die Rissausbreitung von der Mikrostruktur beeinflusst, da sich die Wachstumsgeschwindigkeit mit Annäherung der Risspitze an eine Korngrenze vermindert und nach dem Überwinden der Grenze ansteigt. Dieses Verhalten ist auch bei Rissen zu finden, die bereits mehrere Körner durchlaufen haben. Bei diesen längeren Rissen entsteht jedoch kein homogener Martensitbereich mehr an der Risspitze; die neugebildete Phase ist starken Orientierungsschwankungen unterworfen. Die Risse wachsen unter Modus I-Beanspruchung und ihre Ausbreitungsrichtung lässt sich nun nicht mehr kristallographischen Ebenen zuordnen. Während sich der Mikrostruktureinfluss auf das Risswachstum allmählich verringert, vergrößert sich der Bereich der Phasenumwandlung. Dadurch bleibt die Rissausbreitungsrate gleich oder vermindert sich sogar, obwohl die Risslänge zunimmt. Nach Hornbogen (2002) ist dieses Verhalten auf die Volumenzunahme der Transformationszone und dem daraus resultierenden transformationsinduzierten Riss-schließen zurückzuführen. Bei noch größerer Risslänge verliert das transformationsinduzierte Riss-schließen jedoch an Bedeutung und wird durch plastisch induziertes Riss-schließen überdeckt. Die in diesem Werkstoff für die Rissausbreitungsgeschwindigkeit bedeutsamen Riss-schließeffekte werden im Folgenden vorgestellt.



*Bild 2.6: a) Riss innerhalb der martensitischen Umwandlungszone (Stolarz et al. 2001). Martensitbereiche sind durch Ätzen sichtbar und b) infolge der Gitterdrehung nicht geradliniger Risspfad (Roth 2012). Die Umwandlungszone ist in der REM-Aufnahme nicht auszumachen.*

#### 2.2.4 Riss-schließen

Ein Riss in einem Bauteil oder in einer Probe kann auch bei globaler Zugbelastung geschlossen sein, wodurch die Rissflanken bei zyklischer Beanspruchung während einer Entlastung vorzeitig aufsetzen. Dieser Effekt, der erstmals von Elber (1970) beschrieben und als Riss-schließen bezeichnet wird, vermindert die Schwingbreite der Riss-spitzenverformung. Die

Risspitze wird dadurch entlastet, woraus eine verringerte Rissausbreitungsgeschwindigkeit resultiert. Elber (1970) schließt aus der Untersuchung von dünnen Aluminiumproben, dass nach einem Rissfortschritt ein Residuum der plastischen Verformung an den Rissflanken zurückbleibt. Dieser „Nachlauf“ bewirkt einen vorzeitigen Kontakt der Rissufer, der die zyklische Rissöffnung vermindert. Hierbei handelt es sich um plastisch induziertes Risssschließen.

Ein weiterer Risssschließmechanismus ist das geometrisch induzierte Risssschließen, das insbesondere bei Stadium I-Rissen auftritt, die einen zick-zack-förmigen Pfad aufweisen. Die Rissflanken sind hierbei miteinander „verzahnt“ so dass zum gleichen Zeitpunkt geöffnete Rissbereiche und Bereiche mit in Kontakt stehenden Rissflanken zu finden sind (Minakawa und McEvily 1981). Dies kann eine Verringerung der Rissspitzenabgleitung bewirken und somit das Risswachstum verlangsamen.

Für eine ausführliche Beschreibung der Risssschließmechanismen, die auch das oxidinduzierte Risssschließen enthält, wird auf Künkler (2007) oder Suresh (2001) verwiesen. Da für das in dieser Arbeit untersuchte Risswachstum in einem metastabilen austenitischen Edelstahl jedoch transformationsinduziertes Risssschließen von besonderer Bedeutung ist, soll hierauf kurz eingegangen werden.

Wie in Abschnitt 2.2.2 erläutert, kann in einem metastabilen austenitischen Edelstahl im Bereich der Risspitze infolge der dort vorherrschenden plastischen Dehnung eine Transformation von der Austenitphase in die Martensitphase erfolgen. Die Volumenzunahme bei der Umwandlung bewirkt, dass in der neu gebildeten Phase, die von dem umliegenden Werkstoff eingeschlossen ist, Druckspannungen entstehen. Sie überlagern sich der globalen Beanspruchung, so dass der Riss auch unter äußerer Zugbeanspruchung geschlossen sein kann. Wie bei dem oben beschriebenen plastizitätsinduzierten Risssschließen kommt es zu einer Entlastung der Risspitze, die die Triebkraft zur Rissausbreitung vermindert. Wandelt der Werkstoff dagegen nicht nur lokal an der Risspitze, sondern vollständig um, fehlt das umliegende Material, das die Ausdehnung der Transformationszone behindert. In diesem Fall breitet sich der Riss in der neu gebildeten Phase aus und es treten keine Risssschließeffekte auf. Bei dem untersuchten Werkstoff kommt es unter den zyklischen Beanspruchungen im HCF-Bereich jedoch nur zur lokalen Phasentransformation, so dass das Risssschließen einen ausgeprägten Einfluss auf das Wachstumsverhalten hat.

In dieser Arbeit soll die oben beschriebene KurZRissausbreitung modellmäßig erfasst und simuliert werden, wobei das Augenmerk insbesondere auf die Untersuchung des Einflusses der lokalen Phasenumwandlung gerichtet ist. Die für eine solche Modellierung als Basis uner-

lässlichen mechanischen Grundlagen werden nachfolgend beschrieben, bevor im Anschluss auf bereits existierende Modelle der Ermüdungsphasen und zur Phasentransformation eingegangen werden kann.

## 2.3 Mechanische Grundlagen

In der Mechanik werden die Spannungen und Verformungen von materiellen Körpern mathematisch beschrieben. Hierbei wird unterschieden, ob ein durch eine Beanspruchung verformter Körper nach der Entlastung in seine ursprüngliche Form zurückkehrt oder eine bleibende Verformung aufweist. Dabei handelt es sich im ersten Fall um die im nächsten Abschnitt beschriebene rein elastische und im zweiten um plastische Verformung, die anschließend behandelt wird.

### 2.3.1 Elastisches Materialverhalten

#### Spannungszustand

Kräfte, die auf einen festen Körper einwirken, verursachen in dessen Inneren ortsabhängige Spannungen, die durch den Spannungszustand ausgedrückt werden können. Dieser lässt sich aus dem in Bild 2.7 dargestellten infinitesimalen Volumenelement und den daran angreifenden Spannungen  $\sigma_{ij}$  sowie dem volumenbezogenen Kraftvektor  $\mathbf{b}$  herleiten. Zur kompakten Darstellung wird die Indexnotation verwendet, bei der die Koordinatenachsen  $x, y, z$  durch  $x_k$  mit  $k=1, 2, 3$  ausgedrückt werden. Es gilt die EINSTEIN'sche Summenkonvention und  $\delta_{ij}$  ist das KRONECKER-Symbol.

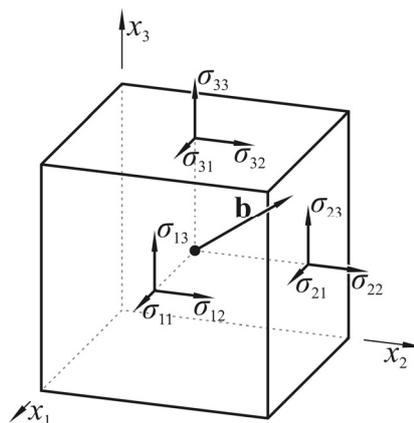


Bild 2.7: *Infinitesimales Volumenelement mit daran angreifenden Spannungen  $\sigma_{ij}$  und volumenbezogenem Kraftvektor  $\mathbf{b}$ . Spannungen auf nicht sichtbaren Körperflächen sind zur Gewährleistung der Übersichtlichkeit nicht eingezeichnet.*

Für jede Raumrichtung lässt sich am infinitesimalen Volumenelement eine Gleichgewichtsbedingung aufstellen, wobei das Komma die Ableitung anzeigt:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0; \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (2.1)$$

Hierbei treten neun skalare Spannungen auf, die wie folgt im CAUCHY'schen Spannungstensor angeordnet werden, der den Spannungszustand an einem beliebigen Punkt eindeutig beschreibt:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

Um das Momentengleichgewicht am Volumenelement zu erfüllen, muss  $\sigma_{12} = \sigma_{21}$ ,  $\sigma_{13} = \sigma_{31}$  und  $\sigma_{23} = \sigma_{32}$  gelten, so dass der Spannungstensor symmetrisch ist. Bei den Spannungen  $\sigma_{ii}$  handelt es sich um Normalspannungen, während  $\sigma_{ij}$  mit  $i \neq j$  Schubspannungen darstellen.

### Verzerrungszustand

Die Deformationen, die ein fester Körper infolge des Einwirkens von Kräften erfährt, lassen sich durch die vom betrachteten Ort abhängigen Verschiebungen  $\mathbf{u}$  beschreiben. Unter der Annahme infinitesimal kleiner Verzerrungen können aus ihnen die Dehnungen  $\varepsilon_{kl}$  bestimmt werden:

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2}(u_{k,l} + u_{l,k}). \quad (2.3)$$

Diese lassen sich im Verzerrungstensor anordnen, der analog zum Spannungstensor Symmetrie aufweist, so dass  $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21}$ ,  $\varepsilon_{13} = \varepsilon_{31}$  und  $\varepsilon_{23} = \varepsilon_{32}$  gilt:

$$\varepsilon_{kl} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

Aus den Dehnungen  $\varepsilon_{kl}$  mit  $k \neq l$  können die Gleitungen  $\gamma_{kl} = 2\varepsilon_{kl}$  ermittelt werden. Den Zusammenhang zwischen Spannungen und Dehnungen gibt das Stoffgesetz an.

### Stoffgesetz

Erfolgt die Beanspruchung eines festen Körpers im linear-elastischen Bereich, verknüpft das HOOKE'sche Gesetz die an einem Punkt auftretenden Spannungs- und Verzerrungsgrößen durch den Elastizitätstensor  $C_{ijkl}$ :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (2.5)$$

Dieser enthält im allgemeinen anisotropen Fall 21 unabhängige Einträge. Für den im Ingenieurbereich häufig anzutreffenden Spezialfall der isotropen Elastizität vereinfacht sich jedoch der Zusammenhang aus Gleichung (2.5) und es treten nur noch zwei unabhängige Konstanten auf:

$$\sigma_{ij} = [\lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})] \varepsilon_{kl}. \quad (2.6)$$

Dies sind die LAMÉ'schen Konstanten  $\lambda$  und  $\mu$ , die sich aus den Ingenieurkonstanten Elastizitätsmodul  $E$  und Querkontraktionszahl  $\nu$  ergeben, wobei  $\mu$  dem Schubmodul  $G$  entspricht:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (2.7)$$

Die Gefügekörner, die das Kurzrischwachstum maßgeblich beeinflussen, weisen dagegen anisotropes elastisches Verhalten auf. Um hierbei eine übersichtliche Darstellung des Zusammenhangs zwischen Spannungen und Dehnungen zu ermöglichen, bietet sich die VOIGT'sche Schreibweise an, die den Spannungs- und Verzerrungstensor 2. Stufe auf Spaltenmatrizen ( $\sigma_{ij} \rightarrow \sigma_p$ ,  $\varepsilon_{kl} \rightarrow \varepsilon_q$ ) und den Elastizitätstensor 4. Stufe auf eine quadratische Matrix ( $C_{ijkl} \rightarrow C_{pq}$ ) umschreibt:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

Da es sich bei diesen Matrizen nicht mehr um Tensoren handelt, ist zu beachten, dass sie nicht die entsprechenden Transformationseigenschaften bei Drehung des Koordinatensystems aufweisen.

Die in dieser Arbeit betrachteten kubischen Kristallstrukturen besitzen drei Symmetrieebenen, die jeweils senkrecht zueinander ausgerichtet sind. Dadurch liegt Orthotropie vor, ein Spezialfall des anisotropen Verhaltens, bei dem keine Kopplung zwischen Dehnungen und Schubverzerrungen auftritt. Zur Beschreibung des Materialverhaltens in einem Koordinatensystem, das parallel zu den Schnittlinien der Symmetrieebenen liegt, sind die drei unabhängigen Konstanten  $C_{11}$ ,  $C_{12}$  und  $C_{44}$  erforderlich, so dass die Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{C}$  folgende Gestalt annimmt:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

Wie stark das anisotrope Werkstoffverhalten dabei ausgeprägt ist, kann über den Anisotropiefaktor  $A$  quantifiziert werden, wobei im Sonderfall  $A = 1$  Isotropie vorliegt.

$$A = \frac{2C_{44}}{(C_{11} - C_{12})} \quad (2.10)$$

Im Allgemeinen weisen die Körner beliebige Orientierung auf, so dass eine Transformation in ein globales – z.B. probenbezogenes – Koordinatensystem vorgenommen werden muss, bezüglich dessen dann keine Orthotropie mehr sondern allgemein anisotropes Verhalten vorzufinden ist. Da die Matrizen in der VOIGT'schen Notation nicht die Transformationseigenschaften von Tensoren besitzen, muss zunächst die Drehung des Spannungs- und Verzerrungstensors erfolgen. Für die Transformation des Spannungstensors aus dem  $x_1, x_2, x_3$ -Koordinatensystem ins  $x'_1, x'_2, x'_3$ -System gilt:

$$\sigma'_{kl} = \alpha_{ki} \alpha_{lj} \sigma_{ij}. \quad (2.11)$$

Dabei ist  $\alpha_{ki}$  der Kosinus des Winkels zwischen  $x_k$ -Achse und  $x'_i$ -Achse. Die Transformation des Verzerrungstensors erfolgt analog.

Dann kann die Steifigkeitsmatrix bezüglich des  $x'_1, x'_2, x'_3$ -Koordinatensystems errechnet werden. Für die Steifigkeit – den Elastizitätsmodul  $E'$  – in Richtung einer beliebig gewählten  $x'_1$ -Achse gilt als Beispiel der folgende Zusammenhang (z.B. Blochwitz et al. 2008):

$$\frac{1}{E'} = \frac{C_{11} + C_{12}}{(C_{11} - C_{12})(C_{11} + 2C_{12})} - 2(\alpha_{11}^2 \alpha_{21}^2 + \alpha_{11}^2 \alpha_{31}^2 + \alpha_{21}^2 \alpha_{31}^2) \left( \frac{1}{C_{11} - C_{12}} - \frac{1}{2C_{44}} \right). \quad (2.12)$$

Wird ein Werkstoff oberhalb des hier beschriebenen elastischen Bereiches beansprucht, tritt plastisches Materialverhalten auf, das nachfolgend beschrieben wird.

### 2.3.2 Plastisches Materialverhalten

Auf einen festen Körper einwirkende Kräfte können neben den zuvor behandelten reversiblen auch bleibende Verformungen verursachen. Dabei lassen sich starke Deformationen mit großen plastischen Bereichen hervorrufen, wie es beispielsweise bei Umformvorgängen er-

wünscht ist. Bei der Ermüdung im HCF-Bereich treten plastische Erscheinungen dagegen nur lokal an Orten hoher Spannungen auf; global liegt die Beanspruchung im elastischen Bereich. Die plastische Verformung findet in Form von Abgleitung auf kristallographisch vorgegebenen Ebenen – den Gleitebenen – in bestimmte Gleitrichtungen statt. Um die Abgleitung zu bewirken, muss in der entsprechenden Richtung eine ausreichend hohe Schubspannung vorliegen. Im Einkristall lässt sich die Schubspannung  $\tau^{GS}$  auf einem Gleitsystem aus seiner Lage relativ zur Zugachse und der Größe der auf den Kristall wirkenden Zugspannung  $\sigma$  bestimmen.

$$\tau^{GS} = \sigma \cos \lambda \cos \theta . \quad (2.13)$$

Dabei sind  $\theta$  und  $\lambda$  die Winkel zwischen Gleitebenennormale  $\mathbf{n}$  und Zugachse bzw. zwischen Gleitrichtung  $\mathbf{m}$  und Zugachse (vgl. Bild 2.8a). Der Term  $\cos \lambda \cos \theta$  stellt dabei den SCHMID-Faktor  $S$  dar, dessen Maximalwert 0,5 (bei  $\lambda = \theta = 45^\circ$ ) beträgt, da  $\mathbf{n}$  und  $\mathbf{m}$  senkrecht aufeinander stehen. Durch Anisotropiespannungen kann in einem Vielkristall die tatsächliche Schubspannung auf einem Gleitsystem von der mit Gleichung (2.13) berechneten abweichen und je nach Konfiguration höhere oder niedriger Werte aufweisen. Abgleitung tritt ein, wenn die Schubspannung  $\tau^{GS}$  auf dem Gleitsystem den kritischen Wert  $\tau^F$  erreicht.

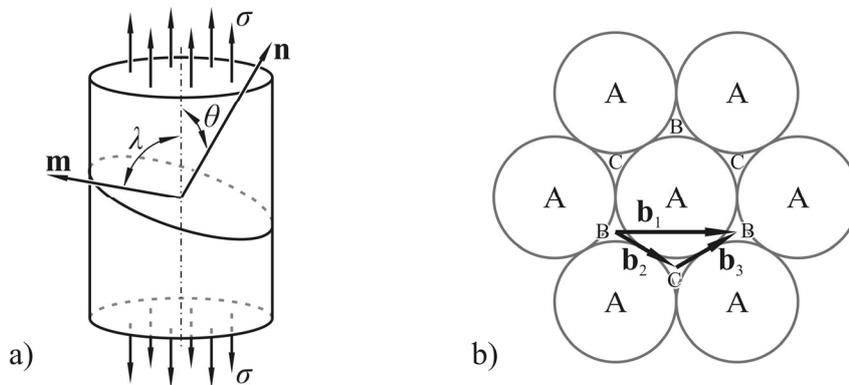


Bild 2.8: a) Lage von Gleitebene und -richtung im Einkristall unter Zugbeanspruchung und b) Aufteilung einer Versetzung in zwei Partialversetzungen (vgl. Roth (2012)).

In vielen Werkstoffen, wie auch in dem hier untersuchten metastabilen austenitischen Edelstahl, kann die Bewegung von Versetzungen energetisch günstiger erfolgen, wenn die Atome nicht geradlinig einen ganzen Atomabstand zurücklegen. Stattdessen wird die Versetzung in zwei Teilversetzungen (SHOCKLEY-Partialversetzungen) aufgeteilt (Schulze 1967), so dass die Atome in Position B, wie in Bild 2.8b illustriert, nicht über den „Berg“ der Atome in Position A ( $\mathbf{b}_1$ ) sondern durch das „Tal“ zunächst von B nach C gelangen ( $\mathbf{b}_2$ ), wodurch ein Stapelfeh-

ler entsteht. Schließlich schreiten die Atome in die endgültige Position B voran ( $\mathbf{b}_3$ ), so dass die Stapelfolge wiederhergestellt ist.

Auf Basis der in diesem Abschnitt vorgestellten mechanischen Grundlagen werden nachfolgend Modelle der einzelnen Ermüdungsstadien und der Phasenumwandlung vorgestellt.

## 2.4 Modelle zur Beschreibung der Rissentstehung

Ziel vieler Rissentstehungsmodelle ist es, auf Basis der aufgebrachten Spannungen oder Dehnungen die Lastspielzahl zu bestimmen, die zur Bildung eines Ermüdungsrisse erforderlich ist. Die Abgrenzung zwischen Rissentstehung und –ausbreitung ist jedoch oftmals schwierig und die Lastspielzahl bis zur Rissentstehung ist im Vielkristall unter HCF-Beanspruchung meist gering. Roth (2012) findet nach nur 15% der Lebensdauer im Rasterelektronenmikroskop sichtbare Risse. Miller (1993) behauptet sogar, es könne in guter Näherung angenommen werden, dass eine Rissinitiierungsphase bei polykristallinen Werkstoffen nicht existiert (da sie so kurz ist). Aus diesen Gründen soll hier nicht die von der Rissentstehung eingenommene Ermüdungsdauer im Vordergrund stehen; hierfür sei auf die Zusammenstellung von Modellen durch Künkler (2007) und die Modelle beispielsweise von Tanaka und Mura (1981, 1982) sowie Venkataraman et al. (1991) verwiesen. Stattdessen wird hier auf die Orte der Rissinitiierung eingegangen.

### 2.4.1 Rissinitiierung auf Zwillingsgrenzen

Obwohl Zwillingsgrenzen als sehr stabil angesehen werden, findet Roth (2012) den größten Teil der initiierten Risse auf diesen Grenzen, wie es auch von Blochwitz und Tirschler (2005) sowie Llanes und Laird (1992) bestätigt wird. Bei der Zwillingsgrenze handelt es sich um eine Gleitebene und die an ihr aneinanderstoßenden Zwillingskörner weisen eine kristallographisch vorgegebene Verkipfung von  $60^\circ$  auf. Dieser Orientierungsunterschied bewirkt Inkompatibilitätsspannungen, die sich der äußeren Beanspruchung überlagern. Während der rein aus der äußeren Spannung  $\sigma_0$  berechenbare SCHMID-Faktor einen Maximalwert von 0,5 annehmen kann, schlagen Heinz und Neumann (1990) ein vereinfachendes Modell vor, das die Orientierungsdaten der Zwillingskörner bei der Bestimmung eines effektiven SCHMID-Faktors  $\mu_{eff}$  einbezieht. Er ergibt sich als Quotient aus der auf die Zwillingsgrenze wirkenden effektiven Schubspannung  $\tau_{eff}$  und  $\sigma_0$  ( $\mu_{eff} = \tau_{eff} / \sigma_0$ ) und kann Werte nahe 1 erreichen. Dies zeigt, dass die auf der Gleitebene leicht mögliche Abgleitung von hohen Schubspannungen ange-  
trieben wird.

Die effektive Schubspannung ermitteln Heinz und Neumann (1990) analytisch, wobei einerseits die auf die Zwillingsgrenze transformierte äußere Beanspruchung berücksichtigt wird und andererseits die Spannungen einbezogen werden, die zur Herstellung der Kompatibilität der Zwillingskörner notwendig sind. Als Kompatibilitätsbedingung gilt, dass die Dehnungen in der Grenzenebene für beide Körner gleich sind. Die Nachgiebigkeitstensoren der Zwillingskörner werden in ein gemeinsames Koordinatensystem transformiert und mit Hilfe der Kompatibilitätsbedingungen die effektive elastische Schubspannung auf der Zwillingsgrenze berechnet. Durch den Vergleich mit Ermüdungsversuchen wird gezeigt, dass Risse fast ausschließlich auf Grenzen mit hohen effektiven SCHMID-Faktoren initiieren. Blochwitz und Tirschler (2005) erweitern das Modell um die Berücksichtigung plastischer Abgleitung auf diskreten Gleitebenen.

#### **2.4.2 Rissinitiierung auf Gleitbändern**

Neben der Entstehung auf Zwillingsgrenzen ist die Rissbildung – wenngleich sie im untersuchten Werkstoff eine untergeordnete Rolle spielt – auch auf Gleitebenen innerhalb der Körner möglich. Krupp et al. (2010) entwickeln ein Modell zur Vorhersage der Rissinitiierungsorte, bei dem ideal-elastisches, kristallplastisches Materialverhalten nachgebildet wird. Zur Berechnung der Schubspannungen auf möglichen Gleitebenen wird ein Finite Elemente Verfahren eingesetzt, wobei die anisotropen elastischen Eigenschaften der Gefügekörner berücksichtigt werden. Bei der Nachrechnung von Gefügebrauchsschnitten realer Ermüdungsproben stimmen in vielen Fällen hohe berechnete Schubspannungen auf Gleitsystemen mit Orten überein, an denen sich in rasterelektronenmikroskopischen Aufnahmen Gleitspuren zeigen. Oftmals liegen hier hohe SCHMID-Faktoren vor; infolge der anisotropen Elastizität der im Verbund befindlichen Körner kann es aber auch bei mittleren SCHMID-Faktoren zur Aktivierung von Gleitsystemen kommen. Insbesondere bei in Zugrichtung steifen Körnern können dadurch erhöhte Schubspannungen auftreten.

An die Entstehung von Rissen schließt sich – die Wachstumsfähigkeit der Risskeime vorausgesetzt – die Ausbreitung der Ermüdungsriss an. Modelle zur Beschreibung des Risswachstumsverhaltens werden im folgenden Abschnitt vorgestellt.

## 2.5 Modelle zur Beschreibung des Risswachstums

Aufgrund der substantiell unterschiedlichen Wachstumsmechanismen von kurzen und langen Rissen muss auch bei der modellmäßigen Nachbildung des Ermüdungsrisswachstums zwischen diesen Gruppen unterschieden werden. Nachfolgend werden daher zunächst Modelle zur Beschreibung des mikrostrukturbestimmten Kurzrisswachstums und anschließend Modelle des Langrisswachstums vorgestellt.

### 2.5.1 Kurzrissmodelle

Zur Beschreibung des Kurzrisswachstums existieren verschiedene Modellierungsansätze, wobei zwischen empirischen und mechanistischen unterschieden wird. Ein einfaches empirisches Modell wird von Hobson et al. (1986) vorgeschlagen, das in Übereinstimmung mit den Untersuchungen von Morris (1980) den Abstand der Risspitze zur Korngrenze im ersten Korn als entscheidende Einflussgröße auf die Rissausbreitungsrate einbezieht. Das Modell erfährt mehrere Erweiterungen; z.B. durch Murtaza und Akid (1995), um das Kurzrisswachstum auch über mehrere Körner hinweg nachbilden zu können, so dass die oszillierende Risswachstumsgeschwindigkeit kurzer Risse wiedergegeben wird. Empirische Modellansätze bilden zwar das in experimentellen Untersuchungen beobachtete Rissausbreitungsverhalten ab, gehen jedoch nicht auf die der Rissausbreitung zugrunde liegenden Mechanismen ein.

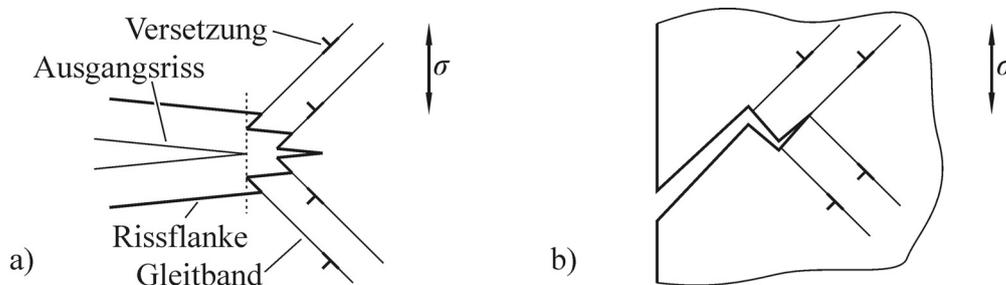
Ein gegensätzlicher Ansatz besteht in rein mechanistischen Modellen, bei denen diskrete Versetzungen die plastischen Vorgänge bei der Rissausbreitung nachbilden. Ein Beispiel hierfür ist das bereits in Abschnitt 2.1.2 vorgestellte Modell von Wilkinson et al. (1998), das die Entstehung, Bewegung und Interaktion der einzelnen Versetzungen auf den Gleitbändern vor der Risspitze modelliert. Durch Zusammenlagerung von Versetzungen des Leerstellentyps an der Risspitze ergibt sich der Rissfortschritt in jedem Beanspruchungszyklus. Eine Erweiterung dieses Modells durch Doquet (1999) erlaubt zusätzlich die Berücksichtigung von Reibung zwischen den Rissflanken und der Barrierewirkung von Korngrenzen.

Einen weitergehenden Überblick über empirische und rein mechanistische Kurzrissmodelle geben z.B. Schick (2004) oder McEvily (1998), so dass hier lediglich auf ein aktuelles, rein mechanistisches Modell von Bjerkén und Melin (2003, 2004) eingegangen werden soll, das von Hansson und Melin (2005, 2006) erweitert wird.

Bjerkén und Melin (2003, 2004) betrachten einen Randriss in einer Scheibe, dessen Öffnung und Abgleitung durch Versetzungsdipole nachgebildet wird. Plastische Deformation wird durch diskrete Versetzungen repräsentiert, die von der Risspitze emittiert werden und sich

auf Gleitebenen bewegen können. Der umliegende Werkstoff weist linear elastisches und anisotropes Verhalten auf. Unter Modus I-Beanspruchung entstehen Versetzungen paarweise auf symmetrisch zur Rissebene abgewinkelten Gleitebenen, was zu einer stufenförmigen Rissöffnung führt (vgl. Bild 2.9a). Bei einer Modus II-Beanspruchung bewegen sich Versetzungen auf Gleitbändern in der Verlängerung der Rissebene, wodurch ein Verschiebungssprung an der Rissspitze hervorgerufen wird. Die Position der Versetzungen auf den Gleitebenen bestimmt sich aus dem Gleichgewichtszustand, der sich bei der jeweiligen Beanspruchung einstellt. Findet eine emittierte Versetzung zurück zur Rissspitze, kommt es zur Annihilation mit dem dort befindlichen Verschiebungssprung, was die Rissverlängerung bewirkt. Ein Wiederverschweißen der Rissufer wird nicht zugelassen. Korngrenzen behindern die Versetzungsbewegung, da diese nicht von den Versetzungen durchdrungen werden können. Erst wenn eine ausreichende Spannungssingularität an der Korngrenze vorliegt, kommt es auch zur Bildung von Versetzungen im Nachbarkorn.

Hansson und Melin (2005, 2006) erweitern das Modell und untersuchen das Risswachstumsverhalten an einem Riss unter überlagerter Modus I- und II-Beanspruchung. An der Rissspitze sind zwei Gleitebenen aktiv, auf denen der Rissfortschritt stattfinden kann. Je nach Beanspruchung der jeweiligen Gleitebenen kommt es zu einem Wachstum im Einfach- oder im Wechselgleiten, so dass der Riss einen zick-zack-förmigen Pfad annimmt (Bild 2.9b).



*Bild 2.9: a) Stufenförmige Rissöffnung infolge Versetzungsbildung an der Rissspitze auf symmetrischen Gleitbändern und b) Zickzackförmiger Risspfad nach Risswachstum im Einfach- oder im Wechselgleiten.*

Mit den rein mechanistischen Modellen ist im Gegensatz zu den empirischen eine sehr detaillierte Nachbildung der tatsächlich beim Risswachstum ablaufenden Vorgänge möglich, die jedoch mit einem erheblichen Rechenaufwand verbunden ist. Mit dem Ziel, die Modellierung der Rissausbreitung über mehrere Körner hinweg zu erreichen aber dennoch die dabei vorherrschenden Mechanismen zu berücksichtigen, entstanden mechanistische Modelle, die plastische Verformung kontinuumsmechanisch durch die Abgleitung auf den Gleitebenen anstelle

diskreter Versetzungen beschreiben. Nachfolgend werden verschiedene Kurzrissausbreitungsmodelle dieser Gruppe vorgestellt.

### Das Modell von Taira, Tanaka und Nakai

Taira et al. (1978) entwickeln ein analytisches Modell der Kurzrissausbreitung, bei dem die Abgleitung auf den Gleitbändern vor der Risspitze nach der Theorie der kontinuierlich verteilten Versetzungen nachgebildet wird. Zur Abgleitung kommt es, wenn die Fließschubspannung  $\tau^F$  überschritten wird. Ist die Länge des Gleitbandes nicht durch eine Korngrenze beschränkt, stellt sich eine Gleichgewichtslage ein, bei der die Versetzungsdichte am Ende des Gleitbandes verschwindet. Behindert dagegen eine Korngrenze die freie Ausdehnung der plastischen Zone, kommt es vor der Grenze zu einem singulären Anstieg der Versetzungsdichte (vgl. Bild 2.10b). Tanaka et al. (1986) erweitern dieses Modell, wobei ein Riss auf einem Gleitband unter reiner Schubbeanspruchung betrachtet wird. Die plastische Zone vor der Risspitze wird – wie zuvor – von einer Korngrenze beschränkt oder endet innerhalb eines Kornes. In diesem Modell kann jedoch in beiden Fällen die erste Korngrenze vom plastischen Bereich bereits überwunden worden sein. Aus der Versetzungsdichteverteilung auf dem Gleitband erfolgt die Bestimmung der Risspitzenabgleitung  $CTSD$ , deren zyklische Veränderung  $\Delta CTSD$  die Ermittlung der Risswachstumsrate  $da/dN$  erlaubt. Dazu wird das folgende Risswachstumsgesetz verwendet, das auch Wilkinson et al. (1998) vorschlagen und das die werkstoffabhängigen Konstanten  $C$  und  $m \geq 1$  enthält:

$$\frac{da}{dN} = C \cdot \Delta CTSD^m. \quad (2.14)$$

Das Modell wird auch angewendet, um das mikrostrukturbestimmte Risswachstum im Stadium II zu simulieren, bei dem zwei Gleitebenen vor der Risspitze aktiv sind. Vereinfachend werden diese Gleitebenen jedoch zu einem Fließstreifen in Verlängerung des Risses zusammengefasst, dessen Ausdehnung von Korngrenzen beschränkt ist. Bei dem unter Modus I beanspruchten Riss kommt es beim Überschreiten der Fließgrenze zur plastischen Verformung im Fließstreifen, die eine Risspitzenöffnung  $CTOD$  bewirkt. Analog zu Gleichung (2.14) wird deren zyklische Änderung  $\Delta CTOD$  zur Ermittlung des Rissfortschritts je Belastungszyklus verwendet, wobei  $C'$  und  $m'$  erneut werkstoffabhängige Konstanten sind:

$$\frac{da}{dN} = C' \cdot \Delta CTOD^{m'}. \quad (2.15)$$

In ähnlicher Weise wie Taira et al. (1978) beschreibt auch das nachfolgend vorgestellte Modell die Kurzrissausbreitung.

### Das Modell von Navarro und de los Rios

Das eindimensionale analytische Modell der Kurzrisssausbreitung von Navarro und de los Rios (1988) nutzt ebenso wie Taira et al. (1978) die Theorie der verteilten Versetzungen zur Nachbildung der plastischen Deformation. Es wird ein Riss mit reibungsfreien Ufern auf einem Gleitband unter reiner Modus II-Beanspruchung betrachtet, der in einer Scheibe unendlicher Ausdehnung liegt (Bild 2.10a). Im Gleitband wird linear-elastisches, ideal-plastisches Materialverhalten angenommen, so dass es beim Überschreiten der Fließschubspannung  $\tau^F$  zur Abgleitung kommt. Die von der Gleitbandkoordinate  $\xi = x/c$  abhängige Versetzungsdichteverteilung  $f(\xi)$  entlang des Gleitbandes berechnet sich dabei aus dem Verhältnis  $n = a/c$  der halben Risslänge  $a$  und der halben Gleitbandlänge  $c$ .

$$f(\xi) = \frac{\tau^F}{\pi^2 A} \left[ \operatorname{arcosh} \left( \left| \frac{1-n\xi}{n-\xi} \right| \right) - \operatorname{arcosh} \left( \left| \frac{1+n\xi}{n+\xi} \right| \right) \right] + \frac{\tau^F}{\pi^2 A} B(\xi) \quad (2.16)$$

$$\text{mit } A = \frac{Gb}{2\pi(1-\nu)}.$$

$G$  ist der Schubmodul,  $\nu$  die Querkontraktionszahl und  $b$  der Betrag des BURGERS-Vektors der einzelnen Versetzungen. Die Funktion  $B(\xi)$  hängt davon ab, ob sich die plastische Zone (PZ) auf dem Gleitband frei ausdehnen kann oder die Länge des Gleitbandes durch eine mikrostrukturelle Barriere beschränkt und die Ausdehnung der plastischen Zone damit blockiert ist:

$$B(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{falls PZ frei} \\ \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \left[ 2 \arcsin(n) + \pi \left( \frac{\tau^\infty}{\tau^F} - 1 \right) \right] & \text{falls PZ blockiert} \end{cases} \quad (2.17)$$

Hierbei ist  $\tau^\infty$  die äußere Schubspannung.

Im ersten Fall, in dem der zweite Term aus Gleichung (2.16) verschwindet, ergibt sich die Versetzungsdichteverteilungsfunktion nach Bilby et al. (1963), im zweiten nach Navarro und de los Rios (1988) oder Taira et al. (1978). Beide Funktionen sind in Bild 2.10b für  $n = a/c = 0,5$  veranschaulicht, wobei im Falle der blockierten plastischen Zone die Singularität an der Barriere bei  $|\xi| = 1$  zu erkennen ist, während die Versetzungsdichte am freien Gleitbandende verschwindet. Da die Fließschubspannungen auf Gleitebenen gering sind, ist davon auszugehen, dass die Blockierung der plastischen Zone mit einem Versetzungsaufstau vor der Barriere der meist anzutreffende Fall ist.

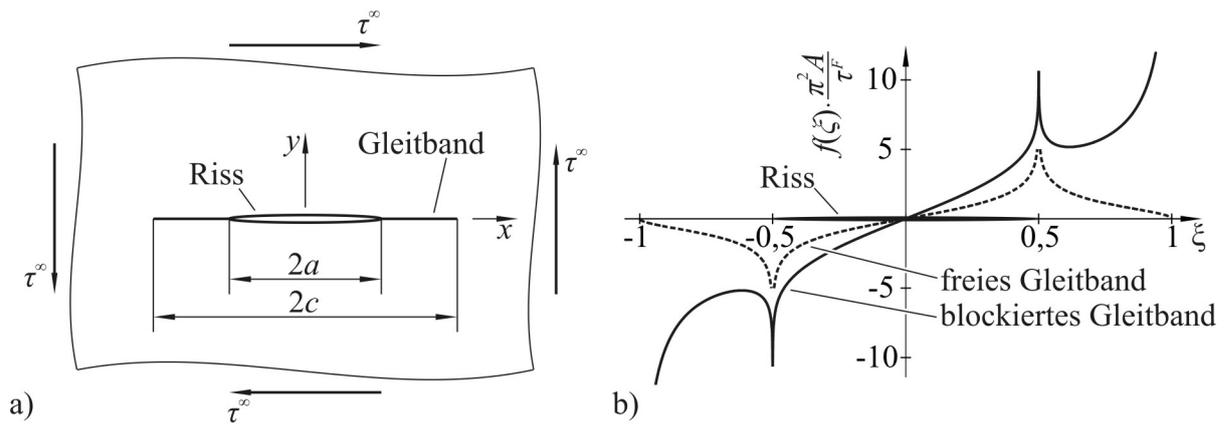


Bild 2.10: a) Riss auf einem Gleitband unter Modus II-Beanspruchung und b) Versetzungsdichteverteilungsfunktion ohne Blockierung des Gleitbandes an der Korngrenze sowie mit Blockierung für  $\tau^\infty / \tau^F = 2$  (Navarro und de los Rios 1988).

In Übereinstimmung mit Taira et al. (1978) sowie Wilkinson et al. (1998) bestimmen auch Navarro und de los Rios (1988) das Risswachstum aus der zyklischen Risspitzenabgleitung  $\Delta CTSD$  (siehe Gleichung (2.14)). Zur Ermittlung der Risspitzenabgleitung  $CTSD$  wird die Versetzungsdichteverteilungsfunktion im Bereich des Gleitbandes integriert, wobei Navarro und de los Rios (1988) für das blockierte Gleitband die folgende Lösung erhalten:

$$CTSD = \frac{4(1-\nu)}{\pi G} \tau^F c \left\{ n \ln(1/n) + \sqrt{1-n^2} \left[ \arcsin(n) + \frac{\pi}{2} \left( \frac{\tau^\infty}{\tau^F} - 1 \right) \right] \right\}. \quad (2.18)$$

Bei im Verhältnis zur Gleitbandlänge kurzen Risslängen und damit geringen Werten für  $n$  steigt die Risspitzenabgleitung  $CTSD$  bei Verlängerung des Risses an. Bei Annäherung des Risses an das Gleitbandende und damit an die mikrostrukturelle Barriere verringert sie sich jedoch, bis sie bei  $n = 1$  den Wert Null erreicht. Damit stoppt der Riss an der Barriere, wobei nachfolgend davon ausgegangen werden soll, dass es sich hierbei um eine Korngrenze handelt.

Neu am Modell von Navarro und de los Rios (1988) ist die Beschreibung der Rissausbreitung über die Korngrenze hinweg. Zum Wachstum des Risses ist eine Risspitzenabgleitung notwendig, die nach Gleichung (2.18) nur erfolgen kann, wenn vor der Risspitze eine plastische Zone vorliegt. Daher muss vor der Ausbreitung des Risses über die Grenze zunächst ein Gleitband im Nachbarkorn aktiviert werden: Der Versetzungsaufstau vor der Korngrenze bewirkt im angrenzenden Korn ein Spannungsfeld, wobei in Verlängerung des Ausgangsgleitbandes ein singulärer Schubspannungsverlauf  $\tau(x)$  entsteht (Bild 2.11). Wird dabei in einer Versetzungsquelle im Abstand  $r_0$  zur Korngrenze die kritische Schubspannung  $\tau^c$  erreicht, kommt es zur Aktivierung des neuen Gleitbandes. Die Barriere wird so von der plastischen

Zone überwunden, was zu einem sprunghaften Anstieg der Rissspitzenabgleitung und dem Risswachstum über die Grenze hinweg führt.

Die Schubspannung  $\tau^Q$ , die auf die Versetzungsquelle wirkt, kann aus der Versetzungsdichteverteilung ermittelt werden und berechnet sich für den Fall, dass der Abstand  $r_0$  der Versetzungsquelle zur Korngrenze im Vergleich zum Korndurchmesser  $D$  klein ist ( $r_0 \ll D$ ), wie folgt:

$$\tau^Q(r_0) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{D}{r_0}} \left[ \tau^\infty - \frac{2}{\pi} \tau^F \arccos(n) \right] + \tau^F. \quad (2.19)$$

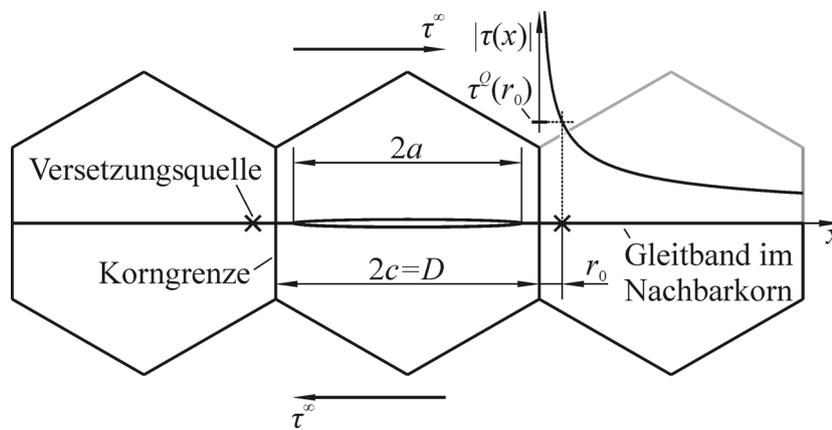


Bild 2.11: Durch die Korngrenzen begrenztes Gleitband im risstragenden Korn mit dem Schubspannungsverlauf auf einem Gleitband im Nachbarkorn.

Die Schubspannung auf eine Versetzungsquelle nimmt mit der Annäherung der Rissspitze an die Korngrenze zu ( $n \rightarrow 1$ ), so dass es bei einem kritischen Verhältnis der Risslänge zur Gleitbandlänge zur Aktivierung des neuen Gleitbandes kommt. Die größte Schubspannung auf die Versetzungsquelle tritt damit ein, wenn der Riss die Korngrenze erreicht. Genügt diese dennoch nicht, um die Gleitebenen im Nachbarkorn zu aktivieren, überwindet der Riss die erste Korngrenze nicht und es liegt somit Dauerfestigkeit vor. Dies lässt umgekehrt die Bestimmung der kritischen Schubspannung  $\tau^c$  aus dem Verhältnis  $D/r_0$  zu, die in der Versetzungsquelle überschritten werden muss, um ein Gleitband im angrenzenden Korn bei  $n=1$  zu aktivieren:

$$\tau^c = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{D}{r_0}} \frac{\sigma^D}{m^*}. \quad (2.20)$$

Hierbei ist  $\sigma^D$  die Dauerfestigkeit. Die Fließschubspannung wird im Verhältnis zum singulären Spannungsanteil vernachlässigt. Mit  $m^*$  lassen sich ungünstigere Orientierungen des benachbarten Gleitbandes berücksichtigen, wobei von den Autoren der SACHS-Faktor vorge-

schlagen wird, der bei kubisch flächenzentrierten Kristallgittern den Wert  $m^* = 2,2$  aufweist und einer statistisch mittleren Missorientierung der beteiligten Gleitsysteme Rechnung trägt.

Das eindimensionale analytische Modell von Navarro und de los Rios (1988) erfährt durch das Modell von Schick (2004) und Künkler (2007) hinsichtlich der Berücksichtigung zweidimensionaler Mikrostrukturen und Risspfade zahlreiche Erweiterungen, die im nächsten Abschnitt beschrieben werden.

### **Das Modell von Schick und Künkler**

Das von Schick (2004) entwickelte numerische Kurzrissmodell erlaubt die Nachbildung zweidimensionaler Risspfade, was zwei wesentliche Vorteile gegenüber eindimensionalen Ansätzen birgt: Einerseits kann das Abknicken des Risses an einer Korngrenze infolge unterschiedlicher Kornorientierungen berücksichtigt werden, was nach Navarro und de los Rios (1988) lediglich über den Faktor  $m^*$  einbezogen wird. Andererseits werden geometrische Riss-schließvorgänge nachgebildet, die von einem eindimensionalen Modell nicht zu erfassen sind. Die Nachbildung des Risses und seiner plastischen Zonen erfolgt als schmale Schnitte in einer unendlichen isotropen Scheibe, in der alle Gefügekörner die gleichen elastischen Eigenschaften aufweisen. Die individuelle Kornorientierung wird dagegen berücksichtigt, indem plastische Deformation auf kristallographisch vorgegebene Gleitebenen beschränkt ist. Die Schnittgerade zwischen Gleitebene und betrachteter Probenoberfläche ist die Gleitspur, auf der die Abgleitung berechnet wird. Somit wird isotrop-elastisches kristallplastisches Materialverhalten berücksichtigt.

Wie im Modell von Navarro und de los Rios (1988) liegt der Riss auf einem Gleitband, so dass eine Abgleitung zwischen den Rissufern und in den plastischen Zonen möglich ist. Die Korngrenzen beschränken die Ausdehnung der plastischen Zone, bis im Nachbarkorn eine ausreichend hohe Schubspannung auf einer Versetzungsquelle erreicht wird, die zur Aktivierung eines neuen Gleitbandes führt. Im Allgemeinen weist dies eine andere Orientierung als das Ausgangsgleitband auf, wodurch ein zickzackförmiger Risspfad entsteht, der nun mit Hilfe des zweidimensionalen Modells nachgebildet werden kann. Zudem erlaubt Schick (2004) eine Rissöffnung, die das Risswachstum im Einfachgleiten zwar nicht direkt beeinflusst; bei abgeknickten Rissen kann sie jedoch das Spannungsfeld an der Rissspitze verändern. Eine Durchdringung der Rissufer ist nicht zugelassen, so dass geometrischem Riss-schließen, das bei abgeknickten Rissen vorzufinden ist, Rechnung getragen wird. Zur Quantifizierung des Rissfortschritts wird die Riss-spitzenabgleitung  $\Delta CTSD$  genutzt und das Risswachstumsgesetz nach Wilkinson et al. (1998) (siehe Gleichung (2.14)) verwendet.

Künkler (2007) (vgl. auch Künkler et al. (2008) und Christ et al. (2009)) erweitert diesen Ansatz zur Anwendung auf einen zweiphasigen Werkstoff, in dem gleichzeitig Körner der austenitischen und ferritischen Phase vorliegen. Die unterschiedlichen Fließschubspannungen in beiden Phasen und die jeweils verschiedenen Barrierewirkungen von Korn- und Phasengrenzen gehen dabei in die Modellierung ein.

Durch Untersuchung des Spannungsfeldes an der Spitze eines Stadium I-Risses, wird von Künkler (2007) gezeigt, dass die Schubspannung auf weitere mögliche Gleitsysteme an der Risspitze mit zunehmender Risslänge ansteigt. Wird eine kritische Spannungssingularität erreicht, erfolgt die Aktivierung einer zweiten Gleitebene und das Risswachstum wird im mikrostrukturbestimmten Stadium II nachgebildet.

Liegen an der Risspitze zwei aktive Gleitbänder vor, kommt es – sofern die Fließschubspannung überschritten wird – auf beiden zur zyklischen Abgleitung. Infolgedessen stellen sich die zyklischen Rissspitzenableitungen  $\Delta CTSD_1$  und  $\Delta CTSD_2$  ein, die der ersten bzw. zweiten plastischen Zone zuzuordnen sind und aus denen eine Rissspitzenöffnung resultiert (Bild 2.12a). Aus beiden Rissspitzenableitungen wird ein Rissfortschritt ( $da_1$  und  $da_2$ ) gemäß des Risswachstumsgesetzes von Wilkinson et al. (1998) (siehe Gleichung (2.14)) auf dem jeweiligen Gleitband errechnet. Die Verlängerung des Risses erfolgt dann jedoch nicht einzeln in die entsprechenden Richtungen der Gleitsysteme sondern die Beträge aus beiden Systemen werden vektoriell zum Gesamtrissfortschritt  $da$  addiert (Bild 2.12b). An die neue Risspitze werden weitere Gleitbänder angesetzt (Bild 2.12c), die vorherigen jedoch entfernt, da sich ihr Einfluss auf die aktuellen Vorgänge an der Risspitze in Vergleichsrechnungen als gering erwiesen hat. Die Ausdehnung der plastischen Zonen ist zunächst auf das risstragende Korn beschränkt. Wird jedoch gemäß der Vorstellung von Navarro und de los Rios (1988) in einer Versetzungsquelle im Nachbarkorn eine ausreichend hohe Schubspannung auf einer Gleitebene ermittelt, wird diese aktiviert und die plastische Zone breitet sich in das Nachbarkorn hinein aus.

Das zweidimensionale Modell von Schick (2004) und Künkler (2007) kann nicht mehr analytisch gelöst werden. Daher wird zur Lösung der darin auftretenden Differentialgleichungen eine Randelementemethode verwendet, die in Abschnitt 3.2.2 detailliert vorgestellt wird.

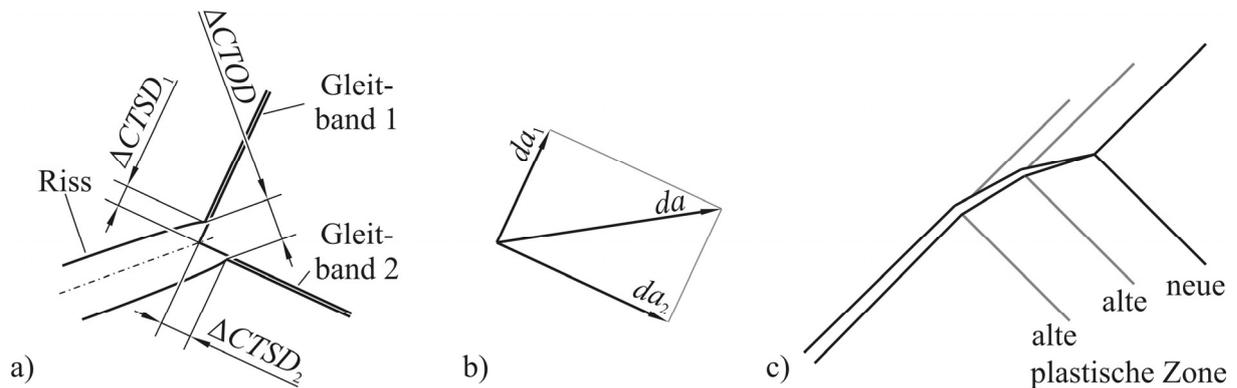


Bild 2.12: Rissfortschritt im mikrostrukturbestimmten Stadium II nach Künkler (2007) mit a) Verschiebungen an der Rissspitze, b) vektorielle Addition der Rissverlängerungen und c) Ansetzen neuer Gleitbänder an der Rissspitze.

Von den oben vorgestellten Modellen der Kurzrisssausbreitung erweisen sich die rein empirischen für die in dieser Arbeit angestrebte mechanismenorientierte Nachbildung des Risswachstums als ungeeignet, da die zugrunde liegenden Mechanismen in ihnen keinen Eingang finden. Rein mechanistische Modelle bilden dagegen die plastischen Vorgänge, die zum Rissfortschritt führen, sehr detailliert bis auf die Ebene einzelner Versetzungen ab. Der Rechenaufwand ist hierbei jedoch sehr groß, so dass eine Simulation der Rissausbreitung in beliebigen zweidimensionalen Gefügen über mehrere Körner hinweg kaum möglich erscheint. Die zusätzliche Berücksichtigung der sich an der Rissspitze neu bildenden Martensitphase würde die Komplexität des Modells zusätzlich steigern.

Als vielversprechend erweisen sich die mechanistischen Modelle mit kontinuumsmechanischer Beschreibung der plastischen Deformation, da hier die Mechanismen der Rissausbreitung einbezogen werden. Durch die vereinfachte Beschreibung der plastischen Zonen reduziert das auf der Vorstellung von Navarro und de los Rios basierende Modell von Schick und Künkler den Rechenaufwand und ist als Grundlage zur Modellierung des Kurzrissswachstums unter dem Einfluss der Phasenumwandlung an der Rissspitze besonders geeignet. In einem Vergleich zwischen der detaillierten Nachbildung diskreter Versetzungen mit einem kontinuumsmechanischen Ansatz zeigen Hansson und Melin (2008), dass nur geringe Abweichungen entstehen und somit von letzterem genügend genaue Ergebnisse zu erwarten sind.

Hat ein Riss eine ausreichende Länge erreicht – meist nach dem Durchschreiten mehrerer Körner – ist der Einfluss der Mikrostruktur auf die Rissausbreitung vernachlässigbar und das Risswachstum kann durch klassische Modelle der Langrisssausbreitung beschrieben werden.

### 2.5.2 Modelle zur Beschreibung der Langrissausbreitung

Ist ein Riss lang im Vergleich zur Ausdehnung seiner plastischen Zone an der Rissspitze, ist die linear elastische Bruchmechanik (LEBM) zur Behandlung langer Risse im Stadium II geeignet. Hierbei lässt sich das Risswachstumsverhalten durch den Spannungsintensitätsfaktor  $K$  quantifizieren, der nachfolgend vorgestellt wird.

#### Das $K$ -Konzept der LEBM

Der Begriff des Spannungsintensitätsfaktors  $K$  geht auf Irwin (1958) zurück und beschreibt die Intensität des elastischen Spannungsfeldes in der Umgebung einer Rissspitze. Die Spannungen in jedem durch den Abstand  $r$  zur Rissspitze und den Winkel  $\varphi$  zur Rissebene bezeichneten Punkt (Bild 2.13) können aus dem  $K$ -Faktor bestimmt werden. Dabei ist für jede Rissöffnungsmode (I bis III, vgl. Bild 2.1) der jeweilige  $K$ -Faktor relevant; unter reiner Modus I-Beanspruchung ist es  $K_I$  (Gross und Seelig 2007):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{1}{2}\varphi\right) \begin{Bmatrix} 1 - \sin\left(\frac{1}{2}\varphi\right) \sin\left(\frac{3}{2}\varphi\right) \\ 1 + \sin\left(\frac{1}{2}\varphi\right) \sin\left(\frac{3}{2}\varphi\right) \\ \sin\left(\frac{1}{2}\varphi\right) \cos\left(\frac{3}{2}\varphi\right) \end{Bmatrix}. \quad (2.21)$$

Ähnliche Formeln beschreiben die Spannungsfelder, die aus den Moden II oder III und den zugehörigen Spannungsintensitätsfaktoren  $K_{II}$  und  $K_{III}$  resultieren. Treten mehrere Rissöffnungsmoden gleichzeitig auf, wird von einer Mixed-Mode-Beanspruchung gesprochen, bei der sich die Spannungen aus der Überlagerung der Einzelmoden ergeben. Aus Gleichung (2.21) ist ersichtlich, dass die Spannungen eine  $r^{-1/2}$ -Singularität aufweisen und damit an der Rissspitze unendliche Werte annehmen. Da reale Werkstoffe jedoch nur endliche Spannungen ertragen, liegt an der Rissspitze eine plastische Zone vor, die den Gültigkeitsbereich des Spannungsintensitätsfaktors nach innen begrenzt. Innerhalb dieser Zone liegt die Prozesszone, in der die eigentliche Bindungslösung erfolgt. In größerer Entfernung der Rissspitze nimmt der Einfluss des  $K$ -Faktors ab und in Gleichung (2.21) vernachlässigte Terme gewinnen an Bedeutung. Der vom Spannungsintensitätsfaktor bestimmte Bereich ist schematisch in Bild 2.13 dargestellt.

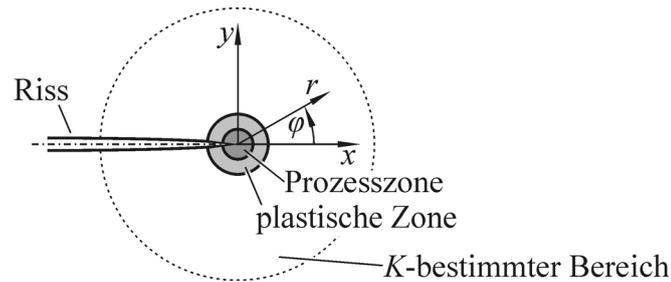


Bild 2.13: Koordinaten an der Risspitze und vom Spannungsintensitätsfaktor bestimmter Bereich nach Gross und Seelig (2007).

Die Bestimmung z.B. des Spannungsintensitätsfaktors  $K_I$  ist aus der aufgebrachtten äußeren einachsigen Zugbeanspruchung  $\sigma^\infty$ , der halben Länge  $a$  des Innenrisses und einem Geometriefaktor  $Y$  möglich:

$$K_I = \sigma^\infty \sqrt{\pi a} Y. \quad (2.22)$$

Letzterer beträgt für den einfachsten Fall eines Risses in einer unendlichen Scheibe unter Zugbeanspruchung senkrecht zur Rissebene  $Y=1$ . Für abweichende Geometrien muss der Faktor jedoch individuell bestimmt werden. Mit Hilfe von numerischen Berechnungen können Spannungsintensitätsfaktoren aus dem Spannungsfeld vor der Risspitze ermittelt werden. Eine umfangreiche Sammlung so ermittelter  $K$ -Faktoren ist z.B. in Murakami (1987) zu finden.

Paris et al. (1961) und Paris und Erdogan (1963) stellen zwischen der Schwingbreite des Spannungsintensitätsfaktors  $\Delta K = K_{\max} - K_{\min}$  und der Rissausbreitungsrate  $da/dN$  einen empirischen Zusammenhang her. Er ist abhängig vom Spannungsverhältnis ( $R = \sigma_{\min} / \sigma_{\max} = K_{\min} / K_{\max}$ ) und bis heute von großer Bedeutung für die Lebensdauervorhersage von Bauteilen:

$$\frac{da}{dN} = C^P (\Delta K)^{m^P}. \quad (2.23)$$

$C^P$  und  $m^P$  stellen hierbei werkstoffabhängige Konstanten dar, die experimentell zu bestimmen sind. Die doppelt-logarithmische Auftragung (Bild 2.2) dieses als PARIS-Gesetz bekannten Zusammenhanges führt auf die PARIS-Gerade mit linearer Zunahme des Logarithmus der Risswachstumsrate mit dem Logarithmus der Schwingbreite des Spannungsintensitätsfaktors. Erreicht der Spannungsintensitätsfaktor den kritischen Wert  $K_c$ , kommt es zum instabilen Rissfortschritt und damit zum Bruch.

Während der Spannungsintensitätsfaktor aus dem lokal an der Rissspitze vorzufindenden Spannungsfeld resultiert, kann der Bruchvorgang auch durch das Konzept der Energiefreisetzungsrates beschrieben werden, das eher globalen Charakter aufweist.

### Das Konzept der Energiefreisetzungsrates

Im Konzept der Energiefreisetzungsrates wird ein Zusammenhang hergestellt zwischen dem Rissfortschritt und der Steifigkeitsänderung, die er in einer Probe oder einem Bauteil verursacht: Wird einer rissbehafteten Probe eine Randverschiebung  $v_F$  aufgeprägt (Bild 2.14a), speichert sie wie eine Feder potentielle Energie  $\Pi$ . Kommt es dann bei gleich bleibender Randverschiebung zu einer gedachten Rissverlängerung  $\Delta a$ , nimmt die potentielle Energie des Systems ab, wobei die freigesetzte Energie  $-\Delta\Pi$  zur Schaffung der neuen Rissoberfläche zur Verfügung steht (Bild 2.14b). Wird die freigesetzte Energie auf die infinitesimale Fläche des Rissfortschritts bezogen, folgt daraus die Energiefreisetzungsrates  $\mathcal{G}$ . Im ebenen Fall, bei dem die freigesetzte Energie auf die Einheitsdicke bezogen ist, ergibt sich folgender Zusammenhang:

$$\mathcal{G} = -\frac{d\Pi}{da} . \quad (2.24)$$

$da$  ist hierbei die infinitesimale Rissverlängerung.

Kann die freigesetzte Energie vollständig in Bruchflächenenergie  $\Gamma$  umgewandelt werden, breitet sich der Riss stabil aus. Während  $\Gamma$  mit zunehmender Risslänge linear ansteigt, nimmt die potentielle Energie  $\Pi$  der Probe quadratisch ab. Die Summe  $E$  aus beiden Energien besitzt ein Maximum bei der kritischen Risslänge  $a_c$ , bei dessen Überschreitung der instabile Rissfortschritt auftritt und die Probe schlagartig versagt (Bild 2.14c). Die kritische Risslänge  $a_c$  ist damit gleichbedeutend mit dem kritischen Spannungsintensitätsfaktor  $K_c$ .

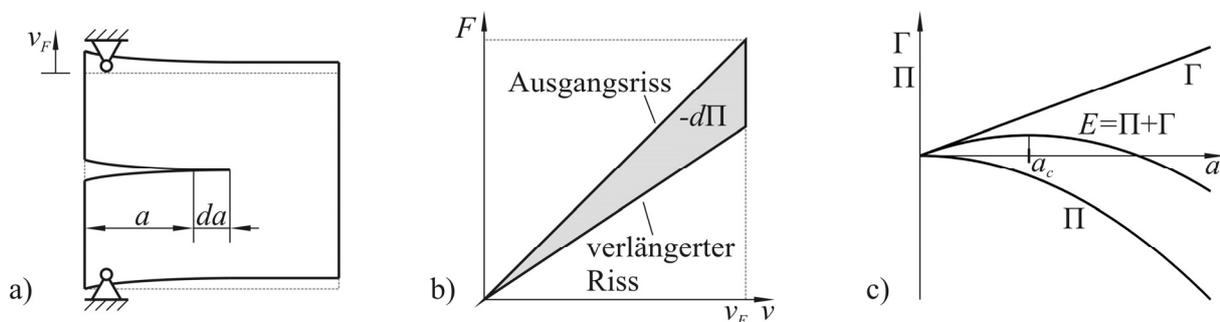


Bild 2.14: a) Rissbehaftete Probe mit aufgebrachter Randverschiebung, b) Energieänderung infolge Rissfortschritt und c) Energieverläufe bei Zunahme der Risslänge.

Unter der Annahme linearer Elastizität besteht bei reiner Modus I-Beanspruchung zwischen der Energiefreisetzungsrate  $\mathcal{G}$  und dem Spannungsintensitätsfaktor folgender Zusammenhang:

$$\mathcal{G} = \frac{\kappa + 1}{8G} K_I^2 \quad \text{mit } \kappa = \begin{cases} 3 - 4\nu & \text{für EVZ} \\ (3 - \nu)/(1 + \nu) & \text{für ESZ} \end{cases} \quad (2.25)$$

Hierbei stehen die Abkürzungen EVZ für den ebenen Verzerrungszustand und ESZ für den ebenen Spannungszustand. Ähnliche Zusammenhänge sind auch für die Moden II und III gegeben:

$$\mathcal{G} = \frac{\kappa + 1}{8G} K_{II}^2 \quad \mathcal{G} = \frac{1}{2G} K_{III}^2 \quad (2.26)$$

Ist das Risswachstum mikrostrukturunabhängig, die plastische Zone vor der Rissspitze jedoch nicht vernachlässigbar klein, kann das Risswachstum durch das von Rice (1968) vorgeschlagene  $J$ -Integral, das Dugdale-Modell (Dugdale 1960) oder das  $CTOD$ -Konzept (Wells 1961) beschrieben werden. Hierauf soll in der vorliegenden Arbeit jedoch nicht eingegangen werden.

Um die Rissausbreitung während der gesamten Lebensdauer eines Bauteils erfassen zu können, beinhalteten dieser und der vorangegangene Abschnitt Modelle zur Beschreibung des Kurz- und Langrisswachstums. Im Fokus der vorliegenden Arbeit steht jedoch die Untersuchung des Kurzzrisswachstums, wobei der Einfluss martensitischer Phasentransformation berücksichtigt werden soll. Daher werden nachfolgend die wichtigsten Modelle zur Beschreibung der Martensitbildung vorgestellt.

## 2.6 Modelle zur Beschreibung der martensitischen Phasentransformation

Die Transformation von Austenit in die thermodynamisch stabilere Martensitphase erfolgt diffusionslos, so dass die Nachbarschaften zwischen den Atomen erhalten bleiben. Eine erste Beziehung zwischen dem Ausgangsgitter und der Struktur des Umwandlungsproduktes liefert Bain (1924): Durch die Stauchung des kubisch flächenzentrierten Atomgitters in  $z$ -Richtung des Austenits  $\gamma$  ( $[001]_\gamma$ -Richtung) und Dehnung in  $x$ - und  $y$ -Richtung ( $[100]_\gamma$ - und  $[010]_\gamma$ -Richtung) entsteht das kubisch raumzentrierte Gitter des Martensits  $\alpha'$  (Bild 2.15). Die Vorstellung von Bain (1924) gibt zwar die Transformation vom kfz ins krz Gitter unter Beibehaltung der Nachbarschaftsbeziehungen wieder, die Mechanismen der Umwandlung werden hierdurch jedoch nicht beschrieben.

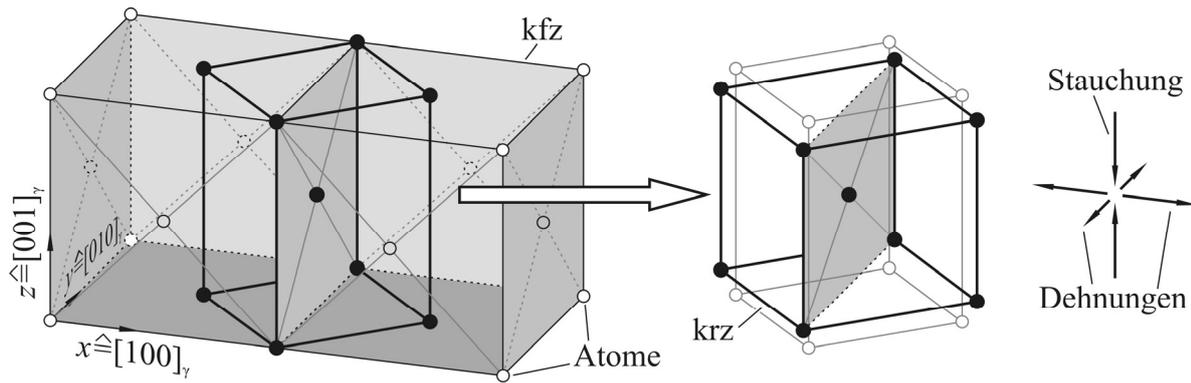


Bild 2.15: Martensitische Umwandlung durch Deformation des Austenits nach Bain (1924).

Durch röntgenographische Untersuchungen können Kurdjumow und Sachs (1930) zeigen, dass eine Ebene dichtest gepackter Atome im Austenit parallel ist zu einer dicht gepackten Ebene im Martensit nach der Transformation. Zudem weisen jeweils eine dichtest bzw. dicht gepackte Richtung Parallelität auf. Auf der Grundlage dieser Untersuchungen erkennen die Autoren, dass Schubverzerrungen für die Umwandlung verantwortlich zeichnen und hierfür Scherungen auf zwei diskreten Gleitebenen erforderlich sind.

Untersuchungen mit Hilfe von entsprechend der Gitterstrukturen geschichteter Kugeln, die die Atome repräsentieren, führen Bogers und Burgers (1964) zum Zusammenhang zwischen der Versetzungsbewegung und der martensitischen Umwandlung. Zunächst erfolgt eine Scherung auf einer  $\{111\}_{\text{kfz}}$ -Ebene um den Vektor  $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} a \langle 112 \rangle_{\text{kfz}}$ , wobei  $a$  die Kantenlänge der Elementarzelle bezeichnet. Die Scherung ist in Bild 2.16a an einem Volumenkörper veranschaulicht. Er besteht aus zwei kfz Elementarzellen (vgl. Bild 2.15), die an der weißen  $\{111\}_{\text{kfz}}$ -Ebene geschnitten sind und von der verzerrten krz Elementarzelle durchdrungen werden. Zur Vereinfachung der Anschauung sind nur die in der Ansicht sichtbaren Eckatome der Elementarzellen dargestellt.

Atome auf Ebenen parallel zur weißen Schnittebene werden bei der Scherung verschoben, deren Resultat in Bild 2.16b dargestellt ist. Das Koordinatensystem ist dabei als Orientierungspunkt unverändert geblieben. Im Anschluss wird das Gitter auf der neu entstandenen  $\{110\}_{\text{krz}}$ -Ebene um den Vektor  $\frac{1}{8} a \langle 110 \rangle_{\text{krz}}$  geschert, der parallel zu einer  $\langle 112 \rangle_{\text{kfz}}$ -Richtung liegt. Bild 2.16c illustriert die Verzerrung, wobei die Atompositionen des Ausgangskörpers denen aus Bild 2.16b entsprechen. Es wird lediglich ein neuer Volumenkörper erstellt, der an der neuen (weißen) Scherebene geschnitten ist. Der Endzustand nach beiden Scherungen ist in Bild 2.16d dargestellt, wobei nun eine unverzerrte krz Einheitszelle entstanden und die kfz

Ausgangsphase verzerrt ist. Die Lage der in Bild 2.16a bis d eingezeichneten  $[101]_y$ -Richtung bleibt während beider Scherungen unverändert erhalten und entspricht im Endzustand einer  $[111]_a$ -Richtung.

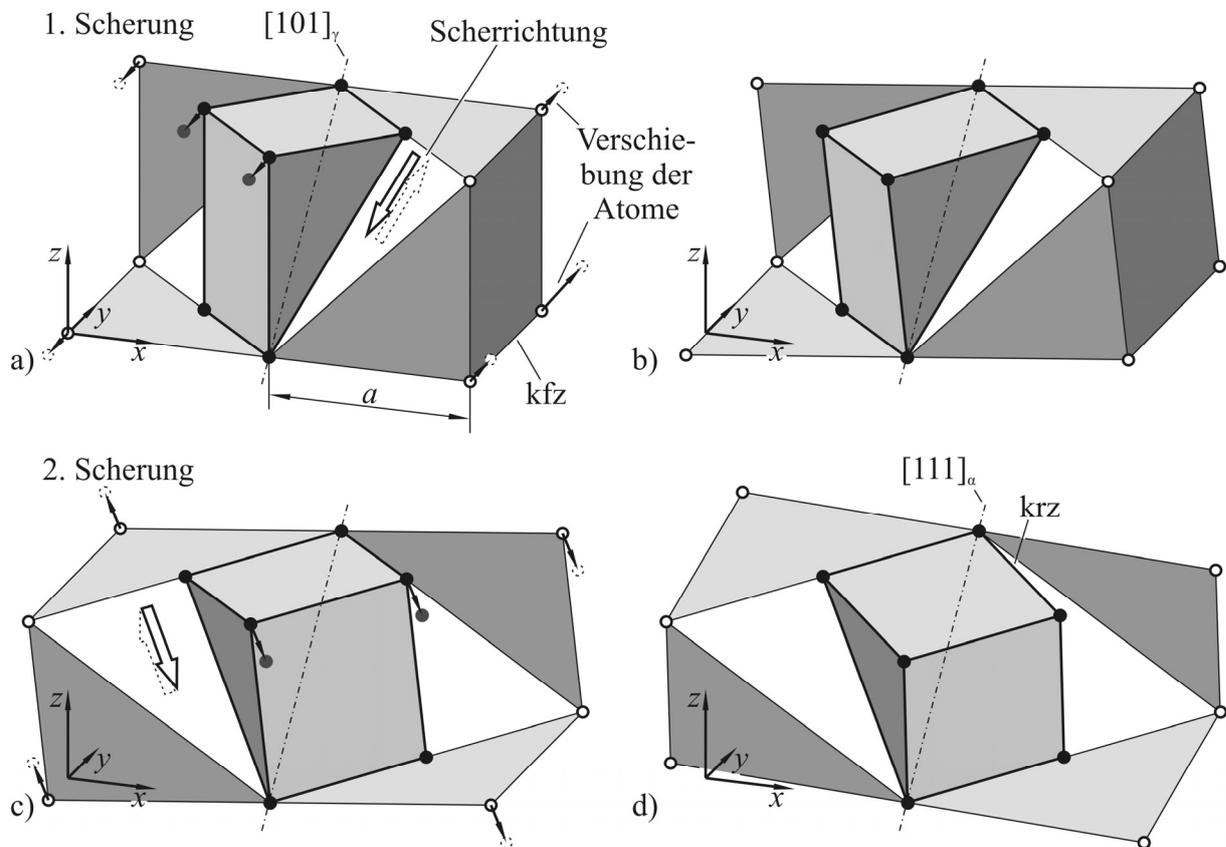


Bild 2.16: Volumenkörper zur Illustration der Scherungen bei der martensitischen Umwandlung: a) Verzerrung des kfz Gitters durch die 1. Scherung, b) Endprodukt der 1. Scherung, c) Verzerrung durch die 2. Scherung und d) unverzerrtes krz Gitter als Resultat beider Scherungen.

Würden die Kugeleneben unter Scherung eine rein translatorische Verschiebung ausführen, käme es zu Durchdringungen der Kugeln. Um dies zu verhindern, beschreibt der Verschiebungsweg der Kugeln eine Kreisbahn. Dies illustriert Bild 2.17 anhand der Seitenansicht zweier Kugelenebenen, bei denen die Kugeln zur vereinfachten Darstellung nicht wie die Atome im kfz oder krz Gitter in die Tiefe verschoben sind. Es ist ersichtlich, dass die Kugelenebenen während der Scherung ausgehend von ihrem Anfangsabstand  $l_1$  eine vom Scherweg (und dem Kugeldurchmesser) abhängige Abstandszunahme  $\Delta l_1$  erfahren, aus der eine Volumenzunahme senkrecht zu den Kugelenebenen resultiert. Nach der Beschreibung der Phasentransformation durch Bogers und Burgers (1964) geht die Scherung auf der ersten Ebene mit einer Volumenzunahme von 5,4% und die zweite mit 3,3% einher.

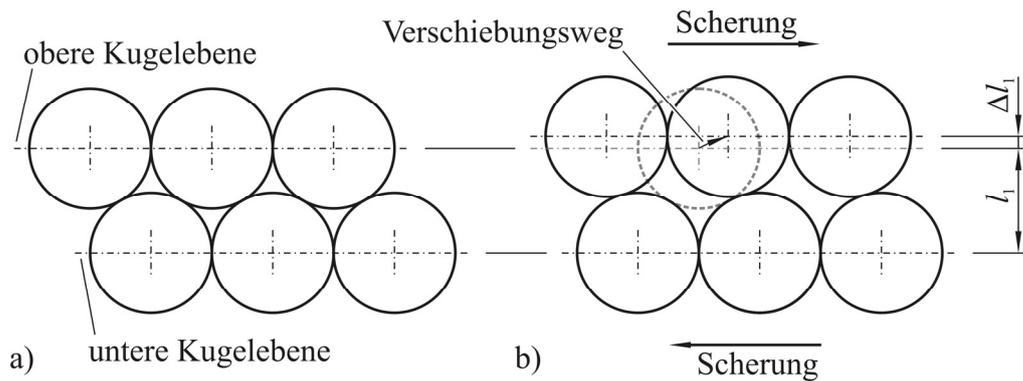


Bild 2.17: Vergrößerung des Kugelebenenabstandes infolge von Scherung der Ebenen mit a) zwei unbelasteten Ebenen im Ausgangszustand und b) den einer Scherbeanspruchung ausgesetzten Ebenen. (Zur Vereinfachung der Darstellung sind die Atome nicht wie im realen Gitter in die Tiefe verschoben.)

In Übereinstimmung mit dem Modell von Bogers und Burgers (1964), nach dem zwei Scherungen zur Phasentransformation erforderlich sind, können Olson und Cohen (1972) zeigen, dass sich Martensitkeime an Scherbändern bilden, die einander kreuzen. Sie beschreiben die Scherungen als Anteile von Partialversetzungen  $T = \frac{1}{6} a \langle 112 \rangle_{\text{kfz}}$ , wobei die erste Scherung  $T/3$  und die zweite  $T/2$  beträgt, die beide den Werten von Bogers und Burgers (1964) entsprechen. Die Autoren interpretieren die Scherungen als Felder von Partialversetzungen auf jeder 3. bzw. 2. Gleitebene. Dabei lässt die erste Scherung ein Feld von Stapelfehlern zurück, das nachfolgend von einem Feld von Partialversetzungen durchlaufen wird.

Olson und Cohen (1975) erweitern ihr Modell hinsichtlich der quantitativen Erfassung der Martensitbildung, wobei die plastische Dehnung die wesentliche Eingangsgröße darstellt, da sie die Scherbänder im Austenit hervorruft. So wird zunächst der aus der plastischen Dehnung bei einachsigen Zug resultierende Volumenanteil der Scherbänder in der Austenitphase ermittelt, der zur Bestimmung der Scherbandanzahl dient. Diese wird durch stereologische Betrachtungen mit der Zahl der Schnittpunkte dieser Scherbänder in Verbindung gebracht, an denen sich unter Berücksichtigung von Wahrscheinlichkeitsaspekten Martensitkeime bilden können. Aus der Anzahl dieser Keime wiederum wird auf den sich einstellenden Martensitvolumengehalt  $f^{\alpha'}$  geschlossen, was letztlich auf folgenden Zusammenhang zwischen  $f^{\alpha'}$  und der plastischen Dehnung  $\varepsilon_{pl}$  führt:

$$f^{\alpha'} = 1 - \exp\left\{-\beta\left[1 - \exp(-\alpha\varepsilon_{pl})\right]^n\right\} \quad (2.27)$$

Bei  $\alpha$  und  $\beta$  sowie dem Exponenten  $n$  handelt es sich um experimentell zu bestimmende, temperaturabhängige Parameter. In  $\beta$  geht die Wahrscheinlichkeit ein, mit der sich aus einem

Schnittpunkt von Scherbändern ein Martensitkeim bildet, das durchschnittliche Scherbandvolumen und das durchschnittliche Volumen, den der aus einem Keim entstandene Martensit einnimmt.

Han et al. (2004) beziehen bei der Bestimmung des Martensitvolumenanteils zusätzlich mikrostrukturelle Aspekte, nämlich die Orientierung der Austenitkörner mit ein. Nach Kurdjumov und Sachs (1930) sind bei gegebener Ausgangsorientierung 24 verschiedene Varianten der Orientierung des sich bildenden Martensits möglich, so dass für jede dieser Varianten die Wahrscheinlichkeit bestimmt wird, mit der die Umwandlung stattfindet. Es kann sich nun Martensit in verschiedenen Varianten bilden, wobei sich der Gesamtvolumengehalt aus der Summe der Volumengehalte jeder gebildeten Martensitvariante ergibt. Das Modell kann auch für vielkristallines Material eingesetzt werden, z.B. bei Annahme beliebig orientierter Austenitkörner.

Beide oben vorgestellten Modelle bestimmen einen Martensitvolumengehalt, der sich unter großer globaler Beanspruchung im plastischen Bereich einstellt. Eine Aussage über den Ort der Phasenumwandlung wird hierbei jedoch nicht getroffen. Beanspruchungen, die zum Wachstum von Ermüdungsrissen unter HCF-Bedingungen führen, sind niedriger; in der Regel im global elastischen Bereich. Hier liegen hohe plastische Dehnungen lediglich an der Risspitze vor, so dass die Umwandlung nur lokal stattfindet (Weitere mögliche Orte der Phasentransformation, wie Gleitbänder und Korngrenzen sollen hier nicht betrachtet werden.).

Zur Bestimmung der Größe und Form des Martensitbereichs an der Spitze langer Risse entwickeln Hallberg et al. (2012) ein Modell, das die Phasenumwandlung durch eine Energiebetrachtung erfasst. Nach vorhergehender experimenteller Ermittlung der Modellparameter (Hallberg et al. 2007) werden auf numerischem Weg mit Hilfe von finiten Elementen die Umwandlungsbereiche an der Risspitze bestimmt. Mikrostrukturelle Einflüsse und der Effekt der Volumenzunahme während der Phasentransformation finden hierbei jedoch keine Berücksichtigung. Durch solche Energiebetrachtungen kann auch die reversible Martensitbildung in Formgedächtnislegierungen modelliert werden, z.B. Bartel und Hackl (2010).

Den Einfluss der Volumendehnung des umgewandelten Bereiches auf einen Riss bilden Mei und Morris (1991) in einem einfachen analytischen Modell nach. Dabei betrachten sie einen geradlinigen Riss mit der Länge  $2a$ , der innerhalb einer rechteckigen Martensitzone liegt. Diese hat eine Länge von  $2(a + \delta)$  und eine Breite von  $2w$  (Bild 2.18). Die Volumenzunahme des Umwandlungsbereiches wird durch einen negativen Verschiebungssprung an dessen Anfang und einen positiven am Ende nachgebildet. Der Betrag der Verschiebung  $b$  ist jedoch an

beiden Positionen gleich groß. Nach Hirth und Lothe (1982) ergibt sich daraus folgender Spannungsverlauf  $\sigma_{yy}$  entlang der Risslinie mit Singularitäten am Anfang und am Ende der Martensitzone:

$$\sigma_{yy} = -\frac{Gb}{2\pi(1-\nu)} \cdot \frac{1}{a+\delta-x} - \frac{Gb}{2\pi(1-\nu)} \cdot \frac{1}{a+\delta+x} \quad (2.28)$$

Auf den Riss ( $|x| \leq a$ ) wirken somit Druckspannungen (vgl. Bild 2.18), so dass eine äußere Zugbeanspruchung  $\sigma_0$  einen positiven Schwellenwert überschreiten muss, um eine Rissöffnung zu bewirken. Reicht die Beanspruchung aus, um den Riss zu öffnen, wird von Mei und Morris (1991) angenommen, dass die Spannungen an der Spitze des geöffneten Teils des Risses nicht unendlich groß werden. Die dort von  $\sigma_0$  verursachte Spannungssingularität muss demnach von der Singularität des Umwandlungsbereiches kompensiert werden. Die Autoren berechnen unter dieser Annahme, bis zu welcher Koordinate  $x_0$  der Riss bei gegebener äußerer Beanspruchung geöffnet ist:

$$x_0 = \sqrt{(a+\delta)^2 - \left[ \frac{w}{\pi} \cdot \frac{E\varepsilon_M}{\sigma_0(1-\nu^2)} \right]^2} \quad \text{mit } \varepsilon_M = \frac{b}{2w}. \quad (2.29)$$

Hieraus ist ersichtlich, dass die Rissöffnung mit zunehmendem  $\sigma_0$  von der Mitte her bis zu den Risspitzen voranschreitet. Bei zyklischer Beanspruchung ist der Riss damit im Vergleich zu einem, der nicht von Martensit umgeben ist, für einen größeren Teil des Zyklus geschlossen. Die Schwingbreite der Rissöffnungsverschiebung nimmt somit ab und das Risswachstum verlangsamt sich durch transformationsinduziertes Riss schließen.

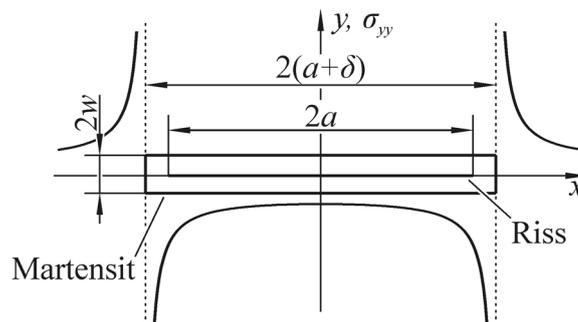


Bild 2.18: Riss im Martensitbereich und von der Volumenzunahme hervorgerufener Spannungsverlauf  $\sigma_{yy}$  nach Mei und Morris (1991).

Bei den vorgestellten Modellen der Martensitbildung werden die mikrostrukturellen Vorgänge detailliert beschrieben (Bogers und Burgers 1964, Olson und Cohen 1975), die Problemstellung der Phasenumwandlung an einer Risspitze kontinuumsmechanisch behandelt (Hallberg

et al. 2012) und die Auswirkungen der Volumenzunahme untersucht (Mei und Morris 1991). Sie decken dabei aber jeweils nur einen Teilaspekt der Zielsetzung der vorliegenden Arbeit ab oder gehen nicht auf mikrostrukturelle Aspekte ein, die für die Kurzrissausbreitung von großer Bedeutung sind. Daher wird im folgenden Abschnitt ein Modell entwickelt, das die Martensitbildung an der Spitze kurzer Ermüdungsrisse unter Einbeziehung der Mikrostruktur erfasst und gleichzeitig die Rückwirkung der neu entstandenen Phase auf die Rissausbreitung berücksichtigt.

### 3 Modell zur Beschreibung des Kurzrissswachstums unter dem Einfluss lokaler Phasenumwandlung

Dieses Kapitel beschreibt die modellmäßige Nachbildung der martensitischen Phasenumwandlung an der Spitze kurzer Ermüdungsrisse und deren Wachstum im metastabilen austenitischen Edelstahl X2CrNi18-9. Die Basis hierfür stellen die im Rahmen des Gemeinschaftsprojektes am Institut für Werkstofftechnik der Universität Siegen erzielten Erkenntnisse dar, die durch experimentelle Untersuchungen des Ermüdungsverhaltens an diesem Werkstoff gewonnen werden konnten (Roth 2012, siehe auch Abschnitt 2.2). Die für die Modellbildung wichtigen Ergebnisse werden hier zur Übersicht noch einmal kurz zusammengefasst:

- Risse initiieren zum größten Teil an Zwillingsgrenzen, an denen zuvor keine Phasenumwandlung stattgefunden hat (65% der gefundenen Risse) oder auf Korngrenzen (19%). Die Rissentstehung auf Gleitbändern (8%) ist möglich, wenn auch nur selten zu beobachten. Weitere Rissinitiiierungsorte sollen nicht betrachtet werden.
- Nach der Entstehung von Rissen ist ihr Wachstum im Stadium I ohne Phasentransformation an der Rissspitze möglich.
- Kann vor der Rissspitze ein zweites Gleitsystem aktiviert werden, kommt es zur Phasentransformation an sich kreuzenden Scherbändern. Das Risswachstum wird dann von der Volumendehnung des umgewandelten Bereiches beeinflusst.
- Der Riss wächst innerhalb des neu gebildeten Martensits auf einer kristallographischen Ebene, wobei der Vorlauf des Transformationsbereiches vor der Rissspitze gering ist. Die für mikrostrukturell kurze Risse typische oszillierende Wachstumsgeschwindigkeit ist auch unter dem Einfluss der neu gebildeten Phase messbar.

Wächst ein Riss ohne Phasentransformation im Stadium I kann sein Ausbreitungsverhalten durch das Modell von Schick und Künkler (vgl. Abschnitt 2.5.1) beschrieben werden, so dass auf die Rissausbreitung ohne Phasentransformation nicht weiter eingegangen werden soll. Der aus Sicht der Modellierung neue Aspekt des untersuchten Werkstoffs besteht in der Phasenumwandlung, die das Risswachstum begleitet, wenn vor der Rissspitze zwei Gleitsysteme aktiv sind. Nachfolgend wird daher ein auf den Untersuchungen von Roth (2012), dem Risswachstumsmodell von Künkler (2007) (vgl. auch Künkler et al. (2008) und Christ et al. (2009)) und der Beschreibung der Martensitbildung von Olson und Cohen (1972) basierendes zweidimensionales Modell der Phasenumwandlung während des Rissfortschritts vorgestellt.

### 3.1 Ein neues Modell zur Simulation des Kurzrisswachstums unter Einbeziehung martensitischer Phasenumwandlung an der Rissspitze

Die in Abschnitt 2.6 vorgestellten Modelle der martensitischen Phasentransformation von Kurdjumow und Sachs (1930) sowie von Bogers und Burgers (1964) gehen davon aus, dass Scherungen auf zwei verschiedenen Gleitsystemen erforderlich sind, um die Umwandlung hervorzurufen. In Übereinstimmung mit dieser Vorstellung finden Olson und Cohen (1972) Martensitkeime auf sich kreuzenden Scherbändern. Hieraus ist abzuleiten, dass zur Bildung von Martensit zwei aktive Gleitsysteme an der Rissspitze vorliegen müssen, was auch durch die experimentellen Untersuchungen von Roth (2012) bestätigt wird. Diese Situation ist auch in der Nachbildung des Risswachstums im mikrostrukturbestimmten Stadium II in Künkler (2007) wiederzufinden, wo ein Kriterium zur Aktivierung des zweiten Gleitsystems gefunden wird.

#### 3.1.1 Aktivierung einander kreuzender Gleitbänder in der Rissspitzenumgebung

Um festzustellen, ob es an einem Stadium I-Riss zur Aktivierung eines zweiten Gleitbandes kommt, untersucht Künkler (2007) das Schubspannungsfeld an der Rissspitze unter kombinierter Modus I- und II-Beanspruchung. Im Vergleich zum rein elastischen Fall reduziert sich zwar insgesamt die Schubspannung  $\tau_{r\varphi}$ , wenn es zur Abgleitung auf einem ersten Gleitband kommt; weiterhin sind jedoch Richtungen mit hohen Spannungswerten vorzufinden (vgl. Bild 3.1). Liegen diese auf einer möglichen Gleitebene vor, kommt es zu deren Aktivierung sofern die Spannungssingularität hierfür ausreicht.

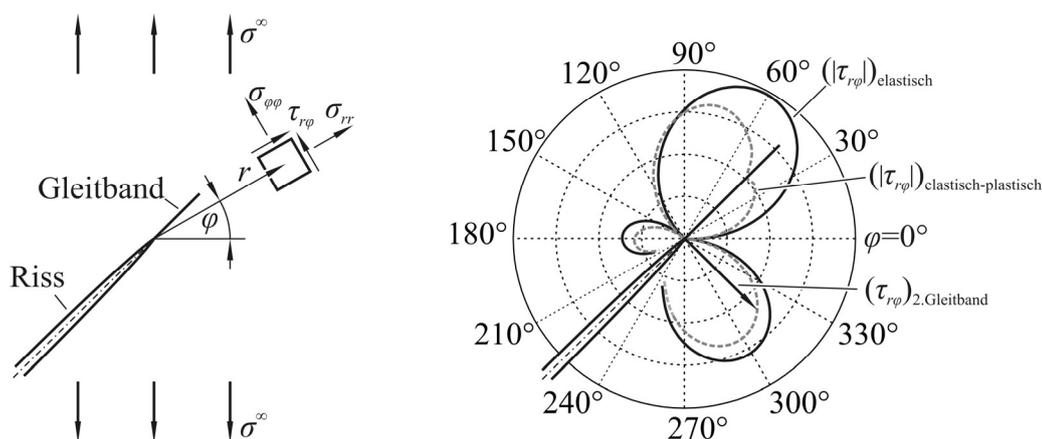


Bild 3.1: Schubspannungen an der Rissspitze unter kombinierter Modus I- und II-Beanspruchung nach Künkler (2007).

Die Untersuchungen von Roth (2012) zeigen, dass es an der Rissspitze zu einer Scherung auf verschiedenen parallelen Gleitebenen je Gleitrichtung kommt. Um dies zu untermauern, sind

in Bild 3.2 oberhalb der Rissebene die in verschiedenen Punkten P der Rissspitzenumgebung vorliegenden Schubspannungen  $\tau_{\xi\eta}$  über dem Winkel  $\psi$  aufgetragen. Sie ergeben sich aus dem elastischen Spannungsfeld an der Rissspitze (z.B. Gross und Seelig 2007), das sich infolge der äußeren Beanspruchung  $\sigma^\infty$  einstellt. Der Riss mit der Länge  $2a$  liegt hierbei unter reiner Modus I-Beanspruchung, wie es beim Rissswachstum unter dem Einfluss von Martensitbereichen in vielen Fällen näherungsweise vorzufinden ist. Der Abstand zwischen den untersuchten Punkten ist  $d$  ( $a/d = 100$ ). Es zeigt sich, dass  $\tau_{\xi\eta}$  betragsmäßig hohe Werte auch in Richtungen annimmt, die nicht auf die Rissspitze zeigen. Beispielhaft sind in Bild 3.2 zwei Gleitsysteme in solchen Richtungen eingezeichnet, die durch hohe Schubspannungen aktiviert werden können. Somit ist ersichtlich, dass sowohl vor als auch hinter der Rissspitze Scherungen auf unterschiedlichen Gleitsystemen möglich sind. Diese weisen Schnittpunkte auf, die gemäß Olson und Cohen (1972) zur Bildung von Martensitkeimen führen und die Bestimmung des Bereiches zulassen, in dem es zur Phasenumwandlung kommt. Zum Vergleich der Schubspannungen an den Punkten P zeigt Bild 3.2 unterhalb der Rissebene, in welchem Abstand  $r$  von der Rissspitze der Betrag der Schubspannung  $\tau_{r\varphi}$  den 2-, 2,5- oder 3-fachen Wert der äußeren Spannung  $\sigma^\infty$  aufweist.  $\tau_{r\varphi}$  ist hierbei die Schubspannung, die an einem um den Winkel  $\varphi$  gedrehten Flächenelement im Abstand  $r$  von der Rissspitze ermittelt werden kann.

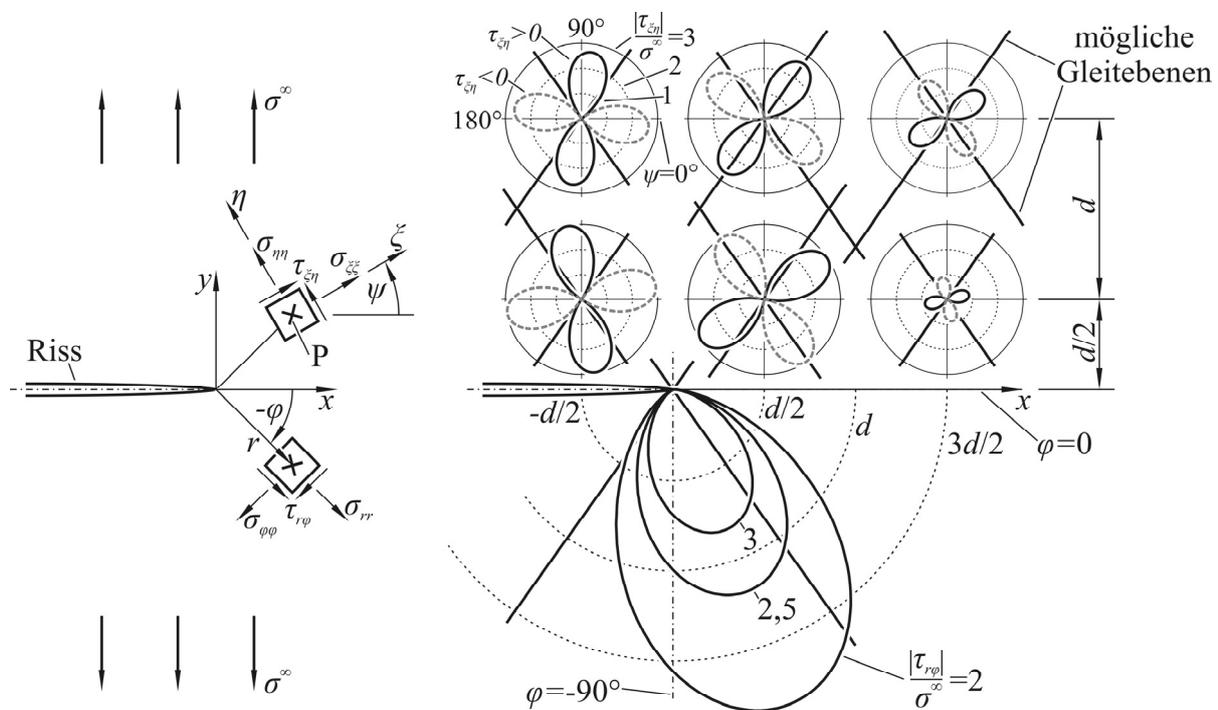


Bild 3.2: Schubspannungen in verschiedenen Punkten P an der Rissspitze über dem Winkel  $\psi$  mit möglichen Gleitebenen.

### 3.1.2 Bestimmung der Größe der Martensitbereiche

Die Ausdehnung eines Martensitbereiches an der Rissspitze kann anhand der auftretenden Kreuzungspunkte aktivierter Gleitbänder ermittelt werden: Hierzu wird angenommen, dass die plastische Verschiebung auf einer aktivierten Gleitebene nur den Bruchteil einer Partialversetzung beträgt, der nach Olson und Cohen (1972) zur Umwandlung des Austenits in die Martensitphase erforderlich ist, d.h. eine Drittel Partialversetzung auf dem ersten und eine halbe auf dem zweiten Gleitsystem. Ist diese Verschiebung erreicht, werden weitere parallele Gleitbänder aktiviert, auf der sich dann jeweils auch diese Scherbeträge einstellen. Der Vorgang setzt sich fort, bis so viele Gleitbänder aktiviert sind, dass die gesamte plastische Verformung vor der Rissspitze von der Gitterumordnung aufgenommen wird. Wie breit der Bereich wird, den die auf einem Gleitsystem aktivierten Gleitebenen einnehmen, wird von deren Abstand bestimmt. In der Zone in der Umgebung der Rissspitze, in der beide Gleitsysteme aktiv sind, liegen damit Schnittpunkte von Gleitebenen vor, an denen sich Martensitkeime bilden und in deren Folge der Umwandlungsbereich an der Rissspitze entsteht.

Für eine numerische Simulation dieses Vorganges erscheint es nicht sinnvoll, die Vielzahl der Gleitebenen, auf denen es zu einer Verschiebung von jeweils einem Bruchteil einer Partialversetzung kommt, einzeln in die Modellierung mit einzubeziehen. Hierfür wäre es erforderlich, nach jeder Gleitung auf einer Ebene die Aktivierung einer weiteren Ebene zu prüfen, dort eine Verschiebung zuzulassen und schließlich erneut zu prüfen, welche Gleitebene als nächstes aktiviert würde. Dieser Prozess müsste sich über die Aktivierung vieler Ebenen hinziehen und führte zu einer hohen Komplexität des Modells, die einen sehr großen numerischen Lösungsaufwand erwarten lässt.

Stattdessen soll hier, wie im Modell von Künkler (2007), die gesamte plastische Verformung vereinfachend durch die Ableitung auf zwei unendlich schmalen Schnitten in Richtung der aktivierten Gleitebenen repräsentiert werden (Bild 3.3a). Durch die Auswertung des Spannungsfeldes an der Rissspitze wird zunächst ermittelt, ob ein oder zwei Gleitsysteme aktiviert werden. Ist nur ein Gleitband aktiv, erfolgt das Risswachstum im Stadium I auf einer Gleitebene ohne martensitische Umwandlung. Sind dagegen zwei Gleitsysteme aktiv, kommt es zur Phasentransformation durch zwei Scherungen. Dabei wird angenommen, dass die größere Schubspannung in Richtung eines der Gleitsysteme zur ersten Scherung nach Olsen und Cohen (1972) ( $1/3$  Partialversetzung auf jeder aktivierten Gleitebene) führt, da die größere Schubspannung zuerst die Aktivierung von Gleitebenen bewirkt. Im Anschluss ruft die geringere Schubspannung die zweite Scherung ( $1/2$  Partialversetzung) hervor.

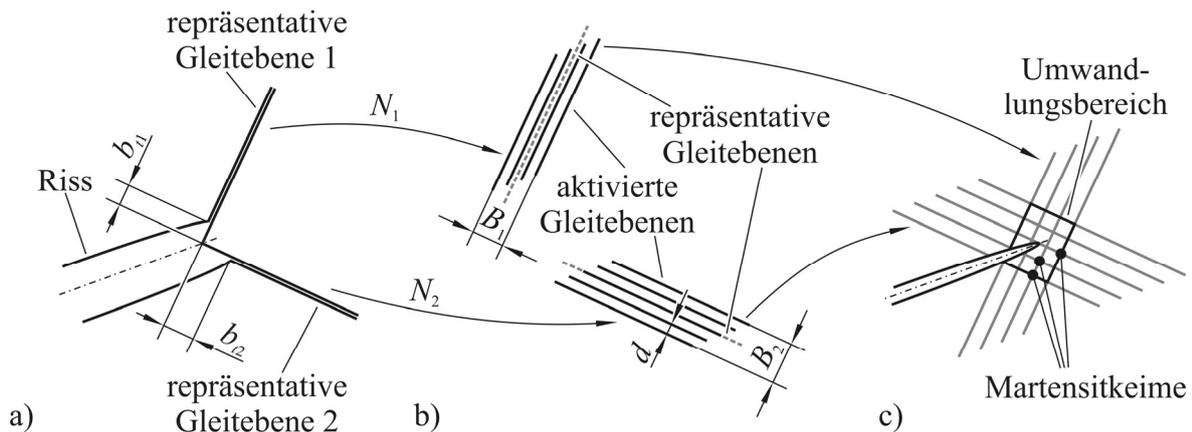
Der Riss wird mit seinen plastischen Zonen über einen Beanspruchungszyklus hinweg belastet, um die dabei auftretende Gesamtabgleitung auf beiden Gleitsystemen an der Rissspitze zu ermitteln. Für die Bestimmung der Größe des Martensitbereiches sind die betragsmäßig größten gleichzeitig auftretenden tangentialen Verschiebungen  $b_{t1}$  und  $b_{t2}$  in die erste bzw. zweite Gleitrichtung maßgeblich. Da auf einer Gleitebene nur jeweils ein Bruchteil des Betrages einer Partialversetzung  $T$  erfolgen darf, ergibt sich die Anzahl  $N_1$  bzw.  $N_2$  der parallelen aktivierten Gleitebenen, die zum Erreichen der Gesamtverschiebung notwendig ist, wie folgt:

$$N_1 = \frac{b_{t1}}{|T|/3}; \quad N_2 = \frac{b_{t2}}{|T|/2} \quad (3.1)$$

Die Breite  $B_1$  bzw.  $B_2$  des von aktivierten Gleitebenen in einer Richtung durchzogenen Bereiches kann dann aus dem mittleren Abstand  $d$  zwischen diesen Ebenen ermittelt werden:

$$B_1 = (N_1 - 1) \cdot d; \quad B_2 = (N_2 - 1) \cdot d \quad (3.2)$$

Aus Bild 3.2 ist erkennbar, dass Gleitebenen sowohl vor als auch nach der Rissspitze aktiviert werden können, so dass die Lage des Umwandlungsbereiches zunächst nicht ermittelt werden kann. Hierauf wird bei der Bestimmung des Rissfortschritts im Abschnitt 3.1.3 eingegangen. Beispielfhaft werden die aktiven Gleitebenen in Bild 3.3b so positioniert, dass die repräsentativen Gleitebenen, auf denen die Gesamtverformung bestimmt wurde, in deren Mitte liegen. Die Schnittmenge beider Bereiche mit aktiven Gleitebenen gibt die Zone an, in der Martensitkeime gebildet werden und in der es damit zur Phasentransformation kommt (Bild 3.3c).



**Bild 3.3:** Bestimmung der Größe des Martensitbereiches: a) Nachbildung der plastischen Verformung durch repräsentative Gleitebenen, b) Ermittlung der Breite der jeweils parallelen aktivierten Gleitebenen und c) Überlagerung der Gleitebenen, deren Schnittpunkte die Ausdehnung der Martensitzone angeben.

Während sich die Anzahl der aktiven Gleitebenen aus der plastischen Gesamtverformung und dem Betrag einer Partialversetzung berechnen lässt, ist der mittlere Abstand  $d$  zwischen den Ebenen nicht eindeutig festzustellen. Wird davon ausgegangen, dass auf jeder möglichen Gleitebene eine Scherung stattfindet, kann der Abstand aus der Geometrie der kfz Elementarzelle bestimmt werden. Liegen die Gleitebenen, auf denen eine Scherung eines Bruchteiles einer Partialversetzung stattfindet, dagegen nicht dicht beieinander, kommt es dennoch zu Schnittpunkten der aktivierten Gleitebenen und damit zur Bildung von Martensitkeimen, die die Phasentransformation im gesamten Bereich ermöglichen, in denen solche Schnittpunkte vorliegen. Der Abstand  $d$  zwischen den aktivierten Gleitebenen wird hier als Modellparameter aufgefasst, der der Metastabilität des Werkstoffs Rechnung trägt. Ist die Ausgangsphase weniger stabil oder erfolgt die Ermüdung bei niedrigeren Temperaturen, entstehen größere Umwandlungsbereiche, so dass ein größerer Wert für  $d$  einzustellen ist.

### 3.1.3 Rissausbreitung

Wie bei den in Abschnitt 2.5.1 vorgestellten Kurzrissmodellen, soll auch hier das Wachstum des Risses mit der plastischen Verformung an der Rissspitze verknüpft werden. Sind zwei Gleitsysteme an der Rissspitze aktiv, verwendet Künkler (2007) die plastische Abgleitung auf den Gleitebenen vor der Rissspitze zur Berechnung eines Rissfortschritts in die jeweilige Gleitrichtung. Beide Rissverlängerungen werden dann vektoriell zum Gesamtrisswachstum addiert (Bild 2.12), das nicht auf einer kristallographischen Ebene erfolgen muss. Roth (2012) stellt dagegen durch die Untersuchung der räumlichen Lage von Rissebenen und deren Vergleich mit den Kristallorientierungen der risstragenden Martensitbereiche fest, dass sich der Riss auf einer Gleitebene der neu gebildeten Martensitphase ausbreitet.

Damit es zum Risswachstum auf einem Gleitband kommt, muss hierauf eine Abgleitung stattfinden (Wilkinson et al. 1998). Da sowohl bei den von Stolarz (2001) als auch von Roth (2012) untersuchten Rissen der Vorlauf des Umwandlungsbereiches vor der Rissspitze gering ist, ist die zur Verfügung stehende Gleitbandlänge kurz. Die plastische Verformung kann sich jedoch in der Umgebung des Martensits in der Austenitphase fortsetzen, wobei es zu einer kompatiblen Verformung kommen muss. Eine Rissspitzenabgleitung  $CTSD$  geht somit mit einer Scherung  $\gamma$  vor der Umwandlungszone einher, was Bild 3.4 schematisch verdeutlicht. Hier wird der Martensitbereich vereinfacht kreisförmig dargestellt und die Scherungen auf möglichen Gleitsystemen werden zur besseren Veranschaulichung getrennt betrachtet. Es liegt damit zunächst ein Einfachgleitmechanismus nach Wilkinson et al. (1998) an der

Risspitze und eine Scherung auf zwei Gleitsystemen vor der Martensitzone vor – ähnlich der Vorstellung von Neumann (1969) mit zwei an der Risspitze aktiven Gleitsystemen.

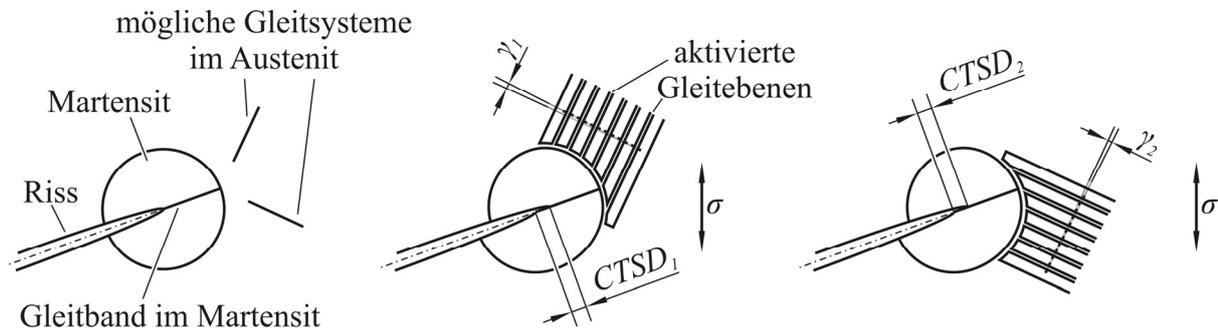


Bild 3.4: Zusammenhang zwischen Risspitzenabgleitung  $CTSD$  auf dem Gleitband im Martensit und Scherung  $\gamma$  im umliegenden Austenit.

Auf dem kurzen Gleitband im Martensitbereich liegen neben den Schubspannungen, die eine Abgleitung bewirken, auch hohe Normalspannungen vor, die zur Bindungslösung in der spröden Transformationszone beitragen. Daher muss davon ausgegangen werden, dass es nach einer Abgleitung auf der Gleitebene, die die Richtung des Rissfortschritts vorgibt, zum Aufreißen des Gleitbandes bis zur Phasengrenze kommt, infolgedessen eine Risspitzenöffnung möglich ist. Die Verformungen an der Risspitze und somit auch der Rissfortschritt werden dabei von der plastischen Deformation außerhalb des Martensitbereiches bestimmt.

Für die Modellerstellung soll daher vereinfachend angenommen werden, dass die Risspitze die Phasengrenze zwischen Martensit und Austenit berührt und der in Abschnitt 3.1.2 ermittelte Transformationsbereich wird nach dem Rissfortschritt an die neue Risspitze angefügt. Darüber hinaus wird die plastische Verformung, die auf vielen Gleitebenen im Austenit auftritt, durch zwei repräsentative Gleitbänder (s.o.) nachgebildet, die direkt an die Risspitze angefügt werden (vgl. Bild 3.5b). Der Rissfortschritt errechnet sich dann ähnlich der Auffassung von Künkler (2007) aus der Abgleitung auf beiden Gleitbändern. Diese werden hier jedoch als Verformungsfeld – nicht als Deformation auf diskreten Ebenen – interpretiert. Während Künkler (2007) jeweils einen Rissfortschritt in Richtung der aktiven Gleitsysteme bestimmt und diese dann vektoriell addiert, soll hier aus den Abgleitungen  $b_{t1}$  und  $b_{t2}$  auf beiden repräsentativen Gleitbändern durch vektorielle Addition eine resultierende Abgleitung  $b_R$  bestimmt werden. Diese liegt nicht zwingend in Richtung der Gleitebene, auf der der Riss wächst, so dass nur der auf diese Richtung projizierte Anteil der Abgleitung  $b_{RP}$ , zur Bestimmung des Rissfortschritts genutzt wird (Bild 3.5c). Da diese Abgleitung nun parallel zum Riss liegt, soll sie hier als Risspitzenabgleitung  $CTSD$  interpretiert werden, deren zyklische Ände-

zung ( $\Delta CTSD$ ) gemäß des Risswachstumsgesetzes von Wilkinson et al. (1998) (siehe Gleichung (2.14)) das Risswachstum bestimmt – hier zur besseren Übersicht noch einmal wiederholt:

$$\frac{da}{dN} = C \cdot \Delta CTSD^m.$$

Der Rissfortschritt mit überlagerter Phasentransformation durchläuft somit zusammengefasst die folgenden Schritte:

- Der Riss, dessen Spitze die Phasengrenze berührt (Bild 3.5a), erfährt eine Beanspruchung durch einen Lastzyklus.
- Die Schubspannungssingularität in der Umgebung der Risspitze wird ausgewertet: aktiviert die Intensität des elastischen Spannungsfeldes vor der Risspitze zunächst ein erstes Gleitsystem und reicht das sich dann einstellende elastisch-plastische Spannungsfeld zur Aktivierung eines zweiten aus, wird die auf den Gleitsystemen auftretende plastische Verformung durch zwei direkt an die Risspitze angesetzte, repräsentative Gleitbänder nachgebildet, auf denen es infolge der zyklischen Beanspruchung zu zyklischen Abgleitungen kommt (Bild 3.5b).
- Die Abgleitungen bestimmen die Größe des Martensitbereiches und werden genutzt, um die Tangentialverschiebungen  $b_{RP}$  bzw.  $CTSD$  parallel zur Richtung des Gleitbandes, auf dem der Riss wächst, zu ermitteln (Bild 3.5c).
- Aus der zyklischen Abgleitung  $\Delta CTSD$  errechnet sich der Rissfortschritt. Die Verlängerung des Risses und der neu ermittelte Martensitbereich werden in das Modell eingefügt (Bild 3.5d).
- Die ursprüngliche Umwandlungszone bleibt erhalten, wobei die am weitesten von der Mittelachse des Risses entfernten Punkte des ursprünglichen und des neuen Transformationsbereiches verbunden werden, so dass sich ein neuer Gesamtmartensitbereich ergibt (Bild 3.5e). Der Ausgangszustand – allerdings mit verlängertem Riss – ist somit wiederhergestellt und es kann ein neuer Lastzyklus aufgebracht werden.

Neben der neuen kristallographischen Orientierung, die infolge der Phasenumwandlung an der Risspitze vorliegt, weist die Transformationszone auch eine Volumenzunahme auf, die das Risswachstum beeinflusst. Ihre modellmäßige Erfassung wird nachfolgend vorgestellt.

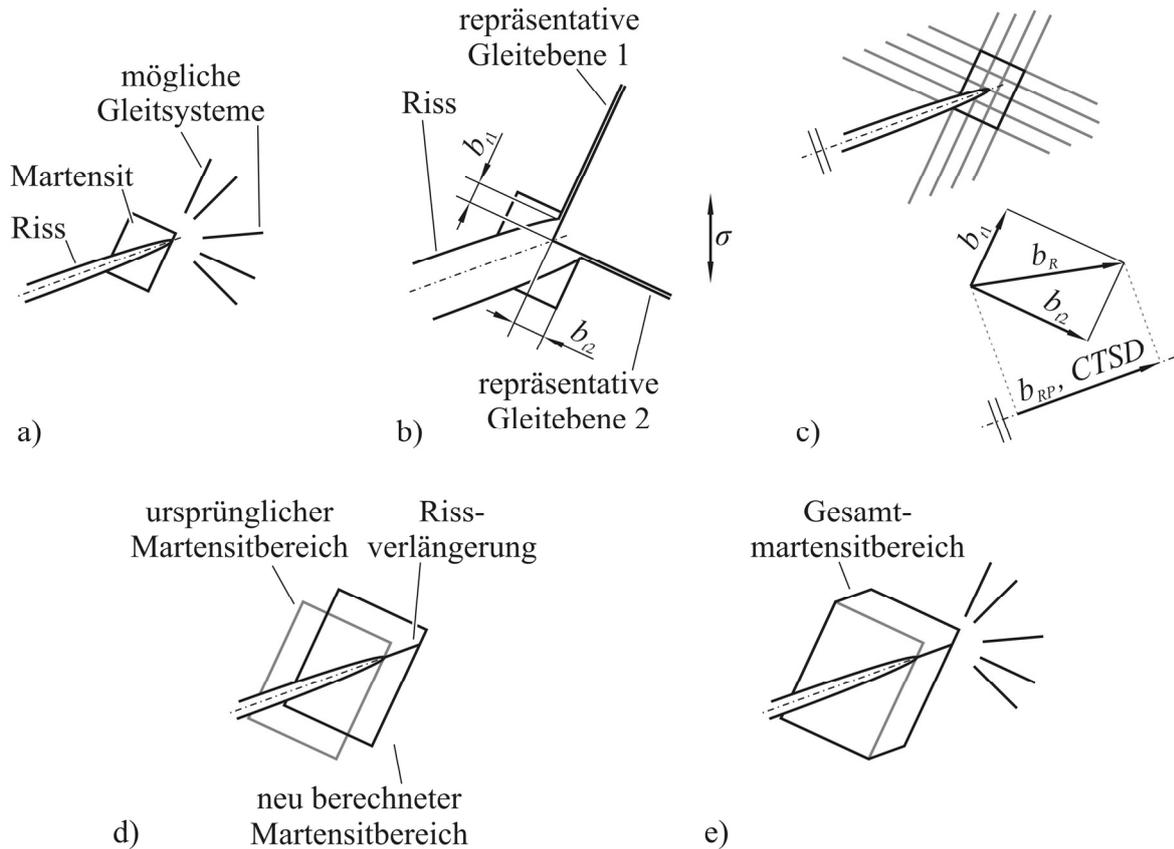


Bild 3.5: Rissfortschritt mit überlagerter Phasentransformation: a) Ausgangssituation, b) repräsentative Gleitebenen mit Abgleitungen, c) Bestimmung des neuen Martensitbereiches und des Rissfortschritts, d) Rissverlängerung und Anfügen des neuen Umwandlungsbereiches und e) Verbinden des ursprünglichen und des neuen Martensitbereiches.

### 3.1.4 Volumenzunahme des Umwandlungsbereiches

Bei der Transformation von der dichtest gepackten kubisch flächenzentrierten in die lediglich dicht gepackte kubisch raumzentrierte Phase nimmt das Volumen des umgewandelten Werkstoffs zu – nach Padilha und Rios (2002) um 2,57%. Zur Untersuchung des quantitativen Einflusses der Volumenzunahme auf das Risswachstumsverhalten kann dieser Wert bereits herangezogen werden. Die Beschreibung der Phasenumwandlung nach Bogers und Burgers (1964) (vgl. Abschnitt 2.6) durch Scherung des Werkstoffs auf zwei Gleitsystemen, erlaubt jedoch eine höherwertige Nachbildung der Volumenzunahme: Aus der Forderung, dass sich die Kuglebenen unter Scherung nicht durchdringen sollen, ergeben sich Dehnungen senkrecht zu den Scherebenen (vgl. Abschnitt 2.6, Bild 2.17). Sie betragen  $\varepsilon_n^{M1} = 5,4\%$  normal zur ersten und  $\varepsilon_n^{M2} = 3,3\%$  normal zur zweiten Ebene. Im realen Kristall sind jedoch die Atomabstände im kubisch raumzentrierten Gitter geringer, so dass sich insgesamt nur 2,57% relative Volumenzunahme einstellen. Die Dehnungen, die sich aus dem Kugelhaufenmodell

ergeben, gehen daher nur anteilig in die tatsächliche Volumenzunahme ein. Es soll nun davon ausgegangen werden, dass die zu den Scherebenen senkrecht stehenden Dehnungen  $\varepsilon_n^1$  und  $\varepsilon_n^2$  im realen Kristall und die Dehnungen  $\varepsilon_n^{M1}$  und  $\varepsilon_n^{M2}$  im Kugelmodell im gleichen Verhältnis  $f$  zueinander stehen:

$$\frac{\varepsilon_n^1}{\varepsilon_n^{M1}} = f, \quad \frac{\varepsilon_n^2}{\varepsilon_n^{M2}} = f. \quad (3.3)$$

Zur Bestimmung dieses Verhältnisses  $f$  müssen die Dehnungen  $\varepsilon_n^1$  und  $\varepsilon_n^2$  zunächst in ein gemeinsames  $x_1, x_2, x_3$ -Koordinatensystem transformiert werden, in dem sie dann addiert werden können:

$$\varepsilon_{kl}^M = n_k^1 n_l^1 \varepsilon_n^1 + n_k^2 n_l^2 \varepsilon_n^2. \quad (3.4)$$

Hierbei ist  $\varepsilon_{kl}^M$  die resultierende Gesamtdehnung im realen Kristall sowie  $n_k^1$  und  $n_k^2$  die Komponenten der Normale der ersten bzw. zweiten Scherebene im  $x_1, x_2, x_3$ -Koordinatensystem. Um die Volumendehnung  $\Delta V$  aus den Dehnungen in die unterschiedlichen Raumrichtungen zu errechnen, wird ein Quader mit dem Volumen  $V = l_1 \cdot l_2 \cdot l_3$  betrachtet, das sich aus den Kantenlängen  $l_1, l_2$  und  $l_3$  ergibt, die sich infolge der Dehnungen um  $\Delta l_1, \Delta l_2$  und  $\Delta l_3$  verlängern:

$$V + \Delta V = (l_1 + \Delta l_1)(l_2 + \Delta l_2)(l_3 + \Delta l_3). \quad (3.5)$$

Mit den Dehnungen  $\varepsilon_{11}^M = \Delta l_1 / l_1$ ,  $\varepsilon_{22}^M = \Delta l_2 / l_2$  und  $\varepsilon_{33}^M = \Delta l_3 / l_3$  kann diese Gleichung umgeschrieben werden in:

$$\Delta V / V = \varepsilon_{11}^M + \varepsilon_{22}^M + \varepsilon_{33}^M + \varepsilon_{11}^M \varepsilon_{22}^M + \varepsilon_{11}^M \varepsilon_{33}^M + \varepsilon_{22}^M \varepsilon_{33}^M + \varepsilon_{11}^M \varepsilon_{22}^M \varepsilon_{33}^M. \quad (3.6)$$

Da die Produkte der ohnehin geringen Dehnungen sehr klein sind, sollen diese hier vernachlässigt werden. Somit ergibt sich die relative Volumendehnung aus der Summe der einzelnen Dehnungen in den Raumrichtungen. Durch Einsetzen von Gleichung (3.4) wird folgender Zusammenhang erhalten:

$$\Delta V / V = (n_1^1)^2 \varepsilon_n^1 + (n_1^2)^2 \varepsilon_n^2 + (n_2^1)^2 \varepsilon_n^1 + (n_2^2)^2 \varepsilon_n^2 + (n_3^1)^2 \varepsilon_n^1 + (n_3^2)^2 \varepsilon_n^2. \quad (3.7)$$

Da die Summe der Quadrate der Ebenennormalenkomponenten den Wert 1 annimmt, ist die relative Volumendehnung im Kristall  $\Delta V / V$  die Summe aus den Dehnungen senkrecht zu den Scherebenen:

$$\Delta V / V = \varepsilon_n^1 + \varepsilon_n^2 . \quad (3.8)$$

Durch Einsetzen der Gleichungen (3.3) kann nun das Verhältnis  $f$  zwischen den Dehnungen im Kristall und im Kugelhaufenmodell bestimmt werden:

$$f = \frac{\Delta V / V}{\varepsilon_n^{M1} + \varepsilon_n^{M2}} . \quad (3.9)$$

Aus der tatsächlichen Volumendehnung  $\Delta V / V = 2.57\%$  errechnen sich somit die Dehnungen im Kristall von  $\varepsilon_n^1 = 1,595\%$  und  $\varepsilon_n^2 = 0,975\%$ , die senkrecht zur ersten bzw. zweiten Scherebene gerichtet sind. Die Dehnungen sind somit auf die Orientierungen der Gleitsysteme bezogen, die zur Phasenumwandlung aktiviert wurden, so dass die Volumenzunahme in unterschiedlichen Raumrichtungen unterschiedlich stark und daher anisotrop ist.

Die von Roth (2012) beobachteten Risse wachsen annähernd senkrecht zur äußeren Beanspruchungsrichtung und sind damit entsprechend des Modells von Mei und Morris (1991) orientiert. Deswegen soll der Annahme von Mei und Morris gefolgt werden, dass die Volumendehnung parallel zur Beanspruchungsachse für den Risschließeffekt maßgeblich ist. Gemäß Gleichung (3.4) errechnet sich die Martensitdehnung  $\varepsilon_M$  aus den Komponenten der Scherebenenormalen  $n_B^1$  bzw.  $n_B^2$  in Beanspruchungsrichtung:

$$\varepsilon_M = (n_B^1)^2 \varepsilon_n^1 + (n_B^2)^2 \varepsilon_n^2 . \quad (3.10)$$

$\varepsilon_M$  stellt damit die Dehnung dar, die eine isotrope Volumenzunahme des Umwandlungsbereiches hervorruft.

Aufgrund der Komplexität des vorgestellten zweidimensionalen Modells, lassen sich die Spannungen und Verformungen, die zur Simulation des Risswachstums und der Phasenumwandlung ausgewertet werden, nicht analytisch bestimmen. Daher soll ein numerisches Berechnungsverfahren zum Einsatz kommen, bei dessen Auswahl die im folgenden Abschnitt beschriebenen Gesichtspunkte zu berücksichtigen sind.

### 3.1.5 Anforderungen an ein numerisches Lösungsverfahren

Zur Berechnung mechanischer Größen im zuvor entwickelten Modell muss ein numerisches Lösungsverfahren angewendet werden, von dem die Modellbildung die nachfolgend kurz zusammengestellten Funktionalitäten verlangt:

- Zwischen den Rissufern sowie auf den Gleitebenen kommt es zu Abgleitungen und zusätzlich tritt eine Öffnung des Risses auf. Solche Relativverschiebungen müssen von dem Lösungsverfahren nachgebildet und berechnet werden.
- Bei den Umwandlungsbereichen handelt es sich um Gebiete mit eigenen Eigenschaften. Diese Bereiche müssen zum Aufprägen einer Volumenzunahme vom umliegenden Werkstoff abgegrenzt werden.
- Die abgegrenzten Bereiche unterschiedlicher Phasen bleiben fest miteinander verbunden. Eine Öffnung oder Abgleitung darf auf den Phasengrenzen nicht auftreten; es können lediglich Absolutverschiebungen auf diesen Grenzen entstehen.
- Spannungen und Verschiebungen müssen an den vom Modell vorgegebenen Positionen ausgewertet werden können, beispielsweise die Verschiebungen an der Risspitze oder Schubspannungen auf Gleitebenen.
- Um die Verlängerung des Risses und das mit einer Rissausbreitung einhergehende Wachstum der Martensitbereiche einbeziehen zu können, ist eine automatisierte Vernetzung notwendig. Der Vernetzungsaufwand sollte gering sein und die Berechnung der mechanischen Größen effizient erfolgen.

Die Lösungsmethode muss zur Nachbildung der Volumendehnung im Umwandlungsbereich in der Lage sein, unterschiedliche Gebiete zu berücksichtigen: die Transformationsbereiche und die umliegende Ausgangsphase. Dies eröffnet die Möglichkeit, auch die Gefügekörner als individuelle Bereiche aufzufassen. Ihnen kann dann nicht nur, wie im Modell von Künkler (2007), die in jedem Korn unterschiedliche Kristallorientierung zugewiesen werden, sondern auch individuelle elastische Eigenschaften.

Im folgenden Abschnitt werden verschiedene Methoden zur numerischen Bestimmung der für das Modell erforderlichen Spannungen und Verschiebungen vorgestellt und bewertet. Anschließend wird das für diese Arbeit gewählte Verfahren detailliert beschrieben.

### **3.2 Verfahren zur numerischen Lösung des Kurzrissproblems**

Eine analytische Bestimmung von Spannungen und Verschiebungen ist in der Mechanik zu meist nur bei einfachen Problemen oder bei stark vereinfachter Modellbildung möglich. Auch bei anderen technischen Aufgabenstellungen können die ein Problem beschreibenden Differentialgleichungen im Allgemeinen nicht analytisch gelöst werden. Um die dadurch gegebene

nen Grenzen der Berechenbarkeit nach oben zu verschieben, wurden numerische Lösungsansätze entwickelt.

### **Die Finite-Elemente-Methode**

Hierbei handelt es sich um eine numerische Lösungsmethode für Differentialgleichungen, die in der Mechanik weit verbreitet ist. Sie wird in zahlreichen Fachbüchern ausführlich dargestellt (z.B. Zienkiewicz 2005) und ist auch heute noch Gegenstand intensiver Forschung.

Bei der Anwendung der Finite-Elemente-Methode (FEM) wird zunächst das betrachtete Gebiet, das von den entsprechenden Differentialgleichungen beschrieben ist, in einfache Teilgebiete unterteilt – die finiten Elemente. In jedem Element werden dann Ansatzfunktionen gewählt, die den Verlauf der Lösung der Differentialgleichungen näherungsweise nachbilden. Diese Ansatzfunktionen weisen nur innerhalb eines Elementes oder auf zwei benachbarten Elementen von null verschiedene Werte auf und stellen in der Regel eine Approximation niedriger Ordnung dar. Um eine hohe Approximationsgüte zu erreichen, ist daher eine große Zahl von Elementen erforderlich.

Zur Beschreibung des angenäherten Funktionsverlaufs werden die Funktionswerte an bestimmten Punkten im betrachteten Gebiet, den sog. Knotenpunkten, genutzt. Da die Ansatzfunktionen nur innerhalb eines Elementes oder im benachbarten Element gültig sind, beeinflussen nur wenige umliegende Knotenwerte den Funktionswert eines betrachteten Knotens. An jedem Knotenpunkt entsteht somit eine algebraische Gleichung mit nur wenigen Unbekannten. Zusammengenommen bilden diese Gleichungen aufgrund der großen Elementanzahl und den damit verbundenen zahlreichen Knoten ein großes Gleichungssystem. Die Lösungsmatrix ist jedoch nur schwach besetzt und kann daher gemessen an seiner Größe meist numerisch besonders effizient gelöst werden.

Die mit Hilfe der Finiten-Elemente-Methode berechenbaren Gebiete können eine beliebige Form aufweisen. Ausgenommen sind jedoch schmale Schnitte innerhalb des Gebietes, wie z.B. Risse oder Gleitebenen. Um Risse dennoch nachbilden zu können, wurden Ansätze entwickelt, bei denen entweder innerhalb der einzelnen finiten Elemente Verschiebungssprünge auftreten können (z.B. Moës et al. 1999) oder bei denen Risse zwischen den Elementen verlaufen können (z.B. Nguyen et al. 2001). Im Bereich um die Risspitze entstehen hierbei hohe Spannungsgradienten, so dass das Gebiet in deren Umgebung besonders fein vernetzt werden muss. In größerer Entfernung reicht dagegen eine gröbere Vernetzung aus, die anzustreben ist, um die Zahl der Knotenpunkte und somit der Freiheitsgrade niedrig zu halten, was den Be-

rechnungsaufwand verringert. Bei wachsenden Rissen bedeutet dies, dass das in der Umgebung der Risspitze verfeinerte Netz mit dem Riss mitwachsen muss. Während der Risswachstumssimulation sind daher regelmäßige Neuvernetzungen notwendig.

Eine alternative und bei Berechnungsaufgaben in der Mechanik seltener angewendete Methode zur Lösung von Differentialgleichungen ist die Randelementemethode, die nachfolgend vorgestellt wird.

### **Die Randelementemethode**

Liegen in einem Gebiet keine Quellen (z.B. Wärmequellen) oder Senken vor, kann vom Rand des Gebietes auf dessen Inneres geschlossen werden. Diese Eigenschaft nutzt die Randelementemethode und betrachtet zunächst lediglich den Gebietsrand. Ebenso wie bei der Finite-Elemente-Methode erfolgt auch hier eine Diskretisierung, jedoch wird nur der Rand des Gebietes in Elemente unterteilt, die in der Ebene linienförmig sind und bei räumlichen Problemen Flächen repräsentieren. Innerhalb jedes Elementes wird die Lösung der Differentialgleichungen durch Ansatzfunktionen angenähert, zu deren Beschreibung Knotenwerte erforderlich sind. Dabei beeinflussen sich alle Knotenwerte gegenseitig, so dass an jedem Knoten eine algebraische Gleichung entsteht, die auf analytischen Lösungen basiert und von allen Knotenwerten abhängt. Da zur Vernetzung des Gebietsrandes eine geringere Anzahl an Elementen ausreicht und daher auch weniger Knoten erforderlich sind als bei der Diskretisierung des Gebietes selbst, entsteht ein weitaus kleineres Gleichungssystem. Die Lösungsmatrix ist jedoch voll besetzt, so dass deren numerische Lösung aufwändiger ist als bei einer gleich großen schwach besetzten Matrix. Die auf den Rändern bestimmte Lösung genügt den das Problem beschreibenden Differentialgleichungen auch im Inneren des Gebietes, so dass an jedem beliebigen Punkt ein Wert der Lösungsfunktion berechnet werden kann.

Neben der Behandlung von berandeten Gebieten können mit der Randelementemethode auch Risse modelliert werden. Hierzu ist der Einsatz von Elementen mit Relativverschiebungsansätzen notwendig, bei denen die beiden Rissufer nicht einzeln vernetzt werden müssen, sondern nur die Risslinie diskretisiert wird. Eine Öffnung und Abgleitung der Rissufer gegeneinander kann so nachgebildet und berechnet werden. Da nur der Riss und nicht das umliegende betrachtete Gebiet in Elemente unterteilt wird, ist bei wachsenden Rissen keine Neuvernetzung erforderlich; es muss lediglich ein weiteres Element angefügt werden, das die Rissverlängerung repräsentiert.

Um eine Wahl zur Lösung des in dieser Arbeit behandelten Rissproblems zu treffen, werden die beiden vorgestellten numerischen Verfahren im nachfolgenden Abschnitt hinsichtlich der Erfüllung der vom Modell vorgegebenen Anforderungen bewertet.

### **Bewertung der numerischen Lösungsmethoden**

Von den zuvor vorgestellten numerischen Methoden ist die Finite-Elemente-Methode am weitesten verbreitet. Es sind verschiedene kommerzielle Programme verfügbar, die eine verhältnismäßig einfache Bedienbarkeit gewährleisten und unterschiedlichste statische und dynamische Untersuchungen auch an kompliziert geformten Bauteilen ermöglichen. Die Randelementemethode wird im Ingenieurbereich hingegen seltener eingesetzt und kommerzielle Programme sind wenig verbreitet. Zu den Ausnahmen zählt z.B. die Akustiksimulation.

Hinsichtlich der in Abschnitt 3.1.5 beschriebenen Anforderungen an ein numerisches Lösungsverfahren lassen sich folgende Eignungen der Finite-Elemente-Methode (FEM) und der Randelementemethode (BEM; *engl. boundary element method*) erkennen:

- Bei der Nachbildung von Rissen und Gleitebenen sind in der FEM spezielle Elemente notwendig. In der Umgebung der Rissspitze ist zur Nachbildung des großen Spannungsgradienten eine feine Vernetzung erforderlich. In der BEM müssen lediglich die Risslinie und die Gleitspuren an der Oberfläche mit Randelementen mit Relativverschiebungen diskretisiert werden.
- Um den martensitischen Bereichen von der Austenitphase abweichende Eigenschaften zuzuweisen, ist bei beiden Methoden eine Partitionierung erforderlich und möglich. Die Zuweisung einer Volumenzunahme kann durch das Einbringen einer zusätzlichen Dehnung erfolgen.
- Bei der Verwendung von finiten Elementen ist gewährleistet, dass die verschiedenen Phasen miteinander verbunden bleiben. Randelemente müssen Absolutverschiebungsansätze verwenden, damit die unterschiedlichen Bereiche fest miteinander verbunden werden können.
- Die Berechnung von Spannungen und Verschiebungen erfolgt mit der FEM im gesamten betrachteten Gebiet und somit auch an den vom Modell ausgewerteten Positionen. Bei der BEM müssen die in den entsprechenden Punkten gesuchten Werte in einem zusätzlichen Rechenschritt bestimmt werden, der jedoch nur mit sehr geringem numerischen Aufwand verbunden ist.

- Eine automatische Vernetzung ist bei kommerziellen FEM-Programmen in der Regel vorhanden und erprobt. Jedoch muss ein an der Rissspitze verfeinertes Netz beim Risswachstum mit der Spitze fortschreiten und die Gleitebenen sind an neuen Positionen zu berücksichtigen, was mit häufigen Neuvernetzungen einhergeht. Bei der BEM sind nach einem Rissfortschritt ebenfalls Gleitebenen an neuen Positionen einzubeziehen, der Rissfortschritt kann jedoch durch das Ansetzen lediglich eines neuen Risselementes je Spitze eingefügt werden. Da bei der BEM im ebenen Fall nur linienförmige Risse, Gleitbänder und Phasengrenzen diskretisiert werden müssen, ist eine Vernetzung hier besonders einfach möglich – auch wenn lokale Netzverfeinerungen erforderlich werden.

Beide numerische Lösungsverfahren sind für das in dieser Arbeit erstellte Modell grundsätzlich geeignet. Die mit der wachsenden Rissspitze fortschreitenden verfeinerten Netzbereiche erscheinen bei der Finiten-Elemente-Methode jedoch nachteilig. Zusätzlich ist die Verwendung spezieller Elemente zur Nachbildung des Risses und der Gleitebenen erforderlich. Bei der Randelementemethode entsteht durch die Berücksichtigung von Bereichen mit unterschiedlichen Eigenschaften – die verschiedenen Phasen – die Notwendigkeit, unterschiedliche Randelementtypen einzusetzen und zu koppeln.

Die einfache Rissverlängerung und Vernetzung der nur linienförmigen Risse, Gleitbänder und Phasengrenzen sind Vorteile der Randelementemethode. Sie soll daher für die numerische Bestimmung der Spannungen und Verschiebungen bei der Lösung des vorliegenden Rissproblems eingesetzt werden. Mit ihr lässt sich die Berücksichtigung der vielfältigen Aspekte des Modells – Riss, Gleitbänder, Martensitbereiche mit Volumendehnung und Korngrenzen – erreichen. Hierzu müssen jedoch zahlreiche in der Literatur vorhandene Komponenten aus dem Bereich der Randelementemethode in ein Lösungsverfahren zusammengeführt werden. Welche Komponenten erforderlich sind und welchen Zweck sie verfolgen, wird im nächsten Abschnitt einleitend beschrieben, bevor ihre detaillierte Darstellung in den anschließenden Kapiteln folgt.

### **Komponenten des numerischen Lösungsverfahrens**

Eine Säule der Ermittlung der für das Kurzrisssmodell erforderlichen mechanischen Größen ist die Randelementemethode mit Absolutverschiebungsansätzen, deren Elemente die Martensitbereiche umschließen. Dies schafft die Voraussetzung dafür, dem umgewandelten Werkstoff eine Volumenzunahme aufzuprägen und somit das transformationsinduzierte Riss schließen einzubeziehen. Werden ebenso die Gefügekörner umschlossen, lässt sich ihrem anisotropen

elastischen Verhalten Rechnung tragen, indem ihnen ihre individuelle Steifigkeit in Zugrichtung als isotroper Wert zugewiesen wird.

Zur Berechnung der Ableitungen des Risses und der Gleitbänder sowie der Rissöffnung sind die Randelemente mit Absolutverschiebungsansätzen nicht geeignet. Hierfür kommt die Randelementemethode mit Relativverschiebungsansätzen zum Einsatz, die somit die zweite Säule des numerischen Lösungsverfahrens bildet. Um beide Elementarten verwenden zu können, stellen Ameen und Raghuprasad (1994) ein Superpositionsverfahren zu deren Kopplung vor. Es zeigt jedoch Schwächen, wenn zwei Gleitbänder an der Risspitze modelliert werden, die beide an eine Korngrenze stoßen. Daher wird die Kopplung unter Beibehaltung des Superpositionsverfahrens weiterentwickelt.

Mit den gekoppelten Randelementemethoden kann das physikalische Rissproblem bereits in ein mathematisches Gleichungssystem überführt werden, das sich bei Vorliegen der erforderlichen Randbedingungen (es müssen an jedem Elementknoten entweder die Spannungen oder die Verschiebungen bekannt sein) lösen lässt. Die Volumendehnung der Umwandlungsbereiche ist hierbei jedoch noch nicht berücksichtigt und wird in der Herleitung der Randelementemethode mit Absolutverschiebungsansätzen ergänzt.

Erste Rissprobleme lassen sich nun lösen; sie sind jedoch auf koordinatenachsenparallele Risse beschränkt. Außerdem ist die Genauigkeit der Ergebnisse insbesondere dann noch nicht ausreichend, wenn sich Risse oder Gleitbänder in der Nähe von Korn- oder Phasengrenzen befinden. Da die Risse im hier untersuchten Werkstoff meist von schmalen Martensitbereichen umgeben sind, ist dies der Regelfall. Daher wird das Lösungsverfahren in den folgenden Punkten erweitert und numerisch verbessert:

- Mit dem Ziel, Risse und Gleitbänder beliebiger Orientierung berechnen zu können, ist eine Koordinatentransformation der darauf vorliegenden Spannungen und Relativverschiebungen erforderlich. Nur so ist die automatisierte Aufbringung der tangential und normal zur Rissebene bzw. des Gleitbandes vorliegenden Randbedingungen möglich. Soll beispielsweise die Durchdringung der Rissufer verhindert werden, ist dies eine Randbedingung normal zur Rissebene, die nur in einem tangential-normal-Koordinatensystem auf einfache Weise angegeben werden kann.
- Die numerische Berechnung der Spannungs- und Verschiebungswerte kann zu ungenauen Ergebnissen führen, wenn für den Schubmodul  $\mu$  eine ungünstige Einheit verwendet wird. Dies ist der Fall, da er in einigen Gleichungen, aus denen die Lösungsmatrix entsteht, im

Nenner und in anderen im Zähler enthalten ist. Wird der Schubmodul beispielsweise in  $\text{N/m}^2$  angegeben, ist sein Zahlenwert sehr groß und führt in der Matrix zu Einträgen, die viele Zehnerpotenzen auseinander liegen. Der daraus resultierende Nachteil, dass die Genauigkeit der numerischen Lösung stark reduziert sein kann, wird behoben, indem die Gleichungen dimensionslos notiert werden.

- Stößt ein Riss oder ein Gleitband an eine Korngrenze, tritt an ihr unter Belastung ein Sprung in der Verschiebung auf. Damit der Verschiebungsverlauf von den Elementen, die die Korngrenze diskretisieren, in ausreichender Näherung dargestellt werden kann, muss dieser Sprung auf einer Trennstelle zwischen zwei Elementen liegen. Hier weisen die Elemente jedoch einen gemeinsamen Knoten auf. Um dies zu vermeiden, wird er zunächst in zwei Knoten aufgespalten, die dann jedoch genau aufeinander liegen. Da so bei der Erstellung der Lösungsmatrix nicht zwischen ihnen unterschieden werden kann, werden sie vom Elementende in Richtung der jeweiligen Elementmitte verschoben.
- Sollen in der Nähe eines Gebietsrandes – den Korn- und Phasengrenzen – Spannungen ermittelt werden, ist dies mit großen Fehlern behaftet (Stöhr 1998). Diese schlechten numerischen Ergebnisse werden von Singularitäten verursacht, die aus der Diskretisierung der Ränder resultieren. Durch die Implementierung eines von Ma und Kamiya (2002) entwickelten Verfahrens zur Reduktion des Einflusses dieser Singularitäten wird die Spannungsberechnung in Randnähe verbessert.

Mit den beschriebenen Erweiterungen und numerischen Verbesserungen sind beliebige Risskonfigurationen berechenbar und es können ausreichend genaue Ergebnisse erwartet werden. Die einzelnen Gefügekörner und Martensitbereiche sind jedoch noch nicht miteinander verbunden. Durch die Bedingung, dass die Randverschiebungen und -spannungen an der gemeinsamen Grenze zweier Körner gleich sein müssen, werden ihre Interaktionen hergestellt. Liegt auf der Grenze ein Riss, sind die Spannungsverläufe beider Rissufer ebenfalls gleich. Aus der Differenz der unterschiedlichen Absolutverschiebungen der Rissufer berechnet sich hier eine Rissöffnung und -ableitung.

Für die Zusammenführung der vorhergehend beschriebenen Komponenten der Randelementemethode ist ein vertieftes Verständnis der hierbei eingesetzten Mathematik unerlässlich. Nur so entsteht ein Lösungsverfahren, das an die Anforderungen des Modells angepasst ist und Aspekte der numerisch effizienten Implementierung einbezieht. Daher folgt die detaillierte Beschreibung der verwendeten Ansätze der Randelementemethode einschließlich der erforder-

derlichen mathematischen Zusammenhänge. Abschließend wird das Lösungsverfahren in Abschnitt 3.2.7 validiert, um dessen Eignung zur Lösung des Kurzrisssproblems sicherzustellen.

### 3.2.1 Randelemente mit Absolutverschiebungsansätzen

Die Randelementemethode mit Absolutverschiebungsansätzen erlaubt es, mechanische Größen in einem berandeten Gebiet numerisch zu bestimmen. Zur Herleitung der von Brebbia und Dominguez (1998) beschriebenen Methode, die zusammenfassend in Kübbeler (2007) dargestellt ist, soll das Gebiet  $\Omega$  betrachtet werden, das durch den Rand  $\Gamma$  begrenzt ist. Er teilt sich dabei in den DIRICHLET-Rand  $\Gamma_D$  mit bekannten Verschiebungs- und den NEUMANN-Rand  $\Gamma_N$  mit bekannten Spannungsrandbedingungen auf (Bild 3.6).

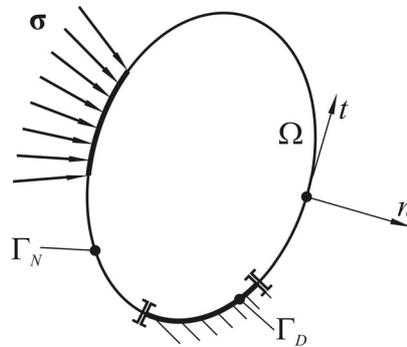


Bild 3.6: Durch  $\Gamma$  berandetes Gebiet  $\Omega$  mit Randbedingungen.

Die Spannungen im Gebiet  $\Omega$  werden durch die Gleichgewichtsbedingungen (2.1) beschrieben, durch deren Lösung die Spannungen  $\boldsymbol{\sigma}$  und Verschiebungen  $\mathbf{u}$  im Inneren des Gebietes und auf dessen Rand berechnet werden können. Hierzu müssen zusätzlich Randbedingungen in der Form

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \bar{\mathbf{u}}, & \text{DIRICHLET-Randbedingung} \\ \mathbf{p} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} &= \bar{\mathbf{p}}, & \text{NEUMANN-Randbedingung} \end{aligned} \tag{3.11}$$

vorgegeben werden, wobei quergestrichene Größen bekannt seien.  $\mathbf{p}$  enthält die Spannungen tangential und normal zum Rand mit der Normalen  $\mathbf{n}$ .

Das Ziel der Randelementemethode ist die Lösung der Gleichgewichtsbedingungen (2.1) unter Berücksichtigung der Randbedingungen mit minimalem Approximationsfehler. Um dies zu erreichen, wird das GALERKIN-Verfahren angewendet, bei dem Gleichung (2.1) mit einer Gewichtungsfunktion  $u_k^*$  multipliziert und über das Gebiet  $\Omega$  integriert wird:

$$\int_{\Omega} (\sigma_{kj,j} + b_k) u_k^* d\Omega = 0. \quad (3.12)$$

Bei diesem Vorgehen wird die Gewichtungsfunktion  $u_k^*$  als virtuelle Verschiebung interpretiert, die die Randbedingungen erfüllen muss und für die alle in Abschnitt 2.3.1 beschriebenen elastizitätstheoretischen Zusammenhänge gelten. Der erste Term von Gleichung (3.12) wird nun zweimal partiell integriert und durch Anwendung des GAUß'schen Integralsatzes, mit dem sich Volumenintegrale in Oberflächenintegrale umwandeln lassen, in die folgende Form gebracht:

$$\int_{\Omega} \sigma_{kj,j}^* u_k d\Omega + \int_{\Omega} b_k u_k^* d\Omega = - \int_{\Gamma} p_k u_k^* d\Gamma + \int_{\Gamma} p_k^* u_k d\Gamma. \quad (3.13)$$

Auf diese Weise entsteht der virtuelle Spannungstensor  $\sigma_{ij}^*$ , der gemäß Gleichung (2.1) mit dem volumenbezogenen Kraftvektor  $b_l^*$  im Gleichgewicht stehen muss ( $\sigma_{lj,j}^* + b_l^* = 0$ ). Wird für  $b_l^*$  eine auf den Punkt  $i$  wirkende und durch die DIRAC'sche Deltafunktion  $\Delta^i$  repräsentierte Punktlast in Richtung des Einheitsvektors  $e_l$  angenommen, lassen sich die Gleichgewichtsbedingungen (2.1) wie folgt schreiben:

$$\sigma_{lj,j}^* + \Delta^i e_l = 0. \quad (3.14)$$

Für diese Gleichung kann eine analytische Fundamentallösung gefunden (Brebbia und Dominguez 1998) und in Gleichung (3.13) eingefügt werden. Als Ergebnis wird der als SOMIGLIANA-Identität bekannte Zusammenhang zwischen der Verschiebung  $u_l^i$  an einem beliebigen Punkt  $i$  innerhalb des betrachteten Gebietes und den Spannungen  $p_k$  sowie Verschiebungen  $u_k$  entlang des Gebietsrandes erhalten:

$$u_l^i + \int_{\Gamma} p_{lk}^* u_k d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{lk}^* p_k d\Gamma + \int_{\Omega} u_{lk}^* b_k d\Omega. \quad (3.15)$$

$p_{lk}^*$  und  $u_{lk}^*$  sind dabei die virtuellen Spannungen und Verschiebungen, die von einer in Richtung  $l$  wirkenden Punktlast verursacht werden. Im hier betrachteten zweidimensionalen Fall lauten diese:

$$u_{lk}^* = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \left[ (3-4\nu) \ln \frac{1}{r} \delta_{lk} + r_{,l} r_{,k} \right]; \quad (3.16)$$

$$p_{lk}^* = -\frac{1}{4\pi(1-\nu)r} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} [(1-2\nu)\delta_{lk} + 2r_{,l} r_{,k}] + (1-2\nu)(n_l r_{,k} - n_k r_{,l}) \right\}$$

mit dem Abstand  $r$  zwischen dem auf dem Rand  $\Gamma$  betrachteten Punkt und dem Ort, an dem die Punktlast aufgebracht wird, sowie den Komponenten  $n_k$  und  $n_l$  der Randnormalen. Zusätzlich sind die LAMÉ-Konstante  $\mu = G$ , die dem Schubmodul entspricht, und die Querkontraktionszahl  $\nu$  enthalten.

In dieser Arbeit sollen keine volumenbezogenen Kräfte  $b_k$  berücksichtigt werden, so dass der letzte Term aus Gleichung (3.15) verschwindet. In diesem Fall liegen lediglich Integrale vor, deren Integrationswege auf dem Gebietsrand liegen. Eine Integration über das Gebiet selbst ist daher nicht erforderlich. Die Verschiebung  $u_i^i$  am Punkt  $i$  hängt somit ausschließlich von den mechanischen Größen entlang des Gebietsrandes ab. Liegt der Punkt  $i$  selbst auf einem Gebietsrand, ist ein Vorfaktor  $c^i$  vor dem ersten Term  $u_i^i$  aus Gleichung (3.15) erforderlich, der an einem glatten Rand  $c^i = 1/2$  beträgt und an einer Ecke des Gebietsrandes durch den Innenwinkel  $\theta$  der Ecke bestimmt wird:  $c^i = \theta/(2\pi)$  (Brebbia und Dominguez 1998).

Die Randintegrale in Gleichung (3.15) sollen nun numerisch gelöst werden, wozu eine Diskretisierung des Gebietsrandes  $\Gamma$  in Teilbereiche – die Elemente – vorgenommen wird, die im hier betrachteten ebenen Fall linienförmig sind (vgl. Bild 3.7). Die Spannungen und Verschiebungen entlang dieser Elemente üben dabei einen Einfluss auf die Verschiebungen des Punktes  $i$  aus.

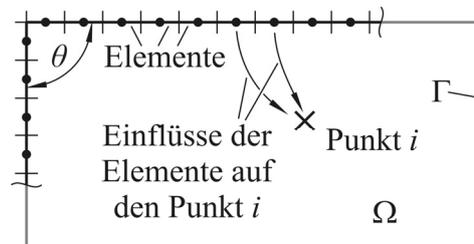


Bild 3.7: Diskretisierung des Randes  $\Gamma$  durch Elemente.

Die Diskretisierung ermöglicht es, die Integrale in Gleichung (3.15) abschnittsweise jeweils entlang der einzelnen Elemente zu bestimmen. Zu diesem Zweck sind Ansatzfunktionen erforderlich, die den Verlauf der mechanischen Größen auf den Elementen beschreiben. Im einfachsten Fall können hierfür konstante Funktionen gewählt werden, so dass sich die Spannungen  $p_k^j$  und Verschiebungen  $u_k^j$  am Element  $j$  als konstante Vorfaktoren aus den Integralen in Gleichung (3.15) herausziehen lassen. Das Integral über den Gebietsrand wird hierbei zur Summe aus den Integralen mit dem Integrationsweg  $\Gamma_j$  über die  $N$  Elemente, die den Rand

vernetzen (der letzte Term verschwindet, da keine volumenbezogenen Kräfte berücksichtigt werden):

$$u_l^i + \sum_{j=1}^N \left\{ u_k^j \int_{\Gamma_j} p_{lk}^* d\Gamma \right\} = \sum_{j=1}^N \left\{ p_k^j \int_{\Gamma_j} u_{lk}^* d\Gamma \right\}. \tag{3.17}$$

Für viele Anwendungen erweist sich eine konstante Ansatzfunktion jedoch als zu starke Vereinfachung. Insbesondere bei Biegebeanspruchungen zeigt Kübbeler (2007), dass selbst bei sehr feiner Diskretisierung keine zufriedenstellenden Berechnungsergebnisse erzielt werden können. In der vorliegenden Arbeit sollen daher quadratische Verläufe für Spannungen und Verschiebungen entlang eines Elementes gewählt werden, bei deren Nutzung auch bei biegebeanspruchten Gebieten hohe Approximationsgüten zu erwarten sind.

Der Verlauf einer mechanischen Größe  $q$  entlang eines Elementes wird durch die Knotenwerte  $q_s$  beschrieben, wobei hierfür bei quadratischem Verlauf drei Knoten auf einem Element erforderlich sind.  $q$  entsteht dabei aus der Überlagerung der drei Knotenwerte, die mit ihrer zugehörigen Formfunktion  $\phi_s$  multipliziert werden:

$$q = \phi_1 q_1 + \phi_2 q_2 + \phi_3 q_3 = \sum_{s=1}^3 \phi_s q_s. \tag{3.18}$$

Die Formfunktion wird in der Elementkoordinate  $\xi$  mit den Grenzen -1 und 1 angegeben und weist an dem Knoten, dem sie zugeordnet ist, den Funktionswert 1 auf; an allen anderen Knoten den Wert 0 (vgl. Bild 3.8):

$$\phi_1 = \frac{1}{2} \xi(\xi - 1); \quad \phi_2 = 1 - \xi^2; \quad \phi_3 = \frac{1}{2} \xi(\xi + 1). \tag{3.19}$$

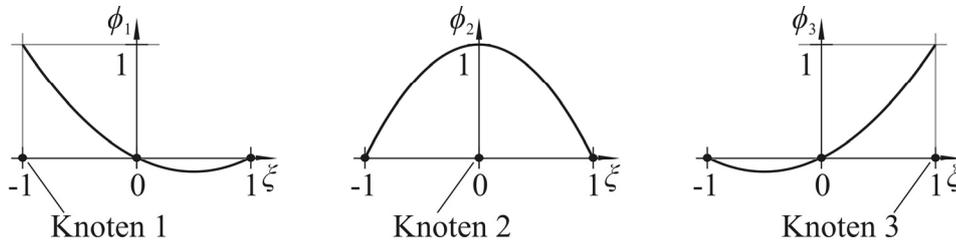


Bild 3.8: Verläufe der quadratischen Formfunktionen über der Elementkoordinate  $\xi$ .

Durch Einsetzen von Gleichung (3.18) in Gleichung (3.15) und Vernachlässigen volumenbezogener Kräfte entsteht die folgende Gleichung, bei der die Werte am Knoten  $s$  des Elementes  $j$ ,  $(u_k^j)_s$  und  $(p_k^j)_s$  als Konstanten aus den Integralen herausgezogen wurden:

$$u_i^i + \sum_{j=1}^N \left\{ \sum_{s=1}^3 \left( (u_k^j)_s \int_{\Gamma_j} p_{ik}^* \phi_s d\Gamma \right) \right\} = \sum_{j=1}^N \left\{ \sum_{s=1}^3 \left( (p_k^j)_s \int_{\Gamma_j} u_{ik}^* \phi_s d\Gamma \right) \right\}. \quad (3.20)$$

Wird Gleichung (3.20) für jeden Knoten auf dem Rand des betrachteten Gebiets aufgestellt (hier muss der Vorfaktor  $c^i$  vor dem ersten Term  $u_i^i$  berücksichtigt werden), so dass  $u_i^i$  die Verschiebung an dem entsprechenden Knoten (Punkt  $i$ ) darstellt, entsteht ein Gleichungssystem, bei dem die Anzahl der Gleichungen der Anzahl der Freiheitsgrade entspricht. Zur Lösung des entstehenden Gleichungssystems müssen die in Gleichung (3.20) auftretenden Integrale berechnet werden, in denen der Abstand  $r$  (vgl. Bild 3.9) zwischen dem Punkt  $i$  und einem auf dem betrachteten Element  $j$  liegenden Punkt in der Form  $1/r$  und  $\ln(1/r)$  eingeht. Diese Integrale können in der Regel numerisch mit dem GAUßverfahren gelöst werden, wozu in dieser Arbeit eine Zehnpunktintegration gewählt wird. Liegt der Punkt  $i$  jedoch selbst auf dem Element, entlang dessen die Integration durchgeführt wird, liegen Singularitäten auf dem Integrationsweg. Für diesen Fall stellen Brebbia und Dominguez (1998) ein geeignetes numerisches Integrationsverfahren vor, das auch in dieser Arbeit zur Berechnung der Integrale verwendet wird.

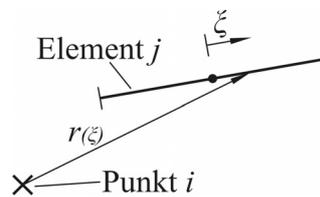


Bild 3.9: Abstand zwischen Punkt  $i$  und dem Integrationsweg entlang von Element  $j$ .

Das zu lösende und durch Gleichung (3.20) repräsentierte Gleichungssystem lässt sich in Matrix-Vektor-Form darstellen, wenn alle Knotenwerte in den Vektoren  $\mathbf{p}$  und  $\mathbf{u}$  angeordnet werden. Die Vorfaktoren der Knotenwerte, die durch die Lösung der Integrale entstehen, können dann in den Matrizen  $\mathbf{G}$  und  $\mathbf{H}$  zusammengefasst werden. Sie lassen sich als Einflussmatrizen auffassen, da sie die Einflüsse der Spannungen und Verschiebungen der Knoten aufeinander enthalten:

$$\mathbf{H}\mathbf{u} = \mathbf{G}\mathbf{p}. \quad (3.21)$$

Die Berechnung dieser Einflussmatrizen erfordert lediglich geometrische Informationen wie die Lage der Elemente in der betrachteten Ebene und ihre Länge sowie die Werkstoffeigenschaften Schubmodul  $G$  und Querkontraktionszahl  $\nu$  (vgl. Gleichung (3.16)).

Zur Lösung des Gleichungssystems (3.21) müssen eine ausreichende Anzahl von Randbedingungen vorgegeben werden. An jedem mittleren Elementknoten ( $\xi = 0$ , vgl. Bild 3.8) gibt es je Raumrichtung zwei Freiheitsgrade; eine Spannung  $p$  und eine Verschiebung  $u$ , von denen je ein Wert per Randbedingung vorgegeben werden muss. Die äußeren Elementknoten ( $\xi = -1$  und  $\xi = 1$ ) sind sowohl dem davor als auch dem dahinter liegenden Element zugehörig. Stoßen die Elemente an einem glatten Rand zusammen, liegen auch hier zwei Freiheitsgrade je Raumrichtung vor und es kann wie beim Mittelknoten verfahren werden. Stoßen die Elemente an einer Ecke aneinander, weist der Randknoten den Spannungstensor  $\boldsymbol{\sigma}$  auf, der für beide Elemente identisch ist. Die Spannungsvektoren  $\mathbf{p} = \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}$  sind dagegen an den beiden angrenzenden Elementen unterschiedlich, da die Elementnormalen  $\mathbf{n}$  in verschiedene Richtungen zeigen. Je Raumrichtung  $l$  müssen am Randknoten nun die Spannungen  $p_l$  auf beiden Seiten des Knotens vorgegeben werden – also die des Elementes vor und hinter dem Knoten. Alternativ ist die Vorgabe nur einer Spannung (der des Elementes vor oder hinter dem Knoten) und einer Verschiebung möglich.

Mit diesen Randbedingungen kann das Gleichungssystem (3.21) in die Form

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{f} \quad (3.22)$$

gebracht werden. Der Vektor  $\mathbf{f}$  enthält dabei alle Randbedingungen, die mit den entsprechenden Spalten der Matrizen  $\mathbf{G}$  und  $\mathbf{H}$  multipliziert wurden.  $\mathbf{x}$  ist der Lösungsvektor, mit allen unbekanntem Spannungs- sowie Verschiebungsgrößen und  $\mathbf{A}$  ist die Lösungsmatrix, die aus den restlichen Spalten der Einflussmatrizen entsteht. Das Gleichungssystem (3.22) kann nun unter Anwendung bekannter numerischer Verfahren, z.B. dem GAUß'schen Eliminationsverfahren, gelöst werden.

Nach der Lösung von Gleichungssystem (3.22) sind alle Spannungen und Verschiebungen an den Elementknoten auf dem Gebietsrand bekannt, woraus die mechanischen Größen an jedem beliebigen Randpunkt durch die Ansatzfunktionen interpoliert werden können. Darüber hinaus ist die Berechnung von Verschiebungen an jedem Punkt  $i$  im Inneren des betrachteten Gebietes mit Hilfe der SOMIGLIANA-Identität (Gleichung (3.15)) möglich. Zusätzlich sind aber häufig die Spannungen innerhalb dieses Gebietes von Interesse, die sich dem Stoffgesetz für den isotropen Fall (Gleichung (2.6)) entsprechend aus den Ableitungen der Verschiebungen errechnen lassen. Zu diesem Zweck notieren Brebbia und Dominguez (1998) das Stoffgesetz in der folgenden Form für den ebenen Verzerrungszustand (EVZ), aus dem die Abhängigkeit der Spannungen von den Verschiebungen direkt ablesbar ist:

$$\sigma_{ij} = \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} + \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.23)$$

Durch Umstellen der SOMIGLIANA-Identität nach  $u_l^i$  und Einsetzen in Gleichung (3.23) können die Spannungen im Inneren des Gebietes  $\Omega$  direkt aus den mechanischen Größen auf dessen Rand ermittelt werden (volumenbezogene Kräfte werden nicht berücksichtigt):

$$\sigma_{ij} = \int_{\Gamma} D_{kij} p_k d\Gamma - \int_{\Gamma} S_{kij} u_k d\Gamma. \quad (3.24)$$

Bei  $D_{kij}$  und  $S_{kij}$  handelt es sich um Tensoren dritter Ordnung:

$$D_{kij} = \frac{1}{r} \left[ (1-2\nu) (\delta_{ki} r_{,j} + \delta_{kj} r_{,i} - \delta_{ij} r_{,k}) + 2r_{,i} r_{,j} r_{,k} \right] \frac{1}{4\pi(1-\nu)};$$

$$S_{kij} = \frac{2\mu}{4r^2\pi(1-\nu)} \left\{ 2 \frac{\partial r}{\partial n} \left[ (1-2\nu) \delta_{ij} r_{,k} + \nu (\delta_{ik} r_{,j} + \delta_{jk} r_{,i}) - 4r_{,i} r_{,j} r_{,k} \right] \right. \quad (3.25)$$

$$\left. + 2\nu (n_i r_{,j} r_{,k} + n_j r_{,i} r_{,k}) + (1-2\nu) (2n_k r_{,i} r_{,j} + n_j \delta_{ik} + n_i \delta_{jk}) - (1-4\nu) n_k \delta_{ij} \right\}$$

Analog zu Gleichung (3.20) müssen auch die Integrale in Gleichung (3.24) nicht geschlossen über den gesamten Gebietsrand berechnet werden. Durch dessen Unterteilung kann die Integration auch hier elementweise erfolgen. Es bietet sich an, die gleichen Elemente mit den gleichen Ansatzfunktionen wie bei der Berechnung der mechanischen Größen auf dem Gebietsrand zu verwenden, wodurch die folgende Gleichung erhalten wird:

$$\sigma_{ij} = \sum_{j=1}^N \left\{ \sum_{s=1}^3 \left( (p_k^j)_s \int_{\Gamma_j} D_{kij} \phi_s d\Gamma \right) \right\} - \sum_{j=1}^N \left\{ \sum_{s=1}^3 \left( (u_k^j)_s \int_{\Gamma_j} S_{kij} \phi_s d\Gamma \right) \right\}. \quad (3.26)$$

Auch hier lassen sich die Integrale durch eine Zehnpunkt-GAUßintegration lösen und die Knotenwerte der Spannungen und Verschiebungen in den Vektoren  $\mathbf{p}$  und  $\mathbf{u}$  anordnen. Werden die in der Ebene relevanten Spannungskomponenten im Vektor  $\mathbf{t} = [\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \tau_{12}]^T$  einsortiert, können die Lösungen der Integrale in Gleichung (3.26) in den Matrizen  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  zusammengefasst werden, die als Einflussmatrizen der Verschiebungen bzw. der Spannungen des Gebietsrandes auf die Spannungen im Inneren gelten:

$$\mathbf{t} = \mathbf{A}\mathbf{u} + \mathbf{B}\mathbf{p}. \quad (3.27)$$

Ebenso wie die Einflussmatrizen  $\mathbf{G}$  und  $\mathbf{H}$  können die Matrizen  $\mathbf{A}$  und  $\mathbf{B}$  aus geometrischen Größen und den mechanischen Werkstoffeigenschaften errechnet werden.

Sollen mit der hier vorgestellten Randelementemethode mit Absolutverschiebungsansätzen Risse nachgebildet werden, müssen beide Rissufer mit Elementen vernetzt werden. Da der Riss im Modell jedoch als unendlich schmaler Schnitt aufgefasst wird, liegen die Rissflanken in diesem Fall direkt übereinander. Bei der Berechnung der Einflussmatrizen kann deshalb nicht zwischen den beiden Rissufern unterschieden werden, so dass eine Behandlung von Rissen auf diesem Weg nicht möglich ist. Eine von Brebbia und Dominguez (1998) vorgeschlagene einfache Möglichkeit, Rissprobleme dennoch mit Absolutverschiebungsrandelementen nachzubilden, ist eine Teilung des betrachteten, rissbehafteten Gebietes  $\Omega$  vorzunehmen, so dass die Rissufer  $\Gamma_{R1}$  und  $\Gamma_{R2}$  auf dem Gebietsrand liegen (vgl. Bild 3.10). Die hierbei neu entstandenen Ränder  $\Gamma_{T1}$  und  $\Gamma_{T2}$  lassen sich miteinander verknüpfen, da sie die gleichen Spannungs- und Verschiebungsverläufe aufweisen. Die interessierenden mechanischen Größen können nun berechnet und zur Ermittlung eines Rissfortschritts ausgewertet werden.

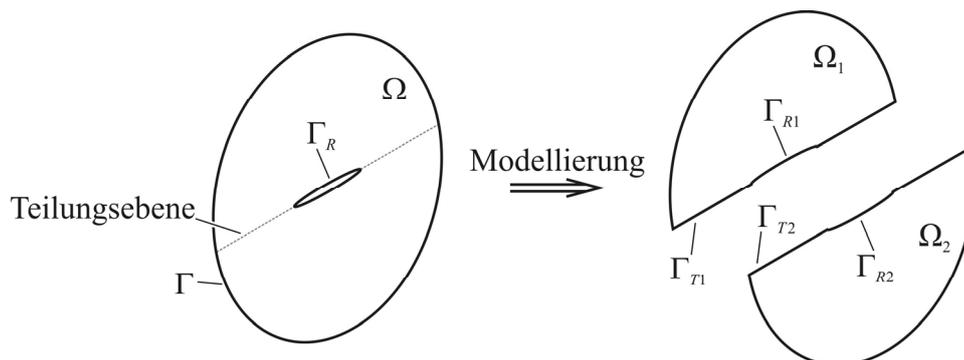


Bild 3.10: Nachbildung eines rissbehafteten Gebietes unter Verwendung von Randelementen mit Absolutverschiebungsansätzen.

Dieses Vorgehen zur Behandlung eines Risses erscheint für das in dieser Arbeit entwickelte Modell nur dann geeignet, wenn es sich um einen Riss auf einer Korn-, Zwillings- oder Phasengrenze handelt, da der Riss hierbei ohnehin auf dem Rand zwischen zwei Gebieten – den Körnern – liegt. Wird ein Riss innerhalb eines Gebietes betrachtet, ist die Teilung des Gebietes ungünstig – insbesondere, wenn es zur Rissausbreitung kommt. Nach jeder Rissverlängerung müsste hierbei die Teilungsebene neu festgelegt werden. Werden zusätzlich aktive Gleitebenen an der Risspitze berücksichtigt, wird die Teilung des Gebietes noch komplexer.

Eine einfachere Möglichkeit zur Lösung von Rissproblemen wird von Hills et al. (1995) vorgestellt und von Schick (2004) und Künkler (2007) erfolgreich eingesetzt. Hierbei handelt es

sich um die Randelementemethode mit Relativverschiebungsansätzen, die im folgenden Abschnitt vorgestellt wird.

### 3.2.2 Randelemente mit Relativverschiebungsansätzen

Randelemente mit Relativverschiebungsansätzen eignen sich besonders gut zur Nachbildung von Rissen in einer unendlichen Scheibe. Im Unterschied zur oben vorgestellten Randelementemethode mit Absolutverschiebungsansätzen ist hierbei nur die Vernetzung der Rissmitte erforderlich, die einzelnen Rissufer werden nicht vernetzt. Die eingesetzten Elemente sind im ebenen Fall linienförmig und erlauben eine Öffnung des Risses normal und eine Abgleitung tangential zur Risslinie. Diese Relativverschiebungen werden nach Hills et al. (1995) durch Verschiebungssprünge am Anfang und am Ende eines Elementes dargestellt. Das Einbringen eines Verschiebungssprunges in eine unendliche Scheibe kann gedanklich erfolgen, indem ausgehend von einem betrachteten Punkt in der Scheibe ein halbumendlicher Schnitt eingebracht wird. Dieser wird dann auseinandergezogen und dadurch geöffnet, so dass ein halbumendliches Rechteck mit der Breite  $b$  eingesetzt und verschweißt werden kann (Bild 3.11a). Wird anstelle dieses Rechteckes lediglich eines mit der Länge  $l$  eingesetzt, kann der außerhalb der Länge  $l$  offen bleibende Schnitt wieder zusammengedrückt und ebenfalls verschweißt werden. Auf diese Weise entsteht am Ende des Rechteckes ein zweiter Verschiebungssprung mit negativem Vorzeichen (Bild 3.11b). Wird  $l$  als Elementlänge und  $b$  als eine Rissöffnungsverschiebung interpretiert, ist auf diese Weise bereits ein Risselement entstanden. Analog hierzu kann auch eine Abgleitung durch einen Verschiebungssprung am Elementanfang und einen am Elementende beschrieben werden. Durch Überlagerung dieser beiden Fälle entsteht ein Risselement, das sowohl eine normale Öffnung  $b_n$  als auch eine tangentiale Abgleitung  $b_t$  erlaubt (Bild 3.11c).

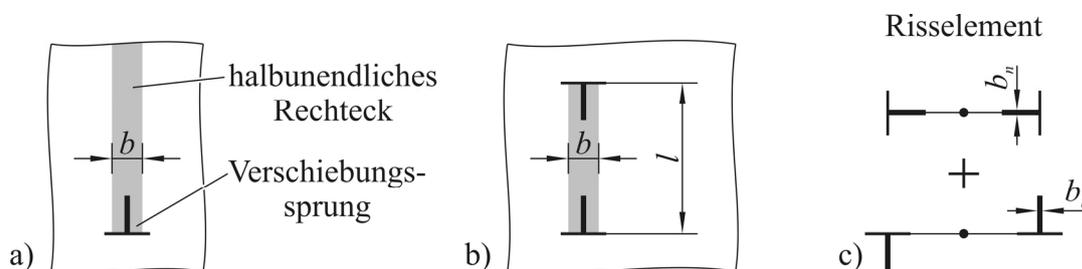


Bild 3.11: Risselement bestehend aus Verschiebungssprüngen: a) Einbringen eines Verschiebungssprunges in eine unendliche Scheibe, b) durch zwei Verschiebungssprünge auf die Länge  $l$  beschränkte Verschiebung der Breite  $b$  und c) Risselement mit Normal- und Tangentialverschiebung.

Durch die Vernetzung eines Risses mit den so entstandenen Elementen, die jeweils eine konstante Öffnung und Ableitung aufweisen, können die Relativverschiebungen der Rissufer näherungsweise nachgebildet werden. Bild 3.12 zeigt als Beispiel einen Riss unter Modus I-Beanspruchung, bei dem nur Normalverschiebungen  $b_n$  auftreten.

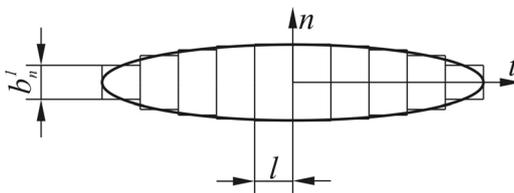


Bild 3.12: Mit Randelementen mit Relativverschiebungsansätzen vernetzter Riss nach Künkler (2007).

Es ist nun leicht vorstellbar, dass die Verschiebungssprünge am Anfang und Ende der Elemente jeweils ein Verschiebungs- und ein Spannungsfeld in der unendlichen Scheibe verursachen. Im  $x_1^0 - x_2^0$ -Koordinatensystem eines Verschiebungssprunges kann sein Absolutverschiebungsfeld – beschrieben durch  $u_1$  und  $u_2$  – nach Hills et al. (1995) durch die folgende Gleichung beschrieben werden:

$$\begin{bmatrix} u_1(x_1^0, x_2^0) \\ u_2(x_1^0, x_2^0) \end{bmatrix} = \frac{1}{8\pi(1-\nu)} \begin{bmatrix} 4(1-\nu)\theta + \frac{2x_1^0 x_2^0}{r^2} & 2(1-2\nu)\ln(r) - \frac{2(x_1^0)^2}{r^2} \\ -2(1-2\nu)\ln(r) - \frac{2(x_1^0)^2}{r^2} & 4(1-\nu)\theta - \frac{2x_1^0 x_2^0}{r^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}, \quad (3.28)$$

mit  $r = \sqrt{(x_1^0)^2 + (x_2^0)^2}$ .

Hierbei ist zu erkennen, dass die Größe der Absolutverschiebungen den Verschiebungen  $b_1$  in  $x_1$ -Richtung und  $b_2$  in  $x_2$ -Richtung proportional ist. Der Winkel  $\theta$  liegt zwischen der Abszisse und dem betrachteten, durch den Vektor  $\mathbf{r}$  beschriebenen Punkt  $i$  (vgl. Bild 3.13).

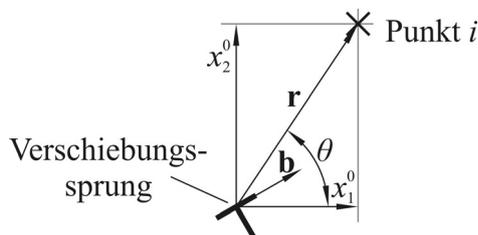


Bild 3.13: Geometrische Größen am Verschiebungssprung zur Bestimmung des von ihm verursachten Verschiebungsfeldes.

Da ein Element aus zwei Verschiebungssprüngen – einem negativen am Elementanfang und einem positiven am Elementende – besteht, berechnet sich das vom Element verursachte Verschiebungsfeld aus der Superposition beider Verschiebungssprünge. Zu diesem Zweck wird das in Gleichung (3.28) im  $x_1^0 - x_2^0$ -Koordinatensystem angegebene Verschiebungsfeld aus dem  $x_1^1 - x_2^1$ -Koordinatensystem des ersten bzw. aus dem  $x_1^2 - x_2^2$ -Koordinatensystem des zweiten Verschiebungssprunges in ein gemeinsames  $x_1 - x_2$ -Koordinatensystem transformiert. Die von den Verschiebungssprüngen des Elementes  $j$  verursachten Absolutverschiebungen an einem beliebigen Punkt  $i$  in der unendlichen Scheibe können so in der Einflussmatrix  $\mathbf{F}^{ij}$  zusammengefasst werden (Bild 3.14).

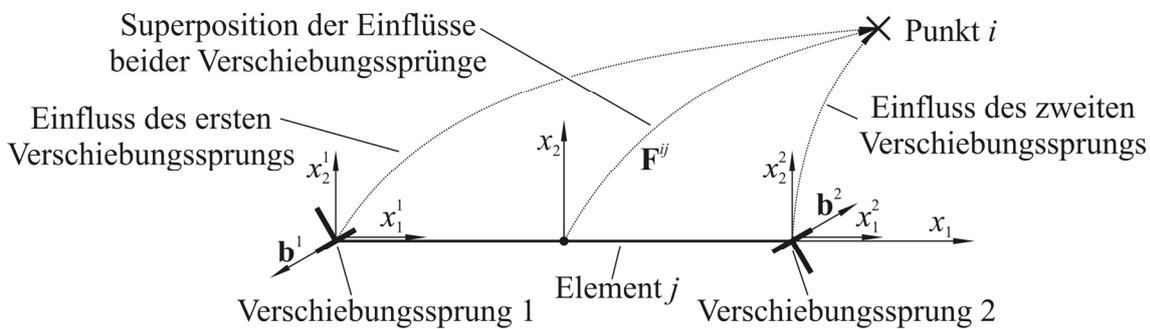


Bild 3.14: Element bestehend aus zwei Verschiebungssprüngen und deren Einfluss auf den in der unendlichen Scheibe beliebig gewählten Punkt  $i$  nach Künkler (2007).

Zur Bestimmung der Matrix  $\mathbf{F}^{ij}$  sind lediglich geometrische Informationen wie die Lage des Elementes  $j$  und des Punktes  $i$  sowie die Querkontraktionszahl  $\nu$  erforderlich. Da ein Riss in der Regel durch mehrere Randelemente vernetzt wird, ergibt sich die Verschiebung am Punkt  $i$  aus der Summe über die Verschiebungen aller  $M$  Elemente, multipliziert mit ihren zugehörigen Einflussmatrizen:

$$u_1^i = \sum_{j=1}^M F_{11}^{ij} b_1^j + \sum_{j=1}^M F_{12}^{ij} b_2^j, \quad (3.29)$$

$$u_2^i = \sum_{j=1}^M F_{21}^{ij} b_1^j + \sum_{j=1}^M F_{22}^{ij} b_2^j. \quad (3.30)$$

Werden die Relativverschiebungen aller Elemente im Vektor  $\mathbf{b} = [b_1^1 \quad b_2^1 \quad b_1^2 \quad b_2^2 \quad \dots]^T$  angeordnet, lassen sich die Gleichungen (3.29) und (3.30) in Matrix-Vektor-Form darstellen, wobei der Vektor  $\mathbf{u}$  die Absolutverschiebungen aller interessierenden Punkte enthält:

$$\mathbf{u} = \mathbf{Fb}. \quad (3.31)$$

Zusätzlich zu den Verschiebungen können auch Spannungen in der unendlichen Scheibe berechnet werden, da sich die Spannungen  $\sigma_{ij}$  über das HOOKE'sche Gesetz (Gleichung (3.23)) mit den Ableitungen der Verschiebungen in Zusammenhang bringen lassen. Durch Einsetzen von Gleichung (3.28) in Gleichung (3.23) und geeignete Umformung kann so der folgende Ausdruck erhalten werden, in dem die von einem Versetzungssprung verursachten Spannungen den Relativverschiebungen  $b_1$  und  $b_2$  proportional sind (Hills et al. 1995):

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11}(x_1^0, x_2^0) \\ \sigma_{22}(x_1^0, x_2^0) \\ \tau_{12}(x_1^0, x_2^0) \end{bmatrix} = \frac{\mu}{2\pi(1-\nu)} \begin{bmatrix} -\frac{x_2^0}{r^4} [3(x_1^0)^2 + (x_2^0)^2] & \frac{x_1^0}{r^4} [(x_1^0)^2 - (x_2^0)^2] \\ \frac{x_2^0}{r^4} [(x_1^0)^2 - (x_2^0)^2] & \frac{x_1^0}{r^4} [(x_1^0)^2 + 3(x_2^0)^2] \\ \frac{x_1^0}{r^4} [(x_1^0)^2 - (x_2^0)^2] & \frac{x_2^0}{r^4} [(x_1^0)^2 - (x_2^0)^2] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

Analog zum oben vorgestellten Vorgehen können die von einem Element  $j$  verursachten Spannungen an einem beliebigen Punkt  $i$  der unendlichen Scheibe aus der Superposition zweier Verschiebungssprünge unterschiedlichen Vorzeichens bestimmt und durch die Einflussmatrix  $C^{ij}$  ausgedrückt werden. Liegen  $M$  Elemente vor, so ergeben sich die Spannungen am Punkt  $i$  aus der Summe über alle Elemente:

$$\sigma_{11}^i = \sum_{j=1}^M C_{111}^{ij} b_1^j + \sum_{j=1}^M C_{211}^{ij} b_2^j, \quad (3.33)$$

$$\sigma_{22}^i = \sum_{j=1}^M C_{122}^{ij} b_1^j + \sum_{j=1}^M C_{222}^{ij} b_2^j, \quad (3.34)$$

$$\tau_{12}^i = \sum_{j=1}^M C_{112}^{ij} b_1^j + \sum_{j=1}^M C_{212}^{ij} b_2^j. \quad (3.35)$$

Ist die unendliche Scheibe selbst einer äußeren Spannung ausgesetzt, muss diese noch zu den obigen Gleichungen hinzuaddiert werden. Ebenso wie für die Einflussmatrizen  $\mathbf{F}^{ij}$  sind zur Bestimmung von  $\mathbf{C}^{ij}$  nur geometrische Größen und Werkstoffeigenschaften erforderlich.

Werden auch hier der Relativverschiebungsvektor  $\mathbf{b}$  verwendet und die Spannungen am Punkt  $i$  im Vektor  $\mathbf{t} = [\sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \tau_{12}]^T$  angeordnet, lässt sich für die Gleichungen (3.33) bis (3.35) die Matrix-Vektor-Darstellung wählen:

$$\mathbf{t} = \mathbf{C}\mathbf{b}. \quad (3.36)$$

Die Behandlung eines Rissproblems soll nun anhand des Beispiels eines  $x_1$ -achsenparallelen Risses kurz erläutert werden, zu der zunächst die Vernetzung des Risses durch Elemente erfolgt. Als Punkte der interessierenden Spannungen werden dabei alle Elementmittelpunkte gewählt, so dass vom Gleichungssatz (3.33) bis (3.35) jeweils ebensoviele Gleichungen entstehen, wie Elemente vorhanden sind. Es werden die Spannungen in den Elementmittelpunkten resultierend aus den Relativverschiebungen  $\mathbf{b}$  der Elemente bestimmt.

An jedem Element ergeben sich zwei Relativverschiebungsfreiheitsgrade (einer je Raumrichtung) und drei Spannungsfreiheitsgrade. Auf das Rissproblem mit  $x_1$ -achsenparallelem Riss hat jedoch die Spannung  $\sigma_{11}$  parallel zum Riss keinen Einfluss, so dass noch zwei Spannungsfreiheitsgrade bleiben. Um das Problem zu lösen, müssen zwei der vier Freiheitsgrade je Element vorgegeben werden. Bei geöffnetem Riss sind die Normalspannungen  $\sigma_{22}$  gleich null, während bei geschlossenem Riss die Normalverschiebungen  $b_2$  verschwinden. Unter der von Navarro und de los Rios (1988) getroffenen Vereinfachung, dass zwischen den Rissflanken Reibungsfreiheit herrscht, weisen die Schubspannungen  $\tau_{12}$  ebenfalls den Wert Null auf. Mit diesen Randbedingungen können die Relativverschiebungen der Rissflanken bzw. bei geschlossenem Riss auch die Normalspannungen ermittelt und so das Rissproblem gelöst werden. Bei nicht achsenparallelen Rissen muss eine Transformation in ein Koordinatensystem mit den Achsen tangential und normal zum jeweiligen Risselement erfolgen. Hierbei wird dann auch die erste Gleichung des Gleichungssatzes (3.33) bis (3.35) einbezogen.

Mit den Randlelementen mit Relativverschiebungsansätzen ist die Nachbildung von aktivierten Gleitebenen möglich, indem die Normalverschiebung (Öffnung) per Randbedingung mit null festgelegt wird. Überschreitet die Schubspannung  $\tau_{12}$  entlang der Gleitebenen betragsmäßig die Fließschubspannung des Werkstoffs, wird die Schubspannung in diesem Bereich per Randbedingung auf die Fließschubspannung  $\tau^F$  herabgesetzt und die Ableitung entlang der Gleitebene berechnet.

Die Methode kann auch ein berandetes Gebiet (vgl. Bild 3.15) behandeln, wozu Künkler (2007) ein mögliches Verfahren vorstellt: Die Gebietskontur wird hierzu mit Elementen vernetzt und so aus der unendlichen Scheibe herausgeschnitten. An den Einspannstellen liegen jedoch keine Elemente vor, so dass hier eine Verbindung zur unendlichen Scheibe besteht. Unter Beanspruchung verformt sich das Gebiet, das beispielsweise ein ebenes Bauteil repräsentiert, und es können Spannungen in dessen Inneren ermittelt werden. Besonders bietet sich bei diesem Vorgehen die Behandlung eines Rissproblems innerhalb des Gebietes an, was von

Künkler (2007) erfolgreich demonstriert wird. Nachteilig bei dieser Methode ist jedoch, dass sich am Rand des Bauteils lediglich Relativverschiebungen bestimmen lassen, während die Absolutverschiebung der Gebietsränder nicht ermittelt werden können. Sollen mehrere Gebiete betrachtet werden – so wie die unterschiedlichen Phasen im in dieser Arbeit behandelten metastabilen austenitischen Edelstahl – muss sichergestellt werden, dass die Phasen fest miteinander verbunden bleiben. Da mit Randelementen mit Relativverschiebungsansätzen jedoch keine Absolutverschiebungen an den Phasenrändern ermittelt werden, lässt sich diese Anforderung nicht erfüllen.

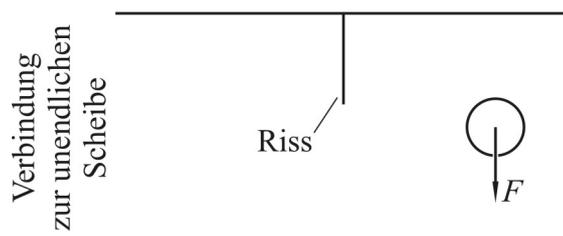


Bild 3.15: Ebenes, rissbehaftetes Bauteil, das durch Randelemente mit Relativverschiebungsansätzen nachgebildet werden kann.

In diesem und dem vorherigen Abschnitt konnte gezeigt werden, dass sich Randelemente mit Absolutverschiebungsansätzen eignen, um Spannungen und Verschiebungen in endlichen aber rissfreien Gebieten zu berechnen. Randelemente mit Relativverschiebungsansätzen sind dagegen bei der Berechnung von mechanischen Größen in einer rissbehafteten unendlichen Scheibe zu bevorzugen. Daher ist es naheliegend, beide Elementtypen miteinander zu koppeln, um ihre jeweiligen Vorzüge bei der Modellierung von rissbehafteten endlichen Gebieten auszunutzen, was im folgenden Abschnitt durchgeführt wird.

### 3.2.3 Kopplung von Randelementen mit Absolut- und Relativverschiebungsansätzen

In den vorhergehenden Abschnitten ließ sich zeigen, dass sich die Randelementemethoden mit Absolut- und Relativverschiebungsansätzen in ihren Vorteilen ergänzen. Daher sollen beide Methoden miteinander gekoppelt werden, wozu Ameen und Raghuprasad (1994) ein Superpositionsverfahren vorgestellt haben.

#### Kopplung der Randelementemethoden nach Ameen und Raghuprasad (1994)

Um beide Randelementemethoden in einem Modell nutzen zu können, wird das Gesamtproblem eines Risses in einem endlichen Gebiet (Bild 3.16a) in zwei Teilprobleme zerlegt: Den Riss in einer unendlichen Scheibe (Bild 3.16b) und das rissfreie endliche Gebiet (Bild 3.16c).

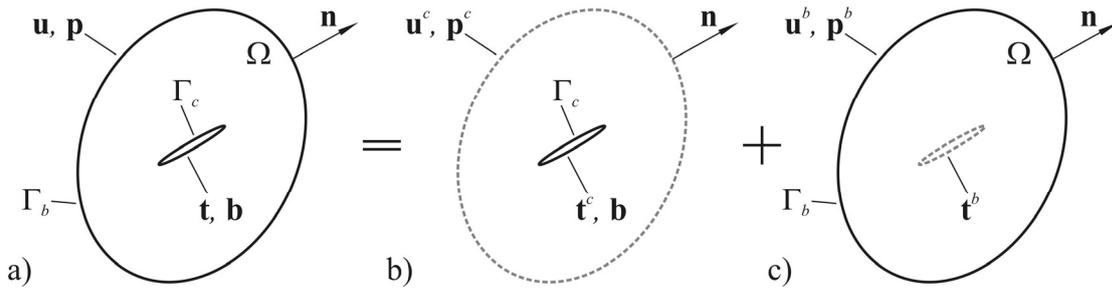


Bild 3.16: Zerlegung des Rissproblems in einer unendlichen Scheibe nach Ameen und Raghuprasad (1994) mit a) dem Gesamtproblem, b) dem Riss in der unendlichen Scheibe und c) dem rissfreien endlichen Gebiet.

Beide Teilprobleme können nun getrennt voneinander betrachtet werden, wobei der Riss in der unendlichen Scheibe mit Randelementen mit Relativverschiebungsansätzen diskretisiert und das endliche Gebiet mit Randelementen mit Absolutverschiebungsansätzen umschlossen wird. Anschließend werden die Einflussmatrizen aufgestellt: Die Relativverschiebungen  $\mathbf{b}$  der Risselemente verursachen den Spannungsvektor  $\mathbf{t}^c$  im Riss selbst und Absolutverschiebungen  $\mathbf{u}^c$  entlang der Kontur des endlichen Gebietes:

$$\mathbf{t}^c = \mathbf{C}\mathbf{b}; \quad \mathbf{u}^c = \mathbf{F}\mathbf{b}. \quad (3.37)$$

Zur Bestimmung des Spannungsvektors  $\mathbf{p}^c$  entlang der Gebietskontur wird der Gleichungssatz (3.33) bis (3.35) verwendet, wobei der Spannungstensor  $\boldsymbol{\sigma}$  mit der Randnormale am entsprechenden Punkt multipliziert wird ( $\mathbf{p} = \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}$ ). So entsteht die zusätzliche Einflussmatrix  $\mathbf{D}$ :

$$\mathbf{p}^c = \mathbf{D}\mathbf{b}. \quad (3.38)$$

Beim endlichen Gebiet sind die Verschiebungen  $\mathbf{u}^b$  und der Spannungsvektor  $\mathbf{p}^b$  über die Einflussmatrizen  $\mathbf{G}$  und  $\mathbf{H}$  miteinander verknüpft und verursachen den Spannungsvektor  $\mathbf{t}^b$  entlang des Risses:

$$\mathbf{H}\mathbf{u}^b = \mathbf{G}\mathbf{p}^b; \quad \mathbf{t}^b = \mathbf{A}\mathbf{u}^b + \mathbf{B}\mathbf{p}^b. \quad (3.39)$$

Ameen und Raghuprasad (1994) fassen die Gesamtverschiebungen  $\mathbf{u}$  und den Gesamtspannungsvektor  $\mathbf{p}$  auf dem Gebietsrand sowie den Spannungsvektor  $\mathbf{t}$  entlang des Risses als Summe der entsprechenden Größen aus diesen beiden Fällen auf, was zu den folgenden Kompatibilitätsbedingungen führt:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^b + \mathbf{u}^c; \quad \mathbf{p} = \mathbf{p}^b + \mathbf{p}^c; \quad \mathbf{t} = \mathbf{t}^b + \mathbf{t}^c. \quad (3.40)$$

Durch Umstellen dieser Gleichungen nach den mit  $b$  indizierten Größen und Einsetzen in die Gleichungen (3.39) entstehen folgende Zusammenhänge:

$$\mathbf{H}(\mathbf{u} - \mathbf{u}^c) = \mathbf{G}(\mathbf{p} - \mathbf{p}^c); \quad \mathbf{t} - \mathbf{t}^c = \mathbf{A}(\mathbf{u} - \mathbf{u}^c) + \mathbf{B}(\mathbf{p} - \mathbf{p}^c). \quad (3.41)$$

Anschließend lassen sich durch Einsetzen der Gleichungen (3.37) und (3.38) die mit  $c$  indizierten Größen durch die Relativverschiebungen  $\mathbf{b}$  ausdrücken:

$$\mathbf{H}(\mathbf{u} - \mathbf{Fb}) = \mathbf{G}(\mathbf{p} - \mathbf{Db}); \quad \mathbf{t} - \mathbf{Cb} = \mathbf{A}(\mathbf{u} - \mathbf{Fb}) + \mathbf{B}(\mathbf{p} - \mathbf{Db}). \quad (3.42)$$

Umordnen dieser Gleichungen führt zu:

$$\mathbf{Hu} + (\mathbf{GD} - \mathbf{HF})\mathbf{b} = \mathbf{Gp}; \quad \mathbf{Au} + (\mathbf{C} - \mathbf{AF} - \mathbf{BD})\mathbf{b} = -\mathbf{Bp} + \mathbf{t}. \quad (3.43)$$

Ameen und Raghuprasad (1994) fassen diese beiden Zusammenhänge zu einem Gleichungssystem zusammen, in dem die Randelemente mit Absolut- und Relativverschiebungsansätzen gekoppelt sind:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{GD} - \mathbf{HF} \\ \mathbf{A} & \mathbf{C} - \mathbf{AF} - \mathbf{BD} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{B} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{t} \end{bmatrix}. \quad (3.44)$$

Hierin sind  $\mathbf{0}$  die Nullmatrix und  $\mathbf{I}$  die Einheitsmatrix. Mit Hilfe der in den vorherigen Abschnitten beschriebenen Randbedingungen kann das Gleichungssystem gelöst und alle mechanischen Größen auf dem Gebietsrand sowie entlang des Risses bestimmt werden. Risselemente, bei denen die Normalverschiebung per Randbedingung mit null vorgegeben wird, lassen sich zur Vernetzung der aktivierten Gleitbänder nutzen. Werden Risselemente eingesetzt, bei denen die Randbedingungen alle Verschiebungen unterbinden, können mit ihnen Spannungen im betrachteten Gebiet ermittelt werden; es handelt sich dabei um sog. Sensorelemente.

Nachteilig an dieser Methode ist es, dass Randrisse nur mit zusätzlichem Aufwand berechnet werden können: Die Autoren schlagen hierzu für das Teilproblem des Risses in der unendlichen Scheibe vor, eine punktsymmetrische Spiegelung des Risses an der Stelle vorzunehmen, an der der Riss die Kontur des Gebietsrandes berührt (vgl. Ameen und Raghuprasad 1994). Es kann gezeigt werden (z.B. Kübbeler 2007, Kübbeler 2010), dass auf diese Weise mitunter anspruchsvolle Rissausbreitungsprobleme gelöst werden können. Sind jedoch zwei Gleitbänder an einer Rissspitze aktiv, die beide an eine Korngrenze – und damit an eine Gebietsgrenze stoßen – ist dieses Vorgehen nicht mehr einsetzbar, so dass nachfolgend ein verbessertes Verfahren zur Kopplung der Randelementemethoden entwickelt wird.

### Ein weiterentwickeltes Verfahren zur Kopplung von Randelementemethoden mit Absolut- und Relativverschiebungsansätzen

Bei dem hier vorgestellten Kopplungsverfahren soll die Grundidee der Superposition der beiden oben dargestellten Teilprobleme (siehe Bild 3.16) beibehalten werden. Die Verknüpfung der Randelementemethoden erfolgt jedoch bereits vor der Formulierung der Einflussmatrizen. Ausgangspunkt hierfür ist die SOMIGLIANA-Identität, die die Spannungen  $p_k^b$  und Verschiebungen  $u_k^b$  aus dem Teilproblem des rissfreien Gebietes enthält:

$$u_l^{bi} + \int_{\Gamma} p_{lk}^* u_k^b d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{lk}^* p_k^b d\Gamma + \int_{\Omega} u_{lk}^* b_k d\Omega. \quad (3.45)$$

In diese werden nun die Kompatibilitätsbedingungen (Gleichung (3.40)) eingesetzt, und die in dieser Arbeit nicht betrachteten volumenbezogenen Kräfte  $b_k$  entfallen:

$$u_l^i - u_l^{ci} + \int_{\Gamma} p_{lk}^* (u_k - u_k^c) d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{lk}^* (p_k - p_k^c) d\Gamma. \quad (3.46)$$

Durch Umgruppieren dieser Gleichung lässt sich der folgende Zusammenhang erhalten:

$$u_l^i + \int_{\Gamma} p_{lk}^* u_k d\Gamma - u_l^{ci} = \int_{\Gamma} u_{lk}^* p_k d\Gamma + \int_{\Gamma} (p_{lk}^* u_k^c - u_{lk}^* p_k^c) d\Gamma. \quad (3.47)$$

Hierin lassen sich die Terme der ursprünglichen SOMIGLIANA-Identität wiederfinden. Hinzu kommen die von den Verschiebungssprüngen innerhalb des Gebietes verursachten Verschiebungen  $u_l^{ci}$  am Punkt  $i$  und der letzte Term der Gleichung, der nachfolgend als Integral  $I_l$  bezeichnet wird. Er enthält die von den Verschiebungssprüngen verursachten Spannungen  $p_k^c$  und Verschiebungen  $u_k^c$  entlang des Randes. Die Verschiebungen  $u_l^{ci}$  lassen sich der Gleichung (3.29) entsprechend durch die Relativverschiebungen der Elemente im Inneren des Gebietes ausdrücken:

$$u_l^{ci} = \sum_{j=1}^M F_{lk}^{ij} b_k^j. \quad (3.48)$$

Vom Integral  $I_l$  lässt sich zeigen, dass es den Wert Null ergibt. Hierzu können die Randspannungen  $p_i = \sigma_{ij} n_j$  unter Verwendung von Gleichung (3.23) wie folgt ausgedrückt werden:

$$\begin{aligned}
 p_1 &= \mu \left[ -2 \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_2} n_1 - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} n_2 \right) + \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) n_1 + \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) n_2 \right], \\
 p_2 &= \mu \left[ 2 \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} n_1 - \frac{\partial u_1}{\partial x_1} n_2 \right) - \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) n_1 + \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) n_2 \right].
 \end{aligned}
 \tag{3.49}$$

Für die Komponenten der Randnormale  $n_1$  und  $n_2$  gilt der nachstehende Zusammenhang zu den Ableitungen der Koordinatenrichtungen  $x_1$  und  $x_2$  nach der Richtung eines Gebietsrandes  $\Gamma$  (vgl. Bild 3.17):

$$\cos \beta = \frac{dx_1}{d\Gamma} = -n_2 \quad \text{und} \quad \sin \beta = \frac{dx_2}{d\Gamma} = n_1.
 \tag{3.50}$$

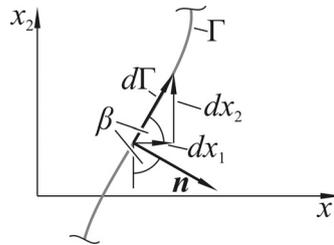


Bild 3.17: Zusammenhang zwischen den Komponenten der Randnormalen und den Ableitungen der Koordinatenrichtungen nach der Richtung eines Gebietsrandes.

Werden die Gleichungen (3.50) in (3.49) eingesetzt, entstehen die folgenden Ausdrücke für die Randspannungen  $p_1$  und  $p_2$ :

$$\begin{aligned}
 p_1 &= \mu \left[ -2 \frac{du_2}{d\Gamma} + \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) n_1 + \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) n_2 \right], \\
 p_2 &= \mu \left[ 2 \frac{du_1}{d\Gamma} - \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) n_1 + \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) n_2 \right].
 \end{aligned}
 \tag{3.51}$$

Diese können nun im Integral  $I_l$  verwendet werden. Die weitere Herleitung erfolgt beispielhaft für  $l = 1$ :

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{\Gamma} (p_{1k}^* u_k^c - u_{1k}^* p_k^c) d\Gamma \\
&= 2\mu \int_{\Gamma} \left( \frac{du_{11}^*}{d\Gamma} u_2^c + u_{11}^* \frac{du_2^c}{d\Gamma} \right) d\Gamma - 2\mu \int_{\Gamma} \left( \frac{du_{12}^*}{d\Gamma} u_1^c + u_{12}^* \frac{du_1^c}{d\Gamma} \right) d\Gamma \\
&\quad + \mu \left[ \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial u_{11}^*}{\partial x_1} + \frac{\partial u_{12}^*}{\partial x_2} \right) \cdot (u_1^c n_1 + u_2^c n_2) d\Gamma - \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial u_{11}^*}{\partial x_2} - \frac{\partial u_{12}^*}{\partial x_1} \right) \cdot (u_2^c n_1 - u_1^c n_2) d\Gamma \right] \\
&\quad - \mu \left[ \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial u_1^c}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2^c}{\partial x_2} \right) \cdot (u_{11}^* n_1 + u_{12}^* n_2) d\Gamma - \int_{\Gamma} \left( \frac{\partial u_1^c}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2^c}{\partial x_1} \right) \cdot (u_{12}^* n_1 - u_{11}^* n_2) d\Gamma \right]
\end{aligned} \tag{3.52}$$

Die beiden ersten Integrale sind wegunabhängig, wodurch deren Lösungen lediglich die eingeschlossenen Singularitäten enthalten. Bei diesen Singularitäten handelt es sich um die Verschiebungssprünge der Randelemente mit Relativverschiebungsansätzen, die jedoch paarweise mit entgegengesetztem Vorzeichen auftreten, so dass die wegunabhängigen Integrale verschwinden. Für die verbleibenden Integrale bietet es sich an, diese durch umgekehrte Anwendung des Integralsatzes von GAUß von Randintegralen zurück in Flächenintegrale zu wandeln, was zum folgenden Ausdruck führt:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{\Gamma} (p_{1k}^* u_k^c - u_{1k}^* p_k^c) d\Gamma \\
&= \int_{\Omega} \left[ \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial u_{11}^*}{\partial x_1} + \frac{\partial u_{12}^*}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial u_{11}^*}{\partial x_2} - \frac{\partial u_{12}^*}{\partial x_1} \right) \right] u_1^c d\Omega \\
&\quad + \int_{\Omega} \left[ \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial u_{11}^*}{\partial x_1} + \frac{\partial u_{12}^*}{\partial x_2} \right) - \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial u_{11}^*}{\partial x_2} - \frac{\partial u_{12}^*}{\partial x_1} \right) \right] u_2^c d\Omega \\
&\quad - \int_{\Omega} \left[ \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial u_1^c}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2^c}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial u_1^c}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2^c}{\partial x_1} \right) \right] u_{11}^* d\Omega \\
&\quad - \int_{\Omega} \left[ \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial u_1^c}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2^c}{\partial x_2} \right) - \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial u_1^c}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2^c}{\partial x_1} \right) \right] u_{12}^* d\Omega
\end{aligned} \tag{3.53}$$

Durch Ausführung der Ableitungen lässt sich nun nachweisen, dass jeder Ausdruck in eckigen Klammern null ergibt und somit das letzte Integral in Gleichung (3.47) verschwindet, die daher wie folgt notiert werden kann:

$$u_i^i + \int_{\Gamma} p_{ik}^* u_k^c d\Gamma - \sum_{j=1}^M F_{ik}^{ij} b_k^j = \int_{\Gamma} u_{ik}^* p_k^c d\Gamma. \tag{3.54}$$

Durch Umstellen dieser Gleichung nach  $u_i^i$  und Einsetzen in das HOOKE'sche Gesetz (Gleichung (3.23)) können auch die Spannungen  $\sigma_{im}$  im Inneren des Gebietes  $\Omega$  berechnet werden,

die aus den mechanischen Größen auf dem Gebietsrand  $\Gamma$  und den Relativverschiebungen der Elemente innerhalb von  $\Omega$  resultieren:

$$\sigma_{lm}^i = \int_{\Gamma} D_{klm} p_k d\Gamma - \int_{\Gamma} S_{klm} u_k d\Gamma + \sum_{j=1}^M C_{klm}^{ij} b_k^j . \quad (3.55)$$

Eine alternative Herleitung von Gleichung (3.54) basiert auf Wünsche (2008). Hier wird die SOMIGLIANA-Identität (Gleichung (3.15)) zur Beschreibung der Spannungen und Verschiebungen eines Gebietes verwendet, das einen Riss enthält. Der Gebietsrand wird dabei in den äußeren Rand  $\Gamma^b$  sowie in die Ränder  $\Gamma^{c+}$  des positiven und  $\Gamma^{c-}$  des negativen Rissufers unterteilt und auf die Berücksichtigung volumenbezogener Kräfte verzichtet:

$$u_l^i + \int_{\Gamma^b} p_{lk}^* u_k d\Gamma + \int_{\Gamma^{c+}} p_{lk}^* u_k d\Gamma + \int_{\Gamma^{c-}} p_{lk}^* u_k d\Gamma = \int_{\Gamma^b} u_{lk}^* p_k d\Gamma + \int_{\Gamma^{c+}} u_{lk}^* p_k d\Gamma + \int_{\Gamma^{c-}} u_{lk}^* p_k d\Gamma . \quad (3.56)$$

Werden die Randspannungen in den Integralen der Rissufer durch den Spannungstensor und die Randnormale ausgedrückt ( $p_k = \sigma_{kj} n_j$  bzw.  $p_{lk}^* = \sigma_{lkj}^* n_j$ ), wird nach Umsortierung folgender Zusammenhang erhalten:

$$u_l^i + \int_{\Gamma^b} p_{lk}^* u_k d\Gamma + \int_{\Gamma^{c+}} (\sigma_{lkj}^* u_k - u_{lk}^* \sigma_{kj}) n_j d\Gamma + \int_{\Gamma^{c-}} (\sigma_{lkj}^* u_k - u_{lk}^* \sigma_{kj}) n_j d\Gamma = \int_{\Gamma^b} u_{lk}^* p_k d\Gamma . \quad (3.57)$$

Im unverformten Zustand liegen beide Rissufer aufeinander, so dass sich für die virtuellen Spannungen  $\sigma_{lkj}^*$  und Verschiebungen  $u_{lk}^*$  identische Werte ergeben. Während die Absolutverschiebungen  $u_{k(\Gamma^{c+})}$  am positiven und  $u_{k(\Gamma^{c-})}$  am negativen Rissufer bei einer Rissöffnung unterschiedliche Werte aufweisen, ist der Spannungstensor  $\sigma_{kj}$  an beiden Ufern gleich. Aufgrund der entgegengesetzten Vorzeichen der Randnormalen heben sich die Teile  $u_{lk}^* \sigma_{kj}$  in den Klammern der Integrale auf und es wird die folgende Gleichung erhalten:

$$u_l^i + \int_{\Gamma^b} p_{lk}^* u_k d\Gamma + \int_{\Gamma^{c+}} \sigma_{lkj}^* (u_{k(\Gamma^{c+})} - u_{k(\Gamma^{c-})}) n_{j(\Gamma^{c+})} d\Gamma = \int_{\Gamma^b} u_{lk}^* p_k d\Gamma . \quad (3.58)$$

Der virtuelle Spannungstensor kann nun wieder mit der Randnormale zusammengefasst ( $p_{lk}^* = \sigma_{lkj}^* n_j$ ) und die Differenz der Absolutverschiebungen der Rissufer durch die Relativverschiebung  $b_k = u_{k(\Gamma^{c+})} - u_{k(\Gamma^{c-})}$  ausgedrückt werden:

$$u_l^i + \int_{\Gamma^b} p_{lk}^* u_k d\Gamma + \int_{\Gamma^{c+}} p_{lk}^* b_k d\Gamma = \int_{\Gamma^b} u_{lk}^* p_k d\Gamma . \quad (3.59)$$

Wird der Riss durch Elemente mit konstanten Relativverschiebungsansätzen diskretisiert und das betreffende Integral in Gleichung (3.59) entsprechend gelöst, wird das zuvor in Gleichung (3.54) erhaltene Ergebnis bestätigt.

Die Gleichungen (3.54) und (3.55) können nach der Formulierung der Elemente (vgl. Abschnitt 3.2.1) in Matrix-Vektor-Form dargestellt und in der von Ameen und Raghuprasad (1994) vorgeschlagenen Weise notiert werden:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H} & -\mathbf{F} \\ \mathbf{A} & \mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{B} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{t} \end{bmatrix}. \quad (3.60)$$

Bei der Lösung von Rissproblemen kann dieses Gleichungssystem wie in der oben beschriebenen Methode eingesetzt werden. Als wesentlicher Vorteil ergibt sich hierbei, dass bei der Behandlung von Randschissen keine zusätzlichen Maßnahmen erforderlich sind.

Bemerkenswert ist, dass das oben entwickelte Superpositionsverfahren bei der Berechnung elastisch-plastischen Materialverhaltens eingesetzt werden soll, obwohl das Überlagerungsprinzip zunächst nur bei linearen Problemen zulässig erscheint – also bei linear-elastischem Materialverhalten. Die Verwendung der von Künkler (2007) vorgeschlagenen iterativen Bestimmung der elastisch-plastischen Lösung erlaubt jedoch die Verwendung der auf Superposition beruhenden Kopplung der Randelementemethoden:

In einem ersten Berechnungsschritt wird entlang der vernetzten Gleitspuren zunächst keine Abgleitung zugelassen, so dass eine rein elastische Bestimmung der Relativverschiebungen im Riss und der Schubspannungen auf den Gleitebenen erfolgt. Wird die Fließschubspannung des Werkstoffs auf Randelementen der Gleitspuren betragsmäßig überschritten, werden die Schubspannungen dieser Elemente per Randbedingung auf die Fließschubspannung reduziert. Dann erfolgt eine erneute rein elastische Lösung des Rissproblems, bei der auf diesen Elementen eine plastische Verschiebung berechnet wird und zusätzliche Elemente bezüglich der Schubspannung überlastet sein können. Ihnen wird ebenfalls per Randbedingung die Fließschubspannung vorgegeben und das Rissproblem so lange iterativ gelöst, bis es zu keiner Überschreitung der Fließschubspannung mehr kommt. Jede dieser Einzelrechnungen erfolgt dabei rein elastisch und das Superpositionsverfahren bleibt trotz der Berücksichtigung elastisch-plastischen Materialverhaltens anwendbar.

Die Methode mit gekoppelten Randelementtypen wurde in den vorherigen Abschnitten entwickelt, um martensitisch umgewandelten Bereichen eine Volumendehnung zuweisen zu können. Ihre Implementierung wird im folgenden Abschnitt vorgestellt.

### 3.2.4 Implementierung der Volumendehnung

Zur Nachbildung des Einflusses der martensitischen Phasentransformation auf das Ausbreitungsverhalten kurzer Risse soll in diesem Abschnitt die Aufbringung einer Volumendehnung ermöglicht werden. Hierbei wird ein Vorgehen angewendet, in dem Brebbia und Dominguez (1998) eine zusätzliche Dehnung in die Fundamentallösung einbeziehen.

Als Ausgangspunkt hierfür soll Gleichung (3.12) dienen, bei der die Gleichgewichtsbedingungen (2.1) mit der Gewichtungsfunktion  $u_k^*$  multipliziert und dann über das betrachtete Gebiet integriert werden (hier zur verbesserten Übersicht noch einmal wiederholt):

$$\int_{\Omega} (\sigma_{kj,j} + b_k) u_k^* d\Omega = 0.$$

Die partielle Integration dieser Gleichung führt zu folgendem Zusammenhang:

$$\int_{\Gamma} u_k^* p_k d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{kj} u_{k,j}^* d\Omega + \int_{\Omega} b_k u_k^* d\Omega = 0. \quad (3.61)$$

Nach Brebbia und Dominguez (1998) kann die Spannung  $\sigma_{kj}$  nun in zwei Anteile aufgeteilt werden, eine ‚totale‘ Spannung  $\sigma_{kj}^t$  und eine ‚initiale‘ Spannung  $\sigma_{kj}^0$ :

$$\sigma_{kj} = \sigma_{kj}^t + \sigma_{kj}^0. \quad (3.62)$$

Eingesetzt in Gleichung (3.61) ergibt sich somit der folgende Zusammenhang:

$$\int_{\Gamma} u_k^* p_k d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{kj}^t u_{k,j}^* d\Omega - \int_{\Omega} \sigma_{kj}^0 u_{k,j}^* d\Omega + \int_{\Omega} b_k u_k^* d\Omega = 0. \quad (3.63)$$

Mit dem Integral über  $\sigma_{kj}^t$  kann nun verfahren werden, wie in Abschnitt 3.2.1 und eine weitere partielle Integration durchgeführt werden. Die ‚initiale‘ Spannung lässt sich bestimmen, wenn das HOOKE’sche Gesetz hinsichtlich der Berücksichtigung einer zusätzlichen Dehnung  $\varepsilon_M$  erweitert wird, die der Volumendehnung des Martensits Rechnung trägt:

$$\varepsilon_{ij} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} + \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} + \delta_{ij} \varepsilon_M. \quad (3.64)$$

Durch Umstellen dieser Gleichung nach den Spannungen ergibt sich im Fall des ebenen Verzerrungszustandes der folgende Zusammenhang, der einen zusätzlichen Term in Gleichung (3.23) hervorruft:

$$\sigma_{ij} = \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} + \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \delta_{ij} 2\mu \frac{(1+\nu)}{1-2\nu} \varepsilon_M \quad (3.65)$$

Dieser zusätzliche Term ist die ‚initiale‘ Spannung  $\sigma_{ij}^0$ :

$$\sigma_{ij}^0 = -\delta_{ij} 2\mu \frac{(1+\nu)}{1-2\nu} \varepsilon_M = -\delta_{ij} \gamma \varepsilon_M. \quad (3.66)$$

Durch Einsetzen in Gleichung (3.63), erneutes partielles Lösen der Integrale über  $\sigma_{kj}^t$  und  $\sigma_{kj}^0$  sowie Umordnen entsteht die folgende Gleichung:

$$-\int_{\Omega} \sigma_{jk,j}^* u_k d\Omega + \int_{\Gamma} p_k^* u_k d\Gamma = \int_{\Gamma} u_k^* p_k d\Gamma + \int_{\Gamma} \gamma \varepsilon_M u_k^* n_k d\Gamma - \int_{\Omega} \gamma \varepsilon_{M,j} u_k^* d\Omega + \int_{\Omega} b_k u_k^* d\Omega. \quad (3.67)$$

Zum Schluss kann noch die Fundamentallösung der Gleichung (3.12) eingefügt werden, so dass erneut ein der SOMIGLIANA-Identität ähnlicher Ausdruck erzeugt werden kann:

$$u_l^i + \int_{\Gamma} p_{lk}^* u_k d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{lk}^* p_k d\Gamma + \int_{\Gamma} \gamma \varepsilon_M u_{lk}^* n_k d\Gamma - \int_{\Omega} \gamma \varepsilon_{M,j} u_{lk}^* d\Omega + \int_{\Omega} b_k u_{lk}^* d\Omega. \quad (3.68)$$

Neu sind hierbei die beiden Terme, die die martensitische Dehnung  $\varepsilon_M$  enthalten. Da in dieser Arbeit keine volumenbezogenen Kräfte behandelt werden sollen, kann der letzte Term entfallen. Außerdem wird eine homogene Volumendehnung angenommen, so dass Ableitungen von  $\varepsilon_M$  gleich null sind und der vorletzte Term ebenfalls entfällt. Zusätzlich soll nun aber wieder der Einfluss der Relativverschiebungselemente berücksichtigt werden, so dass der entsprechende Term aus Gleichung (3.54) eingefügt wird:

$$u_l^i + \int_{\Gamma} p_{lk}^* u_k d\Gamma - \sum_{j=1}^M F_{lk}^{ij} b_k^j = \int_{\Gamma} u_{lk}^* p_k d\Gamma + \int_{\Gamma} \gamma \varepsilon_M u_{lk}^* n_k d\Gamma. \quad (3.69)$$

Durch Einsetzen dieses Ergebnisses in Gleichung (3.65) werden die Spannungen an einem beliebigen Punkt innerhalb des berandeten Gebietes bestimmt:

$$\sigma_{lm} = \int_{\Gamma} D_{klm} p_k d\Gamma - \int_{\Gamma} S_{klm} u_k d\Gamma + \sum_{j=1}^M C_{klm}^{ij} b_k^j + \gamma \varepsilon_M \left( \int_{\Gamma} D_{klm} n_k d\Gamma - \delta_{lm} \right). \quad (3.70)$$

Erneut lassen sich die Gleichungen (3.69) und (3.70) in Matrix-Vektor-Form darstellen, wobei zu erkennen ist, dass lediglich zwei von den mechanischen Größen des Randes unabhängige Vektoren –  $\mathbf{k}$  und  $\mathbf{m}$  – hinzugekommen sind, die die Lösung des Gleichungssystems ‚verstimmen‘:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H} & -\mathbf{F} \\ \mathbf{A} & \mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{B} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{k} \\ -\mathbf{m} \end{bmatrix}. \quad (3.71)$$

Mit dieser Gleichung liegt nun eine Methode zur Lösung von Rissproblemen in endlichen Gebieten vor, wobei als neuer Aspekt eine Volumendehnung berücksichtigt werden kann. Um das entwickelte numerische Lösungsverfahren effizient nutzen und eine möglichst hohe Approximationsgüte erreichen zu können, sind noch numerische Verbesserungen und Erweiterungen erforderlich, die im folgenden Abschnitt beschrieben werden.

### 3.2.5 Numerische Verbesserungen und Erweiterungen

Mit dem in den vorherigen Abschnitten vorgestellten Verfahren können Rissprobleme grundsätzlich bereits behandelt werden; durch die in diesem Kapitel beschriebenen Verbesserungen und Erweiterungen lässt sich die Methode jedoch noch effizienter und vielseitiger einsetzen.

#### Koordinatentransformation

Alle mechanischen Größen, die bei den bisherigen Herleitungen verwendet wurden, beziehen sich stets auf ein  $x_1$ - $x_2$ -Koordinatensystem. Die Randbedingungen für Risse und Gleitbänder sind jedoch in einem Koordinatensystem gegeben, das sich auf die Lage des Risses oder Gleitbandes bezieht. Es bietet sich daher an, die Verschiebungen und Spannungen der Randelemente mit Relativverschiebungen wie in Künkler (2007) in ein Koordinatensystem normal und tangential zum Element zu transformieren. Hierzu wird in Bild 3.18 ein Element betrachtet, das um den Winkel  $\beta$  zur  $x_1$ -Achse gedreht angeordnet ist.

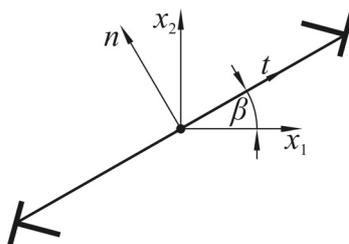


Bild 3.18: Um den Winkel  $\beta$  gedrehtes Randelement mit Relativverschiebungsansätzen.

Die Spannungen  $\mathbf{t}_{x_1x_2}$  und Verschiebungen  $\mathbf{b}_{x_1x_2}$  sollen nun in das Elementkoordinatensystem transformiert werden ( $\mathbf{t}_m, \mathbf{b}_m$ ), wobei die Transformationsmatrizen  $\mathbf{T}^t$  und  $\mathbf{T}^b$  zum Einsatz kommen:

$$\mathbf{t}_m = \mathbf{T}^t \mathbf{t}_{x_1x_2}, \quad \mathbf{b}_m = \mathbf{T}^b \mathbf{b}_{x_1x_2}. \quad (3.72)$$

Es ist zu beachten, dass für den Spannungsvektor  $\mathbf{t}$  keine Tensortransformationseigenschaften gelten, so dass diese am Spannungstensor  $\boldsymbol{\sigma}$  selbst angewendet werden müssen. Für die Verschiebungen sind diese Eigenschaften dagegen direkt gültig, so dass die Transformationsmatrizen wie folgt lauten (vgl. auch Künkler 2007):

$$\mathbf{T}' = \begin{bmatrix} \cos^2 \beta & \sin^2 \beta & 2 \cos \beta \cdot \sin \beta \\ \sin^2 \beta & \cos^2 \beta & -2 \cos \beta \cdot \sin \beta \\ -\cos \beta \cdot \sin \beta & \cos \beta \cdot \sin \beta & \cos^2 \beta - \sin^2 \beta \end{bmatrix}, \quad (3.73)$$

$$\mathbf{T}^b = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix}. \quad (3.74)$$

Nach der Koordinatentransformation liefert der erste Eintrag des Spannungsvektors  $t_1 = \sigma_{tt}$  keine relevanten Informationen mehr, so dass dieser Eintrag bei der Lösung des Gleichungssystems (3.71) nicht berücksichtigt werden muss.

Für die Randelemente mit Absolutverschiebungen ist in der Regel keine Koordinatentransformation erforderlich, da die Randbedingungen für viele Gebiete in  $x_1$ - $x_2$ -Richtungen vorliegen. Befindet sich jedoch ein Riss auf einer Korn- oder Phasengrenze und damit auf dem Gebietsrand, ist auch hier eine Koordinatentransformation zweckmäßig. Hierbei ist die Lage der Elementnormalen jedoch in der Weise gegeben, dass sie vom berandeten Gebiet weg nach außen zeigt. Die geometrischen Verhältnisse am Element veranschaulicht Bild 3.19.

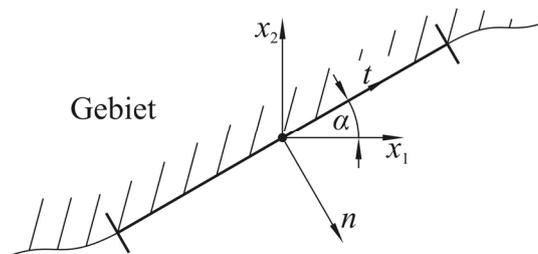


Bild 3.19: Um den Winkel  $\alpha$  gedrehtes Randelement mit Absolutverschiebungsansatz.

Nun sollen die Verschiebungen  $\mathbf{u}$  in der Weise angeordnet werden, dass sie wie der Vektor der Relativverschiebungselemente zuerst den Eintrag in  $t$ -, dann in  $n$ -Richtung enthalten. Bei den Spannungen  $\mathbf{p}$  soll dagegen zuerst der  $n$ -, dann der  $t$ -Richtungseintrag erfolgen.  $\mathbf{p}$  weist dann die letzten beiden Einträge des transformierten Spannungsvektors  $\mathbf{t}$  der Relativverschiebungselemente auf:

$$\begin{bmatrix} p_n \\ p_t \end{bmatrix} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \begin{bmatrix} \sigma_m & \tau_m \\ \tau_m & \sigma_{tt} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_m \\ \tau_m \end{bmatrix}. \quad (3.75)$$

Diese Anordnung ist günstig, da die Spannungen und Verschiebungen bei der Berechnung von Randschichten mit Relativverschiebungen in Verbindung gebracht werden können. Das genaue Vorgehen wird in Abschnitt 3.2.6 behandelt.

Schließlich ergibt sich die Transformation der mechanischen Größen gemäß der folgenden Gleichungen:

$$\mathbf{p}_m = \mathbf{T}^p \mathbf{p}_{x_1 x_2}, \quad \mathbf{u}_m = \mathbf{T}^u \mathbf{u}_{x_1 x_2}. \quad (3.76)$$

Die Transformationsmatrizen  $\mathbf{T}^p$  und  $\mathbf{T}^u$  lauten hierbei:

$$\mathbf{T}^p = \begin{bmatrix} \sin \alpha & -\cos \alpha \\ \cos \alpha & \sin \alpha \end{bmatrix}. \quad (3.77)$$

$$\mathbf{T}^u = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{bmatrix}. \quad (3.78)$$

Während die Transformation der mechanischen Größen ins Elementkoordinatensystem eine Vereinfachung beim Aufbringen von Randbedingungen darstellt, soll nachfolgend ein Weg zur Verbesserung der Rechengenauigkeit beschrieben werden.

### Dimensionslose Erstellung der Lösungsmatrix

Die bei der Kopplung der beiden Randelementmethoden in einem Gleichungssystem kombinierten Einflussfunktionen enthalten den Schubmodul  $\mu$  teilweise im Zähler und teilweise im Nenner. Dies kann dazu führen, dass die Größenordnungen der Gleichungen um mehrere Zehnerpotenzen voneinander abweichen. Kübbeler (2007) stellt daher bei ungünstiger Wahl der Einheiten numerische Schwierigkeiten und daraus resultierende Ungenauigkeiten bei der Lösung des nachfolgend zur Verbesserung der Übersichtlichkeit wiederholten Gleichungssystems (3.71) fest.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H} & -\mathbf{F} \\ \mathbf{A} & \mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{B} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{k} \\ -\mathbf{m} \end{bmatrix}.$$

Der Autor schlägt daher vor, die Einflussmatrizen dimensionslos darzustellen, um dadurch eine von der Wahl der Einheiten unabhängige Lösung zu erhalten. Aus der Erstellung der Einflussmatrizen (Abschnitte 3.2.1 und 3.2.2) können folgende Einheiten festgestellt werden:

$$\begin{aligned}
[\mathbf{H}] &= 1, & [\mathbf{F}] &= 1, & [\mathbf{G}] &= \begin{bmatrix} l \\ \sigma \end{bmatrix}, & [\mathbf{k}] &= l, \\
[\mathbf{A}] &= \begin{bmatrix} \sigma \\ l \end{bmatrix}, & [\mathbf{C}] &= \begin{bmatrix} \sigma \\ l \end{bmatrix}, & [\mathbf{B}] &= 1, & [\mathbf{m}] &= \sigma.
\end{aligned}
\tag{3.79}$$

Um dimensionslose Einflussmatrizen (diese werden mit \* gekennzeichnet) zu erhalten, werden die dimensionsbehafteten Matrizen mit dem Schubmodul  $\mu$  und dem mittleren Korndurchmesser  $D$  multipliziert bzw. dividiert:

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}^* &= \mathbf{H}, & \mathbf{F}^* &= \mathbf{F}, & \mathbf{G}^* &= \frac{\mathbf{G}\mu}{D}, & \mathbf{k}^* &= \frac{\mathbf{k}}{D}, \\
\mathbf{A}^* &= \frac{\mathbf{A}D}{\mu}, & \mathbf{C}^* &= \frac{\mathbf{C}D}{\mu}, & \mathbf{B}^* &= \mathbf{B}, & \mathbf{m}^* &= \frac{\mathbf{m}}{\mu}.
\end{aligned}
\tag{3.80}$$

Diese Matrizen sollen in der vorliegenden Arbeit verwendet werden; auf die Kennzeichnung mit \* wird jedoch im Weiteren verzichtet. Aus den dimensionslosen Einflussmatrizen wird schließlich eine ebenfalls dimensionslose Lösungsmatrix erstellt, bei deren Berechnung die oben beschriebenen numerischen Probleme überwunden sind.

Eine weitere Schwierigkeit insbesondere bei der Lösung von Randrissproblemen stellt jedoch die Lage der Knoten bei den Randelementen mit Absolutverschiebungsansätzen am Elementanfang bzw. -ende dar. Im nachfolgenden Abschnitt wird daher eine Methode vorgestellt, mit der die Knoten verschoben werden können.

### **Verschiebung von Elementknoten bei Randelementen mit Absolutverschiebungsansätzen**

Trifft ein Riss auf den Gebietsrand, liegen hierauf infolge einer Rissöffnung oder -abgleitung große Verformungen vor, die von den Randelementen mit Absolutverschiebungsansätzen nachgebildet werden müssen. Wenn sich der Berührungspunkt von Riss und Rand innerhalb der Länge eines solchen Elementes befindet, wird dieses stark verzerrt und die quadratischen Verschiebungsansätze sind zur Abbildung der Verformung ungeeignet. Aus diesem Grund wird die Diskretisierung des Gebietsrandes so gewählt, dass der Riss oder ein Gleitband an einer Elementgrenze auf den Rand trifft. An dieser Stelle liegt jedoch, wie in Bild 3.20a dargestellt, der Anfangs- bzw. Endknoten der beiden benachbarten Elemente vor und fällt mit einem Verschiebungssprung des an den Gebietsrand grenzenden Randelementes mit Relativverschiebungsansatz zusammen. Dem gleichen Knoten sind damit zwei unterschiedliche Verschiebungswerte zugeordnet, was bei der numerischen Lösung nicht vorgesehen ist. Im Rahmen

der Kopplung der beiden Randelementemethoden ist es zudem erforderlich, die Spannungen, die aus den Verschiebungssprüngen resultieren, an den Knoten des Gebietsrandes zu bestimmen. An einem Knoten, der mit einem Verschiebungssprung zusammenfällt, errechnet sich jedoch eine unendlich hohe Spannung.

Aus diesem Grund soll der entsprechende Randknoten  $i$  in zwei Knoten aufgeteilt werden, so dass sich die beteiligten Elemente ihren Anfangs- bzw. Endknoten nicht mehr teilen. Die entstehenden Knoten werden vom Elementanfang- bzw. -ende in Richtung der Elementmitte verschoben (Bild 3.20b). Sie können individuelle Verschiebungswerte aufweisen und ihnen werden keine unendlich hohen Spannungen mehr aufgeprägt.

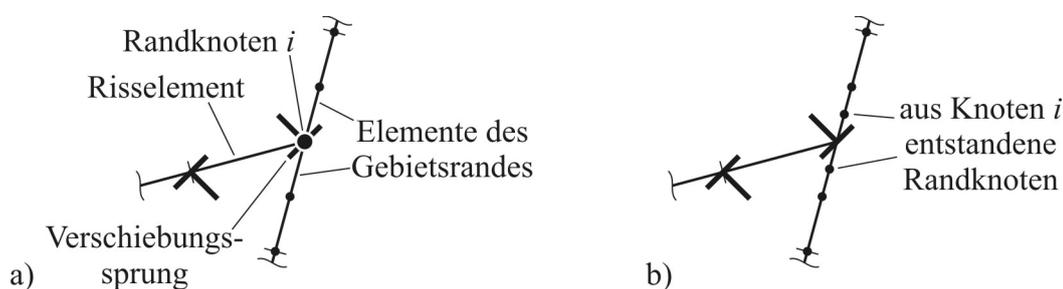


Bild 3.20: Teilung und Verschiebung des mit einem Verschiebungssprung zusammenfallenden Randknotens  $i$  mit a) dem Ausgangszustand und b) den aus Knoten  $i$  entstandenen neuen Randknoten.

Zum Verschieben der Randknoten eines Elementes stellen Brebbia und Dominguez (1998) ein Verfahren für lineare Ansatzfunktionen vor, das sich jedoch auf die hier verwendeten quadratischen Funktionen übertragen lässt: Zuvor wurde der Verlauf einer mechanischen Größe  $q$  entlang eines Elementes durch die Summe der Formfunktionen multipliziert mit den Funktionswerten am Anfang  $q_1$ , in der Mitte  $q_2$  und am Ende  $q_3$  des Elementes angenähert. Dieser Zusammenhang ist in Gleichung (3.18) gegeben, der hier noch einmal in vektorieller Schreibweise wiederholt wird:

$$q = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}. \quad (3.81)$$

Hieraus lassen sich die Funktionswerte  $q_a$  und  $q_b$  an den Positionen  $\xi_a$  des verschobenen Anfangs- und  $\xi_b$  des verschobenen Endknotens ermitteln, wobei der Mittelknoten seine Position behält:

$$\begin{bmatrix} q_a \\ q_2 \\ q_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5\xi_a(\xi_a - 1) & 1 - \xi_a^2 & 0,5\xi_a(\xi_a + 1) \\ 0 & 1 & 0 \\ 0,5\xi_b(\xi_b - 1) & 1 - \xi_b^2 & 0,5\xi_b(\xi_b + 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}. \quad (3.82)$$

Hierbei ist der allgemeine Fall dargestellt, in dem Anfangs- und Endknoten verschoben werden. Die Verschiebung nur eines Knotens ist hierin enthalten, indem die Elementkoordinate des anderen Knotens auf  $\xi_a = -1$  bzw.  $\xi_b = 1$  gesetzt wird.

Umgekehrt lassen sich die Funktionswerte  $q_1$ ,  $q_2$  und  $q_3$  durch die Werte  $q_a$ ,  $q_2$  und  $q_b$  der verschobenen Knoten ausdrücken, indem die Matrix  $\mathbf{Q}$  verwendet wird, bei der es sich um die Inverse der Matrix in Gleichung (3.82) handelt:

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \mathbf{Q} \begin{bmatrix} q_a \\ q_2 \\ q_b \end{bmatrix}. \quad (3.83)$$

Durch Einsetzen dieser Gleichung in (3.81) kann der Verlauf von  $q$  durch die verschobenen Knotenwerte ausgedrückt werden:

$$q = [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \phi_3] \mathbf{Q} \begin{bmatrix} q_a \\ q_2 \\ q_b \end{bmatrix}. \quad (3.84)$$

Wird dieser Verlauf der mechanischen Größen für die Spannungen  $p_k$  und Verschiebungen  $u_k$  in der SOMIGLIANA-Identität (Gleichung (3.15)) verwendet, liegen die Anfangs- und Endknoten an den neuen Positionen. Sie weisen die Elementkoordinaten  $\xi_a$  und  $\xi_b$  auf, so dass das Zusammenfallen eines Knotens mit einem Verschiebungssprung vermieden werden kann. In dieser Arbeit erhalten entsprechende Knoten die Elementkoordinate  $\xi_a = -0,5$  bzw.  $\xi_b = 0,5$ .

Bei der Kopplung der beiden Randelementmethoden müssen Spannungen an den Positionen im Gebiet ermittelt werden, an denen sich die Risselemente befinden. Liegt ein Randriss vor, liegen zumindest ein Teil der Punkte, an denen Spannungen von Interesse sind, in der Nähe des Gebietsrandes. Die Spannungsberechnung in diesem Bereich ist bei der Randelementmethode jedoch mit großen Fehlern behaftet (Stöhr 1998), die mit dem nachfolgend vorgestellten Verfahren reduziert werden.

### Ermittlung von Spannungen in der Nähe von Gebietsrändern

Die Spannungen an einem beliebigen Punkt  $i$  im Inneren des betrachteten Gebietes  $\Omega$  können mit Hilfe von Gleichung (3.70) berechnet werden, die zur verbesserten Übersicht hier noch einmal wiederholt wird:

$$\sigma_{lm} = \int_{\Gamma} D_{klm} p_k d\Gamma - \int_{\Gamma} S_{klm} u_k d\Gamma + \sum_{j=1}^M C_{klm}^{ij} b_k^j + \gamma \varepsilon_M \left( \int_{\Gamma} D_{klm} n_k d\Gamma - \delta_{lm} \right).$$

Dabei ist es erforderlich, die enthaltenen Integrale mit den Argumenten  $D_{klm} p_k$ ,  $S_{klm} u_k$  und  $D_{klm} n_k$  zu lösen, die bezüglich des Abstandes  $r$ , der zwischen dem Punkt  $i$  und dem Gebietsrand liegt, eine  $1/r$ - bzw.  $1/r^2$ -Singularität aufweisen (vgl. Gleichung (3.25)). Diese Singularitäten dominieren, wenn sich der Punkt  $i$  in der Nähe des Gebietsrandes befindet, so dass auch ein sonst sehr genaues numerisches Lösungsverfahren, wie beispielsweise das von GAUß, zu großen Fehlern bei der Integration führt (Stöhr 1998).

Um die Integrale dennoch mit großer Genauigkeit lösen zu können, entwickeln Ma und Kamiya (2002) ein Verfahren, das die Singularitäten durch Substitution der Elementkoordinaten ‚dämpft‘. Als Beispiel wird hier das erste Integral von Gleichung (3.70) mit  $1/r$ -Singularität betrachtet und in  $N$  Elemente unterteilt. Die Spannung  $p_k$  wird durch quadratische Formfunktionen  $\phi_s$  angenähert, die mit den zugehörigen Knotenwerten  $(p_k^j)_s$  multipliziert werden (Gleichung (3.18)):

$$\int_{\Gamma} D_{klm} p_k d\Gamma = \sum_{j=1}^N \left\{ \sum_{s=1}^3 \left( (p_k^j)_s \int_{\Gamma_j} D_{klm} \phi_s d\Gamma \right) \right\}. \quad (3.85)$$

Das Integral  $I$  über das Element  $j$ , das den Rand  $\Gamma_j$  repräsentiert, soll nun entlang der Elementkoordinate  $\xi$  in den Grenzen  $\xi = -1$  (Elementanfang) und  $\xi = 1$  (Elementende) erfolgen:

$$I = \int_{\Gamma_j} D_{klm} \phi_s d\Gamma = \int_{-1}^1 D_{klm}(\xi) \phi_s(\xi) G(\xi) d\xi. \quad (3.86)$$

$G(\xi)$  ist hierbei die JACOBI-Determinante (Brebbia und Dominguez 1998):

$$G(\xi) = \frac{d\Gamma}{d\xi} = \sqrt{\left( \frac{\partial x_1}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial x_2}{\partial \xi} \right)^2}. \quad (3.87)$$

Nach Ma und Kamiya (2002) wird nun in Gleichung (3.86) die Elementkoordinate  $\xi$  durch  $\eta$  substituiert, wodurch das Integral  $I$  zusätzlich die Ableitung  $d\xi/d\eta = g(\eta)$  enthält und die Integration in den Grenzen  $\eta_1$  und  $\eta_2$  durchgeführt wird:

$$I = \int_{\eta_1}^{\eta_2} D_{klm}(\eta) \phi_s(\eta) g(\eta) G(\eta) d\eta . \quad (3.88)$$

Dabei wird  $\eta$  so gewählt, dass das Produkt  $g(\eta)G(\eta)$  gerade dem Abstand  $r$  entspricht und damit die  $1/r$ -Singularität eliminiert wird. Dies ist der Fall für den folgenden Zusammenhang zwischen  $\xi$  und  $\eta$  (Ma und Kamiya 2002):

$$\eta(\xi) = \ln[g(\xi) + (\xi - \xi_c)] . \quad (3.89)$$

$\xi_c$  ist die Elementkoordinate, an der der minimale Abstand  $r_0$  zwischen dem Punkt  $i$  der Spannungsermittlung und der Elementlinie vorliegt.  $\xi_c$  kann dabei sowohl innerhalb ( $|\xi_c| \leq 1$ ) als auch außerhalb des Elementes liegen ( $|\xi_c| > 1$ ). Für die in dieser Arbeit verwendeten geradlinigen Elemente sind beide Fälle in Bild 3.21a und b dargestellt. Die JACOBI-Determinante  $G$  ist hierbei konstant und für  $g(\xi)$  gilt:

$$g(\xi) = \frac{r(\xi)}{G} = \sqrt{\alpha^2 + (\xi - \xi_c)^2} , \quad (3.90)$$

mit  $\alpha = \frac{r_0}{G}$ .

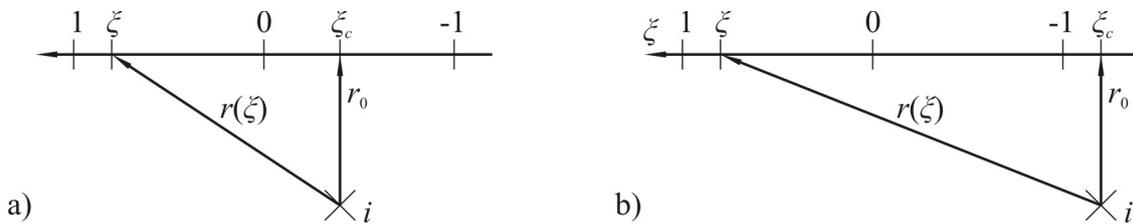


Bild 3.21: Geometrische Größen bei der Integration zur Bestimmung von Spannungen nah am Gebietsrand mit a) Lage von  $\xi_c$  innerhalb und b) Lage von  $\xi_c$  außerhalb des betrachteten Elementes nach Ma und Kamiya (2002).

Liegt  $\xi_c$  außerhalb des Elementes, kann die Integration in Gleichung (3.88) über das gesamte Element in den aus Gleichung (3.89) abgeleiteten Grenzen  $\eta_1 = \ln[g(-1) - (1 + \xi_c)]$  und  $\eta_2 = \ln[g(1) + (1 - \xi_c)]$  erfolgen. Liegt  $\xi_c$  dagegen innerhalb des Elementes, muss der Integrati-

onsweg bei  $\xi_c$  geteilt werden (Ma und Kamiya 2002), so dass die folgenden Integrale zu lösen sind:

$$I = \int_{\ln[g(-1)-(1+\xi_c)]}^{\ln(\alpha)} D_{klm}(\eta) \phi_s(\eta) g(\eta) G d\eta + \int_{\ln(\alpha)}^{\ln[g(1)+(1-\xi_c)]} D_{klm}(\eta) \phi_s(\eta) g(\eta) G d\eta. \quad (3.91)$$

Die  $1/r$ -Singularität in  $D_{klm}$  wird auf diese Weise vollständig ausgeglichen.  $S_{klm}$  enthält dagegen eine  $1/r^2$ -Singularität, deren vollständige Eliminierung mit folgender Substitution möglich ist (Ma und Kamiya 2002):

$$\eta(\xi) = \frac{1}{\alpha} \arctan\left(\frac{\xi - \xi_c}{\alpha}\right). \quad (3.92)$$

Die Autoren erreichen bei der numerischen Berechnung jedoch nur schlechte Ergebnisse, so dass sie das zuvor beschriebene Verfahren auch hier anwenden und die Singularität lediglich ‚dämpfen‘, wobei gute Ergebnisse erreicht werden. Diese lassen sich noch weiter verbessern, indem die Formfunktionen verändert werden. Dabei wird in Gleichung (3.88) von der Formfunktion  $\phi_s(\eta)$  der konstante Wert der Funktion  $\phi_s[\eta(\xi_c)]$  an der Position  $\xi_c$  abgezogen und ein zweites Integral addiert, bei dem der Funktionswert als Konstante herausgezogen wird:

$$I = \int_{\eta_1}^{\eta_2} S_{klm}(\eta) \{\phi_s(\eta) - \phi_s[\eta(\xi_c)]\} g(\eta) G d\eta + \phi_s(\xi_c) \int_{-1}^1 S_{klm}(\xi) G d\xi. \quad (3.93)$$

Hierbei wird das Verfahren auf die Integration des Tensors  $S_{klm}$  angewendet, wobei die Substitution von  $\xi$  durch  $\eta$  beim zweiten Integral nicht erforderlich ist, da es analytisch gelöst werden kann. Liegt  $\xi_c$  innerhalb des Elementes, muss auch im ersten Term von Gleichung (3.93) eine Teilung der Integration analog zu Gleichung (3.91) vorgenommen werden.

Mit den in diesem Kapitel beschriebenen Verbesserungen und Erweiterungen liegt ein effizientes Verfahren zur numerischen Berechnung von mechanischen Größen in einem endlichen rissbehafteten Gebiet vor. Dabei gingen die bisherigen Herleitungen von einem einzelnen Gebiet aus, obwohl für die angestrebte Kurzrissausbreitung in einem Gefüge mehrere Bereiche einbezogen werden müssen. Hierbei handelt es sich um die unterschiedlichen Phasen Austenit und Martensit. Zusätzlich können auch die verschiedenen Gefügekörner mit Randelementen umschlossen werden, um ihnen individuelle elastische Eigenschaften zuweisen zu können. Die Kopplung dieser verschiedenen Bereiche wird nachfolgend vorgestellt.

### 3.2.6 Modellierung mehrerer Phasen und Gefügekörner

Bei einem Gefüge sind die einzelnen Körner oder Bereiche unterschiedlicher Phasen in der Regel fest miteinander verbunden und es treten keine Relativverschiebungen an ihren Grenzen auf. Um diese benachbarten Gebiete in der Berechnungsmethode miteinander zu koppeln, wird ein von Brebbia und Dominguez (1998) vorgeschlagenes Verfahren zur Verknüpfung mehrerer Gebiete angewendet, wobei die Erweiterung auf rissbehaftete Gebiete auf Kübbeler (2007) zurückgeht.

#### Feste Kopplung benachbarter Gebiete

Bei der Kopplung von benachbarten Gebieten werden die einzelnen Körner oder Phasenbereiche, aus denen ein Gefüge besteht, gedanklich getrennt voneinander betrachtet. Bild 3.22 zeigt als Beispiel zwei benachbarte Gefügekörner, die jeweils einen Riss enthalten. Jedes der so entstandenen Gebiete wird mit Randelementen umschlossen und vorliegende Risse oder Gleitebenen werden vernetzt.

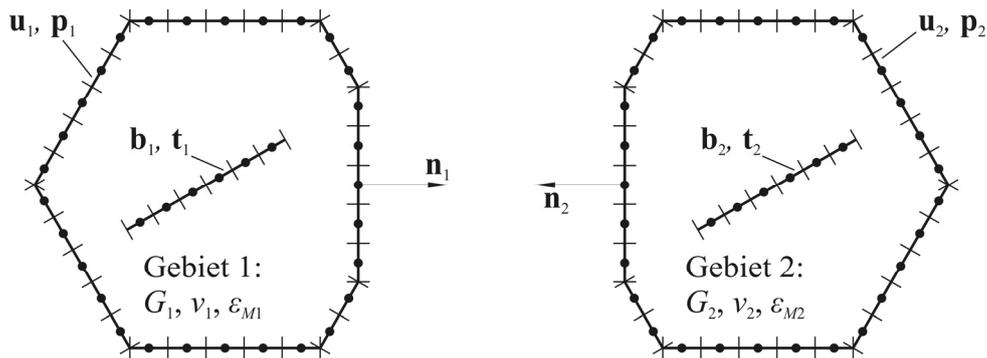


Bild 3.22: Zwei benachbarte, gedanklich getrennte Gefügekörner.

Für jedes Gebiet können nun die Einflussmatrizen mit den individuellen isotropen Stoffdaten und die Vektoren der Volumenzunahme mit der entsprechenden Dehnung bestimmt werden. Diese lassen sich in einem Gleichungssystem (Gleichung (3.71)) anordnen, mit dem die mechanischen Größen in den einzelnen Bereichen berechnet werden können:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_i & -\mathbf{F}_i \\ \mathbf{A}_i & \mathbf{C}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_i \\ \mathbf{b}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_i & \mathbf{0} \\ -\mathbf{B}_i & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_i \\ \mathbf{t}_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{k}_i \\ -\mathbf{m}_i \end{bmatrix}. \quad (3.94)$$

Der Index  $i$  steht dabei für das Gleichungssystem des ersten bzw. zweiten Kornes. Die Abhängigkeit der mechanischen Größen von den Spannungen und Verformungen des Nachbargebietes werden hierbei jedoch nicht berücksichtigt. Um beide Bereiche miteinander zu verbinden, können diese Größen entlang des Randes aufgeteilt werden in die Verschiebungen  $\mathbf{u}_i^G$

und Spannungen  $\mathbf{p}_i^G$ , die auf dem gemeinsamen Rand der benachbarten Gebiete liegen, und in die Größen  $\mathbf{u}_i^F$  und  $\mathbf{p}_i^F$  auf dem übrigen Rand. Entsprechend lassen sich auch die Einflussmatrizen in Gleichung (3.94) in Teilmatrizen mit den Indizes  $G$  und  $F$  unterteilen:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_i^G \\ \mathbf{A}_i^G \end{bmatrix} \mathbf{u}_i^G + \begin{bmatrix} \mathbf{H}_i^F & -\mathbf{F}_i \\ \mathbf{A}_i^F & \mathbf{C}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_i^F \\ \mathbf{b}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_i^G \\ -\mathbf{B}_i^G \end{bmatrix} \mathbf{p}_i^G + \begin{bmatrix} \mathbf{G}_i^F & \mathbf{0} \\ -\mathbf{B}_i^F & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_i^F \\ \mathbf{t}_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{k}_i \\ -\mathbf{m}_i \end{bmatrix}. \quad (3.95)$$

Die beiden Gebiete sollen auf ihrem gemeinsamen Rand fest miteinander verbunden bleiben, so dass die gemeinsamen Verschiebungen  $\mathbf{u}_i^G$  beider Bereiche gleich sind. Der Spannungstensor  $\boldsymbol{\sigma}_i^G$  ist auf diesem Rand ebenfalls gleich; in Gleichung (3.95) gehen jedoch die Spannungen  $\mathbf{p}_i^G = \boldsymbol{\sigma}_i^G \mathbf{n}_i$  ein, bei denen die Gebietsnormale  $\mathbf{n}_i$  einbezogen wird. Da die Normalen auf dem gemeinsamen Gebietsrand für die beiden aneinandergrenzenden Bereiche in entgegengesetzte Richtungen zeigen, weisen die Spannungen  $\mathbf{p}_i^G$  unterschiedliche Vorzeichen auf. Die Kopplungsbedingungen für Verschiebungen und Spannungen lauten somit:

$$\mathbf{u}_1^G = \mathbf{u}_2^G, \quad \mathbf{p}_1^G = -\mathbf{p}_2^G. \quad (3.96)$$

Das Einsetzen dieser Bedingungen in Gleichung (3.95) führt zu folgendem Ergebnis, in dem die Verschiebungen und Spannungen auf dem gemeinsamen Gebiet durch die Größen  $\mathbf{u}_1^G$  und  $\mathbf{p}_1^G$  des ersten Gebietes ausgedrückt sind:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_1^G & \mathbf{H}_1^F & \mathbf{0} & -\mathbf{F}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{H}_2^G & \mathbf{0} & \mathbf{H}_2^F & \mathbf{0} & -\mathbf{F}_2 \\ \mathbf{A}_1^G & \mathbf{A}_1^F & \mathbf{0} & \mathbf{C}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_2^G & \mathbf{0} & \mathbf{A}_2^F & \mathbf{0} & \mathbf{C}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^G \\ \mathbf{u}_1^F \\ \mathbf{u}_2^F \\ \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1^G & \mathbf{G}_1^F & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{G}_2^G & \mathbf{0} & \mathbf{G}_2^F & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{B}_1^G & -\mathbf{B}_1^F & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_2^G & \mathbf{0} & -\mathbf{B}_2^F & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1^G \\ \mathbf{p}_1^F \\ \mathbf{p}_2^F \\ \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{t}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{k}_1 \\ \mathbf{k}_2 \\ -\mathbf{m}_1 \\ -\mathbf{m}_2 \end{bmatrix} \quad (3.97)$$

Die beiden benachbarten Bereiche sind so fest miteinander verbunden, wobei die hier vorgenommene Herleitung der Verknüpfung von zwei Gebieten sinngemäß auch für eine beliebige Anzahl von Bereichen angewendet werden kann, so dass sich ein Gefüge mit mehreren Körnern nachbilden lässt.

Die feste Verbindung der einzelnen Gefügekörner oder Bereiche unterschiedlicher Phasen erlaubt keine Relativverschiebungen entlang der Gebietsgrenzen, die in der Realität jedoch auftreten, wenn ein Riss zwischen den Bereichen vorliegt. Dieser Fall wird im folgenden Abschnitt behandelt.

### Kopplung benachbarter Gebiete mit Riss auf der gemeinsamen Grenze

Mit dem Ziel, rissbehaftete Gebiete mit Randelementen mit Absolutverschiebungsansätzen zu behandeln, schlagen Brebbia und Dominguez (1998) die Teilung des betrachteten Bereiches vor, so dass der Riss auf einer Außenkontur liegt. Anschließend werden die Teilungsebenen, die nicht dem Riss zugehören, mit dem im vorhergehenden Abschnitt beschriebenen Verfahren wieder zusammengefügt. Dieses Vorgehen ist für die Simulation des Ausbreitungsverhaltens kurzer Risse innerhalb der Körner zwar nicht effizient, wenn der Riss jedoch ohnehin auf einer Korn- oder Phasengrenze und damit auf dem Gebietsrand liegt, kann die Methode mit geringem Aufwand eingesetzt werden, um die Relativverschiebungen auf der Grenze zu berechnen.

Ebenso wie in Gleichung (3.95) kann der Gebietsrand in einen rissbehafteten Rand, mit den Verschiebungen  $\mathbf{u}_i^R$  sowie den Spannungen  $\mathbf{p}_i^R$  und einen rissfreien Rand mit den mechanischen Größen  $\mathbf{u}_i^F$  und  $\mathbf{p}_i^F$  aufgeteilt werden:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_i^R \\ \mathbf{A}_i^R \end{bmatrix} \mathbf{u}_i^R + \begin{bmatrix} \mathbf{H}_i^F & -\mathbf{F}_i \\ \mathbf{A}_i^F & \mathbf{C}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_i^F \\ \mathbf{b}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_i^R \\ -\mathbf{B}_i^R \end{bmatrix} \mathbf{p}_i^R + \begin{bmatrix} \mathbf{G}_i^F & \mathbf{0} \\ -\mathbf{B}_i^F & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_i^F \\ \mathbf{t}_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{k}_i \\ -\mathbf{m}_i \end{bmatrix}. \quad (3.98)$$

Aus der Differenz zwischen den Verschiebungen  $\mathbf{u}_1^R$  und  $\mathbf{u}_2^R$  können nun direkt die Relativverschiebungen zwischen den beiden Gebietsgrenzen berechnet werden. Bei beliebiger Lage der Grenze ist hierbei jedoch nicht zu unterscheiden, ob diese Relativverschiebung einer Öffnung oder einer Durchdringung der Rissufer entspricht, wobei letztere nicht auftreten darf. Aus diesem Grund werden die Spannungen  $\mathbf{u}_i^R$  und Verschiebungen  $\mathbf{p}_i^R$  gemäß Gleichung (3.76) in das elementbezogene  $t$ - $n$ -Koordinatensystem transformiert:

$$(\mathbf{u}_m)_i^R = \mathbf{T}_i^u \mathbf{u}_i^R, \quad (\mathbf{p}_m)_i^R = \mathbf{T}_i^p \mathbf{p}_i^R \quad (3.99)$$

Kommt es nun an beiden Rändern zu einer entgegen der Randnormalen gerichteten Verschiebung, liegt zwischen beiden Gebieten ein Abstand vor und es kommt zu einer Rissöffnung, die sich aus der Summe dieser negativen Normalverschiebungen ergibt. Die Randverschiebungen  $(\mathbf{u}_m)_1^R$  und  $(\mathbf{u}_m)_2^R$  können somit zu einer Relativverschiebung  $\mathbf{b}^R$  zusammengefasst werden:

$$\mathbf{b}^R = -\left[ (\mathbf{u}_m)_1^R + (\mathbf{u}_m)_2^R \right]. \quad (3.100)$$

Herrscht ein Innendruck im Riss, wirkt dieser als Normalspannung gleichermaßen auf beide Rissufer. Die Spannungen der Gebietsränder müssen daher gleich sein und können durch die Spannung  $\mathbf{t}^R$  ausgedrückt werden:

$$\mathbf{t}^R = (\mathbf{p}_m)_1^R = (\mathbf{p}_m)_2^R. \quad (3.101)$$

Das Einsetzen der Gleichungen (3.100) und (3.101) in (3.98) führt zum folgenden Gleichungssystem, das die Relativverschiebungen  $\mathbf{b}^R$  und Spannungen  $\mathbf{t}^R$  entlang des Risses auf dem Gebietsrand enthält:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_1^R (T_1^u)^T & \mathbf{H}_1^F & \mathbf{0} & -\mathbf{F}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{H}_2^R (T_2^u)^T & \mathbf{0} & \mathbf{H}_2^F & \mathbf{0} & -\mathbf{F}_2 & -\mathbf{H}_2^R (T_2^u)^T \\ \mathbf{A}_1^R (T_1^u)^T & \mathbf{A}_1^F & \mathbf{0} & \mathbf{C}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{A}_2^R (T_2^u)^T & \mathbf{0} & \mathbf{A}_2^F & \mathbf{0} & \mathbf{C}_2 & -\mathbf{A}_2^R (T_2^u)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mathbf{u}_m)_1^R \\ \mathbf{u}_1^F \\ \mathbf{u}_2^F \\ \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{b}^R \end{bmatrix} \quad (3.102)$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{G}_1^F & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{G}_1^R (T_1^p)^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}_2^F & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{G}_2^R (T_2^p)^T \\ -\mathbf{B}_1^F & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & -\mathbf{B}_1^R (T_1^p)^T \\ \mathbf{0} & -\mathbf{B}_2^F & \mathbf{0} & \mathbf{I} & -\mathbf{B}_2^R (T_2^p)^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1^F \\ \mathbf{p}_2^F \\ \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{t}_2 \\ \mathbf{t}^R \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{k}_1 \\ \mathbf{k}_2 \\ -\mathbf{m}_1 \\ -\mathbf{m}_2 \end{bmatrix}.$$

Hier wurden die transponierten Transformationsmatrizen  $(\mathbf{T}_i^u)^T$  bzw.  $(\mathbf{T}_i^p)^T$  eingesetzt, die den Inversen der Matrizen aus Gleichung (3.99) entsprechen. Die Relativverschiebungen  $\mathbf{b}^R$  und Spannungen  $\mathbf{t}^R$  entlang des rissbehafteten Randes können genauso behandelt werden, als resultierten sie aus einem Riss im Inneren eines Gebietes und es gelten die gleichen Randbedingungen.

Das in dieser Arbeit entwickelte Verfahren zur numerischen Lösung von Rissproblemen berücksichtigt nun alle Aspekte, die zur Kurzrisssimulation in einem metastabilen austenitischen Edelstahl erforderlich sind. Risse und Gleitbänder, ein Gefüge mit unterschiedlichen Phasen und der Volumenzuwachs der martensitisch umgewandelten Bereiche kann modelliert werden. Um das Verfahren zur aussagekräftigen Risssimulation einsetzen zu können, wird nachfolgend die Genauigkeit validiert, mit der es mechanische Größen bestimmt.

### 3.2.7 Validierung

Die Validierung des in den vorherigen Abschnitten entwickelten numerischen Verfahrens erfolgt durch die Berechnung einfacher Rissprobleme, für die Referenzlösungen bekannt sind oder leicht ermittelt werden können. Es bietet sich dabei zunächst an, Spannungsintensitätsfaktoren an Rissen in endlichen Gebieten zu bestimmen. Zu diesem Zweck stellt Krueger (2004) ein als Riss-Schließungs-Methode (*engl. crack closure method*) bezeichnetes Vorgehen vor. Hierbei werden die sich an einem vorliegenden Riss der Länge  $a$  unter Beanspruchung einstellenden Spannungen vor der Rissspitze ermittelt. Anschließend wird eine geringe Verlängerung  $\Delta a$  des Risses vorgenommen und die Rissuferverschiebungen hinter der Rissspitze werden bestimmt. Aus beiden Ergebnissen lässt sich im Falle reiner Modus I-Beanspruchung eine Energiedifferenz  $\Delta E_I$  berechnen, die erforderlich ist, um den Riss im Bereich der Verlängerung  $\Delta a$  geschlossen zu halten. Bei überlagertem oder reinem Vorliegen einer Modus II-Beanspruchung kann zusätzlich bzw. ausschließlich die Energiedifferenz  $\Delta E_{II}$  bestimmt werden, die aufgewendet werden muss, um eine Abgleitung im Bereich der Rissverlängerung  $\Delta a$  zu verhindern. Entsprechend Gleichung (2.24) können diese Energiedifferenzen auf  $\Delta a$  bezogen werden, um die nach Moden aufgelösten Energiefreisetzungsraten  $G_I$  und  $G_{II}$  zu erhalten und aus diesen die Spannungsintensitätsfaktoren  $K_I$  und  $K_{II}$  zu berechnen:

$$K_I = \sqrt{\frac{8 \cdot G \cdot G_I}{\kappa + 1}}; \quad K_{II} = \sqrt{\frac{8 \cdot G \cdot G_{II}}{\kappa + 1}} \quad (3.103)$$

Eine ausführliche Beschreibung des Vorgehens und seine Implementierung in das hier vorgestellte numerische Lösungsverfahren ist in Hilgendorff (2009) zu finden.

Zur Berechnung des Rissablenkwinkels  $\varphi_0$  wird das Kriterium der maximalen Umfangsspannung nach Erdogan und Sih (1963) verwendet, nach dem der Riss senkrecht zur Richtung der maximalen Umfangsspannung wächst.  $\varphi_0$  ist damit für den ebenen Fall durch die folgende Gleichung mit den Spannungsintensitätsfaktoren verknüpft:

$$K_I \cdot \sin \varphi_0 + K_{II} \cdot (3 \cos \varphi_0 - 1) = 0. \quad (3.104)$$

Die Spannungsintensitätsfaktorberechnung von Krueger (2004) soll nachfolgend eingesetzt werden, um die Konvergenz des in dieser Arbeit entwickelten Verfahrens zur numerischen Lösung von Rissproblemen zu untersuchen.

### Konvergenzuntersuchung

Zum Nachweis der Konvergenz des vorgestellten numerischen Verfahrens wird die in Bild 3.23a dargestellte Zugprobe der Breite  $2w$  und der Länge  $10w$  mit symmetrischem Innenriss der Länge  $2a$  verwendet. Der Riss erfährt hierin eine reine Modus I-Beanspruchung, die aus der äußeren Zugspannung  $\sigma$  resultiert. Die Referenzlösung für den Spannungsintensitätsfaktor  $K_{IRef}$  ist in Murakami (1987) gegeben und gilt streng genommen für eine unendlich lange Zugprobe. In Kübbeler (2007) wurde jedoch sichergestellt, dass sich das Spannungsfeld an der Rissspitze bei weiterer Verlängerung der Probe nur sehr wenig ändert.

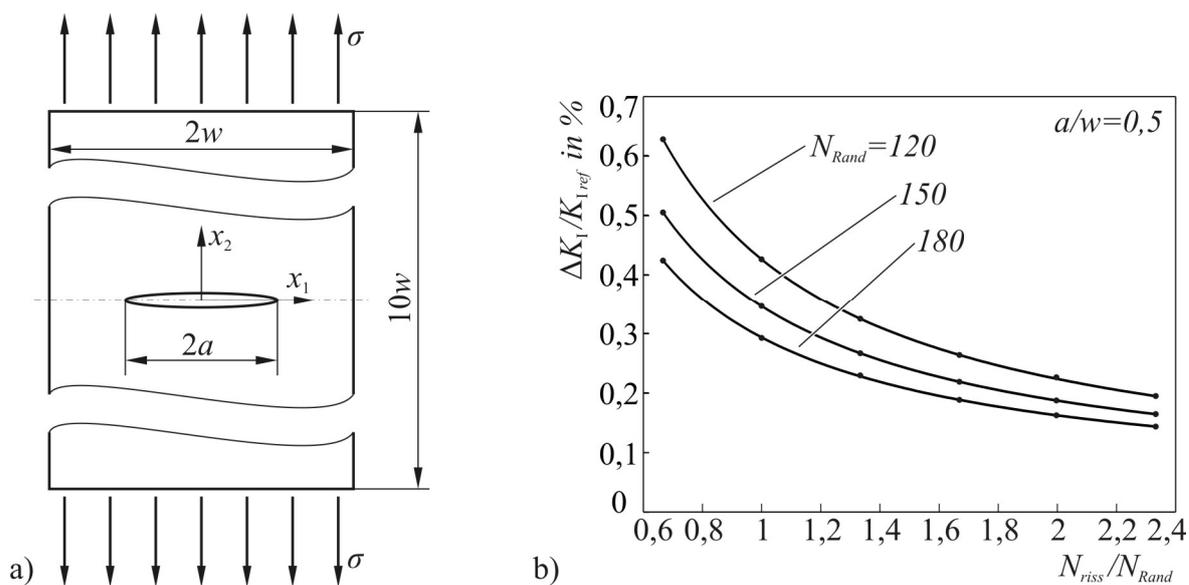


Bild 3.23: Untersuchung des Konvergenzverhaltens mit a) der Probengeometrie und b) dem normierten Fehler bei der Spannungsintensitätsfaktorberechnung über dem Verhältnis  $N_{Riss} / N_{Rand}$ .

Die Berechnung des Spannungsintensitätsfaktors  $K_I$ , der aufgrund der Symmetrie der Probe an beiden Rissenden gleich groß ist, wurde in Hilgendorff (2009) vorgenommen. Dabei erfolgte die Diskretisierung des Probenrandes mit gleich langen Elementen der Anzahl  $N_{Rand}$  und die des Risses mit der Elementanzahl  $N_{Riss}$  mit ebenfalls konstanter Gitterweite. Das Konvergenzverhalten wurde an zwei Proben untersucht, die die Verhältnisse  $a/w = 0,25$  und  $a/w = 0,5$  aufwiesen. Die mit dem Spannungsintensitätsfaktor  $K_{IRef}$  normierten Berechnungsfehler  $\Delta K_I$ , sind für den letzteren Fall in Bild 3.23b über dem Verhältnis  $N_{Riss} / N_{Rand}$  dargestellt. Auf die Illustration des Ergebnisses des ersten Falls wird verzichtet, da es dem zweiten qualitativ ähnlich ist und die Berechnungsfehler geringer ausfallen. Zwar wurde bei der Durchführung der Berechnungen das Kopplungsverfahren von Ameen und Raghuprasad

(1994, siehe Abschnitt 3.2.3) anstelle des in dieser Arbeit weiterentwickelten Verfahrens verwendet, Vergleichsrechnungen haben jedoch gezeigt, dass die Abweichungen zwischen den Verfahren bei dem hier betrachteten Innenriss äußerst gering sind und die Konvergenzuntersuchung daher Gültigkeit behält.

Bild 3.23b zeigt einen Abfall des normierten Berechnungsfehlers mit zunehmendem Verhältnis  $N_{Riss} / N_{Rand}$ . Die berechneten Werte sind als Punkte im Diagramm eingetragen, die auf

den als Graphen eingezeichneten Approximationsfunktionen der Form  $b \cdot \frac{1}{N_{Riss} / N_{Rand}} + c$

liegen. Die Konstante  $c$  weist dabei einen nur wenig von null verschiedenen Wert auf, so dass die Lösung mit zunehmender Feinheit der Rissvernetzung gegen den mit einem Fehler von maximal 0,2% vorliegenden Referenzwert konvergiert. Die Diskretisierung des Probenrandes hat dabei nur einen sehr geringen Einfluss auf den Berechnungsfehler.

Im Anschluss an den hier geführten Nachweis der Konvergenz soll das Verfahren im folgenden Abschnitt bezüglich seiner Eignung zur Berechnung von Rissproblemen untersucht werden, bei denen Bereiche mit unterschiedlichen elastischen Eigenschaften vorliegen.

### **Riss im zusammengesetzten Gebiet mit unterschiedlichen elastischen Eigenschaften**

Um die Eignung des Verfahrens zur Berechnung bruchmechanischer Größen an Rissen zu validieren, die sich in zusammengesetzten Gebieten mit unterschiedlichen elastischen Eigenschaften befinden, berechnet Hilgendorff (2009) Spannungsintensitätsfaktoren an einem Riss, der die Grenzfläche zweier Gebiete durchdringt (Bild 3.24a). In Murakami (1987) ist für diesen Fall eine Referenzlösung gegeben, die jedoch für zwei aneinandergrenzende unendliche Halbebenen gilt. Da die zur Validierung verwendeten Gebiete jedoch im Verhältnis zur Risslänge sehr groß sind, ist von einem geringen hieraus resultierenden Fehler auszugehen. Der Riss liegt unter reiner Modus I-Beanspruchung und die Elastizitätsmoduln  $E_1$  und  $E_2$  des ersten bzw. zweiten Bereiches weisen das Verhältnis  $\Gamma = E_2 / E_1$  auf. Die Zugspannungen, die auf die Gebiete wirken, stehen ebenfalls in diesem Verhältnis ( $\Gamma = \sigma_2 / \sigma_1$ ), so dass in Beanspruchungsrichtung die gleiche Verzerrung erreicht wird.

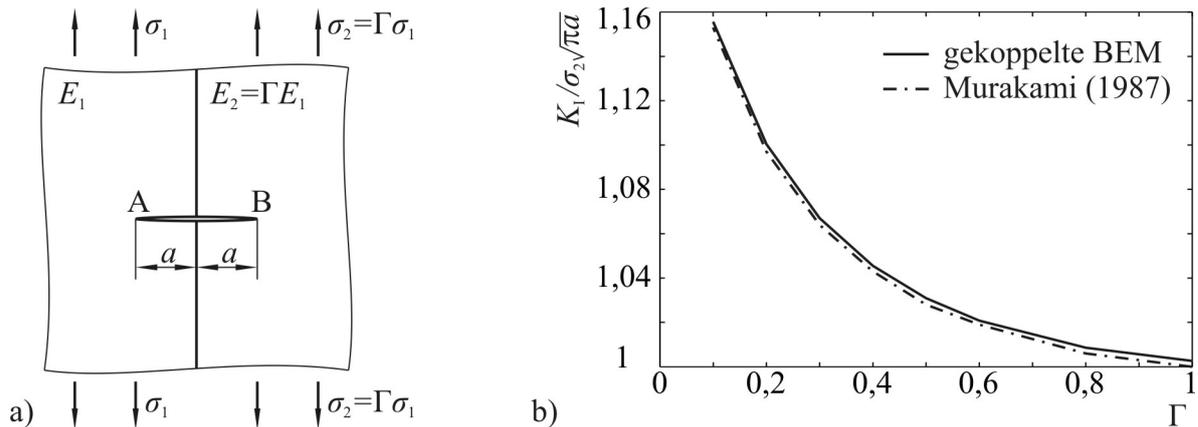


Bild 3.24: Validierung der Berechnung mechanischer Größen an einem Riss in einem zusammengesetzten Gebiet mit unterschiedlichen elastischen Eigenschaften mit a) der Probengeometrie und b) den berechneten Spannungsintensitätsfaktoren bei unterschiedlichen Verhältnissen  $\Gamma$ .

An der rechten Spitze (B) des mit 200 Elementen vernetzten Risses werden mit dem in dieser Arbeit vorgestellten gekoppelten Randelementeverfahren (BEM) die Spannungsintensitätsfaktoren  $K_I$  in Bild 3.24b normiert über dem in unterschiedlichen Berechnungen variierten Verhältnis  $\Gamma$  dargestellt. Dabei wird eine sehr gute Übereinstimmung mit den von Murakami (1987) gegebenen Werten festgestellt, die ebenfalls in Bild 3.24b eingezeichnet sind; die Berechnungsfehler liegen unter 0,35%.

Die vorgestellten Berechnungsbeispiele zeigen, dass das numerische Verfahren die mechanischen Größen an der Risspitze, die zur Spannungsintensitätsfaktorbestimmung eingesetzt wurden, mit großer Genauigkeit bestimmt. In Hilgendorff (2009) werden viele weitere Rechenbeispiele durchgeführt, die die hohe Rechengenauigkeit auch anhand von Mixed-Modebeanspruchten Rissen und weiteren Konfigurationen zusammengesetzter Gebiete demonstrieren. Somit ist davon auszugehen, dass die Rissspitzenableitung (CTSD), die das Kurzrissswachstum bestimmt, verlässlich berechnet wird.

Der neue Aspekt des numerischen Verfahrens, in martensitisch umgewandelten Bereichen eine Volumendehnung aufzubringen, wird im nächsten Abschnitt validiert.

### Volumendehnung

Zur Validierung der Nachbildung der Volumendehnung wird eine leicht analytisch nachzurechnende Geometrie gewählt, in der sich zwei rechteckige Gebiete zwischen starren Wänden befinden (Bild 3.25). Beide Bereiche weisen die Länge  $l$  und die Breite  $b$  auf und besitzen die gleichen elastischen Eigenschaften. Wird die Dehnung  $\varepsilon_M$  auf den rechten Bereich aufgegeben, nimmt sein Volumen zu und es entstehen Druckspannungen in den Gebieten, die der

Dehnung proportional sind. Zudem kommt es zu einer Verschiebung der Grenzebene nach links. Bei der Berechnung der Verschiebung der Bereichsgrenze und der Druckspannung mit dem hier vorgestellten numerischen Verfahren ergeben sich nur sehr geringe Abweichungen zur analytischen Lösung, die im niedrigen Promillebereich liegen und weitgehend vernetzungsunabhängig sind, da die auftretenden Verformungen von den Ansatzfunktionen der Elemente exakt abgebildet werden können.

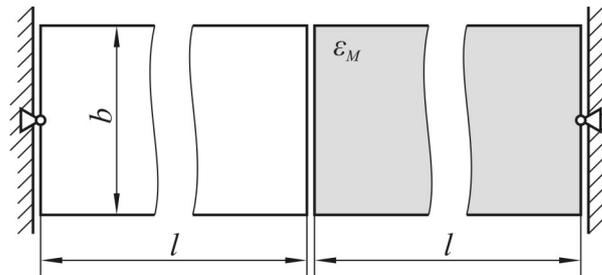


Bild 3.25: Zwei Bereiche gleicher Abmessungen und elastischer Eigenschaften zur Validierung der Nachbildung einer Volumendehnung.

Wird die Volumendehnung bei Verwendung der Randelementemethode nachgebildet, werden die betreffenden Bereiche mit Elementen umschlossen und so von den umliegenden Gebieten abgegrenzt. Dieses Vorgehen eröffnet die Möglichkeit, auch die einzelnen Gefügekörner abzugrenzen und ihnen individuelle elastische Eigenschaften zuzuweisen. In wie weit hierbei eine realitätsgetreue Modellierung von Gefügen unter Einbeziehung der anisotropen elastischen Eigenschaften der Körner möglich ist, wird nachfolgend untersucht.

### Einbeziehung der anisotropen elastischen Eigenschaften von Gefügekörnern

Das in dieser Arbeit entwickelte numerische Verfahren bietet die Möglichkeit, den einzelnen Körnern bei der Risssimulation individuelle elastische Eigenschaften zuzuweisen, so dass es nahe liegt, die anisotropen elastischen Eigenschaften der Körner zu berücksichtigen. Da die Einflussfunktionen zur Beschreibung der Spannungen und Verschiebungen jedoch lediglich isotropes elastisches Verhalten erlauben, lässt sich die Anisotropie nur näherungsweise einbringen, indem den Körnern ihre jeweilige Steifigkeit in Zugrichtung zugewiesen wird, die gemäß Gleichung (2.12) aus der Kornorientierung berechnet werden kann. Es ist jedoch in Frage zu stellen, ob mit dieser starken Vereinfachung tatsächlich anisotrope Effekte nachgebildet werden können. Untersuchungen unter Verwendung eines kommerziellen Finite-Elemente-Programms an einem ebenen Korn, das in eine große Scheibe eingebettet ist, sollen diese Frage beantworten. Hierbei wird einerseits der Fall betrachtet, dass sowohl das Korn als auch die Scheibe die anisotropen elastischen Eigenschaften von kubisch flächenzentrierten

Kristallen aufweisen, wobei unterschiedliche Orientierungen der Einheitszellen zu Anisotropiespannungen führen. Andererseits werden isotrope Steifigkeiten zugewiesen, die den jeweiligen Steifigkeiten in Zugrichtung entsprechen. Durch Vergleich der sich in den unterschiedlichen Fällen einstellenden Spannungsfelder kann der von der Vereinfachung hervorgerufene Fehler bewertet werden.

Die Geometrie des untersuchten Kornes kann Bild 3.26 bzw. Bild 3.27 entnommen werden. Es ist in eine quadratische Scheibe eingebettet, deren Kantenlänge etwa das sechsfache der Ausdehnung des Kornes senkrecht zur Spannungsrichtung beträgt. Im Verhältnis zur Ausdehnung in der Betrachtungsebene besitzt die Scheibe eine sehr geringe Tiefe, innerhalb derer drei Schichten finiter Elemente vorliegen. Auf der Rückseite der Scheibe sind Verschiebungen in Tiefenrichtung per Randbedingung festgehalten, während die Vorderseite spannungsfrei ist. Auf die senkrecht zur äußeren Spannungsrichtung orientierten Kanten ist die Einheitsnormalspannung  $\sigma^\infty$  aufgebracht; die Kanten parallel zur Belastungsrichtung sind spannungsfrei.

Für unterschiedliche Berechnungen werden die Kristallorientierungen in der großen Scheibe ( $S$ ) so gewählt, dass die  $[111]_S$ -Richtung, die  $[110]_S$ -Richtung oder die  $[100]_S$ -Richtung des Kristalls mit der  $x$ -Achse, die die Belastungsrichtung darstellt, zusammenfallen. Die Orientierung des Kornes ( $K$ ) zeichnet sich dadurch aus, dass die  $[111]_K$ -Richtung in der  $x$ - $y$ -Ebene liegt, wodurch eine mögliche Gleitebene senkrecht auf der Scheibenebene steht. Die  $[111]_K$ -Richtung und die  $x$ -Achse schließen den Winkel  $\varphi$  ein, der in unterschiedlichen Berechnungen die Werte  $\varphi = 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$  und  $75^\circ$  annimmt. Bild 3.26 veranschaulicht exemplarisch die Konfiguration, in der die  $[111]_S$ -Richtung der großen Scheibe in die  $x$ -Richtung weist und  $\varphi = 45^\circ$  beträgt.

Die zur Berechnung der Spannungsfelder erforderlichen elastischen Konstanten  $C_{11} = 205\text{GPa}$ ,  $C_{12} = 135\text{GPa}$  und  $C_{44} = 125\text{GPa}$  sind Blochwitz (2005) entnommen, aus denen sich nach Gleichung (2.10) ein Anisotropiefaktor von  $A = 3,26$  ergibt. Aus den Konstanten berechnen sich für die in Bild 3.26 dargestellte Konfiguration die Steifigkeiten in Zugrichtung von  $E_{11}^S = 285,1\text{GPa}$  in der Scheibe und  $E_{11}^K = 141,5\text{GPa}$  im Korn. Tabelle 3.1 enthält die Steifigkeiten aller für die folgenden Untersuchungen genutzten Kornorientierungen.

Tabelle 3.1: Steifigkeiten unterschiedlich orientierter Einheitszellen in Scheibe und Korn.

Beanspruchungsrichtung	Elastizitätsmodul in GPa	Beanspruchungsrichtung	Elastizitätsmodul in GPa
		$[111]_K + \varphi = 15^\circ$	232,2
$[100]_S$	101,6	$[111]_K + \varphi = 30^\circ$	167,2
$[110]_S$	196,5	$[111]_K + \varphi = 45^\circ$	141,5
$[111]_S$	285,1	$[111]_K + \varphi = 60^\circ$	147,7
		$[111]_K + \varphi = 75^\circ$	176,2

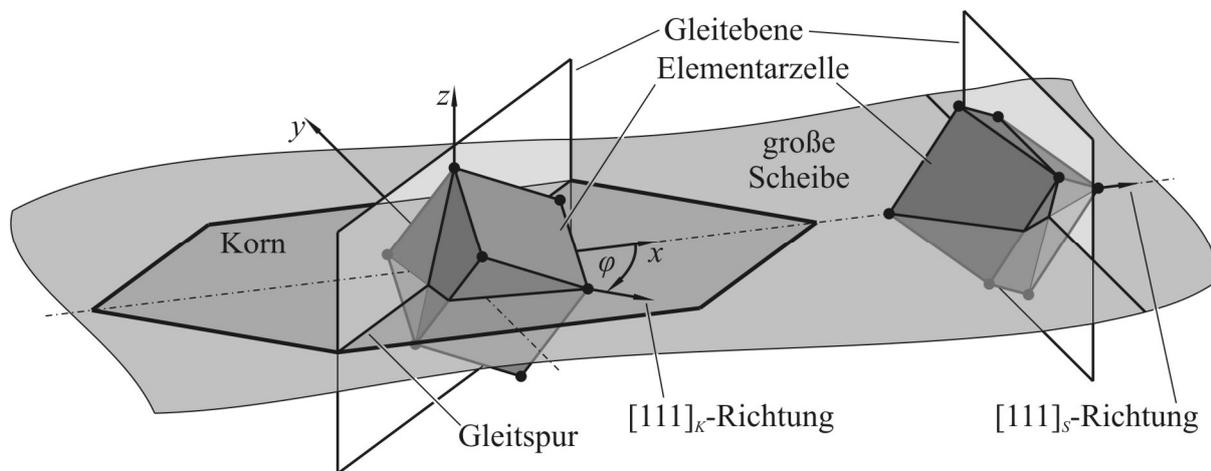


Bild 3.26: Ebenes Korn in großer Scheibe zur Validierung der Nachbildung anisotroper elastischer Eigenschaften.

Die aus der äußeren Zugbeanspruchung  $\sigma^\infty$  resultierenden Normalspannungen  $\sigma_{11}$  in der beschriebenen Konfiguration ergeben die in Bild 3.27 dargestellten Spannungsfelder für den Fall mit anisotropen elastischen Eigenschaften (Bild 3.27a) und den Fall mit isotropen Eigenschaften (Bild 3.27b). Qualitativ weisen beide Spannungsfelder eine ähnliche Gestalt auf; die Spannungswerte im Koordinatenursprung von  $\sigma_{11}/\sigma^\infty = 0,77$  bzw.  $\sigma_{11}/\sigma^\infty = 0,7$  weichen um etwa 9% voneinander ab. Trotz der starken Vereinfachung wird somit ein akzeptables Ergebnis erreicht.

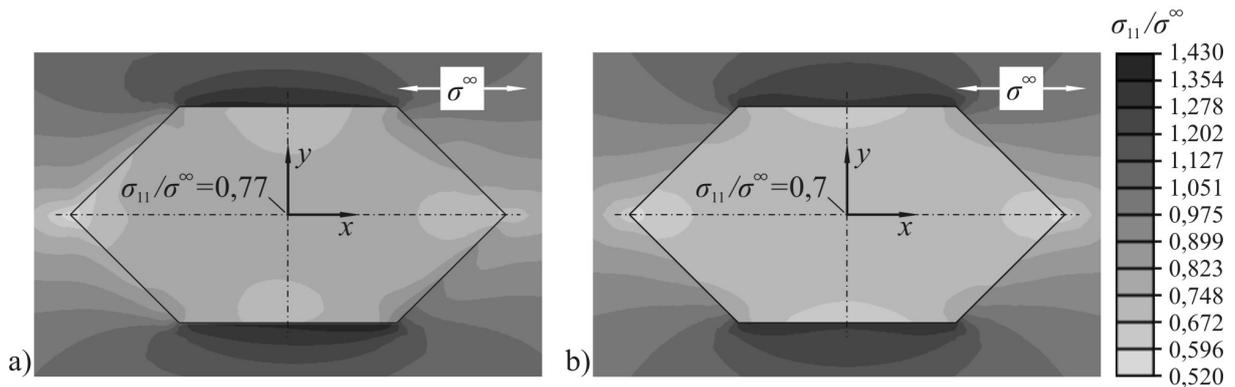


Bild 3.27: Vergleich des Normalspannungsfeldes eines Kornes in einer großen Scheibe mit a) anisotropen und b) isotropen elastischen Eigenschaften.

Von größerem Interesse für die Simulation der Kurzrissausbreitung sind jedoch die Schubspannungen auf den Gleitebenen. Zu deren Vergleich zeigt Bild 3.28 die parallel zur Gleitspur des Kornes ausgewerteten Schubspannungen (Anisotropie in Bild 3.28a und Isotropie in Bild 3.28b). Auch hier ist qualitativ eine gute Übereinstimmung zu finden und die Schubspannungswerte im Koordinatenursprung von  $\tau_{\xi\eta}/\sigma^\infty = 0,384$  bzw.  $\tau_{\xi\eta}/\sigma^\infty = 0,369$  unterscheiden sich um etwa 4%.

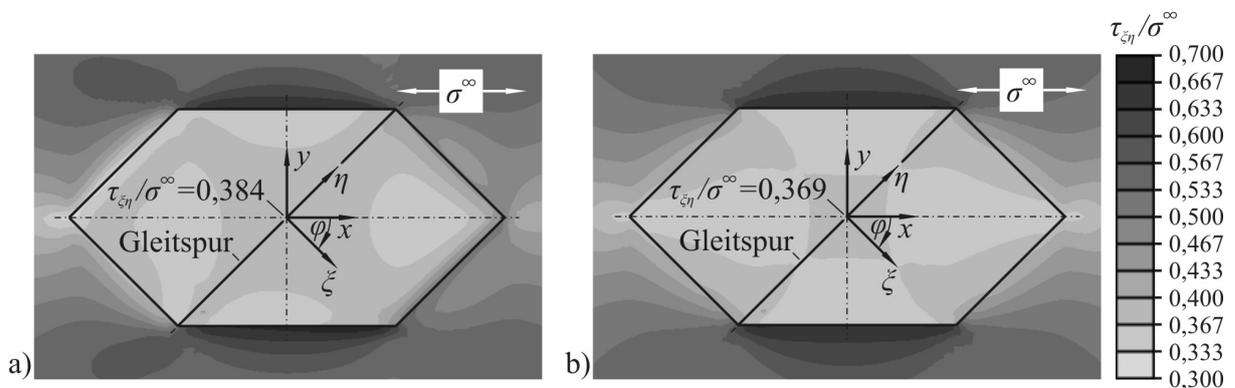


Bild 3.28: Vergleich des Schubspannungsfeldes eines Kornes in einer großen Scheibe mit a) anisotropen und b) isotropen elastischen Eigenschaften.

Die Untersuchung lediglich einer Konfiguration aus Korn- und Scheibenorientierung lässt jedoch noch keine aussagekräftige Bewertung der Vereinfachung anisotroper elastischer Eigenschaften durch isotrope zu. Daher werden die Spannungsfelder der weiteren, oben beschriebenen Konfigurationen berechnet. Entlang der Gleitspur im Korn, die durch den Koordinatenursprung verläuft, ergeben sich die in Bild 3.29 über der Gleitbandkoordinate  $\eta$  dargestellten Schubspannungsverläufe. Die Schubspannungen  $\tau_{\xi\eta}$  sind dabei durch die äußere Spannung  $\sigma^\infty$  und  $\eta$  durch die halbe Gleitbandlänge  $c$  normiert. Zudem ist die sich in einer

homogenen isotropen Scheibe bei gleicher Gleitspurorientierung einstellende Schubspannung  $(\tau_{\xi\eta})_{hom}$  als Vergleichswert eingezeichnet.

Es zeigt sich bei den Winkeln  $\varphi = 30^\circ$  und  $\varphi = 45^\circ$  eine gute Übereinstimmung der Spannungswerte, wenn bei der Einheitszelle der Scheibe die  $[111]_S$ -Richtung oder die  $[100]_S$ -Richtung mit der  $x$ -Achse übereinstimmt. Lediglich im Bereich der Korngrenzen kommt es zu größeren Abweichungen. Ist die  $[110]_S$ -Richtung in  $x$ -Richtung orientiert, liegt auch im Inneren des Kornes eine geringere Übereinstimmung vor, da sich die Steifigkeiten von Korn und Scheibe in Zugrichtung nicht stark unterscheiden. Im anisotropen Fall werden daher Schubspannungen durch eine Dehnungs-Schiebungs-Kopplung verursacht, die vom Vergleichswert  $(\tau_{\xi\eta})_{hom}$  stärker abweichen, als bei isotroper Berechnung.

Beträgt der Winkel  $\varphi = 75^\circ$  zeigt sich qualitativ ein ähnliches Ergebnis, wobei jedoch größere Abweichungen als in den anderen Fällen entstehen. Da das Spannungsniveau in diesem Fall insgesamt niedrig liegt, ist die Wahrscheinlichkeit der Aktivierung einer solchen Gleitebene gering, so dass die geringere Übereinstimmung zwischen den anisotropen und isotropen Spannungen bei der Simulation der Kurzrissausbreitung nicht zum Tragen kommt. Die weiteren Konfigurationen mit  $\varphi = 15^\circ$  und  $\varphi = 60^\circ$  liefern ähnliche Ergebnisse wie die in Bild 3.29 gezeigten und werden daher nicht gesondert diskutiert.

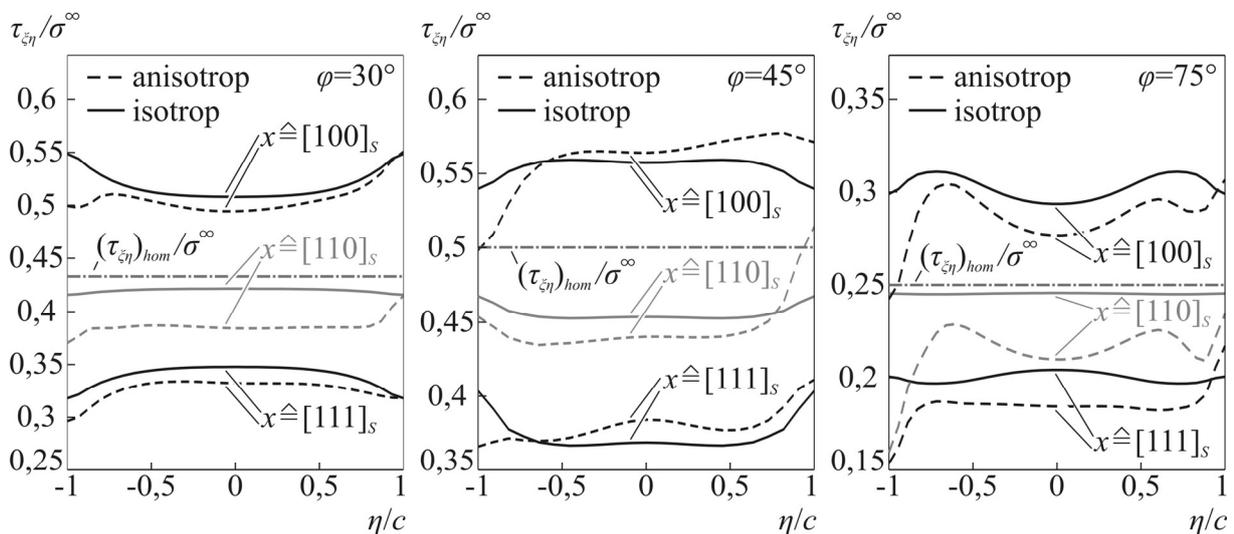


Bild 3.29: Vergleich der Schubspannungen entlang der Gleitspur eines Kornes in einer großen Scheibe.

Es lässt sich zusammenfassen, dass die Berücksichtigung der Steifigkeiten in Zugrichtung für die Simulation der Kurzrissausbreitung eine gute Nachbildung der anisotropen Elastizität ermöglicht, wenn die betrachtete Gleitebene senkrecht auf der Oberfläche steht, wie es ohnehin

von dem zweidimensionalen Modell gefordert wird, und die Gleitebenennormale mit der Zugrichtung einen Winkel von etwa  $30^\circ$  bis  $60^\circ$  einschließt. In diesem Fall sind die Schubspannungen auf der Gleitebene hoch und ihre Aktivierung wahrscheinlich. Ist der Winkel kleiner als  $30^\circ$  bzw. größer als  $60^\circ$  sind die Schubspannungen auf diesen Ebenen gering und für das Kurzrissswachstum in der Regel nicht von Bedeutung.

Aufgrund der häufig guten Übereinstimmung der Schubspannungen im Inneren des Kornes erscheint es darüber hinaus möglich, besonders hoch beanspruchte Gleitebenen zu identifizieren, die als Rissentstehungsorte in Frage kommen. Hilgendorff (2011) zeigt an einem einzelnen realen Gefügeausschnitt, dass mit dem hier entwickelten Modell an Orten, an denen sich infolge von Ermüdungsbeanspruchung Gleitspuren gebildet haben, hohe Schubspannungen auf den entsprechenden Gleitsystemen berechnet werden. Dabei können auch gute Übereinstimmungen mit dem von Krupp et al. (2010, vgl. Abschnitt 2.4.2) auf Basis der Finite-Elemente-Methode vorgestellten Modells zur Findung von möglichen Rissentstehungsorten festgestellt werden. Die interkristalline Rissinitiierung auf Korn- oder Zwillingsgrenzen, die z.B. durch das Modell von Blochwitz und Tirschler (2005, vgl. Abschnitt 2.4.1) beschrieben wird, lässt sich jedoch nicht nachvollziehen, da die Abweichungen in den Schubspannungen zwischen anisotroper und isotroper Rechnung in Korngrenznahe oft groß sind.

Es ist daher davon auszugehen, dass mit dem vorliegenden Berechnungsverfahren anisotrope Effekte bei der Rissausbreitung zumindest qualitativ nachgebildet und untersucht werden können. Im Vergleich mit den Vorgängermodellen von Schick (2004) und Künkler (2007), die keine elastischen Unterschiede zwischen den Gefügekörnern berücksichtigen, ist mit genaueren Berechnungsergebnissen bei der Rissausbreitungssimulation zu rechnen. Um eine realitätsgetreuere Einbeziehung der anisotropen elastischen Eigenschaften zu erreichen, ist jedoch eine diesbezügliche Erweiterung des Verfahrens erforderlich und die verwendeten Einflussmatrizen müssen entsprechend angepasst werden.

Die in diesem Abschnitt durchgeführten Validierungen zeigen, dass das in dieser Arbeit entwickelte numerische Verfahren die Berechnung von Spannungen und Verschiebungen in der Umgebung der Rissspitze mit großer Genauigkeit erlaubt. Die neuen Effekte der Berücksichtigung individueller elastischer Eigenschaften in unterschiedlichen Bereichen und der Volumendehnung werden korrekt nachvollzogen. Im nachfolgenden Kapitel wird das Verfahren eingesetzt, um den Einfluss dieser Effekte auf das Kurzrissswachstum zu untersuchen.

## 4 Simulation des mikrostrukturbestimmten Kurzrissswachstums

Das im vorhergehenden Abschnitt entwickelte Modell zur Simulation der mikrostrukturbestimmten Kurzrisssausbreitung wird in diesem Kapitel eingesetzt, um die neu berücksichtigten Effekte grundlegend zu untersuchen: Die Volumendehnung in martensitischen Bereichen und die individuellen elastischen Eigenschaften der Körner. Zunächst werden hierzu Simulationen der Stadium I-Risssausbreitung mit nur einem aktiven Gleitband je Rissspitze durchgeführt und anschließend das Stadium II-Rissswachstum mit jeweils zwei aktiven Gleitbändern nachgebildet. Schließlich erfolgt die Untersuchung der Auswirkungen der lokalen Phasenumwandlung an der Rissspitze. Um die Interpretation der Berechnungsergebnisse zu erleichtern, erfolgen die Risssausbreitungssimulationen in Gefügen, die nur wenige Körner umfassen. Zudem werden die in den folgenden Untersuchungen verwendeten werkstofftechnischen Konstanten so gewählt, dass die zu erwartenden Effekte gut darstellbar sind. Auf die Anpassung an einen bestimmten Werkstoff wird in diesem Abschnitt verzichtet; allerdings liegen die Werte in realistischen Größenordnungen. Ein Parametersatz für den im Gemeinschaftsprojekt untersuchten austenitischen Edelstahl 1.4307 wird in Abschnitt 5.3 ermittelt und bei der Simulation des Wachstums eines realen Risses herangezogen.

### 4.1 Risssausbreitung im Stadium I

#### 4.1.1 Einfluss unterschiedlicher elastischer Eigenschaften der Körner

Zur Simulation des Rissswachstums im Stadium I wird ein aus fünf rechteckigen Körnern bestehendes Gefüge betrachtet, das in Bild 4.1a dargestellt und in eine große homogene Scheibe eingebettet ist. Sie ist quadratisch und weist zur Vermeidung von Randeinflüssen eine große Kantenlänge auf, die dem hundertfachen der Kornbreite  $D$  entspricht. Alle Körner sind so orientiert, dass jeweils eine Gleitebene unter einem Winkel von  $45^\circ$  zur äußeren Beanspruchung liegt. Das mittlere Korn enthält einen Riss, der mittig auf einer solchen Gleitebene entstanden ist. Ausgehend von dieser Anfangssituation soll das Rissswachstum simuliert werden, bei dem die Korngrenzen Barrieren für die Ausdehnung der plastischen Zone vor der Rissspitze darstellen. So ist die plastische Abgleitung zunächst auf die Gleitebenen zwischen den Rissspitzen und den Grenzen des mittleren Kornes beschränkt. Im Laufe des Rissswachstums können jedoch auch die Gleitebenen in den weiteren Körnern aktiviert werden, wozu auf ihnen eine kritische Schubspannungssingularität überschritten werden muss.

Um den Einfluss unterschiedlicher elastischer Eigenschaften auf die Risswachstumsgeschwindigkeit zu untersuchen, werden den Körnern individuelle Steifigkeiten zugewiesen. Im Sinne einer leichten Interpretierbarkeit der Ergebnisse weisen das mittlere Korn, die beiden äußeren Körner und die umgebende große Scheibe den gleichen Elastizitätsmodul  $E_0$  auf. Die beiden übrigen Körner – rechts und links des mittleren – erhalten den Elastizitätsmodul  $E_1$ , der von  $E_0$  abweichen kann.

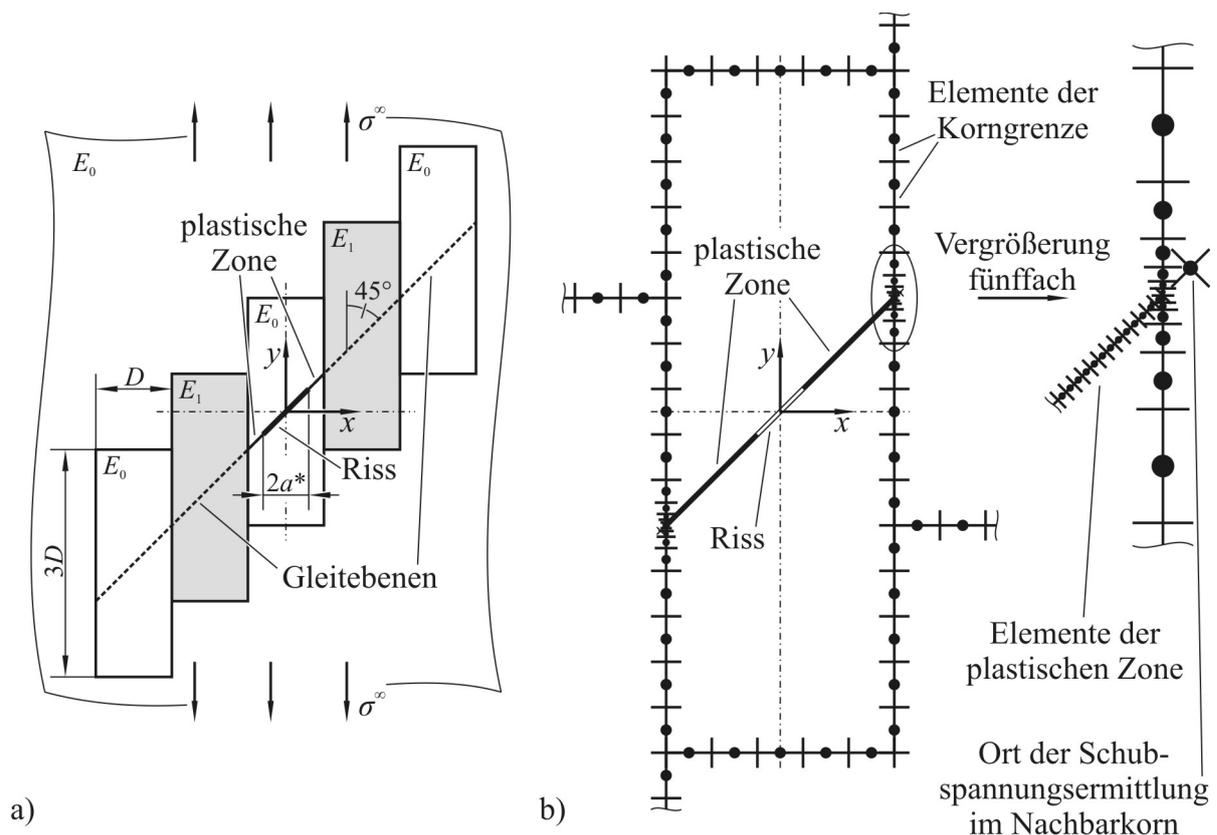


Bild 4.1: Einfluss unterschiedlicher elastischer Korneigenschaften auf die Risspitzenablenkung im Stadium I mit a) dem untersuchten Gefüge und b) der Vernetzung eines risstragenden Kornes.

Die Vernetzung des Risses, der Gleitebenen und der Körner ist exemplarisch in Bild 4.1b für das mittlere Korn dargestellt. Abgebildet ist die Ausgangssituation, in der der Riss nur ein Fünftel der Gleitbandlänge einnimmt. In diesem Fall wird der Riss von 28 und jede plastische Zone von 57 Elementen nachgebildet. Demnach würde ein Riss bzw. eine plastische Zone mit der Länge einer Kornbreite  $D$  von etwa 100 Elementen vernetzt. Bei den Korngrenzen reicht es in der Regel aus, eine Kornbreite  $D$  durch fünf Elemente zu diskretisieren. Stößt jedoch ein Riss oder eine plastische Zone auf die Korngrenze – so wie im vergrößerten Bereich von Bild 4.1b – ist eine Verfeinerung des Netzes erforderlich, um den dort auftretenden singulären Spannungsverlauf genauer nachbilden zu können. Es hat sich gezeigt, dass hierbei gute Er-

gebnisse erreicht werden, wenn die Länge eines Elementes der Korngrenze nicht größer ist als der halbe Abstand zum nächstgelegenen Knoten eines Elementes des Risses bzw. der plastischen Zone.

In einer ersten Simulation weisen alle Körner die gleiche Steifigkeit ( $E_1 = E_0$ ) auf, so dass das Risswachstum in einer elastisch homogenen Scheibe erfolgt. Eine Diskretisierung der Korngrenzen ist somit nicht erforderlich, wird hier jedoch vorgenommen. Dass die Vernetzung der Grenzen keinen merklichen Einfluss auf die Rissausbreitung ausübt, zeigt Kübbeler (2010).

Ausgehend von einer kurzen Anfangsriszlänge wird die Scheibe und damit auch das Gefüge einer zyklischen äußeren Beanspruchung  $\sigma^\infty$  mit der Schwingbreite  $\Delta\sigma^\infty = \sigma_{max} - \sigma_{min}$  ausgesetzt. Die Maximalspannung  $\sigma_{max}$  und die Minimalspannung  $\sigma_{min}$  sind dabei betragsmäßig gleich, so dass sich ein Spannungsverhältnis von  $R = -1$  ergibt. Die Fließschubspannung  $\tau^F$  auf dem aktivierten Gleitband wird in dieser und den nachfolgenden Simulationen mit  $\tau^F = 0,5 \cdot \sigma_{max}$  so gewählt, dass sie während der veränderlichen Belastung überschritten wird und es zum Wachstum des Risses kommt. Infolgedessen tritt eine Rissspitzenabgleitung *CTSD* auf, deren Schwingbreite  $\Delta CTSD$  der Rissausbreitungsrate  $da/dN$  proportional ist (siehe Gleichung (2.14), Wilkinson et al. 1998). Dieser bei wachsender Risslänge bestimmte Wert wird zum Vergleich der Risswachstumsgeschwindigkeiten bei unterschiedlichen Steifigkeitskonfigurationen der Körner herangezogen. Er ist in Bild 4.2a normiert über dem Verhältnis  $a^*/D$  aufgetragen, das sich aus der auf die  $x$ -Achse projizierten halben Risslänge  $a^*$  und der Kornbreite  $D$  bildet. Aufgrund der Symmetrie des Rissproblems sind die Rissspitzenabgleitungen an beiden Rissenden gleich.

Bei der zunächst kurzen Anfangsriszlänge steigt die zyklische Rissspitzenabgleitung während der Rissausbreitung an, da sich die plastische Zone noch weitgehend unbeeinflusst von den Korngrenzen ausdehnen kann. Wächst der Riss jedoch auf die Grenzen zu, verkürzen sich die plastischen Bereiche und die Abgleitungen werden vermindert. Gleichzeitig nimmt das Spannungsfeld am Ende der plastischen Zone in den angrenzenden Körnern zu. Es weist eine Singularität an der Korngrenze auf und führt mit Erreichen einer kritischen Schubspannungsintensität zur Aktivierung von möglichen Gleitebenen in den Nachbarkörnern. Dem Modell von Navarro und de los Rios (1988) entsprechend liegt diese Intensität vor, wenn auf einer Gleitebene im Abstand  $r_0$  von der Korngrenze die kritische Schubspannung  $\tau^c$  überschritten wird. Diese Werte werden mit  $r_0 = 2/100 \cdot D$  und  $\tau^c = 4\tau^F$  angenommen, bei denen in allen nachfolgenden Simulationen die Aktivierung von Gleitebenen in den Nachbarkörnern erreicht

wird und somit die hieraus resultierenden Effekte dargestellt werden können. Infolge der Verlängerung der plastischen Zone steigt  $\Delta CTSD$  sprunghaft an und nimmt mit wachsender Risslänge weiter zu, bis die nächste Korngrenze die Deformation in der plastischen Zone behindert.

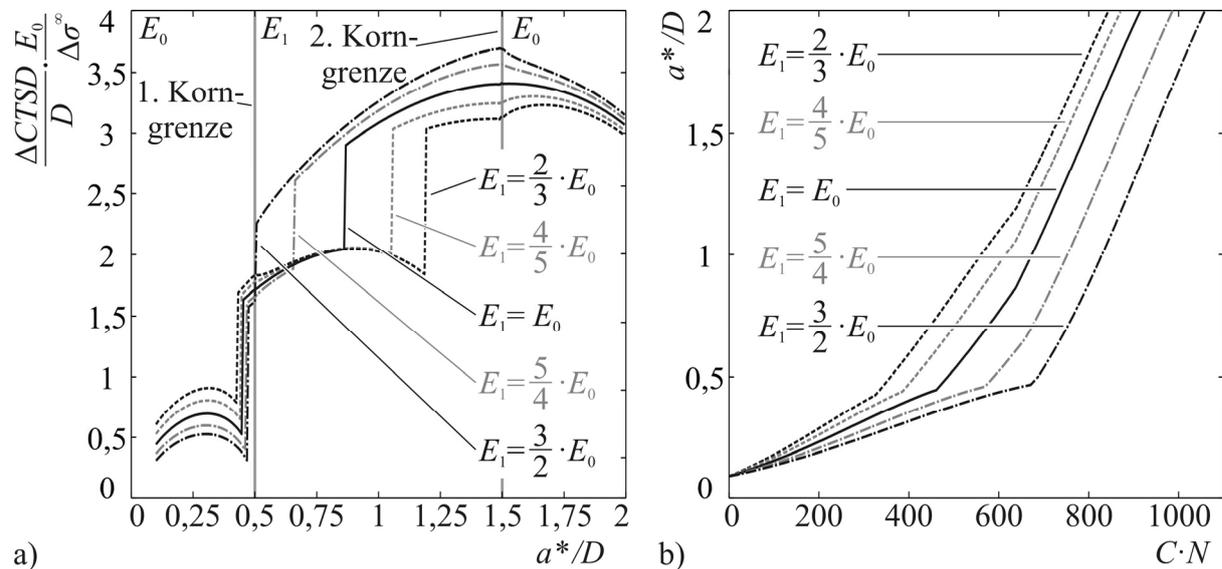


Bild 4.2: Simuliertes Risswachstum mit a) den berechneten Verläufen der normierten Riss-spitzenabgleitung über dem Verhältnis  $a^*/D$  und b) den normierten Risslängen über dem Produkt aus der Zahl der Lastwechsel  $N$  und dem Proportionalitätsfaktor  $C$  des Risswachstumsgesetzes von Wilkinson et al. (1998).

Nähern sich die Rissspitzen der zweiten Korngrenze, wird auch diese von der plastischen Zone überwunden. Aufgrund der größeren Spannungsintensität des längeren Risses reicht hierbei ein größerer Abstand zwischen Riss und Grenze aus, um die Gleitebenen im Nachbarkorn zu aktivieren. Erneut steigt die zyklische Riss-spitzenabgleitung erst sprunghaft und dann infolge der zunehmenden Risslänge moderat an, bis sie durch den Einfluss der nächsten Korngrenze wieder sinkt. Obwohl ein bereits durch mehrere Körner hindurchgewachsener Riss in der Realität mit großer Wahrscheinlichkeit weiterwachsen würde, wird in dieser grundlegenden Untersuchung keine weitere Aktivierung von Gleitebenen zugelassen und die Simulation des Risswachstums in der Mitte der beiden äußeren Körner ( $a^*/D = 2$ ) abgebrochen.

Bild 4.2b zeigt zum Vergleich der Rissausbreitungsgeschwindigkeiten den Verlauf des Risswachstums über die Anzahl der Lastwechsel hinweg. Dazu ist die auf die  $x$ -Achse projizierte halbe Risslänge  $a^*$  normiert über dem Produkt  $C \cdot N$  aufgetragen, das sich aus der Lastwechselanzahl  $N$  und dem Proportionalitätsfaktor  $C$  des Risswachstumsgesetzes von Wilkinson et al. (1998) (Gleichung (2.14)) bildet. Diese Darstellung ist möglich, indem das Risswachstumsgesetz nach  $C \cdot \Delta N$  umgestellt wird:

$$C \cdot \Delta N = \frac{\Delta a}{\Delta CTSD^m}. \quad (4.1)$$

Die in jedem Rechenschritt angesetzte finite Rissverlängerung  $\Delta a$  wird dabei ins Verhältnis zur zugehörig berechneten zyklischen Rissspitzenableitung  $\Delta CTSD$  gesetzt. Die erhaltene Lastwechselzahl  $\Delta N$ , die ein einzelner Rechenschritt repräsentiert, wird dann jeweils der Gesamtzyklenzahl  $N$  in der Simulation aufaddiert. Die zur jeweiligen Gesamtzyklenzahl gehörende aktuelle Risslänge kann somit dargestellt werden. Hierfür wird der Exponent  $m$  des Risswachstumsgesetzes mit dem Wert Eins angenommen, der sich in zahlreichen Experimenten (z.B. Düber et al. 2006) als geeigneter Wert erwiesen hat. Das Diagramm zeigt bei jeder Aktivierung zusätzlicher Gleitebenen eine markante Veränderung der Steigung.

In einer zweiten Simulation erhalten die beiden Körner rechts und links des mittleren einen geringeren Elastizitätsmodul ( $E_1 = 2/3 \cdot E_0$ ) als die übrigen Körner und die umgebende große Scheibe. Das mittlere Korn ist somit steifer als die angrenzenden und nimmt einen größeren Teil der äußeren Beanspruchung auf. Entsprechend erhöht sich die zyklische Rissspitzenableitung während des Risswachstums in diesem Korn. Zur Aktivierung der Gleitbänder in den Nachbarkörnern, die mit dem Sprung in  $\Delta CTSD$  verbunden ist, reicht eine etwas geringere Risslänge aus, obwohl die hierfür erforderliche Spannungssingularität gegenüber der aus dem vorher simulierten Fall unverändert geblieben ist. Während des Risswachstums in den Körnern rechts und links des mittleren treten zwei gegenläufige Effekte auf: Die geringere Steifigkeit der Körner verringert deren Beanspruchung, erleichtert jedoch gleichzeitig die Deformation an der Rissspitze. Nachdem die plastische Zone die erste Korngrenze überwunden hat, überwiegt zunächst der Effekt der leichteren Deformierbarkeit des Werkstoffs. Somit liegt die Rissspitzenableitung leicht oberhalb der des homogenen Falls. Um die Gleitebenen in den äußersten Körnern zu aktivieren, ist eine größere Risslänge erforderlich, bei der es zum erneuten Sprung in  $\Delta CTSD$  kommt. Nun dominiert der Effekt der geringeren Beanspruchung und die Rissspitzenableitung liegt bei deutlich niedrigeren Werten. Treten die Rissspitzen in die äußersten Körner ein, nähern sich die zyklischen Rissspitzenableitungen aus der vorherigen und der aktuellen Simulation aneinander an. Dies ist der Fall, da sich der Einfluss der hinter der Rissspitze liegenden Körner auf die Vorgänge an der Rissspitze abschwächt, je weiter sich die Rissspitze von ihnen entfernt.

Wird den Körnern rechts und links des mittleren eine größere Steifigkeit ( $E_1 = 3/2 \cdot E_0$ ) zugewiesen, ist die Beanspruchung des mittleren Kornes geringer und die zyklische Rissspit-

zenableitung liegt hierin unterhalb der des homogenen Falls. Die Aktivierung von Gleitbändern im Nachbarkorn erfolgt bei einer etwas größeren Risslänge, wodurch der Sprung in  $\Delta CTSD$  erst kurz vor der Korngrenze erfolgt. Die dann erreichten Werte liegen zunächst niedriger als im homogenen Fall. Die plastischen Zonen dehnen sich dann aber bereits sehr früh in die äußersten Körner aus. Dadurch folgt ein erneuter Sprung der zyklischen Risspitzenableitung, die anschließend mit zunehmender Risslänge weiter steigt. Sie liegt oberhalb der zuvor ermittelten Kurve, da das Risswachstum nun in den steiferen und damit höher beanspruchten Körnern stattfindet. Überschreiten die Risspitzen die zweite Korngrenze, nähert sich auch die in dieser Simulation bestimmte Kurve der des homogenen Falls an.

In Bild 4.2 sind zusätzlich die Ergebnisse von Simulationen dargestellt, bei denen weniger starke Unterschiede zwischen den Steifigkeiten der Körner vorliegen ( $E_1 = 4/5 \cdot E_0$  und  $E_1 = 5/4 \cdot E_0$ ). Da bei der vorherigen Wahl der elastischen Verhältnisse im Falle von  $E_1 = 3/2 \cdot E_0$  eine besonders frühe Aktivierung von Gleitebenen in den äußeren Körnern stattfindet, sollen diese abgeschwächten Fälle einer besseren Anschauung der auftretenden Effekte dienen. Auf die Diskussion der Graphen wird jedoch verzichtet, da sie sich in die obigen Erklärungen gut einordnen lassen.

In der in Bild 4.2b vorgenommenen Darstellung des Risswachstums über der Zyklenzahl heben sich besonders die unterschiedlichen Steigungen innerhalb des ersten Kornes hervor, die auch aus der vorherigen Darstellung der zyklischen Risspitzenableitung ablesbar sind. Es kann jedoch deutlicher erkannt werden, dass ein schnelles Risswachstum im ersten Korn bei gleichzeitig früher Aktivierung von Gleitebenen im Nachbarkorn nicht mehr aufgeholt wird, wenn im zweiten Korn eine höhere Risswachstumsgeschwindigkeit erreicht wird. Da jedoch das Diagramm der zyklischen Risspitzenableitung (Bild 4.2a) die Unterschiede zwischen den einzelnen betrachteten Fällen deutlicher zeigt und insbesondere die Vergleichbarkeit bei gleichen Risslängen gegeben ist, wird diese Darstellung im Folgenden verwendet.

Bei der in diesem Abschnitt erfolgten Simulation der Stadium I-Rissausbreitung wird die für kurze Ermüdungsrissse typische oszillierende Wachstumsgeschwindigkeit nachvollzogen. Es kann festgehalten werden, dass ein Riss in einem Korn größerer Steifigkeit schneller wächst und Gleitbänder in Nachbarkörnern bei geringerer Risslänge aktiviert werden als bei Lage des Risses in einem weniger steifen Korn. Eine weitere Untersuchung soll den Einfluss von innerhalb einzelner Körner auftretender Volumendehnung ermitteln und wird nachfolgend vorgestellt.

#### 4.1.2 Einfluss der Volumendehnung innerhalb einzelner Körner

Obwohl bei der Rissausbreitung im Stadium I nach dem in dieser Arbeit verwendeten Mechanismus der martensitischen Phasentransformation nicht mit der Bildung von Umwandlungsbereichen an der Rissspitze zu rechnen ist, kann ein Riss dennoch auf einen bereits zuvor – beispielsweise durch einsinnige Vorverformung – entstandenen Martensitbereich stoßen. Ebenso ist die Nachbildung von Eigenspannungen durch das Aufbringen einer zusätzlichen Dehnung vorstellbar, so dass die von der Volumendehnung ganzer Körner hervorgerufenen Effekte von praktischer Relevanz sind.

Für die Untersuchung des Einflusses dieser Dehnung wird das in Bild 4.3a dargestellte Gefüge verwendet, bei dem die Kornanordnung mit der vorherigen Studie übereinstimmt. Die Orientierungen der Körner rechts und links des mittleren sind jedoch unterschiedlich, so dass die möglichen Gleitebenen unter einem Winkel von  $60^\circ$  zur äußeren Beanspruchung liegen. Ebenso wie in der obigen Untersuchung befindet sich ein Riss auf einem Gleitband im mittleren Korn und die Ausdehnung der plastischen Zone ist zunächst auf dieses Korn beschränkt. Erst im Laufe des Risswachstums können die weiteren Gleitebenen aktiviert werden. Das gesamte Gefüge und die umgebende Scheibe besitzen die gleichen elastischen Eigenschaften; in den Körnern rechts und links des mittleren kann jedoch die Dehnung  $\varepsilon_M$  aufgebracht werden.

Wird das Risswachstum ohne Vorliegen einer Dehnung ( $\varepsilon_M = 0$ ) simuliert, stellen sich die in Bild 4.3b dargestellten zyklischen Rissspitzenabgleitungen ein, die im ersten Korn bis zur Aktivierung zusätzlicher Gleitebenen mit dem homogenen Fall der vorherigen Studie übereinstimmen (vgl. Bild 4.2a). Dies ist einsichtig, da vor der Aktivierung weiterer Gleitebenen die gleiche Konfiguration aus Riss, plastischer Zone und Korngeometrien vorliegt. Aufgrund der unter einem Winkel von  $60^\circ$  zur äußeren Beanspruchung etwas ungünstiger ausgerichteten Gleitebenen in den Nachbarkörnern findet deren Aktivierung erst bei größerer Risslänge statt, obwohl die hierfür erforderliche kritische Schubspannungsintensität aus den obigen Simulationen übernommen wurde. Es erfolgt der Sprung und anschließend ein leichtes Absinken von  $\Delta CTSD$ , da der Riss auf die ungünstiger orientierte Gleitebene wechselt.

Damit die plastische Zone die zweite Korngrenze überwindet, ist ebenfalls eine größere Risslänge erforderlich, bei der es zum erneuten Sprung in der zyklischen Rissspitzenabgleitung kommt. Überschreitet auch der Riss die Grenze, steigt  $\Delta CTSD$  erneut stark an, da er nun von der ungünstigeren auf die günstiger orientierte Gleitebene wechselt.

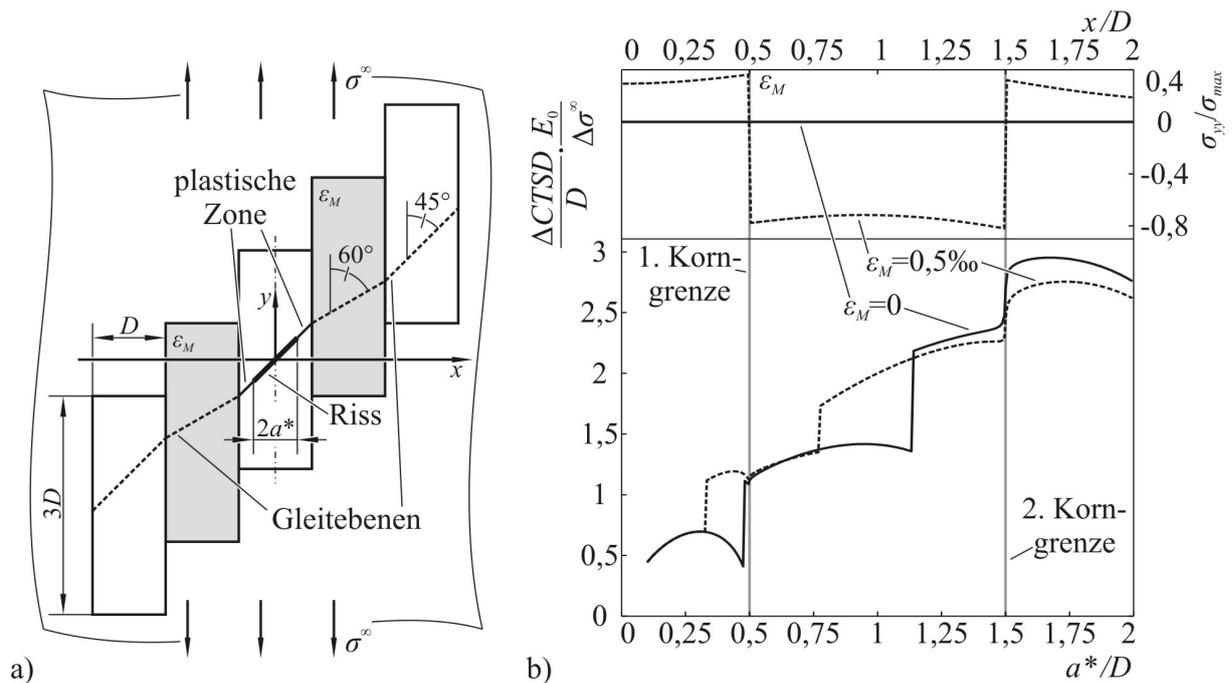


Bild 4.3: Einfluss der Volumendehnung in einzelnen Körnern auf die Rissspitzenabgleitung im Stadium I mit a) dem untersuchten Gefüge und b) dem normierten Normalspannungsverlauf entlang der x-Achse ohne äußere Beanspruchung sowie den berechneten Verläufen der normierten Rissspitzenabgleitung über dem Verhältnis  $a^*/D$ .

Durch das Zuweisen einer nur sehr geringen Dehnung von  $\varepsilon_M = 0,5\%$  stellt sich ohne äußere Beanspruchung ( $\sigma^\infty = 0$ ) der in Bild 4.3b dargestellte Normalspannungsverlauf  $\sigma_{yy}$  entlang der x-Achse ein. Er ist auf den Maximalwert  $\sigma_{max}$  der äußeren Spannung normiert, der während der zyklischen Belastung auftritt. Der schwingenden Beanspruchung überlagert sich somit die von der Volumendehnung hervorgerufene Spannung, die sich als Eigenspannung interpretieren lässt. Im mittleren Korn liegt eine zusätzliche Zugspannung von etwa 0,3- bis 0,4-facher äußerer Maximalspannung vor und die Nachbarkörner weisen eine sich überlagernde Druckspannung von 0,7- bis 0,8-facher Maximalspannung auf. Somit kann mit einem erheblichen Einfluss der Volumendehnung auf die Rissspitzenabgleitung gerechnet werden.

Tatsächlich weisen der höchste und niedrigste Wert von CTSD im Vergleich zum volumendehnungsfreien Fall große Unterschiede auf. Solange die plastische Zone auf das Gleitband im mittleren Korn beschränkt ist, gibt es jedoch keine Abweichungen in der Differenz aus Maximal- und Minimalwert und die zyklische Rissspitzenabgleitung stimmt mit dem ersten berechneten Fall überein. Die aus der Volumendehnung resultierende zusätzliche Zugspannung führt dagegen zu einer früheren Aktivierung von Gleitebenen in den Nachbarkörnern.

Werden diese vom Riss durchlaufen, kommt es in ihnen zu  $\Delta CTSD$ -Werten, die sich nicht stark vom Fall  $\varepsilon_M = 0$  unterscheiden.

Erst wenn der Riss in den äußersten Körnern wächst, ist ein größerer Unterschied festzustellen: Durch den nicht geradlinigen Risspfad kommt es – auch ohne Volumendehnung – zu geometrischem Risssschließen. Die zusätzliche Dehnung verstärkt diesen Effekt jedoch, so dass nach dem ersten Knick im Risspfad ein leichter und nach dem zweiten ein größerer Unterschied in der zyklischen Rissspitzenabgleitung zu erkennen ist. In einer vergleichenden Simulation beider hier gezeigter Fälle ( $\varepsilon_M = 0$  und  $\varepsilon_M = 0,5\%$ ) mit geradlinigem Risspfad (vgl. Bild 4.1a) treten keine geometrischen Risssschließeffekte und damit auch keine Unterschiede in den  $\Delta CTSD$ -Kurven auf, so dass auf ihre Darstellung verzichtet wird. Lediglich die Aktivierung von Gleitbändern in den Nachbarkörnern erfolgt bei niedrigeren Risslängen. Die frühere Überwindung der Grenze durch die plastische Zone sowohl beim Hineinlaufen in einen Bereich mit Volumendehnung als auch beim Austreten aus einem solchen Bereich erklärt sich dadurch, dass die Aktivierung von Gleitbändern im einen Fall bei äußerer Druck- und im anderen bei Zugbelastung erfolgt, der sich jeweils die Druck- oder Zugspannung der Volumendehnung überlagert.

Zusammenfassend wurde in diesem Abschnitt erkannt, dass die Volumenzunahme ganzer Gefügekörner nur dann einen Einfluss auf die zyklische Rissspitzenabgleitung ausübt, wenn geometrische Risssschließeffekte vorliegen. Diese werden dann gegenüber dem Risswachstum ohne Volumenzunahme verstärkt. Außerdem bewirkt die von der Volumenzunahme verursachte Spannung, die sich dem Spannungsfeld der Gleitbänder überlagert, eine frühere Aktivierung von Gleitbändern in benachbarten Körnern.

Mit zunehmender Risslänge nimmt die Spannungsintensität an der Spitze des Risses zu und es kann eine zweite Gleitebene aktiviert werden. Dieser Übergang von der Stadium I- auf die mikrostrukturbestimmte Stadium II-Rissausbreitung wird von Künkler (2007) ausführlich behandelt und hier nicht betrachtet. Die Beeinflussung des Risswachstums mit zwei aktiven Gleitbändern an der Risspitze durch unterschiedliche Steifigkeiten der Körner und der Volumendehnung wird dagegen im folgenden Abschnitt untersucht.

## 4.2 Rissausbreitung im mikrostrukturbestimmten Stadium II

### 4.2.1 Einfluss unterschiedlicher elastischer Eigenschaften der Körner

Die Untersuchung des Einflusses unterschiedlicher elastischer Eigenschaften der Körner auf das Risswachstum mit zwei an der Rissspitze aktiven Gleitbändern erfolgt anhand des in Bild 4.4a dargestellten Gefüges. Es besteht aus fünf nebeneinander angeordneten rechteckigen Körnern, von denen das mittlere einen unter reiner Modus I-Beanspruchung liegenden Riss aufweist. Zwischen jeder Rissspitze und der ersten Korngrenze befinden sich zwei aktive Gleitbänder, die einen Winkel von  $45^\circ$  zur äußeren Beanspruchung aufweisen. In den anderen Körnern liegen mögliche Gleitebenen vor, deren Gleitspuren an der Oberfläche in die gleiche Richtung zeigen. Ihre Aktivierung erfolgt während der Rissausbreitungssimulation.

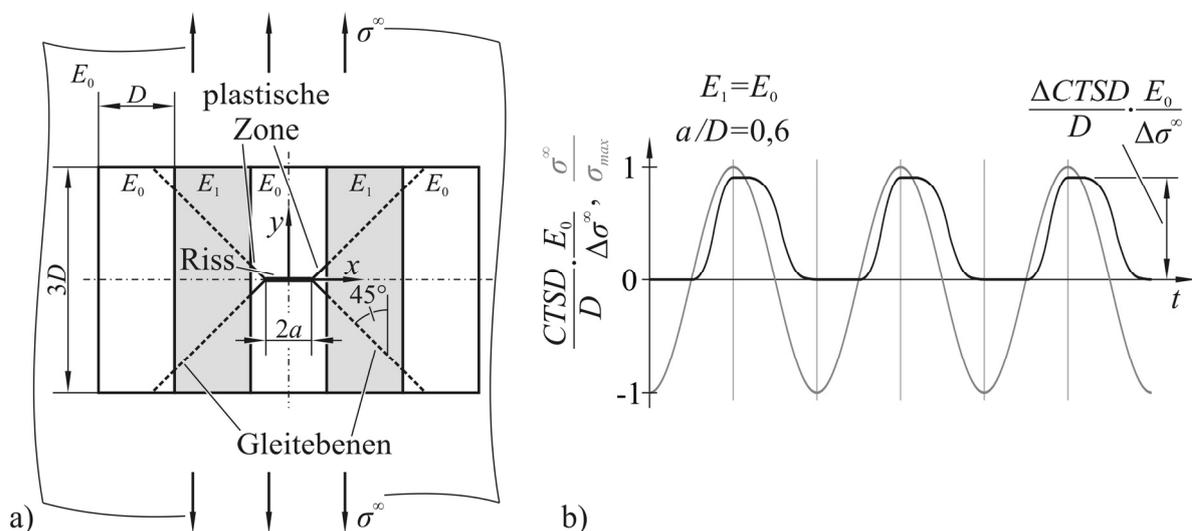


Bild 4.4: Einfluss unterschiedlicher elastischer Korneigenschaften auf die Rissspitzenabgleitung im mikrostrukturbestimmten Stadium II mit a) dem untersuchten Gefüge und b) dem zeitlichen Verlauf der normierten Rissspitzenabgleitung bei sinusförmiger äußerer Beanspruchung  $\sigma^\infty$  für  $a/D=0,6$  und  $E_1 = E_0$ .

Der im Vergleich zur Korngröße sehr kurze Anfangsriss würde in der Realität zwar nur auf einem Gleitband wachsen, die grundlegenden Auswirkungen individueller elastischer Eigenschaften lassen sich jedoch auch an diesem Riss zeigen, bei dem das Risswachstum mit zwei aktiven Gleitbändern vorgegeben wird. Damit die plastische Zone die erste Korngrenze überwindet, wird die hierfür erforderliche Spannungssingularität gegenüber den vorhergehenden Simulationen vermindert, so dass auf einer Gleitebene im Nachbarkorn im Abstand  $r_0 = 2/100 \cdot D$  von der Grenze eine kritische Schubspannung von  $\tau^c = 3\tau^F$  erreicht werden muss (zuvor  $\tau^c = 4\tau^F$ ). Alle anderen werkstofftechnischen Konstanten bleiben unverändert.

Das hier beschriebene und in Bild 4.4a dargestellte Gefüge wird auch für spätere Simulationen in Abschnitt 4.3 verwendet.

In dem modellierten Gefüge weisen die Körner links und rechts des mittleren den Elastizitätsmodul  $E_1$  auf, der von der Elastizität  $E_0$  der übrigen Körner und der umliegenden Scheibe abweichen kann. Unter der zyklischen Beanspruchung  $\sigma^\infty$  mit dem Spannungsverhältnis  $R = -1$  erfolgt die Risswachstumssimulation ausgehend von der kurzen Anfangsrisslänge  $2a = 0,2 \cdot D$ . Durch die Symmetrie des Rissproblems ergibt sich, dass die Rissausbreitung senkrecht zur äußeren Beanspruchungsrichtung und an beiden Rissenden gleich schnell erfolgt.

Zur Quantifizierung des Risswachstums wird die resultierende Rissspitzenabgleitung *CTSD* berechnet. Dies erfolgt entsprechend des Modells von Künkler (2007) durch vektorielle Addition der Ableitungen auf den beiden Gleitebenen an der Rissspitze (vgl. Abschnitt 2.5.1, Bild 2.12b). Ihr normierter zeitlicher Verlauf während dreier sinusförmiger Beanspruchungszyklen (äußere Spannung  $\sigma^\infty$ ) ist in Bild 4.4b beispielhaft dargestellt. Der Riss mit der Länge  $a = 0,6D$  liegt hierbei in einer homogenen Scheibe ( $E_1 = E_0$ ). Es ist zu erkennen, dass die Rissspitzenabgleitung keine negativen Werte annimmt. Dies wird durch das Aufsetzen der Rissufer verursacht, das eine untere Grenze für *CTSD* darstellt, die hier bei null liegt. (In Abschnitt 4.3 wird gezeigt, dass sich diese Grenze bei Vorliegen von martensitischer Phasenumwandlung an der Rissspitze nach oben verschiebt.)

Beim Maximalwert der Rissspitzenabgleitung zeigt sich ein Plateau, da die plastischen Verformungen der Gleitebenen zunächst erhalten bleiben, wenn die äußere Zugspannung vom größten Wert aus reduziert wird. Erst wenn die Beanspruchung weit genug zurückgegangen ist, wird die Fließschubspannung erneut überschritten. Dadurch kommt es zur Rückgleitung auf den Gleitebenen und die Rissspitzenabgleitung verlässt das Plateau nach unten. Die Spannbreite des *CTSD*-Verlaufs ergibt die zyklische Rissspitzenabgleitung  $\Delta CTSD$ , die die Risswachstumsgeschwindigkeit bestimmt.

In einer ersten Simulation weisen alle Körner den gleichen Elastizitätsmodul auf ( $E_1 = E_0$ ). Das Risswachstum findet somit in einer homogenen Scheibe statt, in der die Korngrenzen die Ausdehnung der plastischen Zone begrenzen. Ausgehend von der geringen Anfangsrisslänge steigen zunächst die in Bild 4.5 dargestellten Werte der zyklischen Rissspitzenabgleitung mit zunehmender Risslänge. Sie erreichen jedoch ein Maximum und vermindern sich dann, da die plastische Deformation entlang der Gleitbänder von der ersten Korngrenze blockiert wird. Mit

dem Erreichen der kritischen Spannungsintensität auf den möglichen Gleitbändern in den Nachbarkörnern überwindet die plastische Zone die Barriere, was zunächst einen Sprung und dann eine weitere Zunahme von  $\Delta CTSD$  hervorruft. Nach weiterem Risswachstum kommt es zur zusätzlichen Aktivierung der Gleitebenen in den äußersten Körnern, wodurch die zyklische Risspitzenabgleitung erneut erst sprunghaft und danach stetig steigt, bis die Barrierewirkung der äußeren Korngrenzen die Abgleitung in der plastischen Zone behindern. Wie bereits bei der Stadium I-Rissausbreitung liegt damit auch beim Risswachstum im mikrostrukturbestimmten Stadium II eine oszillierende Risswachstumsrate vor.

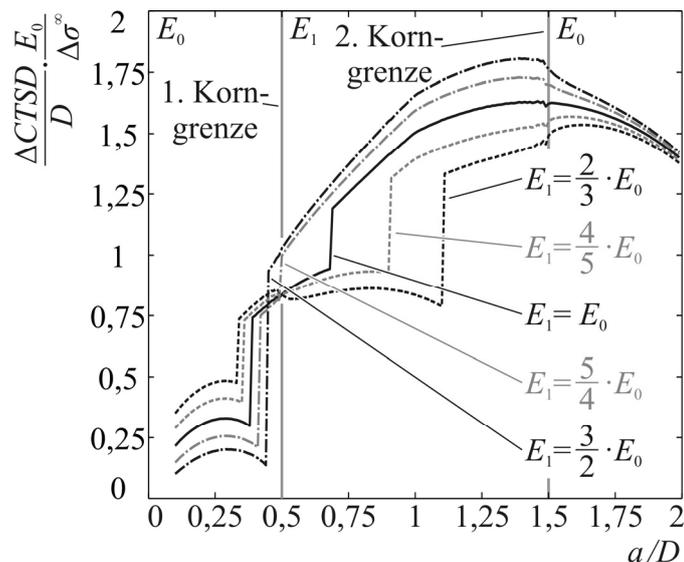


Bild 4.5: Simuliertes Risswachstum im mikrostrukturbestimmten Stadium II mit den berechneten Verläufen der normierten Risspitzenabgleitung über dem Verhältnis  $a/D$ .

Die Variation der Elastizitätsmoduln in den Körnern rechts und links des mittleren wirken sich qualitativ in gleicher Weise auf das Risswachstum aus, wie bei der oben berechneten Stadium I-Rissausbreitung. Sind diese Körner weniger steif als das restliche Gefüge und die umgebende Scheibe, überwindet die plastische Zone die erste Korngrenze bei kürzerer und die zweite bei größerer Risslänge. Im ersten Korn ist die zyklische Risspitzenableitung größer als im homogenen Fall; im zweiten und dritten Korn liegt sie bei kleineren Werten. Höhere Steifigkeiten in den Körnern rechts und links des mittleren bewirken das gegenteilige Ergebnis.

Wie beim Risswachstum im Stadium I lässt sich aus der Untersuchung der mikrostrukturbestimmten Rissausbreitung im Stadium II resümieren, dass das Risswachstum in Körnern mit niedriger Steifigkeit mit geringerer zyklischer Risspitzenabgleitung verbunden ist als beim

Wachstum in steiferen Körnern. Das Überwinden einer Korngrenze durch die plastische Zone erfolgt bei geringerer Risslänge, wenn der Riss in einem steifen Korn liegt und bei größerer Risslänge, wenn er in einem Korn niedrigerer Steifigkeit liegt.

Die langsamere Rissausbreitung in Körnern geringer Steifigkeit liegt in Übereinstimmung mit experimentellen Ergebnissen von Blochwitz et al. (2008): Die Autoren stellen bei risstragenden Körnern, deren kristallographische  $\langle 100 \rangle$ -Richtung etwa in die Beanspruchungsachse weisen, ein verlangsamtes Risswachstum fest. Dies widerspricht ihrer Erwartung, denn sie sehen diese Kornorientierung als besonders förderlich für das mikrostrukturbestimmte Stadium II-Risswachstum an, da die aktiven Gleitbänder hierbei bezüglich des Risses symmetrisch angeordnet sind. Als Ursache identifizieren sie die geringe Steifigkeit der  $\langle 100 \rangle$ -Richtung im Kristall, die den erwarteten Effekt überkompensiert. Dies unterstreicht, dass sich unter Einbeziehung der individuellen Steifigkeiten der Gefügekörner in Zugrichtung Effekte aufdecken und untersuchen lassen, die bei homogen angenommener Elastizität des Gefüges gegenteilig berechnet würden.

Im vorangegangenen Abschnitt konnte bei der Untersuchung des Einflusses der Volumendehnung auf das Risswachstum im Stadium I lediglich eine geringe Verminderung der zyklischen Riss Spitzenabgleitung festgestellt werden, die auf die Verstärkung von Riss schließvorgängen zurückzuführen ist. Da Riss schließeffekte bei der Stadium II-Rissausbreitung eine wesentlich größere Rolle spielen, wird im folgenden Kapitel untersucht, ob die Volumendehnung hier einen größeren Effekt bewirkt.

#### 4.2.2 Einfluss der Volumendehnung innerhalb einzelner Körner

Im mikrostrukturbestimmten Stadium II-Risswachstum wird die Abgleitung entlang der aktiven Gleitebenen bei geschlossenem Riss behindert. Bei Ausbreitung in Körnern mit Volumendehnung ist dieser somit über einen größeren Teil des Beanspruchungszyklus geschlossen, so dass in diesem Fall mit einer starken Beeinflussung der Abgleitung an der Riss spitze durch Riss schließvorgänge zu rechnen ist.

Um diesen Schluss zu bestätigen, werden Simulationen des Risswachstums in dem in Bild 4.6a dargestellten Gefüge durchgeführt, das mit dem aus Bild 4.4a identisch ist, jedoch weisen hier alle Körner die gleiche Steifigkeit auf, während in den Körnern rechts und links des mittleren die zusätzliche Dehnung  $\varepsilon_M$  aufgebracht werden kann.

Die unter zyklischer Beanspruchung bei unterschiedlichen Dehnungen  $\varepsilon_M$  auftretenden normierten Verläufe der zyklischen Rissspitzenabgleitung sind in Bild 4.6b über dem Verhältnis  $a/D$  dargestellt. Wird keine Volumendehnung aufgebracht ( $\varepsilon_M = 0$ ), liegt der homogene Fall ( $E_1 = E_0$ ) der vorhergehenden Simulationen vor, deren Ergebnis hier zum Vergleich wiederholt wird.

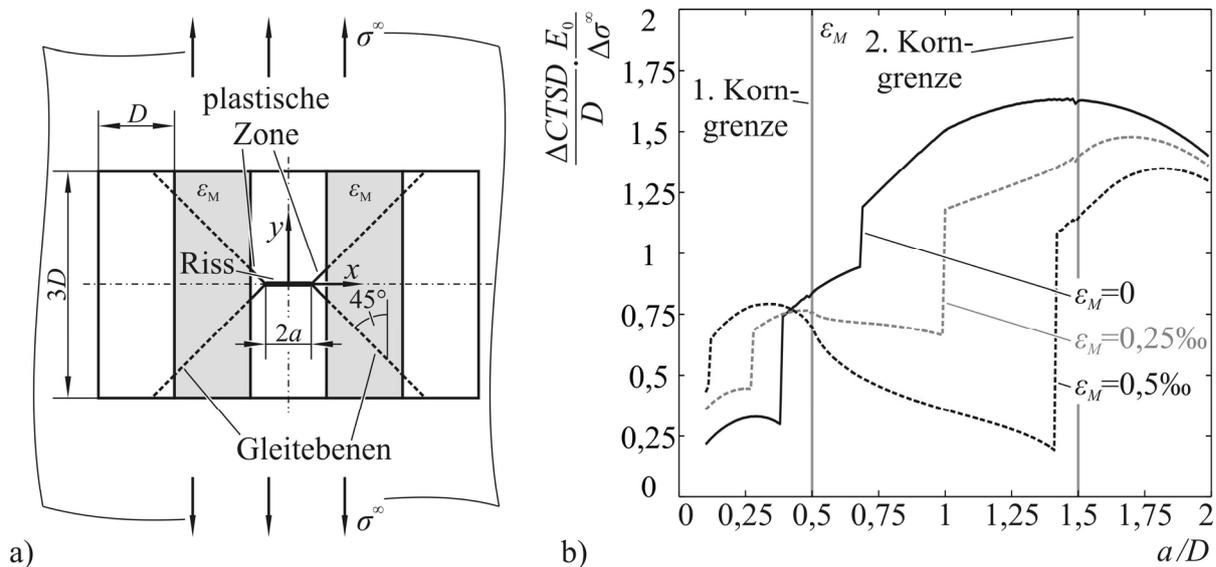


Bild 4.6: Einfluss der Volumendehnung in einzelnen Körnern auf die Rissspitzenabgleitung im mikrostrukturbestimmten Stadium II mit a) dem untersuchten Gefüge und b) den berechneten Verläufen der normierten Rissspitzenabgleitung über dem Verhältnis  $a/D$ .

Die Berechnung der zyklischen Rissspitzenabgleitung unter dem Einfluss von Volumendehnung zeigt bereits bei sehr geringer Dehnung von  $\varepsilon_M = 0,25\text{‰}$  einen deutlich veränderten Verlauf über dem Verhältnis  $a/D$  aus halber Risslänge und Kornbreite. Während des Rissswachstums im mittleren Korn, in dem die Volumendehnung eine Zugspannung verursacht, liegen höhere  $\Delta CTSD$ -Werte vor und die Aktivierung von Gleitebenen in den Nachbarkörnern erfolgt bei geringerer Risslänge. Nachdem der Riss die erste Korngrenze überschreitet, wirken sich überlagerte Druckspannungen auf die plastischen Deformationen an der Rissspitze aus, die eine erhebliche Verringerung der zyklischen Rissspitzenabgleitung hervorrufen. Bevor Gleitebenen in den äußeren Körnern aktiviert werden, was bei größerer Risslänge erfolgt, nimmt diese trotz wachsenden Risses ab. Danach steigt  $\Delta CTSD$  wieder an und strebt in den äußeren Körnern gegen den homogenen Verlauf. Eine Steigerung der Dehnung  $\varepsilon_M$  auf  $0,5\text{‰}$  verstärkt diese Effekte.

Bei der Rissausbreitung im Stadium I bewirkt die Volumendehnung eine Überwindung der Korngrenzen durch die plastische Zone bei kürzeren Risslängen – sowohl beim Eintreten in als auch beim Austreten aus einem Korn mit zusätzlicher Dehnung. Im Gegensatz hierzu wird in diesem Abschnitt festgestellt, dass dies bei Stadium II-Rissausbreitung nur beim Eintritt der Fall ist, während zum Austritt eine größere Risslänge erforderlich ist. Außerdem wirken sich die überlagerten Druckspannungen direkt auf die zyklische Risspitzenableitung aus und führen zu deren deutlichen Verringerung.

Dass die Volumendehnung ganzer Körner bereits bei sehr kleinen Dehnungen starke Auswirkungen auf die Deformationen an der Risspitze haben, lässt auf eine ebenfalls starke Beeinflussung der zyklischen Risspitzenabgleitung schließen, auch wenn die martensitische Transformationszone nur lokal an der Risspitze auftritt. Hierbei sind zwar die betreffenden Bereiche kleiner, die Volumendehnungen jedoch erheblich größer ( $\Delta V/V = 2,57\%$ , Padilha und Rios 2002). Im nächsten Abschnitt erfolgt daher eine umfangreiche Untersuchung der Einflüsse der martensitischen Phasentransformation auf die zyklische Risspitzenabgleitung.

### **4.3 Rissausbreitung unter dem Einfluss martensitischer Phasentransformation an der Risspitze**

Erfolgt das mikrostrukturbestimmte Stadium II-Risswachstum in einem metastabilen austenitischen Edelstahl, kommt es lokal an der Risspitze zur martensitischen Phasentransformation. Die von ihr verursachten Auswirkungen auf die Rissausbreitung werden in diesem Kapitel anhand einiger Simulationsbeispiele untersucht. Bei ihnen wird das Wachstum von Rissen nachgebildet, die unter Modus I-Beanspruchung in einem Gefüge liegen (vgl. Bild 4.4a und Bild 4.6a). Diese Beanspruchung ist realistisch, da Roth (2012) das Wachstum dieser Kurzrisse meist senkrecht zur äußeren Beanspruchungsrichtung beobachtet. Der Martensitbildung liegen dabei die in Abschnitt 3.1.2 entwickelten Mechanismen zugrunde. Mit dem Ziel, die Interpretation der erhaltenen Ergebnisse zu erleichtern und einen Vergleich mit Risswachstumsberechnungen ohne Phasentransformation zu ermöglichen, werden jedoch die folgenden Vereinfachungen des Bildungsmechanismus vorgenommen:

Es soll angenommen werden, dass der in die neue Phase umgewandelte Werkstoff eine Orientierung aufweist, die ein Risswachstum senkrecht zur äußeren Beanspruchung erlaubt. Der Riss unterliegt damit auch nach Verlängerung weiterhin einer Modus I-Beanspruchung.

Bei der oben vorgestellten Modellbildung der martensitischen Umwandlung wird davon ausgegangen, dass auf dem ersten der sich hierbei kreuzenden Gleitsysteme eine Abgleitung von

einer Drittel-Partialversetzung  $T$  und einer halben auf dem zweiten System zur Phasentransformation erforderlich ist (Bogers und Burgers 1964). Damit das Rissproblem symmetrisch bleibt, soll nachfolgend der Mittelwert dieser Verschiebungen für beide Ebenen verwendet werden. Zwar ändert sich hierdurch die Form des Umwandlungsbereiches, seine Größe wird aber nur geringfügig beeinflusst, so dass die grundsätzlichen Auswirkungen seiner Volumendehnung studiert werden können.

Im folgenden Abschnitt wird zunächst der Einfluss der Größe der Volumendehnung auf das Risswachstum untersucht.

#### 4.3.1 Einfluss der Volumendehnung des umgewandelten Werkstoffs

Um die Auswirkungen der Volumenzunahme der sich beim Risswachstum bildenden Martensitphase zu ermitteln, wird ein Riss in dem einfachen Gefüge betrachtet, das in Bild 4.4a dargestellt ist. Für die nachfolgenden Untersuchungen weisen alle Körner und die umliegende große Scheibe die gleichen elastischen Eigenschaften auf ( $E_1 = E_0$ ). Mögliche Gleitebenen liegen bei allen Körnern in einem Winkel von  $45^\circ$  zur äußeren Beanspruchungsrichtung vor, wobei zunächst nur die im mittleren Korn aktiv sind. Während der Rissausbreitungssimulation werden die Abgleitungen auf den zahlreichen parallelen Gleitebenen, die bei der martensitischen Umwandlung auftreten, zu zwei repräsentativen Gleitbändern je Rissspitze zusammengefasst (vgl. Bild 4.7a).

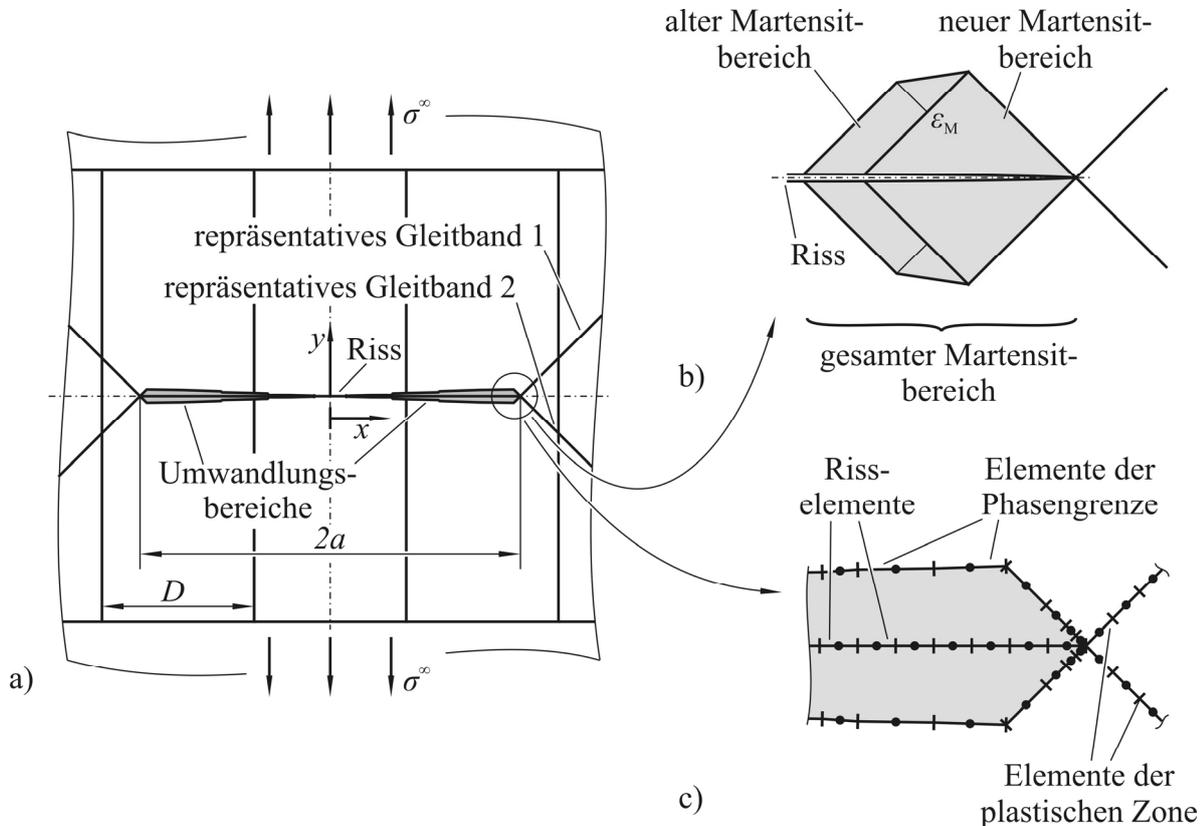
Zur Berechnung der Größe des Umwandlungsbereiches wird auf jeder Einzelebene die Abgleitung von  $5/12$  einer Partialversetzung  $T$  zugelassen, deren Verschiebungslänge mit einem in der Größenordnung realer Gefüge liegenden Wert von  $T = 0,06 \cdot 10^{-6} D$  berücksichtigt

wird. Bei dem Bruchteil  $5/12T = \left( \frac{1/2T + 1/3T}{2} \right)$  handelt es sich um den oben berechneten

Mittelwert der im Modell von Bogers und Burgers (1964) verwendeten Bruchteile von  $1/2$  und  $1/3$  der Partialversetzungen  $T$ . Der mittlere Abstand zwischen den entsprechenden Gleitebenen wird mit  $d = 1 \cdot 10^{-6} D$  angenommen.

Während der Rissausbreitung bilden sich entlang des Risses schlanke Umwandlungsbereiche, die in Bild 4.7a maßstäblich in das Gefüge eingezeichnet sind. In jedem Berechnungsschritt ergibt sich durch den Winkel zwischen den Gleitebenen von  $90^\circ$  ein quadratischer Martensitbereich (Bild 4.7b), der an die Rissspitze angesetzt wird und sich dem bestehenden Bereich überlagert. Die Gebiete werden miteinander verknüpft und die am weitesten vom Riss entfernten Punkte des vorhergehenden und des aktuellen Rechenschrittes miteinander verbunden,

um den neuen Umwandlungsbereich zu erhalten. Bild 4.7c zeigt die Diskretisierung eines so entstandenen Martensitbereichs, wobei die Phasengrenze umso feiner vernetzt ist, je näher sie den Elementen des Risses und der Gleitebenen ist.

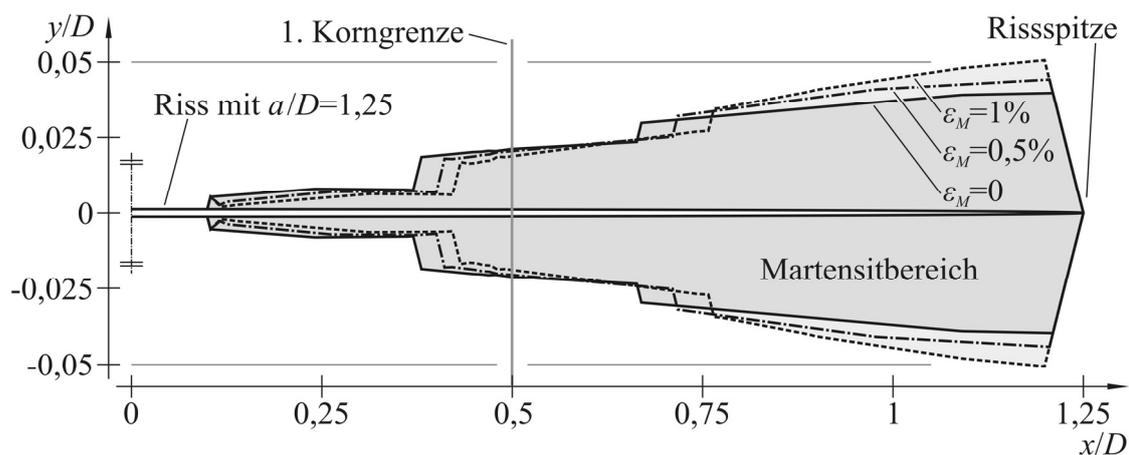


*Bild 4.7: Bildung und Diskretisierung der Martensitphase mit a) dem Umwandlungsbereich entlang eines gewachsenen Risses, b) dem Zusammenfügen eines bestehenden mit einem neuen Martensitbereich und c) der Vernetzung der Umwandlungszone.*

Der Einfluss der Volumendehnung im umgewandelten Werkstoff auf die zyklische Risspitzenableitung wird in mehreren Risswachstumssimulationen ermittelt, in denen die Dehnung  $\epsilon_M$  die Werte 0, 0,5% und 1% annimmt. Dabei betragen die zugehörigen Volumendehnungen  $\Delta V/V \approx 0, 1,5\%$  und 3%. Zwar sollte das Risswachstum im ersten Fall ohne Dehnung von der Bildung des Umwandlungsbereiches unbeeinflusst sein, die Simulation wird aber dennoch durchgeführt, um einen Einfluss der Vernetzung der umgewandelten Phase auszuschließen. (Der umgewandelte Werkstoff behält in diesen Simulationen die Steifigkeit der Ausgangsphase bei. Der Einfluss des Elastizitätsmoduls der Transformationszone auf die Rissausbreitung wird in Abschnitt 4.3.4 untersucht.)

Da die Volumendehnung das Spannungs- und damit auch das Verschiebungsfeld an der Risspitze beeinflussen, können sich während des Risswachstums unter Berücksichtigung der ver-

schiedenen Dehnungswerte unterschiedlich große Transformationszonen bilden. Die Konturen der Umwandlungsbereiche, die bei Abschluß der Simulationen der Rissausbreitung bis zu einer halben Risslänge von  $a = 1,25D$  vorliegen, sind in Bild 4.8 vergrößert dargestellt, wobei die Breite stärker vergrößert ist als die Länge. Die Größe der Martensitbereiche nimmt bei allen Dehnungswerten von der Rissmitte bis zur -spitze zu. Dies liegt darin begründet, dass die plastische Zone an der Risspitze während der Bildung des Martensits größer geworden ist, was aus der zunehmenden Spannungsintensität bei wachsender Risslänge resultiert. Auffällig sind die beiden Sprünge in der Breite des Martensitbereiches, die auf die Aktivierung von zusätzlichen Gleitbändern in benachbarten Körnern zurückzuführen sind. Sie verursachen eine sprunghafte Verlängerung der Gleitebenen an der Risspitze und lassen damit mehr plastische Verformung zu. Vor dem ersten Sprung in der Breite des Martensitbereichs ist bei ihm eine leichte Einschnürung festzustellen, die aus der Behinderung der plastischen Deformation durch die Korngrenze zurückzuführen ist. Qualitativ verhält sich die Breite des Martensitbereiches damit ähnlich der zyklischen Risspitzenablenkung, die in Bild 4.9b dargestellt ist.



*Bild 4.8: Konturen der Martensitbereiche entlang eines gewachsenen Risses bei unterschiedlichen Dehnungen  $\varepsilon_M$  der Umwandlungszone in vergrößerter Darstellung (die Breite der Umwandlungsbereiche ist stärker vergrößert als die Länge).*

Wird dem Martensit, der sich während des Risswachstums bildet, eine Volumendehnung aufgeprägt, überlagert sich das hieraus resultierende Spannungsfeld mit dem der Risspitze. Bei kurzen Risslängen, bei denen ohnehin nur wenig Werkstoff umgewandelt wird, entsteht dadurch in beiden Varianten mit Dehnung eine etwas schmalere Transformationszone als im Fall ohne Dehnung ( $\varepsilon_M = 0$ ). Lediglich während des ersten Rechenschrittes wird ein Martensitbereich berechnet, dessen Breite dem des dehnungsfreien Falls entspricht (da die Anfangsbedingungen gleich sind). Bei größerer Risslänge, bei der viel Werkstoff umgewandelt wird,

kommt es zu einer moderaten Verbreiterung der Transformationszone, die etwas deutlicher ausfällt, wenn die Dehnung  $\varepsilon_M$  größer ist. Zudem findet die Aktivierung von Gleitbändern in den Nachbarkörnern bei etwas größeren Risslängen statt.

Die Volumenzunahme der Transformationsbereiche beeinflusst die Rissspitzenabgleitung  $CTSD$ , deren zeitlicher Verlauf während dreier sinusförmiger Beanspruchungszyklen in Bild 4.9a dargestellt ist. Hier beträgt die äußere Spannung  $\sigma^\infty$  und die halbe Risslänge  $a = 0,6D$ . Im Falle  $\varepsilon_M = 0$  ist der Verlauf von  $CTSD$  identisch mit dem in Abschnitt 4.2.1 berechneten, bei dem keine Phasenumwandlung berücksichtigt wurde. Er weist eine untere Grenze von null auf, die durch das Aufsetzen der Rissufer gesetzt ist. Bereits die geringe Dehnung  $\varepsilon_M = 0,5\%$  des Martensitbereiches führt dazu, dass der Riss auch bei positiver äußerer Beanspruchung geschlossen sein kann. Die untere Grenze der Rissspitzenabgleitung verschiebt sich dadurch sichtbar nach oben. Die Dehnung  $\varepsilon_M = 1\%$  verstärkt diesen Effekt so weit, dass die kleinsten  $CTSD$ -Werte in diesem Beispiel nicht unter etwa die Hälfte ihres Maximalwertes fallen.

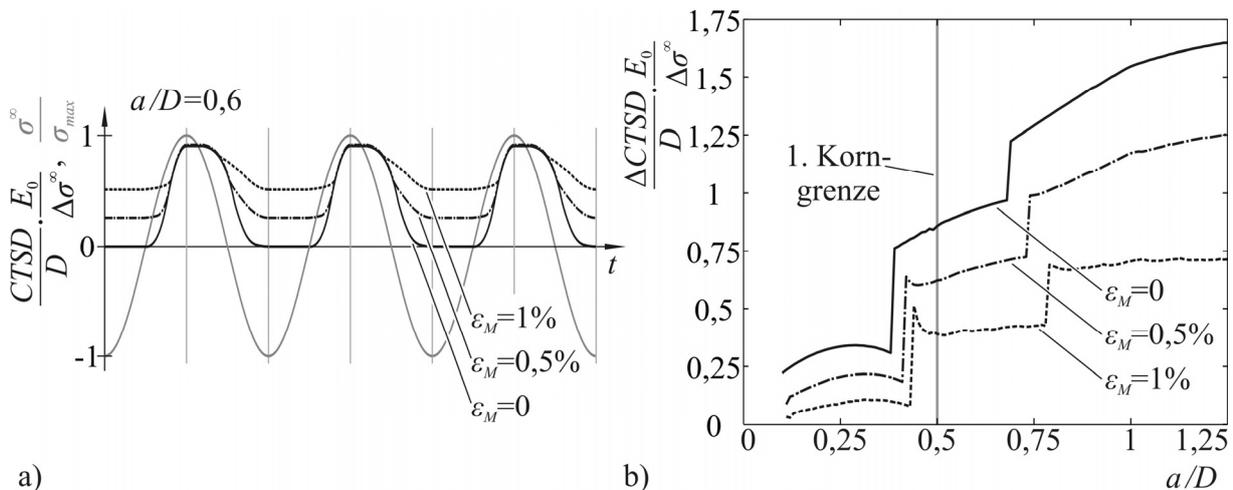


Bild 4.9: Einfluss der Volumenzunahme im Umwandlungsgebiet auf a) den zeitlichen Verlauf der normierten Rissspitzenabgleitung bei sinusförmiger äußerer Beanspruchung  $\sigma^\infty$  für  $a/D = 0,6$  und b) die zyklische Rissspitzenabgleitung.

Die Beeinflussung der Rissspitzenabgleitung durch die Volumendehnung der Martensitbereiche spiegelt sich in gleicher Weise in deren Schwingbreite  $\Delta CTSD$  wider, die in Bild 4.9b für die unterschiedlichen Dehnungen  $\varepsilon_M$  dargestellt sind. Ohne Vorliegen einer Volumenzunahme ( $\varepsilon_M = 0$ ) ist keine Abweichung ihres Verlaufes zu dem des homogenen Falls der Stadium II-Rissausbreitung (vgl. Abschnitt 4.2.1,  $E_1 = E_0$ ) sichtbar, so dass auf deren Darstellung in

Bild 4.9b verzichtet wird. Es wird bestätigt, dass sich die Vernetzung der neuen Phase nur äußerst gering auf die zyklische Rissspitzenabgleitung auswirkt.

Tritt jedoch eine Volumendehnung auf, vermindert sich infolge des transformationsinduzierten Rissschließens die zyklische Rissspitzenabgleitung. Dies führt im Falle der großen Dehnung ( $\varepsilon_M = 1\%$ ) so weit, dass der  $\Delta CTSD$ -Verlauf ab dem Verhältnis  $a/D = 0,5$  trotz wachsender Risslänge nahezu konstant ist. Er springt erst bei weiterer Rissausbreitung infolge der Aktivierung zusätzlicher Gleitebenen in den äußersten Körnern auf einen höheren, ebenfalls konstanten Wert. Durch die mit wachsender Risslänge zunehmende plastische Deformation an der Rissspitze erhöht sich der Maximalwert der Rissspitzenabgleitung unter Zugbeanspruchung. Da hierdurch aber auch die Breite der Transformationszone zunimmt, verstärken sich die Rissschließeffekte, so dass die minimale Rissspitzenabgleitung ebenfalls zunimmt. Die Differenz  $\Delta CTSD$  zwischen beiden Werten bleibt somit etwa gleich. Im Falle der geringeren Dehnung von  $\varepsilon_M = 0,5\%$  treten die gleichen Effekte in abgeschwächter Form auf.

Auffällig ist das Absinken der zyklischen Rissspitzenabgleitung im Anschluss an den Sprung in der  $\Delta CTSD$ -Kurve, der von der Überwindung der ersten Korngrenze durch die plastische Zone verursacht wird. Zwar führt die Aktivierung der zusätzlichen Gleitebenen im Nachbarkorn zu einer größeren Ausdehnung des plastischen Bereichs an der Rissspitze, was einen breiteren Martensitbereich hervorruft. Er gewinnt jedoch erst allmählich an Wirkung auf die zyklische Rissspitzenabgleitung, wenn seine Ausdehnung entlang des Risses zunimmt. Nach der Überwindung der zweiten Korngrenze durch die plastische Zone ist dieser Effekt weit weniger stark ausgeprägt als nach Durchdringung der ersten Grenze, da die relative Breitenzunahme der Transformationszone hierbei geringer ausfällt.

Zusammenfassend zeigt dieser Abschnitt, dass die experimentell beobachtete Verringerung der Risswachstumsgeschwindigkeit durch die Phasenumwandlung von dem in dieser Arbeit entwickelten numerischen Modell nachvollzogen werden kann. Sie lässt sich auf die Volumenzunahme des Umwandlungsgebietes zurückführen, wobei der Dehnungswert einen starken Einfluss auf die zyklische Rissspitzenabgleitung darstellt, die die Risswachstumsrate bestimmt. Die Rückwirkung der in den Umwandlungsbereichen auftretenden Dehnung auf die weitere Martensitbildung ist gering, so dass die Breite der Transformationszone bei unterschiedlichen Volumenzunahmen ähnlich ist.

Es ist zu erwarten, dass neben der Größe der Volumendehnung im Martensitbereich auch dessen Breite eine Auswirkung auf die Rissausbreitungsgeschwindigkeit hat, so dass dieser Einfluss im nachfolgenden Abschnitt untersucht wird.

#### 4.3.2 Einfluss der Größe des Transformationsbereichs

Durch die Legierungszusammensetzung eines metastabilen austenitischen Edelstahls kann dessen Stabilität und somit dessen Neigung zur Phasentransformation beeinflusst werden, wodurch bei gleicher mechanischer Beanspruchung unterschiedlich große Umwandlungsbereiche entstehen. Zusätzlich wirkt sich die Temperatur, bei der die Ermüdung stattfindet, auf die Martensitbildung aus.

Im Modell lässt sich die Größe der sich bildenden Transformationszone durch den Parameter  $d$  beeinflussen, der den mittleren Abstand der aktiven parallelen Gleitebenen an der Rissspitze berücksichtigt. Das Gefüge, in dem die Auswirkungen einer Variation dieses Modellparameters untersucht werden, ist in Bild 4.10a dargestellt und wurde bereits für die oben vorgestellten Simulationen verwendet (vgl. Bild 4.4a). Während jedoch zuvor unterschiedliche Steifigkeiten der Gefügekörner berücksichtigt wurden, weisen nun alle Körner die gleiche Steifigkeit  $E_0$  auf. Das Risswachstum wird unter Modus I-Beanspruchung simuliert, wobei für den Parameter  $d$  unterschiedliche Werte gewählt werden; die Dehnung im Umwandlungsbereich beträgt jedoch in allen Fällen  $\varepsilon_M = 0,5\%$ .

Die Varianten zeigen in den in Bild 4.10b dargestellten Verläufen der zyklischen Rissspitzenableitungen große Unterschiede, die auf die verschiedenen Breiten der sich im Laufe des Risswachstums bildenden Transformationsbereiche zurückzuführen sind. Die Konturen der Martensitbereiche, die sich bis zu einer Risslänge von  $a = 1,25D$  gebildet haben, sind in Bild 4.10c vergrößert dargestellt und ähneln sich zwar qualitativ, unterscheiden sich aber quantitativ stark. Erwartungsgemäß wird der Umwandlungsbereich mit der Vergrößerung des mittleren Abstandes  $d$  der aktiven Gleitebenen größer. Bemerkenswert ist jedoch, dass die Ausdehnung der Transformationszone überproportional zunimmt – eine Verdoppelung von  $d$  bewirkt ein mehr als doppelt so breites Martensitgebiet. Dies bestätigt die sich bereits in Bild 4.8a abzeichnende Tendenz, nach der ein ohnehin großer Transformationsbereich eine Verstärkung der weiteren Martensitbildung bewirkt.

Die während der Rissausbreitung bei unterschiedlicher Wahl von  $d$  berechneten zyklischen Rissspitzenableitungen zeigt Bild 4.10b zusammen mit dem  $\Delta CTSD$ -Verlauf ohne Umwandlung, der den Fall  $d = 0$  repräsentiert. Die Ergebnisse entsprechen auch hier der Erwartung,

dass die Vergrößerung der Transformationszone eine Reduktion der zyklischen Rissspitzenablenkung bewirkt. Ein schmaler Martensitbereich bei  $d = 0,5 \cdot 10^{-6} D$  führt hierbei jedoch zu einer verhältnismäßig starken Verringerung der  $\Delta CTSD$ -Werte, während diese Reduktion bei immer größer werdenden Umwandlungsgebieten abnimmt, sich aber weiterhin deutlich zeigt.

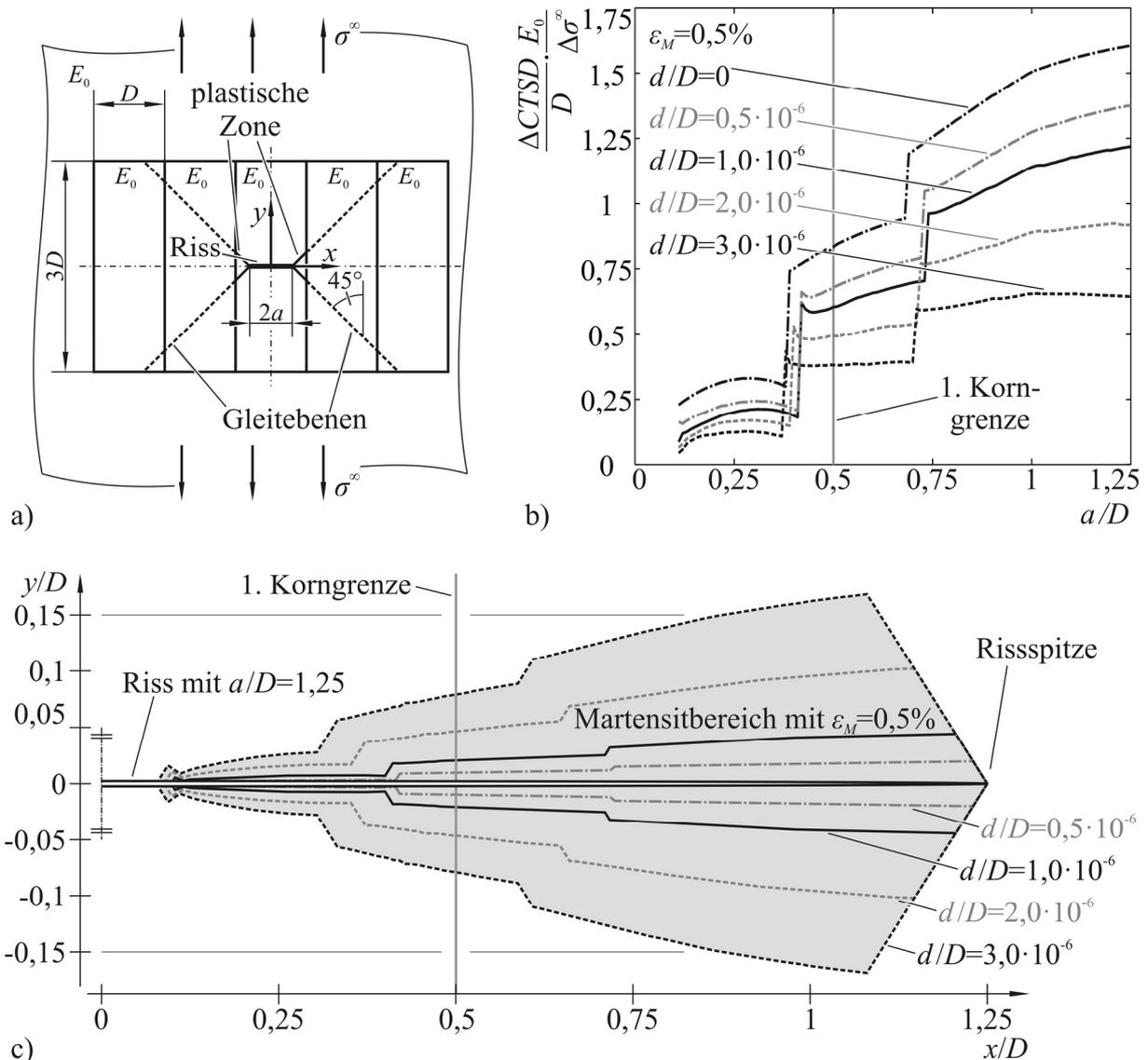


Bild 4.10: Einfluss des mittleren Abstandes  $d$  der an der Rissspitze aktiven parallelen Gleitebenen mit a) dem untersuchten Gefüge, b) den berechneten Verläufen der normierten Rissspitzenablenkung über dem Verhältnis  $a/D$  bei  $\epsilon_M = 0,5\%$  und c) den Konturen der gebildeten Martensitbereiche in vergrößerter Darstellung (die Breite der Umwandlungsgebiete ist stärker vergrößert als die Länge).

Die Auswirkungen des vom Martensitbereich verursachten Spannungsfeldes auf die Aktivierung von Gleitbändern in den Nachbarkörnern sind je nach Größe der Transformationszone unterschiedlich. Die Risslänge, bei der die plastische Zone eine Korngrenze überwindet,

nimmt bei den geringeren Ausdehnungen des Martensitbereichs ( $d = 0,5 \cdot 10^{-6} D$  und  $d = 1 \cdot 10^{-6} D$ ) zunächst gegenüber dem Fall ohne Transformation etwas zu. Bei den größeren Umwandlungszonen erfolgt dagegen wieder eine leichte Abnahme dieser Risslänge, die im Fall von  $d = 3 \cdot 10^{-6} D$  sogar geringer ist als im martensitfreien Fall.

In diesem Abschnitt kann festgehalten werden, dass der mittlere Abstand  $d$  der an der Risspitze aktiven parallelen Gleitebenen eine Haupteinflussgröße auf die Risswachstumsgeschwindigkeit darstellt. Sie bewirkt stark unterschiedlich breite Martensitbereiche entlang des Risses und bestimmt damit das transformationsinduzierte Riss schließen wesentlich. Für die Aktivierung von Gleitebenen in den Nachbarkörnern ist die Breite des Umwandlungsbereiches dagegen von untergeordneter Bedeutung.

Da die Ausdehnung des Martensitbereichs anhand der sich schneidenden Gleitebenen berechnet wird, auf denen Abgleitung stattfindet, ist davon auszugehen, dass die Breite der Umwandlungszone auch von der Ausrichtung dieser Ebenen beeinflusst wird. Die Auswirkungen von Veränderungen der Gleitebenenorientierung werden daher im nachfolgenden Kapitel untersucht.

### 4.3.3 Einfluss der Gleitebenenorientierung an der Risspitze

Mit dem Ziel, den Einfluss der Gleitebenenorientierung auf die Breite des sich an der Risspitze bildenden Martensitbereichs zu ermitteln, wird das Risswachstum in einem Gefüge simuliert, das in Bild 4.11a dargestellt ist. Die Gleitbänder (GB) an der Risspitze weisen hierbei im mittleren Korn und in den äußersten Körnern einen Winkel (GB-Winkel) von  $109,47^\circ$  und in den Körnern rechts und links einen Winkel von  $70,53^\circ$  auf. Sie entsprechen den Winkeln, die zwei im kubisch flächenzentrierten Kristall vorliegende Gleitebenen einschließen. Der mittlere Abstand zwischen zwei parallelen aktiven Gleitebenen an der Risspitze beträgt  $d = 1 \cdot 10^{-6} D$  und die Dehnung im Umwandlungsbereich  $\varepsilon_M = 0,5\%$ .

Bild 4.11b zeigt die vergrößerte Kontur des Martensitbereichs, der sich während der Risswachstumssimulation bis zu einer halben Risslänge von  $a = 1,25D$  bildet. Zudem ist die im vorherigen Abschnitt ermittelte Umwandlungszone dargestellt, bei der die Gleitbänder einen Winkel von  $90^\circ$  (GB-Winkel= $90^\circ$ ) einschließen. Hieraus ist ersichtlich, dass der größere Gleitbandwinkel im mittleren Korn zu einem breiteren Transformationsbereich führt, während der geringe Winkel eine schmalere Martensitzone hervorruft.

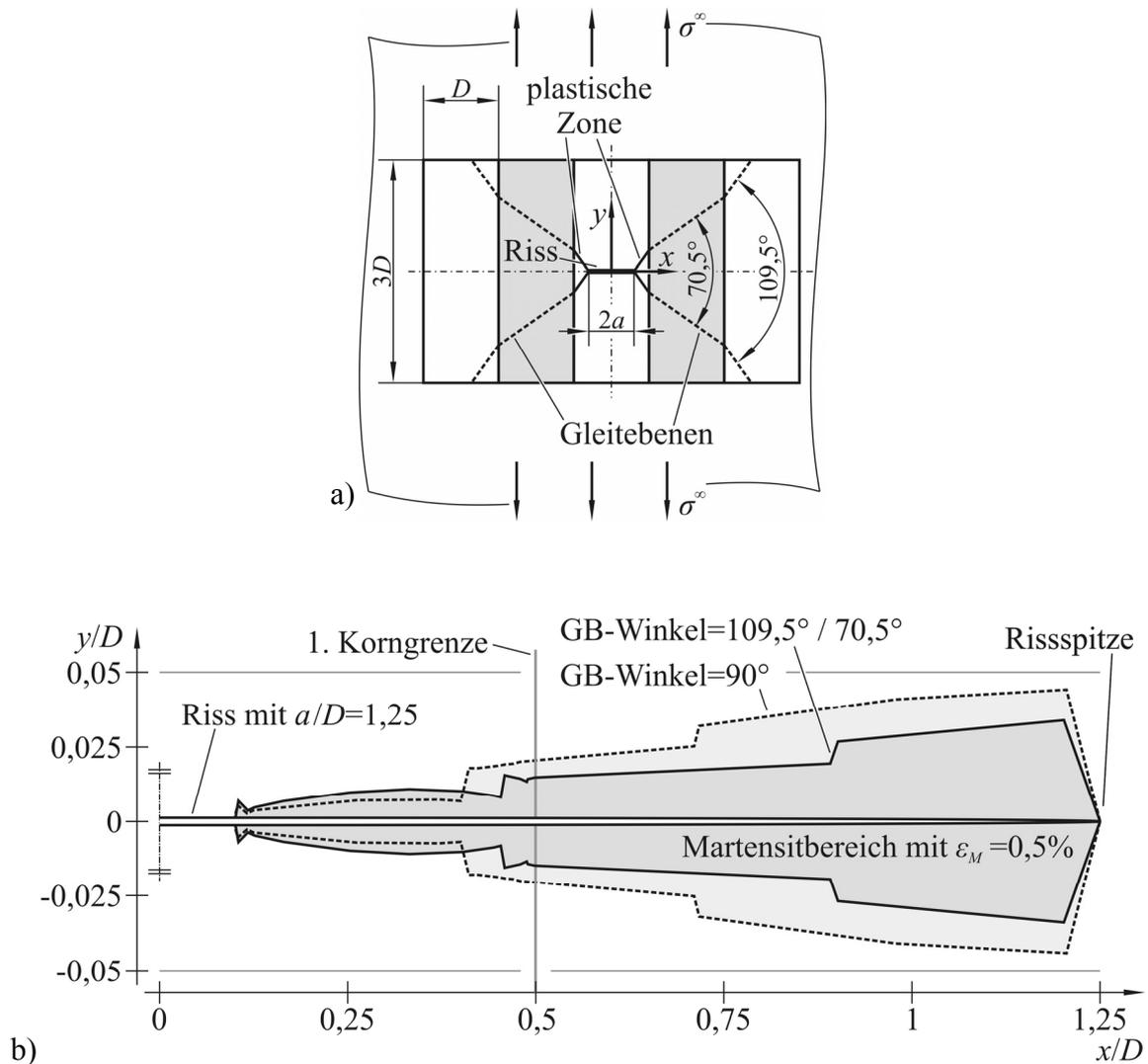


Bild 4.11: Einfluss des Gleitbandwinkels auf den gebildeten Martensitbereich mit a) dem untersuchten Gefüge und b) der Kontur der Umwandlungszone in vergrößerter Darstellung (die Breite der Umwandlungsbereiche ist stärker vergrößert als die Länge).

Auf einen Vergleich der zyklischen Risspitzenableitungen wird verzichtet, da die unterschiedlichen Gleitbandwinkel keine aussagekräftige Gegenüberstellung ermöglichen. Zudem kommt es zum Abknicken der plastischen Zone, wenn von ihr eine Korngrenze überschritten wird, was einen neuen Einfluss auf die Deformationen an der Risspitze verursacht und keinen Vergleich zur Rissausbreitung mit vollständig geradlinigen plastischen Zonen erlaubt.

In diesem Abschnitt lässt sich resümieren, dass die Gleitebenen- und somit auch die Kornorientierung in entscheidendem Ausmaß über die Breite des Umwandlungsbereiches mitbestimmt. Hieraus ergibt sich ein Einfluss auf das transformationsinduzierte Riss schließen und damit auf die Risswachstumsgeschwindigkeit.

In den bisherigen Simulationen wurde eine mögliche Veränderung des Elastizitätsmoduls infolge der Phasentransformation nicht berücksichtigt, obwohl sie sich auf das Spannungsfeld an der Rissspitze und somit auf die Rissausbreitung auswirken kann. Der Einfluss, der eine von der Ausgangsphase abweichende Steifigkeit im Umwandlungsbereich auf die zyklische Rissspitzenabgleitung ausübt, wird daher im folgenden Abschnitt untersucht.

#### 4.3.4 Einfluss des Elastizitätsmoduls der Umwandlungsbereiche

Durch die Transformation der austenitischen Ausgangsphase in die martensitische Phase kommt es zu einer neuen Orientierung des umgewandelten Werkstoffs und zu einer Änderung der Kristallstruktur von kubisch flächenzentriert zu kubisch raumzentriert. Hierdurch werden auch die elastischen Eigenschaften in der Transformationszone verändert, wodurch eine neue Steifigkeit des Martensitbereichs vorliegen kann.

Risswachstumssimulationen an dem in Bild 4.10a dargestellten Gefüge, das auch in den vorangegangenen Abschnitten verwendet wurde, sollen den Einfluss einer vom umliegenden Austenit abweichenden Steifigkeit im Umwandlungsbereich ermitteln. Hierzu wird der Transformationszone – sobald diese entstanden ist – der Elastizitätsmodul  $E_M$  zugewiesen (vgl. Bild 4.12a), der in drei verschiedenen Risswachstumsberechnungen die Werte  $E_M = 0,5E_0$ ,  $E_M = E_0$  und  $E_M = 1,5E_0$  aufweist. Der mittlere Abstand der zur Martensitbildung führenden Gleitebenen an der Rissspitze beträgt für alle Konfigurationen  $d = 1 \cdot 10^{-6} D$  und die Dehnung im Umwandlungsgebiet  $\varepsilon_M = 0,5\%$ . Somit liegt für  $E_M = E_0$  der bereits in Abschnitt 4.3.1 berechnete Fall mit dieser Dehnung vor.

Die  $\Delta CTSD$ -Ergebnisse der Risswachstumssimulationen mit unterschiedlichen Elastizitätsmoduln im Martensitbereich sind in Bild 4.12b dargestellt. Zum Vergleich sind zusätzlich die Ergebnisse der in Abschnitt 4.3.1 durchgeführten Berechnungen eingezeichnet, bei denen die Dehnung  $\varepsilon_M$  im Umwandlungsbereich variiert wurde. Es ist ersichtlich, dass die stark unterschiedlichen Elastizitätsmoduln des Martensits nur eine geringe Abweichung der zyklischen Rissspitzenabgleitung hervorrufen.

Damit kann aus der in diesem Abschnitt durchgeführten Untersuchung festgehalten werden, dass der Einfluss der Dehnung  $\varepsilon_M$  auf die  $\Delta CTSD$ -Kurven deutlich stärker ausfällt als der des Elastizitätsmoduls  $E_M$  im Martensitbereich. Daher ist die Verwendung der mittleren Steifigkeit  $E_M = E_0$  in der Transformationszone – wie in den vorhergehenden Berechnungen – eine zulässige Vereinfachung, die für die folgenden Untersuchungen beibehalten werden soll.

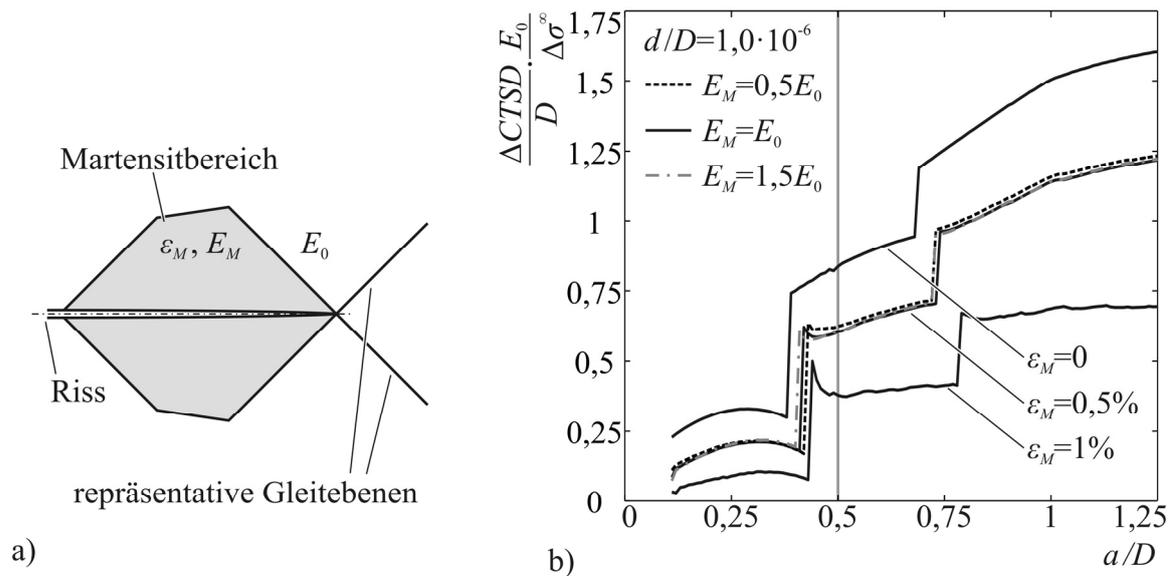


Bild 4.12: a) Unterschiedliche Elastizitätsmoduln  $E_M$  im Martensitbereich und b) deren Einfluss auf die zyklische Rissspitzenabgleitung.

In diesem und den vorhergehenden Simulationsbeispielen wurden die Auswirkungen der Modellparameter martensitische Dehnung  $\varepsilon_M$  und Elastizitätsmodul  $E_M$  des Umwandlungsbereichs sowie dessen Ausdehnung auf die zyklische Rissspitzenabgleitung studiert. Deren hierbei ermittelte Verringerungen lassen sich auf transformationsinduziertes Rissschließen zurückführen. Wie lange ein Riss im Lastzyklus offen oder geschlossen ist, wird aber vom Spannungsverhältnis wesentlich mitbestimmt, weshalb dessen Einfluss auf das Kurzrissswachstum im nachfolgenden Abschnitt untersucht wird.

#### 4.3.5 Einfluss des Spannungsverhältnisses

Rissschließeffekte, die für die Verringerung der zyklischen Rissspitzenabgleitung in den vorhergehenden Kapiteln verantwortlich zeichnen, verursachen bei Rücknahme der äußeren Beanspruchung ein vorzeitiges Aufsetzen der Rissufer. Sie wirken sich auf die Rissausbreitung aber nur dann aus, wenn die aufgebrachte Unterspannung so niedrig ist, dass es auch tatsächlich zum Kontakt der Rissufer kommt. Aus diesem Grund ist bei betragsmäßig kleinerer Unterspannung (und damit bei von  $R = -1$  aus zunehmendem Spannungsverhältnis) ein abnehmender Einfluss des transformationsinduzierten Rissschließens zu erwarten.

Um die Vorgänge beim Rissschließen besser verstehen zu können, werden zunächst die Verformungen der Rissufer und der Gleitbänder mit und ohne Umwandlungszone entlang des Risses diskutiert. Hierzu sind die Deformationen von Interesse, die sich einstellen, wenn die äußere Spannung  $\sigma^\infty$  bei  $R = -1$  von ihrem Maximalwert  $\sigma_{max}$  auf den Minimalwert  $\sigma_{min}$

reduziert wird. Sie werden anhand des in Bild 4.10a dargestellten, unter Modus I-Beanspruchung liegenden Risses berechnet. Bild 4.13 illustriert den hierbei aufgebrachten zeitlichen Verlauf der normierten äußeren Beanspruchung  $\sigma^\infty / \sigma_{max}$ , auf dem die Punkte eingezeichnet sind, die für die weiteren Überlegungen verwendet werden. Bei der Martensitbildung liegt ein mittlerer Abstand zwischen den an der Rissspitze aktiven Gleitebenen von  $d = 1 \cdot 10^{-6} D$  vor, der Elastizitätsmodul im Umwandlungsbereich entspricht dem des umliegenden Austenits ( $E_M = E_0$ ) und seine Volumendehnung beträgt  $\varepsilon_M = 0,5\%$ .

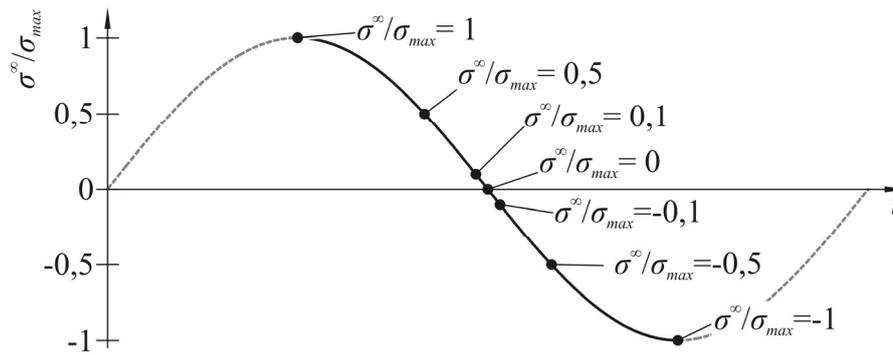


Bild 4.13: Zeitlicher Verlauf der normierten äußeren Spannung  $\sigma^\infty / \sigma_{max}$  bei der Untersuchung des Rissschließens bei  $R = -1$ .

Bei den Verformungen, die bei der Untersuchung des Rissschließens betrachtet werden, handelt es sich um die Rissöffnung  $b_n$  und die plastische Abgleitung  $b_t$  entlang der Gleitebenen, die beide durch  $b^* = D \cdot 2\sigma_{max} / E_0$  normiert und in Bild 4.14 dargestellt sind. Hierin werden die Deformationen verglichen, die sich mit und ohne Martensitbereich entlang des Risses einstellen. In beiden Fällen weist der Riss die gleiche halbe Länge auf ( $a/D = 0,36$ ), bei der die plastische Zone kurz vor der Überwindung der ersten Korngrenze steht.

Während der Riss maximaler Zugbeanspruchung ausgesetzt ist, treten die größten Öffnungen  $b_n$  auf, deren Verläufe mit  $\sigma^\infty / \sigma_{max} = 1$  gekennzeichnet sind. Zugehörig weist der Bereich zwischen der Rissspitze und der Korngrenze die größten plastischen Abgleitungen  $b_t$  auf. Liegt entlang des Risses keine Transformationszone vor, ergibt sich dabei ein glatter Rissöffnungsverlauf. Mit Umwandlung weisen die Öffnungsverschiebungen dagegen im Bereich des Anfangsrisses, an dem noch keine Martensitzone vorliegt, die höchsten Werte auf und vermindern sich am Phasenübergang sprunghaft. Die Spitze nach unten, die an diesem Übergang auftritt, resultiert dabei aus der im ersten Rechenschritt bestimmten Umwandlungszone, die im Vergleich zu den folgenden etwas größer ist (vgl. Bild 4.8).

Bei Rücknahme der Beanspruchung auf  $\sigma^\infty / \sigma_{max} = 0,5$  verringert sich die elastische Rissöffnung  $b_n$  stark; in der plastischen Zone kommt es in der plastischen Abgleitung  $b_t$  jedoch nur zu einer geringen Rückverformung – ausschließlich in unmittelbarer Nähe der Rissspitze. Wird die äußere Beanspruchung weiter reduziert, setzen die Rissufer im Fall mit Umwandlung bereits bei einer äußeren Zugspannung von etwa  $\sigma^\infty / \sigma_{max} = 0,1$  in Teilen der Transformationszone aufeinander auf. Ohne Umwandlung ist der Riss bei dieser Zugbeanspruchung noch vollständig geöffnet. Es ist sogar eine Druckspannung von  $\sigma^\infty / \sigma_{max} = -0,1$  notwendig, damit es zum Kontakt zwischen den Rissflanken kommt. Bemerkenswert ist, dass die plastischen Bereiche nur langsam zurückgleiten: An der Rissspitze liegt daher bei  $\sigma^\infty / \sigma_{max} = 0,1$  bzw.  $\sigma^\infty / \sigma_{max} = -0,1$  noch eine Öffnung vor, obwohl weiter entfernt von der Spitze bereits Kontakt zwischen den Rissufern besteht.

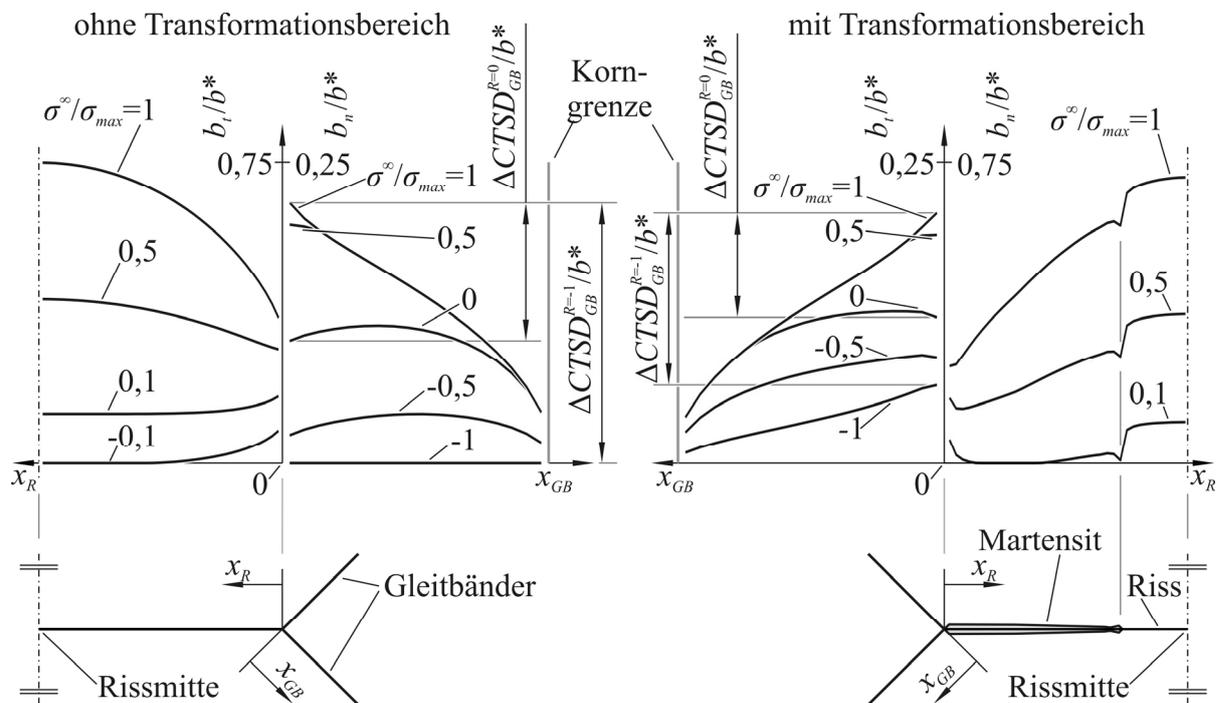


Bild 4.14: Einfluss der Transformationszone auf die Rissöffnung  $b_n$  und plastische Abgleitung  $b_t$  bei unterschiedlichen äußeren Spannungen  $\sigma^\infty$  während der Verringerung der Beanspruchung von  $\sigma_{max}$  auf  $\sigma_{min}$ .

Wird die äußere Spannung im Druckbereich bis auf  $\sigma^\infty / \sigma_{max} = -1$  gesenkt, folgt ohne Martensitbereich eine vollständige Rückverformung, da das Materialmodell keine Irreversibilität der Abgleitung berücksichtigt. Im Gegensatz dazu bewirkt die Volumendehnung der Transformationszone, dass plastische Verformung zurückbleibt (ebenfalls ohne Berücksichtigung

irreversibler plastischer Prozesse), da der geschlossene Riss keine weitere Rückgleitung zulässt.

Wäre der Riss lediglich einem Spannungsverhältnis von  $R = 0$  ausgesetzt, wäre der Entlastungszyklus bei  $\sigma^\infty / \sigma_{max} = 0$  beendet. Die Rückgleitung auf den Gleitebenen ist dann aber noch nicht weit fortgeschritten und es liegt weiterhin eine große plastische Verformung vor. Die auf einem Gleitband auftretende Schwingbreite der Rissspitzenabgleitung  $\Delta CTSD_{GB}^{R=0}$  ist daher noch relativ gering. Mit und ohne Phasentransformation unterscheiden sich die zyklischen Rissspitzenabgleitungen  $\Delta CTSD_{GB}^{R=0}$  noch nicht stark, da die Behinderung der plastischen Rückgleitung durch die Umwandlungszone moderat ausfällt.

Im Vergleich zur Schwingbreite der Rissspitzenabgleitung bei  $R = 0$  ( $\Delta CTSD_{GB}^{R=0}$ ) ist  $\Delta CTSD_{GB}^{R=-1}$  deutlich größer, wenn die äußere Spannung  $\sigma^\infty / \sigma_{max} = -1$  erreicht (Spannungsverhältnis  $R = -1$ ). Außerdem weisen die  $\Delta CTSD_{GB}^{R=-1}$ -Werte in diesem Fall mit und ohne Phasentransformation deutliche Unterschiede auf. Somit kann die stärkere Auswirkung des transformationsinduzierten Risschließens auf die zyklische Rissspitzenabgleitung bei negativem Spannungsverhältnis nachgewiesen werden.

Über diesen Nachweis hinaus, der bei nur einer Risslänge erfolgt ist, soll der Einfluss des Spannungsverhältnisses auch während der Rissausbreitung untersucht werden. Hierzu wird – wie zuvor in diesem Abschnitt – das in Bild 4.10a dargestellte Gefüge verwendet, bei dem der Riss unter Modus I-Beanspruchung liegt (Bei Martensitbildung werden die Parameter  $d = 1 \cdot 10^{-6} D$ ,  $E_M = E_0$  und  $\varepsilon_M = 0,5\%$  genutzt). Die Risswachstumssimulation findet bei den Spannungsverhältnissen  $R = -1$ ,  $-0,5$  und  $0$  statt. Hierbei wird die Maximalspannung  $\sigma_{max}$  konstant gehalten, so dass sich in allen Fällen mit Phasentransformation exakt gleich breite Martensitbereiche bilden.

Die berechneten zyklischen Rissspitzenabgleitungen sind normiert in Bild 4.15a ohne und in Bild 4.15b mit martensitischer Transformationszone über  $a/D$  dargestellt. Bestandteil der Normierung ist hierbei für alle Berechnungen der Teiler  $2\sigma_{max}$ , der im Falle  $R = -1$  mit der Schwingbreite der äußeren Beanspruchung  $\Delta\sigma^\infty$  identisch ist. In dieser Übersicht über die Ergebnisse sind die Graphen somit direkt miteinander vergleichbar und es lässt sich erkennen, dass bei symmetrischer Beanspruchung ( $R = -1$ ), in der der größte Wert für  $\Delta\sigma^\infty$  vorliegt, die höchsten  $\Delta CTSD$ -Verläufe auftreten. Erwartungsgemäß sinkt die zyklische Rissspitzen-

ableitung bei größeren  $R$ -Verhältnissen, da die Schwingbreite der äußeren Beanspruchung reduziert ist. Außerdem kann bereits hier ein ausgeprägter Einfluss der Phasentransformation festgestellt werden.

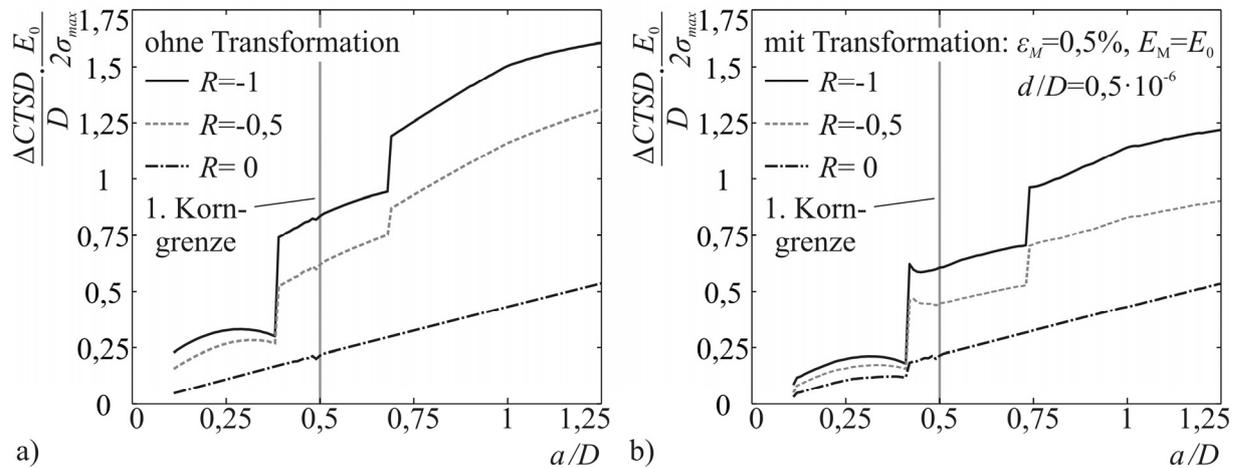


Bild 4.15: Einfluss des Spannungsverhältnisses auf die zyklische Risspitzenableitung a) ohne und b) mit Phasentransformation bei identischer Normierung von  $\Delta CTSD$ .

Eine tiefere Interpretation der Ergebnisse lässt sich jedoch durch eine Normierung von  $\Delta CTSD$  erreichen, in der die voneinander abweichenden Schwingbreiten  $\Delta\sigma^\infty$  der äußeren Spannung berücksichtigt sind. Daher erfolgt die Darstellung der zyklischen Risspitzenableitung in Bild 4.16a für den Fall mit und in Bild 4.16b für den Fall ohne Phasentransformation erneut.

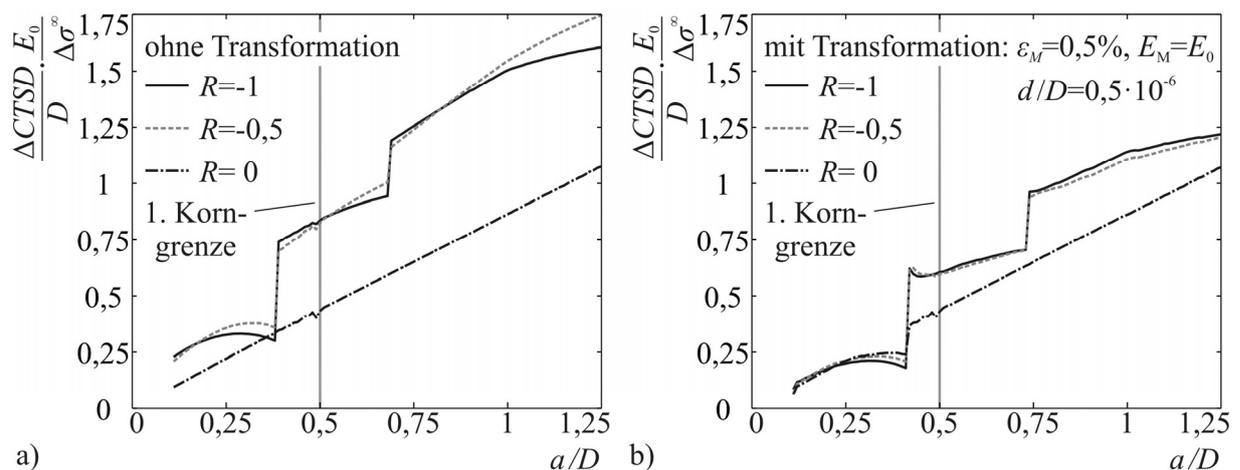


Bild 4.16: Einfluss des Spannungsverhältnisses auf die zyklische Risspitzenableitung a) ohne und b) mit Phasentransformation bei an das Spannungsverhältnis angepasster Normierung von  $\Delta CTSD$ .

In beiden Diagrammen (Bild 4.16a und b) ist ersichtlich, dass sich die bezüglich der Spannungsschwingbreite bereinigten Verläufe der zyklischen Rissspitzenableitung bei  $R = -0,5$  und  $R = -1$  nicht nur qualitativ sondern auch quantitativ stark ähneln. Der absolute  $\Delta CTSD$ -Verlauf nimmt also mit steigender Unterspannung  $\sigma_{min}$  in etwa dem gleichen Maße ab, wie sich auch  $\Delta\sigma^\infty$  verringert. Ohne Phasenumwandlung (Bild 4.16a) zeigt sich jedoch, dass die Sprünge in der zyklischen Rissspitzenableitung bei  $R = -0,5$  geringer ausfallen und die  $\Delta CTSD$ -Kurve (stückweise) geradliniger verläuft als bei  $R = -1$ . Demzufolge wirken sich die Korngrenzen in ersterem Fall weniger stark auf die zyklische Rissspitzenableitung aus. Dieser Tendenz folgend ist der  $\Delta CTSD$ -Verlauf bei  $R = 0$  in sehr guter Näherung linear und von den Korngrenzen unbeeinflusst. Dabei nimmt der  $CTSD$ -Maximalwert nach der Aktivierung weiterer Gleitebenen sehr wohl sprunghaft zu; die Rückgleitung infolge der Lastwegnahme erweist sich jedoch bei linear-elastischem ideal-plastischem Materialverhalten als allein von der Risslänge abhängig und vergrößert sich mit ihr linear.

Mit Phasentransformation (Bild 4.16b) sind sich die Verläufe bei  $R = -0,5$  und  $R = -1$  noch ähnlicher. Der vom Rissschließen gegenüber der Rückgleitung auf den Gleitebenen hervorgerufene Widerstand ist somit näherungsweise proportional zur Unterspannung – lediglich im Einflussbereich der ersten Korngrenze ist hiervon leicht abweichendes Verhalten zu erkennen. Ist jedoch – wie größtenteils im Fall  $R = 0$  – kein Rissschließen anzutreffen, zeigt sich der gleiche lineare Verlauf der zyklischen Rissspitzenableitung, der sich auch ohne Phasentransformation einstellen würde. Die Abweichung von diesem linearen Verlauf tritt nur kurz vor der Aktivierung von Gleitebenen in den Körnern rechts und links des mittleren auf und ist auf Rissschließen zurückzuführen.

In diesem Abschnitt wird bestätigt, dass sich der Einfluss der martensitischen Phasentransformation auf das Risswachstum vermindert, wenn das Spannungsverhältnis von  $R = -1$  ansteigt. Der Vorteil des transformationsinduzierten Rissschließens verschwindet, wenn die Unterspannung nicht ausreicht, um ein Aufsetzen der Rissflanken zu bewirken.

Die in diesem Kapitel vorgestellten Simulationen haben einige grundlegende Effekte des mikrostrukturbestimmten Wachstums kurzer Risse veranschaulicht, deren Ursache in Aspekten liegt, die das in dieser Arbeit entwickelte Modell neu in die Kurzrisssimulation einbezieht. Hierbei handelt es sich um die unterschiedlichen elastischen Eigenschaften von Gefügekörnern und die Volumendehnung martensitisch umgewandelter Bereiche sowie deren Bildungsmechanismus. Neben den gezeigten Fällen sind auch aus ihnen resultierende Überlage-

rungen vorstellbar, in denen beispielsweise das Risswachstum mit Phasentransformation an der Rissspitze (Abschnitt 4.3.1 oder 4.3.2) in einem Gefüge mit unterschiedlich steifen Körnern (Abschnitt 4.2.1) erfolgt. Derartige Simulationen liefern jedoch die zu erwartenden Ergebnisse, bei denen sich die  $\Delta CTSD$ -Kurven entsprechend der unterschiedlichen Kornsteifigkeiten einstellen (vgl. Bild 4.5) und die Volumendehnung eine Verringerung dieser Kurven bewirkt. Daher wird auf die Darstellung und Diskussion dieser Ergebnisse verzichtet.

Das entwickelte numerische Verfahren wird im nachfolgenden Kapitel auf weiterführende Lang- und Kurzzrissprobleme angewendet.

## 5 Anwendung

Das in dieser Arbeit entwickelte Verfahren zur numerischen Lösung von Rissproblemen wurde im vorhergehenden Abschnitt für grundlegende Studien zum Kurzrissswachstum verwendet. Im Interesse erleichterter Interpretierbarkeit der Ergebnisse wurden die Simulationen für einfache geometrische Bedingungen durchgeführt. Die Einsatzmöglichkeiten des Verfahrens beschränken sich aber weder auf Kurzrisssprobleme noch auf das Vorliegen einfacher Geometrien, so dass es bei der Risssimulation einen breiten Anwendungsbereich abdecken kann. Dies soll in diesem Kapitel anhand von Beispielen demonstriert werden, zu denen die Untersuchung der Wirkung eines Einschlusses oder einer Pore auf einen Riss und die Berechnung der Langrissausbreitung in einem Bauteil zählen. Darüber hinaus wird das durch martensitische Transformation beeinflusste Wachstum eines experimentell beobachteten Kurzrisses simuliert.

### 5.1 Riss im Einflussbereich von Einschluss und Pore

Die Möglichkeit, einen Riss in einem Gebiet zu modellieren, das bereichsweise unterschiedliche elastische Eigenschaften aufweist, erlaubt die Nachbildung eines Risses im Einflussbereich eines Einschlusses oder einer Pore. Liegt ein Einschluss vor, wird dieser mit Randelementen mit Absolutverschiebungsansätzen umschlossen, so dass ihm ein vom umliegenden Werkstoff abweichendes elastisches Verhalten zugewiesen werden kann. Eine Pore lässt sich aus der betrachteten Scheibe ausschneiden und der so entstandene Rand vernetzen, was dort die Aufbringung von Randbedingungen erlaubt, die beispielsweise Spannungsfreiheit nachbilden.

Die Interaktion eines Risses mit einem Einschluss wird von Lam et al. (1998) und Dong et al. (2003) unter Verwendung von Randelementeansätzen numerisch untersucht, wobei die Autoren die gleiche in Bild 5.1a dargestellte Konfiguration aus einem kreisförmigen Einschluss und einem senkrecht zur Beanspruchungsrichtung liegenden Riss in einer unendlichen Scheibe wählen. Hierbei weist die Scheibe den Schubmodul  $G_1$  auf, wohingegen der des Einschlusses  $G_2$  beträgt. Der Riss besitzt eine Länge von  $2a$  und der Einschluss den Radius  $R$ . Wird die Scheibe der äußeren Beanspruchung  $\sigma^\infty$  ausgesetzt, werden die Auswirkungen des Einschlusses auf das Spannungsfeld an der ihm zugewandten Rissspitze (A) über den Spannungsintensitätsfaktor  $K_{IA}$  bewertet.

Ohne einen Steifigkeitsunterschied zwischen Scheibe und Einschluss, liegt an beiden Risspitzen der Spannungsintensitätsfaktor  $K_I = \sigma^\infty \sqrt{\pi a}$  eines Risses in einer unendlichen Scheibe vor. Ist der Einschluss steifer als die umliegende Scheibe, entlastet er den Riss während eine geringere Steifigkeit zu einer höheren Rissbeanspruchung führt. Für einen Riss, dessen Länge  $2a$  dem Radius  $R$  des Einschlusses entspricht, ermitteln Lam et al. (1998) und Dong et al. (2003) den  $K$ -Faktor bei verschiedenen Verhältnissen  $\Gamma = G_2/G_1$  der Schubmoduln von Einschluss und Scheibe. Die unter Variation des Abstandes  $d$  zwischen Einschluss und Riss berechneten und durch  $\sigma^\infty \sqrt{\pi a}$  normierten Spannungsintensitätsfaktoren  $K_{IA}$  sind in Bild 5.1b über dem Verhältnis  $d/R$  dargestellt. Beide Lösungen weisen nur geringe Abweichungen voneinander auf und sollen für die mit dem in dieser Arbeit entwickelten numerischen Verfahren erzeugte aktuelle Lösung als Referenz dienen. Der Vergleich zu den Ergebnissen, die mit dem in dieser Arbeit vorgestellten Verfahren ermittelt wurden (aktuelle Lösung), zeigt eine sehr gute Übereinstimmung.

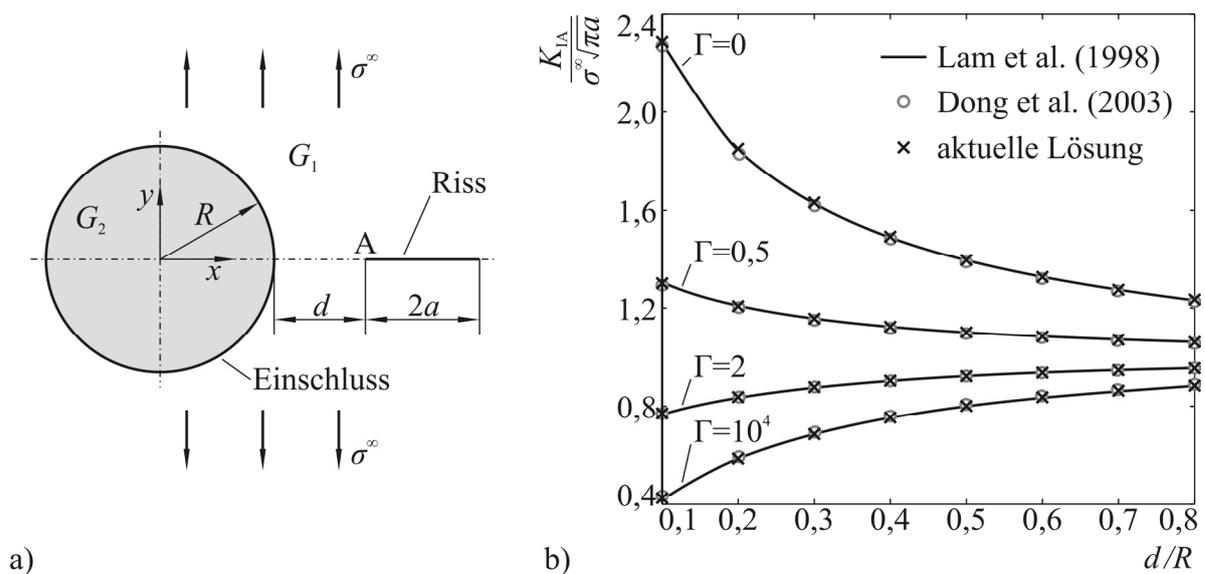


Bild 5.1: Riss im Einflussbereich eines Einschlusses mit a) der verwendeten Geometrie und b) den berechneten Spannungsintensitätsfaktoren an der Risspitze A.

Bei den unterschiedlichen Verhältnissen  $\Gamma$  der Schubmoduln wurden zwei Grenzfälle gewählt, wobei es sich bei  $\Gamma = 10^4$  um einen ‚harten‘ Einschluss handelt, der im Vergleich zur Scheibe (weitgehend) unverformbar ist, während bei  $\Gamma = 0$  eine Pore vorliegt. Die gute Übereinstimmung mit den Referenzlösungen zeigt, dass das in dieser Arbeit entwickelte Verfahren zur Lösung allgemeiner Rissprobleme unter Berücksichtigung von Gebieten mit verschiede-

nen Steifigkeiten einschließlich sehr stark unterschiedlicher elastischer Eigenschaften geeignet ist.

Die in diesem und den vorherigen Abschnitten vorgestellten Berechnungen von Rissproblemen bezogen sich auf einfache Modellanwendungen, während reale Risse bisher nicht betrachtet wurden. Im nachfolgenden Abschnitt wird daher das reale Ausbreitungsverhalten eines langen Risses simuliert.

## 5.2 Simulation der Langrissausbreitung in einer Dreipunktbiegeprobe

Anders als in den vorhergehenden Risswachstumssimulationen, bei denen eine geradlinige Rissausbreitung vorgegeben wurde, soll nun ein realer Risspfad in einer Dreipunktbiegeprobe nachvollzogen werden. Die zugehörigen experimentellen Rissausbreitungsversuche nehmen Theilig et al. (2003) an der in Bild 5.2 dargestellten Probe vor, die aus einem warmgewalzten Flachstahl 70/12 nach DIN 1017 (Werkstoff: S335) gefertigt wurde. Sie ist gelenkig in zwei Bohrungen gelagert und besitzt eine dritte Bohrung zur Aufbringung der Last  $F$ . Somit ist die Probe durch ein Biegemoment und eine Querkraft beansprucht, die zur Überlagerung von Normal- und Schubspannungen führen. Zusätzlich erzeugt eine Störbohrung ein inhomogenes Spannungsfeld, in dessen Einflussbereich die Rissausbreitung erfolgt. Ausgehend von einem zuvor elektroerosiv eingebrachten Anriss wächst der Riss infolge zyklischer Beanspruchung.

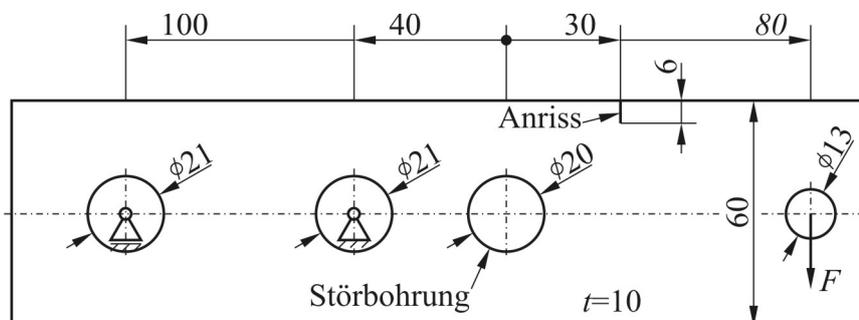


Bild 5.2: Dreipunktbiegeprobe zur experimentellen Risspfadermittlung nach Theilig et al. (2003).

Die Ränder der Probe einschließlich der Bohrungen werden durch Randelemente mit Absolutverschiebungsansätzen diskretisiert, für deren Randbedingungen ein spannungsfreier Rand vorgegeben wird. Ausgenommen hiervon sind die Lastangriffs- und die Lagerbohrungen, wobei zwischen letzteren und den Lagerbolzen Tangentialverschiebungen auftreten können. Normalverschiebungen sind dagegen nicht möglich, da sich Bolzen und Probe nicht durchdringen. Anders als in den bisherigen Berechnungen müssen diese Randbedingungen daher

nicht im  $x$ - $y$ -Koordinatensystem sondern im elementeigenen  $t$ - $n$ -System aufgebracht werden, wozu die in Abschnitt 3.2.5 beschriebene Koordinatentransformation durchgeführt wird. Beide Bohrungen werden so als Festlager berücksichtigt, was aufgrund ihres geringen Abstandes als zulässige Vereinfachung erscheint. Wird von geringen Verdrehungen der Bohrungen um die Lagerbolzen ausgegangen, kann die gelenkige Lagerung auf diese Weise nachgebildet werden.

Bild 5.3 zeigt den experimentell ermittelten Risspfad, der in der Mitte der 10mm starken Probe ausgemessen wurde, um dreidimensionale Effekte auszuschließen. Zusätzlich ist der in Hilgendorff (2009) mit Hilfe des in dieser Arbeit entwickelten Verfahrens berechnete Rissverlauf dargestellt. Beide Pfade weichen dabei nur äußerst wenig voneinander ab, so dass das während der Rissausbreitung an der Risspitze vorliegende Spannungsfeld, das für die Ausbreitungsrichtung verantwortlich zeichnet, von dem Verfahren auch unter der hier auftretenden komplexeren Geometrie sehr gut nachgebildet wird.

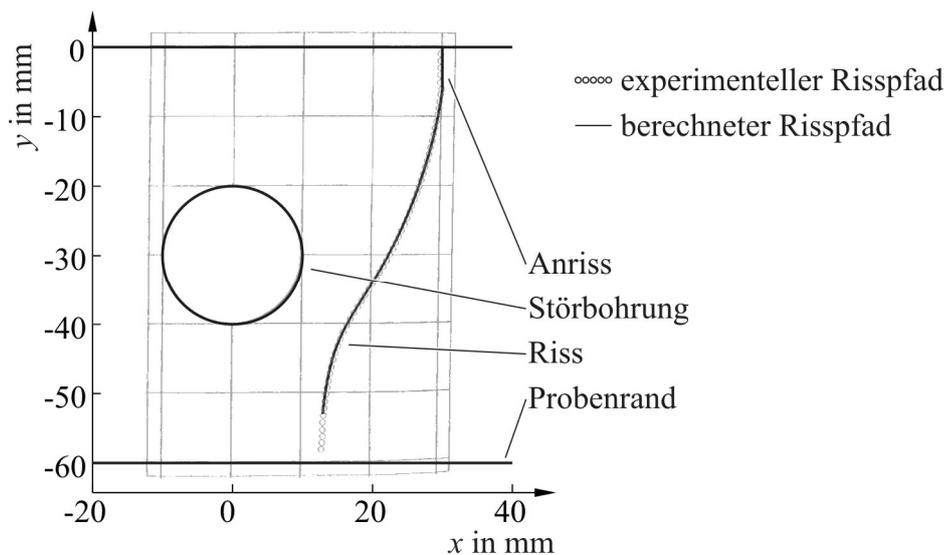


Bild 5.3: Experimentell (Theilig et al. 2003) und numerisch (Hilgendorff 2009) ermittelter Risspfad in einer Dreipunktbiegeprobe.

Die sehr gute Übereinstimmung der experimentell und numerisch ermittelten Risspfade in der untersuchten Dreipunktbiegeprobe zeigt, dass sich das verwendete numerische Verfahren auch zur Lösung von Rissproblemen in ebenen Bauteilen eignet. Dabei kann gegenüber dem von Künkler (2007) verfolgten und in Abschnitt 3.2.2 kurz beschriebenen Vorgehen, Bauteilränder durch Randelemente mit Relativverschiebungsansätzen zu diskretisieren, eine verbesserte Nachbildung der Bauteilverformungen erzielt werden, was zu einer genaueren Wiedergabe des experimentellen Risspfades führt. Darüber hinaus kann die hier berechnete Rissaus-

breitung auch als Risswachstum im Einflussbereich einer Pore interpretiert werden. Wird die Pore dabei als Einschluss mit einem Elastizitätsmodul von null angesehen, lässt das hier erreichte sehr gute Ergebnis den Schluss zu, dass sich mit dem numerischen Verfahren nicht nur die Spannungsintensitätsfaktoren an einem Riss in Einschlussnähe berechnen lassen, sondern auch die Rissausbreitungsrichtung. Durch die Einbeziehung der entsprechenden Mechanismen ist ebenso eine Berechnung des Kurzrissswachstums im Einflussbereich eines Einschlusses oder einer Pore möglich.

Abschließend soll die in dieser Arbeit im Vordergrund stehende Ausbreitung kurzer Ermüdungsrisse in einem metastabilen austenitischen Edelstahl anhand eines realen Risses nachvollzogen werden, auf den das entwickelte Modell nachfolgend angewendet wird.

### 5.3 Simulation der Ausbreitung eines realen Kurzrisses

Während des Gemeinschaftsprojektes wurde am Institut für Werkstofftechnik der Universität Siegen das Wachstum kurzer Risse im metastabilen austenitischen Edelstahl 1.4307 beobachtet, anhand derer die in Roth (2012) ausführlich und in Abschnitt 2.2 zusammengefasst beschriebenen Mechanismen der Rissausbreitung ermittelt wurden. Mit dem in Abschnitt 3 entwickelten zweidimensionalen Modell lassen sich diese Mechanismen grundsätzlich nachbilden. Dennoch kann nicht davon ausgegangen werden, dass das von dreidimensionalen Effekten beeinflusste reale Risswachstum einschließlich der martensitischen Phasenumwandlung bei allen beobachteten Rissen mit beliebigen Konfigurationen aus Riss- und Gleitbandorientierungen quantitativ korrekt berechnet werden kann. Streng genommen müssten der Riss und die aktiven Gleitebenen hierfür senkrecht zur betrachteten Oberfläche ausgerichtet sein.

Dennoch soll nachfolgend unter Verwendung des zweidimensionalen Modells einer der beobachteten Risse exemplarisch nachgerechnet werden, um die Nachbildung der Risswachstums- und Martensitbildungsmechanismen an einem realen Riss validieren zu können. Bild 5.4a zeigt die Geometrie des Risses und der Gefügekörner in dessen Umgebung durch eine rasterelektronenmikroskopische Aufnahme. Der Riss ist auf einer Korngrenze entstanden, die er jedoch kurz nach der Initiierung verlässt und transkristallin weiterwächst. Bild 5.4b veranschaulicht das Ergebnis einer Phasenanalyse, bei dem die austenitische Ausgangsphase ( $\gamma$ ) dem REM-Bild als heller, leicht transparenter Bereich überlagert ist, während die martensitisch umgewandelten Gebiete ( $\alpha'$ ) vollständig transparent sind und den Blick auf die rasterelektronenmikroskopische Aufnahme freigeben. Hieraus ist ersichtlich, dass neben

den Transformationszonen entlang des Risses noch weitere Martensitbereiche vorliegen, die jedoch bereits vor dem Risswachstum auf Gleitebenen entstanden sind.

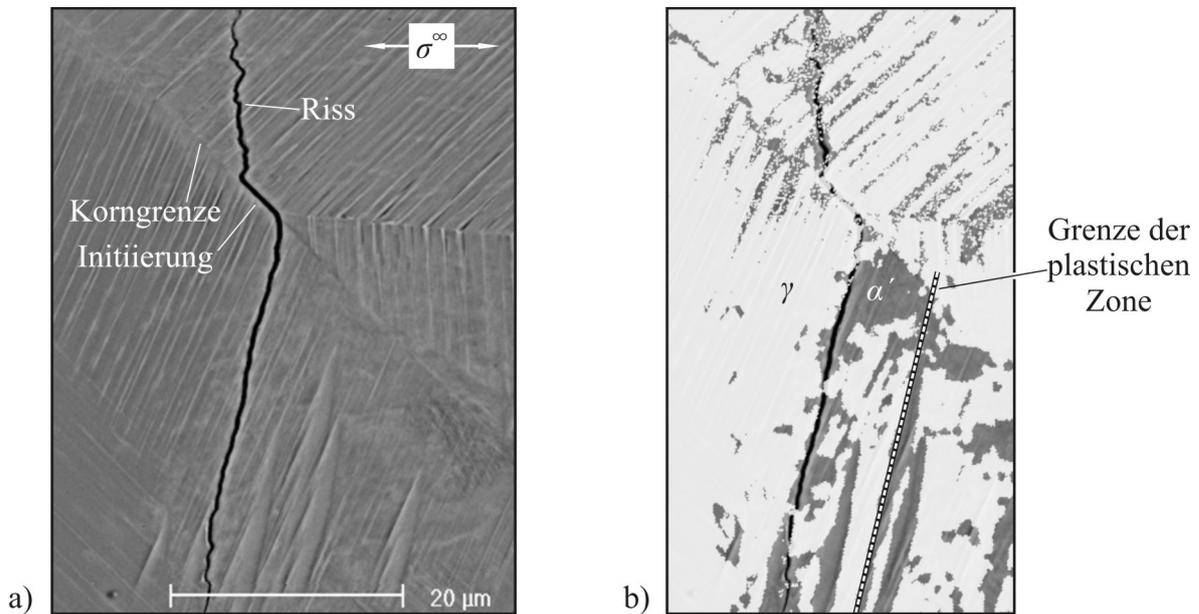


Bild 5.4: Risswachstum unter dem Einfluss martensitischer Phasentransformation an der Rissspitze mit a) der Rissgeometrie und b) den Phasen in der Umgebung des Risses.

Die Berechnung des realen Risswachstums, das im Experiment bei einer Beanspruchungsamplitude von  $\Delta\sigma^\infty = 245\text{MPa}$  erfolgt ist, erfordert die Kenntnis der Fließschubspannung  $\tau^F$ . Sie muss auf den Gleitebenen in der austenitischen Phase überwunden werden, um plastische Abgleitungen hervorzurufen. Unter Verwendung der HALL-PETCH-Beziehung (Hall 1951, Petch 1953) bestimmt Düber (2007) die Fließschubspannung eines austenitischen Edelstahl (1.4404) mit  $\tau^F = 68,5\text{MPa}$ : Bei einsinniger Beanspruchung setzt sich die Fließgrenze eines vielkristallinen Werkstoffs aus der Fließgrenze eines Einkristalls und der Behinderung der plastischen Verformung durch die Korngrenzen zusammen. Durch Verformungsuntersuchungen von Proben mit unterschiedlichen Korndurchmessern können beide Anteile quantifiziert und somit die Fließschubspannung des Einkristalls bestimmt werden, die auch für die Gleitungen in einzelnen Körnern gilt. Durch den Vergleich der Härte mit dem in dieser Arbeit untersuchten metastabilen Edelstahl wird in Roth (2012) abgeschätzt, dass die so ermittelte Fließschubspannung auch bei der Simulation des Risswachstums in diesem Werkstoff verwendet werden kann.

Um das Risswachstum zu simulieren, werden die jeweils zwei an der Rissspitze aktiven Gleitebenen vorgegeben und sind in Bild 5.5a eingezeichnet. Die räumliche Lage der Gleit-

ebenen ergibt sich aus den Kornorientierungen, die mit Hilfe einer EBSD-Analyse (*engl. electron backscatter diffraction*) bestimmt wurden. Bei der Ausdehnung der rechten Gleitebene an der unteren Rissspitze müssen die im Vorfeld des Risswachstums gebildeten Martensitbereiche berücksichtigt werden. Für die Modellbildung soll hier – sicherlich vereinfachend – die in Bild 5.4b markierte Phasengrenze die Ausdehnung der plastischen Zone beschränken. Die Gleitebenen an der unteren Rissspitze sind etwa senkrecht zur betrachteten Oberfläche ausgerichtet und entsprechen so den Voraussetzungen, um das zweidimensionale Modell einsetzen zu können. An der oberen Rissspitze steht die linke Gleitebene ebenfalls näherungsweise senkrecht zur Betrachtungsebene; die rechte schließt dagegen einen Winkel von etwa  $55^\circ$  mit der Oberfläche ein. In wieweit das reale Risswachstum an dieser Rissspitze mit dem zweidimensionalen Modell nachvollzogen werden kann, ist daher Gegenstand der in diesem Abschnitt durchgeführten Untersuchung.

Die risstragenden Körner und die daran angrenzenden werden mit Randelementen mit Absolutverschiebungsansätzen umschlossen, so dass ihnen individuelle Steifigkeiten zugewiesen werden können. Sie erhalten die Elastizitätsmoduln in Zugrichtung, die sich aus den anisotropen elastischen Konstanten der Körner errechnen (Gleichung (2.12)). Dabei weist das Korn oberhalb der Rissinitiierung einen Elastizitätsmodul von ca. 231GPa in Zugrichtung auf, während die Steifigkeiten des Kornes unterhalb (ca. 168GPa) und des Kornes rechts (ca. 171,5GPa) deutlich niedriger liegen. Der nachgebildete Bereich des Gefüges wird in eine große homogene Scheibe eingebettet, deren Steifigkeit dem makroskopischen Elastizitätsmodul des Werkstoffs entspricht.

Bei der Simulation der Phasentransformation errechnet sich die einer Partialversetzung entsprechende Abgleitung von  $T = 0,059\text{nm}$  aus der Kantenlänge der Einheitszelle. Die Abgleitungen von  $T/3$  auf der ersten und  $T/2$  auf der zweiten Gleitebene, die auf an der Rissspitze aktiven Ebenen möglich sind, betragen somit etwa 0,02nm bzw. 0,03nm. Der mittlere Abstand zwischen zwei aktiven Gleitebenen wird als Modellparameter mit  $d = 1\text{nm}$  gewählt, was etwa dem fünffachen Abstand zweier im Kristall möglicher paralleler Ebenen entspricht.

Da die Untersuchungen der Auswirkungen der Steifigkeit des Martensitbereiches (vgl. Abschnitt 4.3.4) zeigten, dass die Rissausbreitung durch deren Variation nur sehr wenig beeinflusst wird, erhält die Transformationszone einen mittleren Elastizitätsmodul von  $E_M = 200\text{GPa}$ . Die Volumendehnung, bei der es sich dagegen um eine wesentliche Einflussgröße des Risswachstums handelt, errechnet sich nach der in Abschnitt 3.1.4 beschriebenen

Weise aus der räumlichen Lage der Gleitebenen, deren plastische Abgleitungen zur Phasenumwandlung geführt haben. Die dabei erhaltenen Dehnungen von  $\varepsilon_{M1} = 1,77\%$  an der oberen und  $\varepsilon_{M2} = 1,65\%$  an der unteren Rissspitze sind von vergleichbarer Größe.

Als Ausgangssituation für die Risswachstumssimulation wurde der in Bild 5.5a dargestellte Anfangsriss bei  $N = 27500$  Lastwechseln verwendet und seine Ausbreitung bis zu einer Zyklenzahl von etwa  $N = 44000$  berechnet. Dabei wurde nicht jeder reale, sondern lediglich repräsentative Beanspruchungszyklen nachgebildet, die das Risswachstum mehrerer realer Zyklen zusammenfassen. Bei der Rissausbreitungssimulation (vgl. Krupp et al. 2013) werden der Risspfad sowie die Ausdehnung der Umwandlungszone ermittelt, die Bild 5.5a ebenfalls zeigt und mit dem experimentell ermittelten Rissverlauf und Transformationsbereich vergleicht.

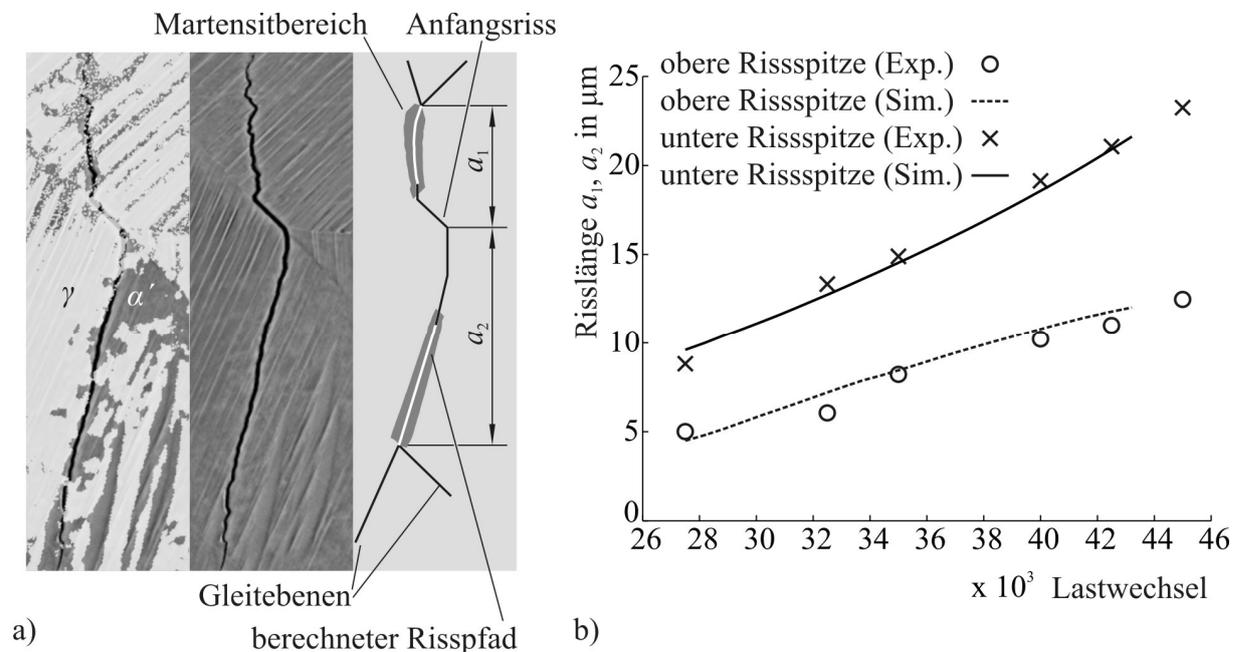


Bild 5.5: Vergleich zwischen realem und simuliertem Risswachstum mit a) dem Risspfad sowie der Größe der Martensitbereiche und b) der Risslänge  $a_1$  bzw.  $a_2$  über der Lastwechselanzahl  $N$  als Maß für die Risswachstumsgeschwindigkeit (vgl. Krupp et al. 2013).

Die Rissausbreitungsrichtung wurde hierbei nicht mit einer kristallographischen Richtung in der neu gebildeten Martensitphase vorgegeben, sondern aus dem Verhältnis der Abgleitungen an der Rissspitze (vgl. Bild 2.12, Künkler 2007) ermittelt. Dennoch wächst der Riss an der unteren Rissspitze sehr geradlinig, allerdings mit einer leichten Winkelabweichung vom realen Risspfad. An der oberen Rissspitze sind sich der experimentelle und der berechnete Rissverlauf zu Beginn der Simulation ebenfalls ähnlich. Mit zunehmender Länge wächst der Riss

jedoch zu weit nach rechts, was auf eine Überbewertung des rechten Gleitbandes durch das zweidimensionale Modell zurückgeführt werden kann: Die Gleitspur liegt unter etwa  $45^\circ$  zur äußeren Beanspruchung und ist damit bezüglich plastischer Abgleitung ideal ausgerichtet. Da die zugehörige Gleitebene jedoch nicht senkrecht zur Oberfläche steht, sondern unter einem Winkel von  $55^\circ$ , sind die dreidimensionalen Schubspannungen geringer als vom zweidimensionalen Modell berechnet, so dass das aus der Abgleitung bestimmte Risswachstum zu stark in die Richtung der überbewerteten Gleitebene weist. Wie besonders an der unteren Rissspitze zu erkennen ist, wird die reale Risswachstumsrichtung auch ohne Vorgabe einer Gleitebene im Martensit als Richtung der Rissausbreitung nachvollzogen. Dies lässt die Vermutung zu, dass der Riss im Umwandlungsgebiet diejenige Gleitebene für sein Wachstum wählt, die durch die Spannungs- und Verschiebungsverhältnisse an der Rissspitze günstig für die Rissausbreitung orientiert ist.

Die Größe der berechneten Transformationsbereiche ist nur schwer mit den stark zerklüfteten realen Umwandlungsgebieten zu vergleichen, die mittlere Breite von realem und berechnetem Martensitbereich ist jedoch ähnlich. Um aus der während der Rissausbreitung bestimmten zyklischen Riss Spitzenabgleitung  $\Delta CTSD$  mit Hilfe des Risswachstumsgesetzes von Wilkinson et al. (1998,  $da/dN = C \cdot \Delta CTSD^m$ ) die zugehörige Rissverlängerung zu berechnen, müssen die hierin enthaltenen werkstofftechnischen Konstanten  $C$  und  $m$  ermittelt werden.  $m$  wird dabei mit 1 vorgegeben und  $C$  durch Vergleich der experimentellen und simulierten Daten angepasst. Zwar kann die Konstante mit nur einem Riss nicht allgemeingültig bestimmt werden, zumindest lässt sich mit  $C = 0,017$  ein Wert finden, mit dem die Risswachstumsgeschwindigkeiten an beiden Rissspitzen aus den  $\Delta CTSD$ -Werten berechnet werden können. In Bild 5.5b sind die realen und die simulierten Risslängen über der realen Zyklenzahl aufgetragen und es kann zwischen ihnen eine gute Übereinstimmung gefunden werden.

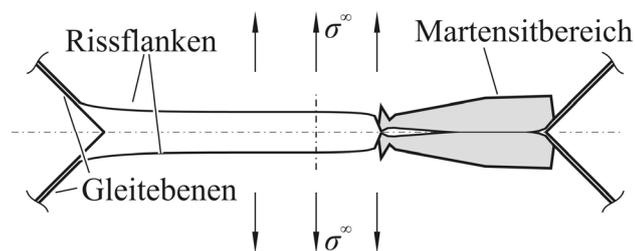
Die bei der Nachrechnung des Wachstums eines realen Risses erreichten guten Ergebnisse sollen nicht den Eindruck vermitteln, dass mit dem in dieser Arbeit entwickelten Modell das Ausbreitungsverhalten jedes beliebigen Risses nachvollzogen werden kann, der im Allgemeinen unter dem Einfluss dreidimensionaler Effekte steht. Vielmehr unterstreicht das erzielte Ergebnis die Gültigkeit der in Abschnitt 3.1 identifizierten Mechanismen des Risswachstums, während dessen es lokal an der Rissspitze zur Phasentransformation kommt.

## 6 Zusammenfassung und Diskussion

Unter zyklischer Beanspruchung mit hohen Lastspielzahlen (HCF, engl. *high cycle fatigue*) nimmt die Ausbreitung kurzer Ermüdungsrisse häufig einen wesentlichen Teil der Lebensdauer ungekerbter Bauteile ein. Daher ist zur fundierten Abschätzung von Bauteillebensdauern oder zur Steigerung der Ermüdungsfestigkeit eines Werkstoffs durch metallurgische Maßnahmen ein vertieftes Verständnis der Kurzrischwachstumsmechanismen unerlässlich. Mikrostrukturell kurze Risse wachsen auf kristallographischen Ebenen, wobei ihr Ausbreitungsverhalten stark von mikrostrukturellen Barrieren wie Korn- und Phasengrenzen beeinflusst wird. Es unterscheidet sich somit maßgeblich vom Wachstum langer Risse und kann nicht durch kontinuumsmechanische Ansätze nachgebildet werden.

### Kurzrischwachstum in einem metastabilen austenitischen Edelstahl

In dem in dieser Arbeit untersuchten metastabilen austenitischen Edelstahl kommt es während des Kurzrischwachstums zu einer Wechselwirkung der Risse mit einer an der Rissspitze auftretenden Phasentransformation: In diesem Bereich liegen hohe plastische Dehnungen vor, die eine Umwandlung von der kubisch flächenzentrierten austenitischen Ausgangsphase in die kubisch raumzentrierte Martensitphase verursachen. Da es hierbei im transformierten Werkstoff zu einer Volumenzunahme kommt, können in der Umgebung der Rissspitze Druckspannungen entstehen, die zum transformationsinduzierten Riss schließen führen und somit die Triebkraft zur Rissausbreitung verringern. Bild 6.1 skizziert zur Veranschaulichung des Riss schließens beispielhaft einen Riss im mikrostrukturbestimmten Stadium II-Risswachstum, bei dem nur am rechten Ende ein Martensitbereich vorliegt.



*Bild 6.1: Riss mit einseitigem Martensitbereich. Die äußere Zugbeanspruchung  $\sigma^\infty$  wurde von ihrem Maximalwert reduziert bis Kontakt zwischen den Rissflanken eintritt. (Die Rissöffnungsverschiebung und die Breite des Martensitbereichs sind vergrößert dargestellt.)*

In der dargestellten Situation wurde die äußere Beanspruchung  $\sigma^\infty$  von der maximalen Zugspannung reduziert bis es zwischen den Rissflanken zum Kontakt kommt. Dies ist im Bereich

der Umwandlungszone bereits der Fall, obwohl die äußere Spannung noch im Zugbereich liegt. Der restliche Riss ist zum gleichen Zeitpunkt noch vollständig geöffnet.

### **Bestehende Modelle des Kurzrisswachstums und der Martensitbildung**

In der Literatur vorhandene Modelle bilden die Kurzrissausbreitung oft nur vereinfachend durch empirische Ansätze nach (z.B. Hobson et al. 1986) oder beschränken sich auf eindimensionale Geometrien (z.B. Navarro und de los Rios 1988), so dass sie für eine mechanismentorienteerte Modellierung des nicht eindimensional erfassbaren Phasenumwandlungsprozesses ungeeignet sind. Darüber hinaus existieren mechanistische Modelle (z.B. Bjerkén und Melin 2003, 2004 und Hansson und Melin 2005, 2006), in denen das Risswachstum durch die Nachbildung einzelner Versetzungen sehr detailliert beschrieben wird. Ihre numerische Lösung ist jedoch mit großem Rechenaufwand verbunden, so dass diese Modelle für eine Erweiterung hinsichtlich der Berücksichtigung martensitischer Phasentransformation ebenfalls als ungeeignet erscheinen.

Die diffusionslose Umwandlung der austenitischen Ausgangsphase in die Martensitphase wird von Bogers und Burgers (1964) durch Scherungen auf zwei verschiedenen kristallographischen Ebenen erklärt. Auf dieser Grundlage erkennen Olson und Cohen (1972), dass sich die zur Phasentransformation erforderlichen Martensitkeime auf diesen einander kreuzenden Scherbändern bilden. Eine Quantifizierung des umgewandelten Werkstoffvolumens wird beispielsweise von Olson und Cohen (1975) vorgenommen, wobei als bestimmender Parameter die plastische Dehnung einbezogen wird. Das von den Autoren entwickelte Modell ist jedoch lediglich unter einsinniger Zugbeanspruchung gültig und kann nicht auf die lokal an der Risspitze erfolgende Phasentransformation während der Ermüdung übertragen werden. Hallberg et al. (2012) stellen dagegen ein Modell vor, das zwar zur Bestimmung der Größe von Martensitbereichen an einer Risspitze geeignet ist, sich aber auf lange Risse beschränkt. Zusätzlich untersuchen Mei und Morris (1991) den Einfluss der Volumendehnung des Umwandlungsbereiches auf das Riss schließen an einem eindimensionalen Riss.

So liegen in der Literatur zwar Modelle zur Bestimmung der Größe von Martensitbereichen und deren Rückwirkung auf einen Riss vor; in ihrer Kombination und mit Ausrichtung auf die mikrostrukturbestimmten Vorgänge an der Spitze kurzer Risse sind dem Autor jedoch keine Arbeiten bekannt. Ziel der vorliegenden Dissertation war daher die Entwicklung eines neuen zweidimensionalen Modells zur Beschreibung des durch lokale Phasenumwandlung beeinflussten Kurzrisswachstums.

### **Experimentelle Untersuchungen und Vorarbeiten der Modellbildung**

Dem in dieser Arbeit entwickelten Kurzzrissmodell liegen die Ergebnisse umfangreicher experimenteller Untersuchungen zugrunde, die im Rahmen des Gemeinschaftsprojektes am Institut für Werkstofftechnik erzielt wurden (Roth 2012). Hiernach entstehen Risse bereits nach kurzer Ermüdungsbeanspruchung von etwa 10 bis 15% der Probenlebensdauer zumeist auf Korn- oder Zwillingsgrenzen. Kurz nach ihrer Entstehung verlassen sie jedoch diese Grenzen und schwenken auf transkristallines Risswachstum um. Dabei kann Stadium I-Risswachstum mit nur einer an der Risspitze aktiven Gleitebene auftreten, bei dem keine Phasentransformation beobachtet wird. Weitaus häufiger ist jedoch die Rissausbreitung, bei der zwei Gleitebenen in den Austenitkörnern betätigt werden und die martensitische Umwandlung in der Umgebung der Risspitze erfolgt. Der Riss wächst dann in der neu gebildeten Phase auf einer kristallographischen Ebene.

Auf den ersten Fall wurde in dieser Arbeit nicht eingegangen, da er sich mit dem Kurzzrissmodell von Schick (2004) und Künkler (2007) behandeln lässt. Dieses zweidimensionale Modell, das eine Erweiterung des Modells von Navarro und de los Rios (1988) darstellt, berücksichtigt den Riss und bildet plastische Bereiche durch Abgleitung auf kristallographischen Ebenen nach. Dabei bezieht es Korn- und Phasengrenzen ein, die gegenüber dem Risswachstum als Barriere wirken, behandelt den Werkstoff ansonsten jedoch kontinuumsmechanisch. Zur numerischen Lösung der hierin auftretenden Differentialgleichungen kommt die Randelementemethode mit Relativverschiebungsansätzen zum Einsatz. Da dieser Modellierungsansatz die wesentlichen Mechanismen der Kurzzrissausbreitung bei verhältnismäßig geringem Rechenaufwand berücksichtigt, dient es als Grundlage für die Nachbildung des Risswachstums unter dem Einfluss der martensitischen Phasenumwandlung.

### **Modell des Kurzzrisswachstums in einem metastabilen austenitischen Edelstahl**

Das in Abschnitt 3.1 entwickelte Modell des Kurzzrisswachstums in einem metastabilen austenitischen Edelstahl verfolgt das Ziel, die wesentlichen mikrostrukturellen Vorgänge des Risswachstums und der Phasentransformation nachzubilden. Hierzu wird zunächst das während einer zyklischen äußeren Beanspruchung an der Risspitze auftretende Spannungsfeld untersucht, um zu ermitteln, ob es zur Aktivierung zweier unterschiedlich orientierter Gleitsysteme ausreicht. Ist dies der Fall, wird angenommen, dass es in jedem dieser Systeme auf vielen parallelen Gleitebenen zur plastischen Abgleitung kommt, die jedoch nicht direkt durch die Risspitze verlaufen. Infolgedessen entsteht in der Umgebung der Risspitze ein Feld aus sich kreuzenden Scherbändern. Nach der Vorstellung von Olson und Cohen (1972) erfolgt die

Martensitbildung im Bereich solcher sich kreuzender Scherbänder. Dementsprechend wird die Größe der Transformationszone aus der Ausdehnung des Gebietes berechnet, in dem Schnittpunkte aktiver Gleitebenen vorliegen. Dabei wird im Modell nicht jede dieser Ebenen einzeln abgebildet, sondern vereinfachend nur ein repräsentatives Gleitband je Gleitsystem berücksichtigt, in dem die plastische Verformung auf allen Gleitebenen der entsprechenden Richtung zusammengefasst werden. Diese repräsentativen Gleitebenen lassen sich wie im Modell von Schick und Künkler als schmale Schnitte im Werkstoff auffassen, auf denen eine tangentielle Verschiebung – und damit eine Abgleitung – erfolgen kann. Es wird angenommen, dass jede aktive Gleitebene nur ein festes Maß an Abgleitung aufnehmen kann. Die Anzahl der an der Verformung beteiligten Gleitebenen eines Gleitsystems kann somit aus der Abgleitung der entsprechenden repräsentativen Gleitebene berechnet werden. Die Gesamtbreite der aktiven Gleitebenen des betrachteten Systems bestimmt sich dann aus der Anzahl der aktiven Gleitebenen und deren mittleren Abstand, der als Modellparameter der Metastabilität des Werkstoffs Rechnung trägt. Unter Einbeziehung beider an der Rissspitze aktiver Gleitsysteme lässt sich nun der Schnittbereich ermitteln, in dem gleichzeitig plastische Verformung in unterschiedlichen Richtungen vorliegt. Diese Zone gibt die Größe des sich einstellenden Martensitbereichs vor.

Darüber hinaus wird die plastische Verformung an der Rissspitze auch zur Bestimmung des Rissfortschritts herangezogen: Aus den zyklischen plastischen Abgleitungen auf beiden an der Rissspitze aktiven repräsentativen Gleitebenen wird durch vektorielle Addition eine resultierende Abgleitung berechnet, die im Allgemeinen eine beliebige Orientierung zwischen den Gleitebenen einnehmen kann. Da Roth (2012) jedoch in experimentellen Risswachstumsuntersuchungen feststellt, dass die Rissausbreitung auf einer kristallographischen Ebene in der neu gebildeten Martensitphase erfolgt, wird die resultierende Abgleitung auf diese Richtung projiziert. Die nun parallel zur Risswachstumsrichtung orientierte Abgleitung wird als Rissspitzenabgleitung interpretiert, aus deren zyklischer Veränderung der Rissfortschritt je Zyklus gemäß des Risswachstumsgesetzes von Wilkinson et al. (1998) berechnet wird. Bei der Nachrechnung eines realen Risses konnte jedoch festgestellt werden, dass der Riss für sein Wachstum eine Gleitebene im Martensit auswählt, die nah an der Richtung der resultierenden Abgleitung liegt. Diese Richtung wurde aus der vektoriellen Addition der plastischen Abgleitungen der repräsentativen Gleitebenen an der Rissspitze ermittelt.

Neben der Vorgabe der Rissausbreitungsrichtung durch eine kristallographische Ebene im Martensit kommt es auch durch die Volumenzunahme des umgewandelten Werkstoffs zu ei-

ner Wechselwirkung mit der Transformationszone. In ihr wird eine zusätzliche Dehnung aufgebracht, durch die sich an der Rissspitze Druckspannungen einstellen, die sich der äußeren Beanspruchung überlagern.

### **Numerische Modelllösung**

Zur Berechnung der im Modell ausgewerteten mechanischen Größen, wie z.B. die Verschiebungen an der Rissspitze, reichen analytische Lösungsmethoden nicht aus. Aus diesem Grund wurde hierfür in Abschnitt 3.2 ein numerisches Verfahren auf Basis der Randelementemethode entwickelt. Im Gegensatz zum Einsatz der Finiten-Elemente-Methode, bei dem das betrachtete Gebiet vernetzt wird, ist bei Verwendung von Randelementen lediglich die Diskretisierung der Gebietsränder erforderlich. Zu ihnen zählen der Riss und die aktiven Gleitebenen, bei denen durch Öffnung und Abgleitung bzw. bei letzteren nur durch Abgleitung Relativverschiebungen auftreten. Zusätzlich müssen Bereiche mit unterschiedlichen Eigenschaften – wie die Bereiche austenitischer und martensitischer Phase – voneinander abgegrenzt werden. Hierbei bleiben die Bereichsgrenzen fest miteinander verbunden und es dürfen somit nur Absolutverschiebungen auftreten. Daher wurden in dieser Arbeit Randelemente mit Relativverschiebungsansätzen zur Vernetzung von Riss und Gleitebenen eingesetzt; Martensitbereiche werden dagegen von Randelementen mit Absolutverschiebungsansätzen umschlossen. Um beide Elementtypen verwenden zu können, wurde ein Superpositionsverfahren angewendet. Es ist so möglich, den Martensitbereichen elastische Eigenschaften zuzuweisen, die von der austenitischen Ausgangsphase abweichen; vor allem kann jedoch die zusätzlich in diesen Bereichen auftretende Dehnung berücksichtigt werden.

Da das Lösungsverfahren die Unterteilung des betrachteten Gebiets erlaubt und den Teilgebieten unterschiedliche elastische Eigenschaften zugewiesen werden können, ist es nun zusätzlich möglich, auch die Gefügekörner mit Randelementen zu umschließen. Ihrer anisotropen Elastizität kann so durch die Zuweisung eines individuellen Elastizitätsmoduls näherungsweise Rechnung getragen werden. Er lässt sich aus der Kornorientierung bestimmen.

Die Validierung des entwickelten numerischen Verfahrens erfolgte durch dessen Anwendung auf einfache Rissprobleme. So konnte seine Konvergenz anhand der Berechnung von Spannungsintensitätsfaktoren an einem Riss in einer Zugprobe nachgewiesen werden. Seine Eignung zur Berechnung bruchmechanischer Kenngrößen ließ sich auch in rissbehafteten Gebieten unterstreichen, die bereichsweise unterschiedliche elastische Eigenschaften aufweisen. Zudem wurde untersucht, in wieweit die Vereinfachung zulässig ist, die anisotrope Elastizität der Gefügekörner lediglich durch ihre Steifigkeit in Beanspruchungsrichtung zu berücksichti-

gen. Hierzu wurden unter Verwendung des Diskretisierungsverfahrens der Finite-Elemente-Methode Schubspannungen auf Gleitebenen berechnet, die für das Kurzrissswachstum bestimmend sind. Dabei wurden Ergebnisse verglichen, bei denen einerseits die anisotrope Elastizität der Körner einbezogen wurde oder andererseits lediglich ihre Steifigkeit in Beanspruchungsrichtung als isotroper Wert. Bei senkrecht auf der betrachteten Oberfläche stehenden Gleitebenen ließen sich im Inneren der Körner gute Übereinstimmungen der Schubspannungen finden, wenn diese Ebenen einen Winkel von 30 bis 60° mit der Zugrichtung einschließen. Oft weisen Gleitebenen, die beim Risswachstum betätigt werden, eine solche Orientierung auf, so dass bereits mit einer Verbesserung bei der Simulation des Risswachstums gegenüber Modellen zu rechnen ist, die das gesamte Gefüge bezüglich der Steifigkeit als homogen betrachten. Zudem kann der Einfluss unterschiedlicher elastischer Eigenschaften der Körner auf das Risswachstum prinzipiell untersucht werden. Für zukünftige Arbeiten ist jedoch die vollständige Einbindung der anisotropen Elastizität der Körner wünschenswert, da hierdurch eine genauere Berechnung von Spannungen auch auf Gleitebenen mit allgemeiner Orientierung zu erwarten ist.

### **Simulation der mikrostrukturbestimmten Kurzrisssausbreitung**

Das in dieser Arbeit entwickelte Kurzrisssmodell wurde in Abschnitt 4 eingesetzt, um das mikrostrukturbestimmte Kurzrissswachstum anhand einiger Beispiele zu untersuchen. Die Verwendung lediglich einfacher Geometrien sollte dabei eine erleichterte Interpretation der Ergebnisse ermöglichen. So wurden hier nur rechteckige Körner betrachtet und mögliche Gleitebenen liegen meist unter einem Winkel von 45° zur Beanspruchungsrichtung vor. Dabei wurde das Stadium I-Risswachstum mit nur einer aktiven Gleitebene an jeder Rissspitze und das mikrostrukturbestimmte Stadium II-Risswachstum betrachtet, bei dem zwei unterschiedlich orientierte Gleitebenen an der Rissspitze betätigt werden. Zunächst wurde während der zyklischen Beanspruchung keine Phasentransformation zugelassen. Gegenstand der Untersuchung war hier, in welcher Weise die Kurzrisssausbreitung beeinflusst wird, wenn der Riss einzelne Körner durchläuft, deren Elastizitätsmodul von der Steifigkeit des übrigen Gefüges abweicht.

Bemerkenswert ist, dass das qualitative Wachstumsverhalten von Stadium I- und II-Rissen hierbei ähnlich ist: In einem Korn mit gegenüber den Nachbarkörnern reduziertem Elastizitätsmodul wird die Beanspruchung herabgesetzt und der Riss wächst mit verringerter Geschwindigkeit auf die Korngrenze zu. Gleichzeitig liegt an der Rissspitze eine verringerte Spannungssingularität vor. Hierdurch muss der Riss im Vergleich zu einem homogenen Ge-

füge dichter an die Grenze heranwachsen, um Gleitebenen im Nachbarkorn zu aktivieren, was ein sprunghaftes Ansteigen der Risswachstumsrate zur Folge hat. Im steiferen Nachbarkorn wird die Rissausbreitung durch gegenläufige Effekte beeinflusst: Durch die erhöhte Steifigkeit des Kornes wird die Verformung an der Risspitze erschwert, was das Risswachstum verlangsamt. Gleichzeitig nimmt das steifere Korn eine größere Belastung auf, was die Ausbreitung des Risses begünstigt. Es zeigt sich, dass der erste Effekt direkt nach der Überwindung der Korngrenze durch den Riss dominiert, zweiterer aber im Verlauf des weiteren Risswachstums zunimmt und dann dem ersten überwiegt.

Weitere Untersuchungen betrafen den Einfluss von Körnern, die eine Volumendehnung aufweisen. Dies kann vorkommen, wenn beispielsweise durch Vorverformung einzelne Körner vollständig in die Martensitphase umgewandelt wurden. Der äußeren Beanspruchung überlagert sich dabei eine zusätzliche Druckspannung, die von der in diesen Körnern aufgebrachtten Dehnung hervorgerufen wird. Hier zeigt sich bei Stadium I- und II-Risswachstum ein deutlich gegensätzliches Verhalten: Im Stadium I bewirkt die Druckspannung in den entsprechenden Körnern eine Verschiebung der Mittelspannung. Unter äußerer Zugspannung verringert sich dadurch die Risspitzenabgleitung gegenüber einem Fall ohne Volumendehnung. Bei maximaler äußerer Druckbeanspruchung kommt es dagegen zu einer größeren Verformung an der Risspitze. Da für die Rissausbreitungsgeschwindigkeit nur die zyklische Veränderung der Risspitzenabgleitung von Interesse ist, hat die zusätzliche Dehnung bei geraden Risspfaden keinen Einfluss auf die Risswachstumsrate. Erst wenn der Riss an den Korngrenzen abknickt, weil die benachbarten Körner unterschiedliche Orientierungen aufweisen, verstärkt die Volumendehnung einzelner Körner die ohnehin auftretenden geometrischen Riss-schließeffekte. Lediglich die Aktivierung von Gleitebenen im Nachbarkorn erfolgt bei einem größeren Abstand zwischen Risspitze und Korngrenze, wenn in einem der Körner eine zusätzliche Dehnung vorliegt.

Wächst ein Riss dagegen im mikrostrukturbestimmten Stadium II, werden die Abgleitungen auf den Gleitebenen vor einer Risspitze behindert, wenn der Riss in einem Teil des Beanspruchungszyklus geschlossen ist. Bereits geringe zusätzliche Dehnungen bewirken dabei, dass sich der Anteil des Zyklus mit geschlossenem Riss stark verlängert. Die zyklische Abgleitung auf den Gleitebenen wird hierdurch vermindert, so dass selbst kleinste Volumendehnungen eine erhebliche Verringerung der Risswachstumsrate verursachen. Trifft ein Riss auf ein Korn mit Volumendehnung, reicht ein größerer Abstand zur Korngrenze aus, um zusätzliche Gleitebenen zu aktivieren. Verlässt der Riss dagegen ein solches Korn, ist hierfür – im

Vergleich zum Fall ohne zusätzliche Dehnung – ein geringerer Abstand zur Grenze erforderlich.

Die in dieser Arbeit neu in die Kurzrisssimulation einbezogene Phasentransformation an der Risspitze beeinflusst das Risswachstum durch unterschiedliche Effekte: Die Volumendehnung des Umwandlungsbereiches, die Größe des Transformationsgebietes und die Steifigkeit des umgewandelten Werkstoffs haben jeweils eigene Auswirkungen auf die Kurzrissausbreitung, die experimentell nur in ihrem Zusammenwirken zu beobachten sind. Das Modell bietet dagegen die Möglichkeit, diese Effekte in ihrer Einzelwirkung zu untersuchen. Mit dieser Zielsetzung wurden die nachfolgend zusammengefassten Simulationen vorgenommen, bei denen die Wahl rechteckiger Körner und eine Rissausbreitung unter reiner Modus I Beanspruchung eine vereinfachte Interpretation der Resultate erlaubt.

Zur Untersuchung des Einflusses der Volumendehnung auf das Kurzrissswachstum wurden den umgewandelten Bereichen unterschiedliche Dehnungen zugewiesen. Da die Volumenzunahme das Spannungsfeld und damit auch die plastischen Bereiche in der Umgebung der Risspitze beeinflusst, sind die sich während des Risswachstums bildenden Martensitbereiche zwar nicht identisch aber von vergleichbarer Größe. Die Risswachstumsrate verringert sich dagegen mit zunehmender Volumendehnung deutlich gegenüber dem Fall, in dem den Umwandlungsbereichen keine zusätzliche Dehnung aufgeprägt wurde. Bereits bei einer Volumenzunahme von 3% findet etwa eine Halbierung der Risswachstumsgeschwindigkeit statt. Steigende Dehnungen im Umwandlungsbereich führen zudem dazu, dass die plastischen Zonen vor der Risspitze Korngrenzen bei etwas größeren Risslängen überwinden.

In weiteren Simulationen wird die Volumendehnung konstant gehalten, wohingegen die Größe des Umwandlungsbereiches durch Veränderung des mittleren Abstandes der parallelen, aktiven Gleitebenen an der Risspitze variiert wird. Dieser Abstand beeinflusst die Ausdehnung der Zone mit sich kreuzenden Scherbändern, in der es zur martensitischen Umwandlung kommt. In Simulationen mit unterschiedlichen Gleitebenenabständen zeigt sich eine überproportionale Zunahme der Breite des sich während des Risswachstums bildenden Martensitbereichs. Erwartungsgemäß verringert sich die Risswachstumsrate um so stärker je breiter die Umwandlungszone ist. Ein schmaler Martensitbereich hat dabei jedoch eine verhältnismäßig große Wirkung, die sich mit größerer Ausdehnung der Umwandlungszone unterproportional verhält.

Die martensitische Transformation führt zu einer neuen Gitterstruktur (kubisch raumzentriert statt kubisch flächenzentriert), die mit einer neuen Kristallorientierung des umgewandelten Werkstoffs einhergeht. Dabei ändert sich die anisotrope Steifigkeitsmatrix des Kristalls und führt in Verbindung mit dessen Orientierung zu einer neuen Elastizität des Martensitbereichs in Zugrichtung, die im Allgemeinen von der Ausgangsphase abweicht. Um den hieraus resultierenden Einfluss auf die Risswachstumsgeschwindigkeit zu untersuchen, wurden in verschiedenen Rissausbreitungssimulationen unterschiedliche Elastizitätsmoduln des Martensitbereiches angenommen. Die Volumendehnung des umgewandelten Werkstoffs und der mittlere Abstand der aktiven Gleitebenen an der Risspitze blieben dagegen konstant. Obwohl die Steifigkeit der Umwandlungszone erheblich variiert wurde, ist kein wesentlicher Einfluss auf die Risswachstumsrate feststellbar. Daher ist es ausreichend, dem Martensitbereich einen festen mittleren Elastizitätsmodul zuzuweisen, ohne dabei die Orientierung des transformierten Werkstoffs zu berücksichtigen.

Das Risswachstum verlangsamt sich unter dem Einfluss lokal an der Risspitze auftretender martensitischer Phasentransformation aufgrund von Riss-schließvorgängen. Damit sich diese auswirken können, muss der Riss während eines Teils des Beanspruchungszyklus geschlossen sein. Es ist daher davon auszugehen, dass ausreichend große negative Werte der Unterspannung während der Ermüdung erforderlich sind, um vom Riss-schließen zu profitieren. Dies konnte durch Risswachstumssimulationen bei unterschiedlichen Spannungsverhältnissen bestätigt werden: Ist das Spannungsverhältnis aus Unter- und Oberspannung ausreichend negativ, kommen die Riss-schließeffekte zum Tragen und verringern die Risswachstumsgeschwindigkeit. Ist die Unterspannung und damit das Spannungsverhältnis null, ist bei der gewählten Konfiguration aus Volumendehnung und Größe der Umwandlungszone nur noch ein geringer Einfluss des Riss-schließens festzustellen. Soll der Vorteil der verlangsamteten Risswachstumsgeschwindigkeit eines Werkstoffs mit transformationsinduziertem Riss-schließen genutzt werden, ist dies nur bei ausreichend stark wechselnder Ermüdungsbeanspruchung Erfolg versprechend.

### **Anwendung auf weiterführende Rissprobleme**

Im Anschluss an die grundlegenden Untersuchungen der Einzeleinflüsse der martensitischen Phasenumwandlung auf das Risswachstum stellt Abschnitt 5 exemplarisch weiterführende Anwendungen des in dieser Arbeit entwickelten Kurzrissmodells und des numerischen Lösungsverfahrens vor. Hierzu zählt zunächst die Bestimmung von Spannungsintensitätsfaktoren an einem Riss in der Nähe eines Einschlusses, bei der eine gute Übereinstimmung mit

Referenzlösungen festzustellen ist. Der Einschluss kann dabei eine sehr hohe Steifigkeit oder einen Elastizitätsmodul nahe null aufweisen, so dass er sich in letzterem Fall als Pore interpretieren lässt. Es ist somit vorstellbar, das entwickelte numerische Lösungsverfahren auch für Modelle anzuwenden, die das Kurz- oder Langrisswachstumsverhalten von Werkstoffen mit Poren oder harten Einschlüssen beschreiben, wie es beispielsweise bei Gusswerkstoffen der Fall ist.

Anschließend wurde die Ausbreitung eines realen Risses in einem Bauteil simuliert. Hierbei handelt es sich um eine ebene Dreipunktbiegeprobe, die einer Ermüdungsbeanspruchung ausgesetzt war. In einer solchen Probe liegen aus der äußeren Belastung resultierende Biege- und Schubspannungen vor; zusätzlich enthält die Probe eine Störbohrung, so dass sich der Riss in einem komplexen Spannungsfeld ausbreitet. Der experimentell ermittelte Risspfad, der von einem künstlich eingebrachten Anfangsriss ausgeht, lässt sich in einer Risswachstumssimulation mit sehr guter Übereinstimmung nachvollziehen. Dies ist auf die realitätsnahe Aufbringung der Randbedingungen bei der gelenkig gelagerten Dreipunktbiegeprobe zurückzuführen: Durch die Vernetzung des Probenrandes mit Randelementen mit Absolutverschiebungsansätzen kann eine Normalverschiebung der Ränder der Lasteinleitungsbohrung verhindert werden, um eine Durchdringung von Bohrung und Krafteinleitungsbolzen auszuschließen. Gleichzeitig ist eine Tangentialverschiebung des Bohrungsrandes möglich, so dass kleine Verdrehungen der Probe gegenüber den Krafteinleitungsbolzen ermöglicht werden, um die gelenkige Lagerung nachzuempfinden. Somit kann das entwickelte numerische Lösungsverfahren auch zur Risswachstumssimulation in ebenen Bauteilen eingesetzt werden, wobei die Anwendbarkeit nicht auf einfache Lagerungsbedingungen wie beispielsweise eine feste Einspannung beschränkt ist.

Während für die grundlegenden Untersuchungen des Kurzrisswachstums unter dem Einfluss lokaler Phasentransformation lediglich einfache Gefüge verwendet wurden, sollte nun exemplarisch die Ausbreitung eines realen Kurzrisses simuliert werden. Hierzu wurde ein Riss ausgewählt, dessen Wachstum auf Gleitsystemen erfolgt, die größtenteils etwa senkrecht zur Werkstoffoberfläche ausgerichtet sind, um von dem zweidimensionalen Modell beschrieben werden zu können. Dabei ging die reale, an der Oberfläche sichtbare Korngeometrie und die Orientierung der in der Simulation berücksichtigten Gefügekörner ein. Während der Risswachstumssimulation stimmen die Rissausbreitungsgeschwindigkeit und die mittlere Breite des sich bildenden Martensitbereichs an beiden Rissenden gut mit den im Experiment ermittelten Werten überein.

### **Resümee und Ausblick**

Das Ziel der vorliegenden Dissertation, die wesentlichen Mechanismen der Kurzrisssausbreitung in einem metastabilen austenitischen Edelstahl einschließlich der Martensitbildung in einem Risswachstumsmodell nachzubilden, wurde erreicht. Bei der Simulation des Wachstums eines realen Risses wurden gute Ergebnisse erzielt, was die Gültigkeit dieser Mechanismen unterstreicht. Dennoch kann nicht davon ausgegangen werden, dass das zweidimensionale Modell das Ausbreitungsverhalten beliebiger realer Risse nachbildet, da hierbei häufig dreidimensionale Effekte eine Rolle spielen. Insbesondere, wenn Gleitebenen an der Rissspitze aktiv sind, die unter einem spitzen Winkel zur Werkstoffoberfläche stehen oder der Riss selbst nicht senkrecht zur Oberfläche verläuft, ist damit zu rechnen, dass sich die Übereinstimmung von Simulationsergebnissen und experimentell beobachtetem Risswachstum verringert. Außerdem berücksichtigt das Modell nicht den Verdrehwinkel zwischen möglichen Gleitebenen an einer Korngrenze, die sich aus der Orientierung der Gleitebenen selbst aber auch aus der Orientierung der Korngrenze ergibt. Dieser Winkel hat jedoch einen wesentlichen Einfluss auf den Widerstand einer Korngrenze gegenüber der Ausbreitung der plastischen Zone vor der Rissspitze und damit auch auf das Risswachstum selbst.

Um solche Effekte einzubeziehen, entwickelt Köster (2014) ein dreidimensionales Risswachstumsmodell, bei dem beliebige Orientierungen von Riss, Gleitebenen und Korngrenzen berücksichtigt werden können. Zusätzlich geht die Risstiefe in das Modell ein und die Berechnung des Risswachstums in Tiefenrichtung wird beschrieben. Als numerisches Lösungsverfahren verwendet der Autor die Randelementemethode, wobei der Riss und die Gleitebenen durch flächenförmige Elemente nachgebildet werden. Der Rechenaufwand ist jedoch bereits bei geometrisch einfachen Rissproblemen erheblich.

Vor dem Hintergrund, die wesentlichen Mechanismen der Rissausbreitung in einem metastabilen austenitischen Edelstahl zu identifizieren und die Wirkung der entstehenden Martensitbereiche grundlegend zu untersuchen, erschien die deutlich aufwändigere dreidimensionale Modellierung für die vorliegende Arbeit nicht gerechtfertigt. Für weiterführende Arbeiten ist eine Zusammenführung des hier entwickelten Modells mit der oben beschriebenen dreidimensionalen Nachbildung des Werkstoffverhaltens dagegen wünschenswert. Die Bedeutung des Rechenaufwandes tritt dabei durch die Entwicklung immer leistungsfähigerer Rechner zurück; insbesondere bei der Simulation realer Rissausbreitung ist durch die Einbeziehung der dritten Dimension mit einer erheblichen Annäherung an experimentell untersuchte Risse zu rechnen.

Darüber hinaus ist die Ergänzung des in dieser Arbeit entwickelten Modells um die Ermittlung der Kristallorientierung anzustreben, die die Martensitbereiche nach der Phasentransformation aufweisen. Ihre Kenntnis ermöglicht es, bei einer Rissausbreitungssimulation vorherzusagen, welche kristallographische Ebene des Umwandlungsbereiches ein Riss zu seinem Wachstum nutzt. Soll beispielsweise die Ausbreitung eines realen Risses simuliert werden, wird die Orientierung der austenitischen Körner im betrachteten Gefüge durch eine EBSD-Analyse ermittelt und ist somit bekannt. Während der Rissausbreitungssimulation mit dem zweidimensionalen Modell erfolgt die Bestimmung der beiden Gleitebenen an einer Risspitze, auf denen es zu den Scherungen des Werkstoffs kommt, die zur Phasentransformation führen. Somit liegen bereits wesentliche Informationen vor, die zur Berechnung der Kristallorientierung des Martensitbereiches notwendig sind. Sie lässt sich nach dem Modell von Boppers und Burgers (1964) bestimmen, wenn auch die Gleitrichtungen bei den Scherungen bekannt sind. Hierbei handelt es sich jedoch um eine dreidimensionale Information, die einem zusammengeführten Modell entnommen werden könnte, das aus dem in dieser Arbeit entwickelten und aus dem oben beschriebenen Modell von Köster (2014) entstünde. Auch im zweidimensionalen Modell liegen die möglichen Gleitrichtungen aus der bekannten dreidimensionalen Kornorientierung vor; die Scherungen der Gleitebenen lassen sich aber nicht den Gleitrichtungen zuordnen. Hier wäre zu untersuchen, ob diese Zuordnung durch statistische Überlegungen mit ausreichender Zuverlässigkeit ergänzt werden kann.

Wie in dieser Arbeit gezeigt werden konnte, haben unterschiedliche elastische Steifigkeiten der Gefügekörner einen mitunter erheblichen Einfluss auf die Risswachstumsgeschwindigkeit. Hier wurde jedoch lediglich die aus der anisotropen Elastizität der Körner berechnete Steifigkeit in Zugrichtung berücksichtigt. Einen Ansatz, auch richtungsabhängige Effekte in einer Randelementemethode einzubeziehen, stellen Hilgendorff et al. (2013) vor. Ziel der Autoren ist die Modellierung der zyklisch irreversiblen plastischen Gleitung auf kristallographischen Ebenen unter VHCF-Beanspruchung (*engl. very high cycle fatigue*) mit geringen Beanspruchungsamplituden aber sehr hohen Lastspielzahlen. Mit Hilfe der entwickelten numerischen Methode ist es möglich, das in der vorliegenden Arbeit vorgestellte Modell des Wachstums kurzer Ermüdungsrisse hinsichtlich der Einbeziehung anisotroper Elastizität zu erweitern. Dies ist insbesondere anzustreben, wenn eine detailliertere Untersuchung der anisotropen Effekte bei der Rissausbreitung angestrebt wird. Vor allem in der Nähe von Korngrenzen ist hierdurch mit einer verbesserten Nachbildung des realen Risswachstumsverhaltens zu rechnen.

Die Weiterentwicklung des in dieser Arbeit entwickelten Modells in den oben beschriebenen Punkten ist anzustreben, da so die Genauigkeit der Ergebnisse noch erhöht und weitere Effekte des Kurzrissswachstums einbezogen werden können. Dennoch ließen sich bereits wichtige Erkenntnisse über das mikrostrukturbestimmte Kurzrissswachstum unter dem Einfluss der Martensitbildung erlangen. Die wichtigsten Ergebnisse dieser Arbeit werden abschließend hervorgehoben:

- Die für das mikrostrukturbestimmte Wachstum kurzer Ermüdungsrisse typische oszillierende Ausbreitungsgeschwindigkeit kann vom entwickelten Modell auch unter dem Einfluss der lokal an der Rissspitze auftretenden Phasenumwandlung nachvollzogen werden.
- Wird der anisotropen Steifigkeit der Gefügekörner Rechnung getragen, indem ihre individuelle Steifigkeit in Zugrichtung als isotroper Wert berücksichtigt wird, können anisotrope Effekte des Kurzrissswachstums qualitativ richtig berechnet werden. Werden bezüglich der äußeren Beanspruchung günstig orientierte Gleitebenen beim Rissswachstum betätigt, was meist der Fall ist, kann auch mit quantitativ guten Ergebnissen gerechnet werden.
- Das Kurzrissswachstum in Körnern geringerer Steifigkeit erfolgt langsamer als in steiferen Körnern, was durch experimentelle Untersuchungen bestätigt wird.
- Darüber hinaus wird festgestellt, dass die plastische Zone eine Korngrenze bei geringerer Risslänge überwindet, wenn das risstragende Korn steifer ist als das Nachbarkorn, in das sich der plastische Bereich ausbreitet. Bei umgekehrten Steifigkeitsverhältnissen ist hierzu eine größere Risslänge erforderlich.
- Die Volumenzunahme ganzer Gefügekörner beeinflusst das Stadium I-Rissswachstum nur, wenn hierbei geometrische Rissschließeffekte auftreten, da diese von ihr verstärkt werden.
- Im Gegensatz dazu bewirkt auch eine sehr geringe Volumenzunahme ganzer Körner bei der mikrostrukturbestimmten Stadium II-Rissausbreitung eine wesentliche Verringerung der zyklischen Rissspitzenabgleitung, die die Rissswachstumsgeschwindigkeit bestimmt.
- Bei der Simulation des Kurzrissswachstums unter dem Einfluss martensitischer Phasentransformation erweisen sich die Größe der Umwandlungsbereiche und die darin auftretende Volumendehnung als Haupteinflussgrößen auf das transformationsinduzierte Rissschließen.
- Da die Verringerung der zyklischen Rissspitzenabgleitung beim Kurzrissswachstum unter dem Einfluss der Phasentransformation auf Rissschließeffekte zurückzuführen ist, ist es

vom Spannungsverhältnis wesentlich beeinflusst. Ist die Unterspannung nicht niedrig genug, um einen Kontakt der Rissufer hervorzurufen, ergibt sich aus der Volumenzunahme des Umwandlungsbereiches kein Vorteil für die Risswachstumsgeschwindigkeit.

- Die Elastizität des Martensitbereiches, der während des Kurzrisswachstums gebildet wird, übt nahezu keinen Einfluss auf die Rissausbreitungsgeschwindigkeit aus. Daher ist die Vereinfachung zulässig, in entsprechenden Simulationen einen mittleren Wert der Martensitsteifigkeit anzunehmen.
- Die identifizierten und in das Modell implementierten Mechanismen der Kurzrissausbreitung bei gleichzeitiger martensitischer Phasentransformation ließen sich in einer exemplarischen Simulation eines realen Ermüdungsrissses bestätigen. Bezüglich der Risswachstumsgeschwindigkeit und der mittleren Breite der Martensitbereiche konnte eine gute Übereinstimmung mit dem Experiment erreicht werden.

Die Modellierung des Werkstoffverhaltens kann zur Findung von Ermüdungsmechanismen und deren Bestätigung wesentlich beitragen. Ihre detaillierte physikalische Beschreibung, die für die Modellbildung erforderlich ist, und die kritische Auseinandersetzung mit vermuteten Mechanismen, unterstützen auch deren experimentelle Untersuchung. Es ergeben sich bei der Erstellung und Weiterentwicklung eines Modells aber immer Fragestellungen, die nur durch experimentelle Untersuchungen beantwortet werden können. Eine Erweiterung des in dieser Arbeit entwickelten Kurzrissmodells sollte daher ebenfalls im Rahmen der interdisziplinären Zusammenarbeit erfolgen, die bereits in diesem und den Vorgängerprojekten zwischen dem Institut für Werkstofftechnik und dem Institut für Mechanik und Regelungstechnik - Mechatronik an der Universität Siegen erfolgreich praktiziert wurde. Während der Bearbeitung des in der vorliegenden Dissertation beschriebenen Projektes hat sich beim Autor die Meinung gefestigt, dass durch das Zusammenwirken von experimentellen Methoden mit einer gleichzeitigen Modellierung am wirksamsten ein tiefgehendes Verständnis komplexer Mechanismen bei technischen Fragestellungen zu erreichen ist.

## 7 Literaturverzeichnis

- Ameen, M. und Raghuprasad, B. K., 1994: A hybrid technique of modeling of cracks using displacement discontinuity and direct boundary element method. *International Journal of Fracture*, **67**, S. 343-355.
- Bain, E. C., 1924: The nature of martensite transformation. *AIME, Steel Division*, **70**, S. 25-46.
- Bartel, T. und Hackl, K., 2010: Multiscale modeling of martensitic phase transformations: On the numerical determination of heterogeneous mesostructures within shape-memory alloys induced by precipitates. *Technische Mechanik*, **30**, S. 324-342.
- Bilby, B. A.; Cottrell, A. H. und Swinden, K. H., 1963: Spread of plastic yield from a notch. *Proceedings of the Royal Society of London A*, **272**, S. 304-314
- Bjerkén, C. und Melin, S., 2003: A tool to model short crack fatigue growth using a discrete dislocation formulation. *International Journal of Fatigue*, **25**, S. 559-566.
- Bjerkén, C. und Melin, S., 2004: A study of the influence of grain boundaries on short crack growth during varying load using a dislocation technique. *Engineering Fracture Mechanics*, **71**, S. 2215-2227.
- Blochwitz, C. und Richter, R., 1999: Plastic strain amplitude dependent surface path of microstructurally short fatigue cracks in face-centred cubic metals. *Materials Science and Engineering A*, **267**, S. 120-129.
- Blochwitz, C. und Tirschler, W., 2005: Twin boundaries as crack nucleation sites. *Crystal Research and Technology*, **40**, S. 32-41.
- Blochwitz, C.; Jacob, S. und Tirschler, W., 2008: Grain orientation effects on the growth of short fatigue cracks in austenitic stainless steel. *Materials Science and Engineering A*, **496**, S. 59-66.
- Bogers, A. J. und Burgers, W. G., 1964: Partial dislocations on the {110} planes in the bcc lattice and the transition of the fcc into the bcc lattice. *Acta Metallurgica*, **12**, S. 255-261.
- Brebbia, C. A. und Dominguez, J., 1998: Boundary Elements - An Introductory Course. WIT Press / Computational Mechanics Publications, Ashurst Lodge, Ashurst, Southampton.
- Christ, H.-J., 1991: Wechselverformung von Metallen. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York.
- Christ, H.-J.; Düber, O.; Fritzen, C.-P.; Knobbe, H.; Köster, P.; Krupp, U. und Künkler, B., 2009: Propagation behaviour of microstructural short fatigue cracks in the high-cycle fatigue regime. *Computational Materials Science*, **46**, S. 561-565.

- Coffin, L. F., 1954: A study of the effects of cyclic thermal stresses on a ductile metal. *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers*, **76**, S. 931-950.
- Dong, C. Y.; Lo, S. H. und Cheung, Y. K., 2003: Numerical analysis of the inclusion-crack interactions using an integral equation. *Computational Mechanics*, **30**, S. 119-130.
- Doquet, V., 1999: Micromechanical simulations of microstructure-sensitive Stage I fatigue crack growth. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, **22**, S. 215-223.
- Düber, O., 2007: Untersuchungen zum Ausbreitungsverhalten mikrostrukturell kurzer Ermüdungsrisse in zweiphasigen metallischen Werkstoffen am Beispiel eines austenitisch-ferritischen Duplexstahls. VDI-Verlag, Reihe 5, Nr. 730, Düsseldorf.
- Düber, O.; Künkler, B.; Krupp, U.; Christ, H.-J. und Fritzen, C.-P., 2006: Experimental characterization and two-dimensional simulation of short-crack propagation in an austenitic-ferritic duplex steel. *International Journal of Fatigue*, **28**, S. 983-992.
- Dugdale, D. S., 1960: Yielding of steel sheets containing slits. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, **8**, S. 100-104.
- Elber, W., 1970 Fatigue crack closure under cyclic tension. *Engineering Fracture Mechanics*, **2**, S. 37-45.
- Erdogan, F. und Sih, G. C., 1963: On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear. *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers*, **85**, S. 519-527.
- Figuroa, J. C. und Laird, C., 1983: Crack initiation mechanisms in copper polycrystals cycled under constant strain amplitudes and in step tests. *Materials Science and Engineering*, **60**, S. 45-58.
- Floer, W., 2003: Untersuchungen zur mechanismenorientierten Lebensdauervorhersage an einer  $\beta$ -Titanlegierung. VDI-Verlag, Reihe 5, Nr. 679, Düsseldorf.
- Forsyth, P. J. E., 1962: A two stage process of fatigue crack growth. *Proceedings of the Crack Propagation Symposium*, **1**, S. 76-94.
- Gross, D. und Seelig, T., 2007: Bruchmechanik. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.
- Hall, E. O., 1951: The deformation and ageing of mild steel III. Discussion of results. *Proceedings of the Royal Society of London B*, **64**, S. 747-752.
- Hallberg, H.; Banks-Sills, L. und Ristinmaa, M., 2012: Crack tip transformation zones in austenitic stainless steel. *Engineering Fracture Mechanics*, **79**, S. 266-280.
- Hallberg, H.; Hakansson, P. und Ristinmaa, M., 2007: A constitutive model for the formation of martensite in austenitic steels under large strain plasticity. *International Journal of Plasticity*, **23**, S. 1213-1239.

- Han, H. N.; Lee, C. G.; Oh, C.-S.; Lee, T.-H. und Kim, S.-J., 2004: A model for deformation behavior and mechanically induced martensitic transformation of metastable austenitic steel. *Acta Materialia*, **52**, S. 5203-5214.
- Hansson, P. und Melin, S., 2005: Dislocation-based modelling of the growth of a microstructurally short crack by single shear due to fatigue loading. *International Journal of Fatigue*, **27**, S. 347-356.
- Hansson, P. und Melin, S., 2006: Influence of fatigue load range on the growth of a microstructurally short edge crack simulated by a discrete dislocation formulation. *International Journal of Fatigue*, **28**, S. 714-721.
- Hansson, P. und Melin, S., 2008: Simulation of simplified zigzag crack paths emerging during fatigue crack growth. *Engineering Fracture Mechanics*, **75**, S. 1400-1411.
- Heimann, W.; Oppenheim, R. und Weßling, W., 1985: Werkstoffkunde Stahl, Band 2: Anwendung, Nichtrostende Stähle. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York Tokio, Verlag Stahleisen, Düsseldorf.
- Heinz, A. und Neumann, P., 1990: Crack initiation during high cycle fatigue of an austenitic steel. *Acta Metallurgica et Materialia*, **38**, S. 1933-1940.
- Heitmann, H. H.; Vehoff, H. und Neumann, P., 1984: Life prediction for random load fatigue based on the growth behavior of microcracks. *Proceedings of the 6th International Conference on Fracture (ICF6)*, 4.-10. December 1984, New Delhi, India, S. 3599-3606.
- Hilgendorff, P.-M., 2009: Rissimulation unter Verwendung von Randelementen mit Absolut- und Relativverschiebungsansätzen – Verifikation und Anwendung. Studienarbeit, Institut für Mechanik und Regelungstechnik - Mechatronik, Universität Siegen.
- Hilgendorff, P.-M., 2011: Simulation der mikrostrukturellen Schädigungsentwicklung und deren Auswirkungen auf das Resonanzverhalten eines Austenitstahls im VHCF-Bereich. Diplomarbeit, Institut für Mechanik und Regelungstechnik - Mechatronik, Universität Siegen.
- Hilgendorff, P.-M.; Grigorescu, A.; Zimmermann, M.; Fritzen, C.-P.; Christ, H.-J., 2013: Simulation of irreversible damage accumulation in the very high cycle fatigue (VHCF) regime using the boundary element method. *Materials Science and Engineering A*, **575**, S. 169-176.
- Hills, D. A.; Kelly, P. A.; Dai, D. N. und Korsunsky, A. M., 1995: Solution of crack problems. Kluwer Academic Publishers, London.
- Hirth, J. P. und Lothe, J., 1982: Theory of dislocations. Wiley Interscience, New York.
- Hobson, P. D.; Brown, M. W. und de los Rios, E. R., 1986: Two phases of short crack growth in a medium carbon steel. in Miller, K. J. und de los Rios, E. R. (Hrsg.): *The behaviour of short fatigue cracks*, Mechanical Engineering Publications, London.

- Hornbogen, E., 1978: Martensitic transformation at a propagating crack. *Acta Metallurgica*, **26**, S. 147-152.
- Hornbogen, E., 2002: Some effects of martensitic transformation on fatigue resistance. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, **25**, S. 785-790.
- Huo, C. Y. und Gao, H. L., 2005: Strain-induced martensitic transformation in fatigue crack tip zone for a high strength steel. *Materials Characterization*, **55**, S. 12-18.
- Irwin, G. R., 1958: Fracture. In Flügge, S. (Hrsg.): *Handbuch der Physik*, Bd. 6, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York.
- Köster, P., 2014: Mechanismenorientierte Modellierung und Simulation der mikrostrukturbestimmten Kurzzrissausbreitung unter Berücksichtigung ebener und räumlicher Aspekte. Dissertation, Institut für Mechanik und Regelungstechnik - Mechatronik, Universität Siegen.
- Krueger, R., 2004: Virtual crack closure technique: History, approach, and applications. *Applied Mechanics Reviews*, **57**, S. 109-143.
- Krupp, U.; West, C. und Christ, H.-J., 2008: Deformation-induced martensite formation during cyclic deformation of metastable austenitic steel: Influence of temperature and carbon content. *Materials Science and Engineering A*, **481**, S. 713-717.
- Krupp, U.; Knobbe, H.; Christ, H.-J.; Köster, P. und Fritzen, C.-P., 2010: The significance of microstructural barriers during fatigue of a duplex steel in the high- and very-high-cycle-fatigue (HCF/VHCF) regime. *International Journal of Fatigue*, **32**, S. 914-920.
- Krupp, U.; Roth, I.; Christ, H.-J.; Kübbeler, M. und Fritzen, C.-P., 2013: On the mechanism of martensite formation during short fatigue crack propagation in austenitic stainless steel: experimental identification and modelling concept. *Electronic Proceedings of the 13th International Conference on Fracture*, 21.-26. Juni 2013, Peking, China
- Kübbeler, M., 2007: Kopplung von Randelementemethoden mit Absolut- und Relativverschiebungsansätzen zur Rissimulation. Diplomarbeit, Institut für Mechanik und Regelungstechnik - Mechatronik, Universität Siegen.
- Kübbeler, M.; Roth, I.; Krupp, U.; Fritzen, C.-P. und Christ, H.-J., 2010: Simulation of stage I-crack growth using a hybrid boundary element technique. *Engineering Fracture Mechanics*, **78**, S. 462-468.
- Künkler, B., 2007: Mechanismenorientierte Lebensdauervorhersage unter Berücksichtigung der Mikrostruktur - Modellentwicklung, Verifikation und Anwendung. VDI-Verlag, Reihe 18, Nr. 312, Düsseldorf.
- Künkler, B.; Düber, O.; Köster, P.; Krupp, U.; Fritzen, C.-P. und Christ, H.-J., 2008: Modelling of short crack propagation – Transition from stage I to stage II. *Engineering Fracture Mechanics*, **75**, S. 715-725.

- Kurdjumow, G. V. und Sachs, G., 1930: Über den Mechanismus der Stahlhärtung. *Zeitschrift für Physik*, **64**, S. 325-343.
- Laird, C. und Smith, G. C., 1962: Crack propagation in high stress fatigue. *Philosophical Magazine*, **7**, S. 847-857.
- Lam, K. Y.; Ong, P. P. und Wude, N., 1998: Interaction between a circular inclusion and a symmetrically branched crack. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, **28**, S. 197-211.
- Lankford, J., 1982: The growth of small fatigue cracks in 7075-T6 aluminum. *Fatigue of Engineering Materials and Structures*, **5**, S. 233-248.
- Llanes, L. und Laird, C., 1992: The role of annealing twin boundaries in the cyclic deformation of fcc materials. *Materials Science and Engineering: A*, **157**, S. 21-27.
- Ma, H. und Kamiya, N., 2002: A general algorithm for the numerical evaluation of nearly singular boundary integrals of various orders for two- and three-dimensional elasticity. *Computational Mechanics*, **29**, S. 277-288.
- Manson, S. S., 1953: Behavior of materials under conditions of thermal stress. *Proceedings of heat transfer symposium*, University of Michigan Engineering Research Institute.
- Marshall, P., 1984: Austenitic stainless steels, microstructure and properties. Elsevier Applied Science Publisher, New York.
- Maxwell, P. C.; Goldberg, A. und Shyne, J. C., 1974: Stress-assisted and strain-induced martensites in Fe-Ni-C alloys. *Metallurgical Transactions*, **5**, S. 1305-1318.
- McEvily, A. J., 1998: The growth of short fatigue cracks: A review. *Materials Science Research International*, **4**, S. 3-11.
- McEvily, A. J. und Velazquez, J. L. G., 1992: Fatigue crack tip deformation processes as influenced by the environment. *Metallurgical Transactions A*, **23**, S. 2211-2221.
- Mei, Z. und Morris Jr, J. W., 1991: Analysis of transformation-induced crack closure. *Engineering Fracture Mechanics*, **39**, S. 569-573.
- Miller, K. J., 1993: Materials science perspective of metal fatigue resistance. *Materials Science and Technology*, **9**, S. 453-462.
- Minakawa, K. und McEvily, A. J., 1981: On crack closure in the near-threshold region. *Scripta metallurgica*, **15**, S. 633-636.
- Moës, N.; Dolbow, J. und Belytschko, T., 1999: A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **46**, S. 131-150.
- Morris, W. L., 1980: The noncontinuum crack tip deformation behavior of surface microcracks. *Metallurgical Transactions A*, **11**, S. 1117-1123.

- Mughrabi, H., 1985: Dislocations in fatigue. *Dislocations and properties of real materials: Proceedings of the conference to celebrate the fiftieth anniversary of the concept of dislocation in crystals, The institute of metals, London* S. 244-262.
- Mughrabi, H., 2009: Cyclic slip irreversibilities and the evolution of fatigue damage. *Metallurgical and Materials Transactions A*, **40**, S. 1257-1279.
- Murakami, Y., 1987: Stress intensity factors handbook. Pergamon Press, Oxford New York Frankfurt.
- Murtaza, G. und Akid, R., 1995: Modelling short fatigue crack growth in a heat-treated low-alloy steel. *International Journal of Fatigue*, **17**, S. 207-214.
- Navarro, A. und de los Rios, E. R., 1988: Short and long fatigue crack growth: a unified model. *Philosophical Magazine A*, **57**, S. 15-36.
- Neumann, P., 1969: Coarse slip model of fatigue. *Acta Metallurgica*, **17**, S. 1219-1225.
- Nguyen, O.; Repetto, E. A.; Ortiz, M. und Radovitzky, R. A., 2001: A cohesive model of fatigue crack growth. *International Journal of Fracture*, **110**, S. 351-369.
- Nishiyama, Z.; Fine, M. E.; Meshii, M. und Wayman, C. M., 1978: Martensitic transformation. Academic Press, New York San Francisco London.
- Olson, G. B. und Cohen, M., 1972: A mechanism for the strain-induced nucleation of martensitic transformations. *Journal of the Less-Common Metals*, **28**, S. 107-118.
- Olson, G. B. und Cohen, M., 1975: Kinetics of strain-induced martensitic nucleation. *Metallurgical Transactions A*, **6**, S. 791-795.
- Padilha, A. F. und Rios, P. R., 2002: Decomposition of austenite in austenitic stainless steels. *ISIJ international*, **42**, S. 325-337.
- Paris, P. C.; Gomez, M. P. und Anderson, W. E., 1961: A rational analytic theory of fatigue. *The Trend in Engineering*, **13**, S. 9-14.
- Paris, P. und Erdogan, F., 1963: A critical analysis of crack propagation laws. *Journal of Basic Engineering*, **85**, S. 528-534.
- Pearson, S., 1975: Initiation of fatigue cracks in commercial aluminium alloys and the subsequent propagation of very short cracks. *Engineering Fracture Mechanics*, **7**, S. 235-240.
- Petch, N. J., 1953: The cleavage strength of polycrystals. *Journal of the Iron and Steel Institute*, **174**, S. 25-28.
- Radaj, D. und Vormwald, M., 2007: Ermüdungsfestigkeit. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York.

- Rao, K. T. V.; Yu, W. und Ritchie, R. O., 1988: Fatigue crack propagation in aluminum-lithium alloy 2090: Part II. small crack behavior. *Metallurgical Transactions A*, **19**, S. 563-569.
- Rice, J. R., 1968: A path independent integral and the approximate analysis of strain concentrations by notches and cracks. *Journal of Applied Mechanics*, **35**, S. 379-386.
- Roth, I., 2012: Untersuchungen zum Ausbreitungsverhalten mikrostrukturell kurzer Ermüdungsrisse in metastabilem austenitischen Edelstahl. Dissertation, Universität Siegen, Institut für Werkstofftechnik.
- Schick, A., 2004: Ein neues Modell zur mechanismenorientierten Simulation der mikrostrukturbestimmten Kurzrissausbreitung. VDI-Verlag, Reihe 18, Nr. 292, Düsseldorf.
- Schulze, G. E. R., 1967: Metallphysik. Akademie-Verlag, Berlin.
- Stöhr, G., 1998: Fehlerabschätzung in der Boundary-Elemente-Methode. Habilitationsschrift, Universität Siegen.
- Stolarz, J.; Baffie, N. und Magnin, T., 2001: Fatigue short crack behaviour in metastable austenitic stainless steels with different grain sizes. *Materials Science and Engineering A*, **319**, S. 521-526.
- Suresh, S., 2001: Fatigue of materials – second edition, Cambridge University Press, Cambridge, New York, Melbourne.
- Suresh, S. und Ritchie, R. O., 1984: Propagation of short fatigue cracks. *International Metals Reviews*, **29**, S. 445-476.
- Taira, S.; Tanaka, K. und Nakai, Y., 1978: A model of crack-tip slip band blocked by grain boundary. *Mechanics Research Communications*, **5**, S. 375-381.
- Tanaka, K.; Akiniwa, Y.; Nakai, Y. und Wei, R. P., 1986: Modelling of small fatigue crack growth interacting with grain boundary. *Engineering Fracture Mechanics*, **24**, S. 803-819.
- Tanaka, K. und Mura, T., 1981: A dislocation model for fatigue crack initiation. *Journal of Applied Mechanics*, **48**, S. 97-103.
- Tanaka, K. und Mura, T., 1982: A theory of fatigue crack initiation at inclusions. *Metallurgical Transactions A*, **13**, S. 117-123.
- Theilig, H.; Wünsche, M. und Bergmann, R., 2003: Numerische und experimentelle Untersuchungen zur Entwicklung gekrümmter Ermüdungsrisse bei proportionaler zyklischer Belastung. DVM-Bericht 235: Fortschritte der Bruch- und Schädigungsmechanik, DVM-Verlag, Berlin, S. 239-248.
- Thompson, N.; Wadsworth, N. und Louat, N., 1956: The origin of fatigue fracture in copper. *Philosophical Magazine*, **1**, S. 113-126.

- Tokaji, K. und Ogawa, T., 1992: The growth behaviour of microstructurally small fatigue cracks in metals. in Miller, K. J. und de los Rios, E. R. (Hrsg.): *Short fatigue cracks*, Mechanical Engineering Publications, London.
- Tokaji, K.; Takafuji, S.; Ohya, K.; Kato, Y. und Mori, K., 2003: Fatigue behaviour of beta Ti-22V-4Al alloy subjected to surface-microstructural modification. *Journal of Materials Science*, **38**, S. 1153-1159.
- Venkataraman, G.; Chung, Y. W. und Mura, T., 1991: Application of minimum energy formalism in a multiple slip band model for fatigue, II: Crack nucleation and derivation of a generalised Coffin-Manson law. *Acta Metallurgica et Materialia*, **39**, S. 2631-2638.
- Wells, A. A., 1961: Unstable crack propagation in metals: cleavage and fast fracture. *Proceedings of the Crack Propagation Symposium*, **1**, Paper 84.
- Wilkinson, A. J.; Roberts, S. G. und Hirsch, P. B., 1998: Modelling the threshold conditions for propagation of stage I fatigue cracks. *Acta Materialia*, **46**, S. 379-390.
- Wünsche, M., 2008: Eine Galerkin-Randelementmethode zur Lösung dynamischer Rissprobleme in anisotropen Werkstoffen. Technische Universität Bergakademie Freiberg.
- Zapffe, C. A. und Worden, C. O., 1951: Fractographic registrations of fatigue. *Transactions of the American Society of Metals*, **43**, S. 958-969.
- Zienkiewicz, O. C.; Taylor, R. L., 2005: *The Finite Element Method*. Elsevier Butterworth-Heinemann, Oxford.