

Daniel Ginsberg

Lösungsstrategien für dünnbesetzte inverse Probleme im Bereich der Strukturüberwachung

Schriftenreihe der Arbeitsgruppe
für Technische Mechanik
im Institut für Mechanik und Regelungs-
technik - Mechatronik

Herausgeber: Claus-Peter Fritzen

Band 16

Impressum

Prof. Dr.-Ing. Claus Peter Fritzen

Arbeitsgruppe für Technische Mechanik

Institut für Mechanik und Regelungstechnik - Mechatronik

Universität Siegen

57068 Siegen

ISSN 2191-5601

URN urn:nbn:de:hbz:467-15289

DOI: 10.25819/ubsi/489

Zugl.: Siegen, Univ., Diss., 2019

Lösungsstrategien für dünnbesetzte inverse Probleme
im Bereich der Strukturüberwachung

genehmigte
DISSERTATION
zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Ingenieurwissenschaften

vorgelegt von
M.Sc. Daniel Ginsberg
geb. in Siegen

eingereicht bei der
Naturwissenschaftlich-Technischen Fakultät
der Universität Siegen
Siegen 2019

Betreuer und erster Gutachter
Prof. Dr.-Ing. Claus-Peter Fritzen
Universität Siegen

Zweiter Gutachter
Prof. Dr.-Ing. Otmar Loffeld
Universität Siegen

Tag der mündlichen Prüfung
18. Oktober 2019

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Mechanik und Regelungstechnik - Mechatronik der Universität Siegen in der Arbeitsgruppe von Prof. Dr.-Ing. Claus-Peter Fritzen.

Ich bedanke mich herzlich bei allen, die mich bei dieser Arbeit unterstützt haben. Ein ganz besonderer Dank gilt Prof. Fritzen. Er konnte mich für das Forschungsthema dieser Arbeit begeistern. Durch seine sehr hohe fachliche Kompetenz und die wirklich angenehmen Gespräche mit ihm habe ich immer wieder neue Ideen und Erkenntnisse gewinnen können.

Prof. Dr.-Ing. Otmar Loffeld danke ich für die Anregungen und für die Übernahme des Korreferates. Bedanken möchte ich mich auch bei Herrn Prof. Dr.-Ing. Oliver Nelles und bei Herrn Prof. Dr.-Ing. Chuanzeng Zhang für ihre Beiträge im Rahmen des Promotionsverfahrens.

Ein großes Dankeschön gilt allen meinen ehemaligen Kollegen der Arbeitsgruppe für Technische Mechanik für die tolle Atmosphäre und die unkomplizierte Zusammenarbeit. Für ihre Unterstützung bei experimentellen Arbeiten im Labor danke ich Wolfgang Richter und Gerhard Dietrich. Meinem langjährigen Kollegen Rannam Chaaban danke ich für das gute Arbeitsklima in unserem gemeinsamen Büro und die gegenseitige Hilfsbereitschaft. Ein weiteres Dankeschön auch an alle studentischen Hilfskräfte sowie Studierende, die im Rahmen von Abschlussarbeiten einen Beitrag zu dieser Arbeit leisten konnten.

Einen wesentlichen Anteil am Gelingen der vorliegenden Arbeit haben meine Freunde und meine Familie. Meiner Mutter danke ich besonders, da Sie mir den Weg für das Maschinenbaustudium überhaupt erst ebnete. Ein großer Dank gilt Jenny für ihre Unterstützung, ihr Verständnis und das sie mich auf diesem Weg begleitet hat.

Kurzfassung

Der Fokus dieser Forschungsarbeit liegt auf der Analyse inverser Probleme der schwingungsbasierten Strukturüberwachung. Strukturüberwachungssysteme helfen u.a. dabei die Integrität einer Struktur beurteilen zu können oder eine Vorhersage der Restlebensdauer zu treffen. Im Rahmen dieser Arbeit werden neuartige Überwachungsstrategien entwickelt und untersucht. Die Ergebnisse zeigen das große Potential von Lösungsansätzen für dünnbesetzte inverse Probleme in diesem Bereich. Von dünnbesetzten Problemen spricht man, falls ein Lösungsvektor existiert, welcher nur sehr wenige Elemente ungleich null besitzt. Solche Lösungsstrategien helfen dabei, die benötigte Messinformation zu reduzieren und die Rekonstruktionsqualität zu steigern bzw. beizubehalten.

Für eine kontinuierliche Strukturüberwachung werden Sensoren dauerhaft an der mechanischen Struktur angebracht. So können die mechanischen Schwingungen permanent gemessen werden. Geeignete Algorithmen müssen dann diese Messdaten verarbeiten, um das gewünschte Überwachungsergebnis zu erzielen. Allerdings spiegeln die Schwingungsmessungen lediglich die Wirkung einer meist unbekanntem Ursache wider. Zur Überwachung ist daher eine Invertierung des Ursache-Wirkungsprinzips erforderlich. Das bedeutet, dass die Überwachungsalgorithmen in der Lage sein müssen, diese inverse Problemstellung zu lösen.

Zur Lösung inverser Probleme ist es zweckmäßig Vorkenntnisse der gesuchten Größen zu berücksichtigen, um mechanisch sinnvolle Ergebnisse zu erhalten. Die charakteristischen Eigenschaften der Strukturanregung und der Schadensmuster können dazu genutzt werden, die jeweils auftretende inverse Problemstellung in ein dünnbesetztes Gleichungssystem zu überführen. Die Lösung solcher Gleichungssysteme kann mittels der L_1 -Regularisierung sehr effizient generiert werden.

Speziell für Lastrekonstruktionsverfahren ist durch die Anwendung von L_1 -minimierenden Algorithmen eine Lokalisation und eine Kraftverlaufsrekonstruktion mit einer deutlich geringeren Anzahl an Sensoren als bislang möglich. Die Stabilität der Rekonstruktio-

onsalgorithmen ist auch bei verrauschten Messdaten und Modellabweichungen gegeben.

Für Schadensidentifikationsalgorithmen sind Lösungsstrategien für dünnbesetzte Probleme ebenfalls gewinnbringend im Hinblick auf die benötigte Messinformation und die erreichbare Schadensidentifikationsqualität. Dies gilt sowohl für Verfahren im Frequenzbereich, als auch für Methoden im Zeitbereich. Mit Hilfe von Lösungsstrategien für dünnbesetzte inverse Probleme ist es außerdem möglich Ansätze für die kombinierte Identifikation von Strukturschäden und externen Lasten zu realisieren.

Alle untersuchten Rekonstruktionsalgorithmen erreichen eine Reduktion der benötigten Messinformation, wodurch u.a. ein Beitrag zur günstigeren und praxistauglicheren Anwendung von Strukturüberwachungssystemen geleistet werden kann.

Abstract

This research study focuses on the analysis of vibration-based inverse problems in the context of structural monitoring. Structural monitoring systems enable e.g. to judge the structure integrity or to predict the useful remaining lifetime. In this thesis novel reconstruction algorithms are developed and investigated. The results show the great potential of sparse solutions strategies for solving inverse problems. Sparse solutions are characterized by a solution vector with only a very few nonzero elements. Such solutions methods leads to a reduction of the required measurement information, while maintaining the reconstruction quality.

For continuous structural monitoring, sensors are attached to the mechanical structure to permanently measure mechanical vibrations. In order to achieve the desired monitoring result, these measurement data have to be processed by suitable algorithms. However, the vibration measurements only reflect the effect of a mostly unknown cause. Therefore structural monitoring requires an inversion of the cause-effect principle. This means that the monitoring algorithms need to solve this inverse problem.

To solve inverse problems, using prior information about the desired values is advisable for obtaining meaningful solutions. The characteristic properties of the structure excitation and damage can be used to transform the inverse problem into a sparse equation system. The solution of such equation systems can very efficiently be generated by means of L_1 -regularization.

In terms of load-reconstruction methods using L_1 -minimizing algorithms allow a localization and a force history reconstruction with a significantly lower number of sensors. The stability of the reconstruction algorithms is also given in the case of noisy measurement data and model deviations.

For damage identification algorithms, sparse solution strategies are also advantageous in terms of the required measurement information and the achievable damage identification quality. This applies both to frequency and to time domain methods. With the

help of sparse solution algorithms, it is also possible to identify structural damage and external loads, simultaneously.

All proposed reconstruction algorithms achieve a reduction of the required measurement information. This contributes to a more profitable and more practicable use of structural monitoring systems.

Inhaltsverzeichnis

Nomenklatur	XI
1 Einleitung	1
1.1 Motivation	1
1.2 Inverse Probleme	3
1.3 Fokus, Ziele und Struktur der Arbeit	8
2 Theoretische Grundlagen	11
2.1 Mathematische Beschreibung dynamischer Systeme	11
2.1.1 Allgemeine Systembeschreibung im Zeitbereich	11
2.1.2 Zustandsraummodelle in Nodal- und Modalkoordinaten	14
2.1.3 Zeitdiskrete Zustandsraummodelle	17
2.1.4 Kombinierte deterministische und stochastische Modelle	18
2.1.5 Impulsantwort-Modelle	20
2.2 Systemidentifikation im Zeitbereich	21
2.2.1 Stochastic Subspace Identification	22
2.3 Zustandsschätzung mittels Kalman-Filter	25
2.4 Sensorpositionierung	27
2.4.1 Effective Independence Methode	29
2.4.2 Kinetic Energy Methode	30
3 Lösungsstrategien dünnbesetzter inverser Probleme	33
3.1 Mathematische Formulierung inverser Probleme	33
3.1.1 Singulärwertzerlegung inverser Problemstellungen	35
3.1.2 Glättung und diskrete Picard-Bedingung	36
3.1.3 Rangdefiziente schlecht-gestellte inverse Probleme	37
3.2 Tikhonov-Regularisierung	37

3.3	Vektornormen	40
3.4	L_1 -Regularisierungsverfahren	42
3.4.1	Anmerkungen zur L_1 -Minimierung	44
3.4.2	Voraussetzungen für L_1 -Regularisierungsverfahren	46
3.5	Lösungsalgorithmen	48
3.5.1	In-Crowd-Algorithmus zur L_1 -Minimierung	50
3.5.2	Kalman-Filter Konzept zur L_1 -Minimierung	51
4	Identifikation mechanischer Belastungen	55
4.1	Überblick	56
4.2	Klassifikation externer Belastungen	59
4.2.1	Verteilte Belastungen	59
4.2.2	Konzentrierte Belastungen	60
4.2.3	Impulsartige Belastungen	60
4.3	Dünnbesetzte Lösungsstrategie zur Impulslastidentifikation	62
4.3.1	Simulationsstudien zur Impulslastidentifikation	64
4.3.2	Einfluss von Messrauschen	67
4.3.3	Einfluss der Anregungsposition	69
4.3.4	Einfluss der Sensorpositionen	70
4.4	Dictionary-basierte Lastidentifikation	72
4.4.1	Simulationsstudien zu Fehlereinflüssen	75
4.5	Identifikation unter Betriebsbedingungen	79
4.5.1	Passives Identifikationskonzept	80
4.5.2	Moving-Window Identifikation	81
4.6	Identifikation anderer Belastungsarten	83
4.7	Zweistufiges Identifikationsverfahren	86
4.8	Experimentelle Validierung	89
5	Strukturschadenserkennung	95
5.1	Überblick	96
5.2	Schadensidentifikation im Frequenzbereich	98
5.2.1	Kenngrößen modaler Korrelation	99
5.2.2	Inverses Eigensensitivitätsverfahren	101
5.2.3	Identifikation modaler Parameter unter Betriebsbedingungen	104
5.2.4	Simulationsstudien und Vergleich zu konventionellen Verfahren	109

5.2.5	Experimentelle Validierung an Fachwerkstruktur	115
5.3	Schadensidentifikation im Zeitbereich	122
5.3.1	Problemformulierung zur Schadensidentifikation im Zeitbereich . .	123
5.3.2	L_1 -minimierendes Extended Kalman-Filter	124
5.3.3	Sensitivität von Systemausgängen im Zeitbereich	127
5.3.4	Simulationsstudien	129
5.3.5	Kompensation von Modellfehlern	133
5.3.6	Experimentelle Validierung	136
6	Simultane Identifikation mechanischer Lasten und Strukturschäden	139
6.1	Überblick	140
6.2	Virtual Distortion Methode	141
6.2.1	Charakteristische Eigenschaften der Pseudolast	142
6.3	Lastidentifikation für geschädigte Strukturen	144
6.4	Gleichzeitige Schadens- und Lastidentifikation	147
6.5	Experimentelle Validierung	152
7	Zusammenfassung und Ausblick	155
	Literaturverzeichnis	161
	Anhang	175

Nomenklatur

Lateinische Symbole

\tilde{a}, \tilde{b}	Dimension der Hankel-Matrix
\mathbf{A}	Koeffizientenmatrix des inversen Gleichungssystems
\mathbf{A}_c	Systemmatrix kontinuierliches Zustandsraummodell
\mathbf{A}_{cm}	Systemmatrix modales Zustandsraummodell
\mathbf{A}_d	Systemmatrix diskretes Zustandsraummodell
\mathbf{B}_c	Eingangsmatrix kontinuierliches Zustandsraummodell
\mathbf{B}_{cm}	Eingangsmatrix modales Zustandsraummodell
\mathbf{B}_d	Eingangsmatrix diskretes Zustandsraummodell
\mathbf{B}_u	Selektionsmatrix für externe Kräfte
\mathcal{B}	Beobachtbarkeitsmatrix
\mathbf{C}	Dämpfungsmatrix
\mathbf{C}_y	Messmatrix
\mathbf{C}_{ym}	Messmatrix modales Zustandsraummodell
$\mathbf{C}_x, \mathbf{C}_{\dot{x}}, \mathbf{C}_{\ddot{x}}$	Selektionsmatrizen Systemausgänge
\mathcal{C}	Steuerbarkeitsmatrix
\mathbf{D}_{EIM}	Diagonalelemente von \mathbf{E}_{EIM}
\mathbf{D}_y	Systemdurchgriff
\mathbf{D}_{ym}	Systemdurchgriff modales Zustandsraummodell
\mathbf{e}_k	Schätzfehler zum Zeitschritt k
$\mathbf{e}_{\mathcal{N}_i}$	Basisvektoren des Kerns
E	Elastizitätsmodul
$\mathbb{E}\{\cdot\}$	Erwartungswertoperator
\mathbf{E}_{EIM}	Vorhersagematrix der EIM
\mathbf{f}	Kraftvektor
$\mathbf{g}(\cdot)$	nichtlineare Rückstellkraft

$h(\cdot), \mathbf{h}(\cdot), \mathbf{h}_i$	Impulsantwortfunktion
\mathbf{H}_k	Jacobi-Matrix der nichtlinearen Messgleichung
\mathcal{H}	Hankel-Matrix
\mathbf{I}	Einheitsmatrix
k	diskreter Zeitschritt
\mathbf{K}	Steifigkeitsmatrix
K_i	generalisierte Steifigkeit
\mathcal{K}	Kalman-Matrix
M	Anzahl der Zeilen der Matrix \mathbf{A}
\mathbf{M}	Massenmatrix
M_i	generalisierte Masse
n_d	Dimension des diskreten Zustandsraummodells
n_e	Dimension des EOC-Vektors
n_E	Anzahl Elemente bzw. Substrukturen
n_f	Anzahl Kräfte
n_k	Anzahl Zeitschritte
n_m	Anzahl modaler Freiheitsgrade
n_n	Anzahl Freiheitsgrade
n_p	Dimension des Schadensparametervektors
n_r	Anzahl Messwerte
n_V	Anzahl möglicher Sensorkonfigurationen
N	Anzahl der Spalten der Matrix \mathbf{A}
$\mathcal{N}(\cdot)$	Kern einer Matrix
\mathbb{N}	Menge der natürlichen Zahlen
$\Delta \mathbf{p}$	Strukturparameteränderungen
$\hat{\mathbf{P}}$	Kovarianz des Zustandsschätzfehlers
$\tilde{\mathbf{Q}}$	Kovarianz Prozessrauschen
r_{Ges}	modale Residuen
$r_{\mathcal{H}}$	Rang der Hankel-Matrix
$\mathbf{R}^{yy}, \mathbf{R}^{zy}$	Kovarianzmatrizen
$\tilde{\mathbf{R}}$	Kovarianz Messrauschen
\mathbb{R}	Menge der reellen Zahlen
s	Anzahl der Vektorelemente ungleich null
s_i	Singulärwerte

S	Sensitivitätsmatrix
S_C	Selektionsmatrix
$\tilde{\mathbf{S}}$	Kovarianz Mess- und Prozessrauschen
S	Singulärwertmatrix
t	Zeit
t_k	diskrete Zeit
$t_{\bar{u}}$	Zeitpunkt der maximalen Impulslast
Δt	Abtastzeit
\tilde{u}	Ansatzfunktion für Impulsverlauf
\bar{u}	Spitzenwert der Impulsanregung
u_{Δ}	Parameter der zeitlichen Impulsweite
u	Systemeingang
\mathbf{u}^I	Einheitsimpulsanregung
U, V	orthonormale Matrizen der Singulärwertzerlegung
x	Verschiebungsvektor
\mathbf{x}_m	modaler Verschiebungsvektor
y	Messwertvektor
$\Delta \mathbf{y}_k$	Messinnovation
z	Zustandsvektor
Z	modale Dämpfungsmatrix

Griechische Symbole

α_1	EKF-Parameter für fiktive L_1 -Beobachtung
α_p, β_p	Koeffizienten proportionale Dämpfung
$\Gamma(\cdot)$	nichtlineare Schadensevolution
$\eta(\cdot)$	nichtlineare Messwertfunktion
η_1	Regularisierungsparameter
Θ, Θ_d	Schadensparametervektor
Θ_e	Merkmalsvektor für EOC
$\kappa(\cdot)$	Kondition einer Matrix
λ_1, λ_2	Regularisierungsparameter
λ^d	Eigenwerte der diskreten Systemmatrix
$\Lambda_{\text{EIM}}, \Lambda_{\text{KEM}}$	Fisher-Informationsmatrix

ν	Messrauschen
ρ	Dichte
σ_ν	Standardabweichung des Messrauschens
ξ	modale Dämpfung
τ_1	Regularisierungsparameter
Φ	Modalmatrix
Φ_r	Zeilen-reduzierte Modalmatrix
Ψ	Eigenvektoren der diskreten Systemmatrix
ω	Eigenkreisfrequenz
$\Omega(\cdot)$	Nebenbedingung
ω	Prozessrauschen
$\Omega(\cdot)$	Nebenbedingung
Ω	Eigenkreisfrequenzmatrix

Indices und Akzente

$\hat{\square}$	geschätzte oder rekonstruierte Größe
\square^-	a priori Schätzung
\square^+	Pseudoinverse
\square_k	Größe zum diskreten Zeitpunkt k
\square^C	Komplementärmenge
\square^T	Transposition

Abkürzungen

BPDN	Basis Pursuit Denoising
CS	Compressed Sensing
DMS	Dehnungsmessstreifen
EIM	Effective Independence Methode
EKF	Extended Kalman-Filter
EMA	Experimentelle Modalanalyse
EOC	Umgebungs- und Betriebsbedingung
ERA	Eigensystem Realization Algorithm
FE	Finite Elemente
FHG	Freiheitsgrad

FIM	Fisher-Informationsmatrix
KEM	Kinetic Energy Methode
KF-UI	Kalman-Filter with Unknown Inputs
LS	Kleinste Fehlerquadrate
MAC	Modal Assurance-Kriterium
MIMO	Multiple Input Multiple Output
MSF	Modaler Skalierungsfaktor
NDT	Non-Destructive Testing
OMA	Operationelle Modalanalyse
PSD	Leistungsdichtespektrum
RFKV	Rekonstruktionsfehler des Kraftverlaufs
RFSW	Rekonstruktionsfehler des Spitzenwerts
RIP	Restricted Isometry Property
SHM	Structural Health Monitoring
SSI	Stochastic Subspace Identification
SVD	Singulärwertzerlegung
UKF	Unscented Kalman-Filter

Kapitel 1

Einleitung

1.1 Motivation

Der kontinuierliche Alterungsprozess mechanischer Strukturen im Betrieb stellt Entwickler und Anlagenbetreiber vor große Herausforderungen. Vor allem aufgrund der Tatsache, dass teilweise viele Strukturen über die vorgesehene Auslegungszeit hinweg betrieben werden müssen. Dies gilt besonders für alternde Infrastrukturbauwerke. So konnten beispielsweise bereits 1997 an 236 000 von insgesamt 576 000 Highway-Brücken in den USA Strukturdefizite festgestellt werden [Wang *et al.*, 1997; Balageas, 2006]. Viele dieser Brücken befinden sich noch heute im Betrieb. Um die Sicherheit solcher Strukturen zu gewährleisten, werden derzeit häufig intensive und regelmäßige Wartungen durchgeführt. Neben den hohen Wartungskosten entstehen so möglicherweise enorme Kosten durch Stillstands- bzw. Ausfallzeiten.

Neuere Strukturen unterliegen ebenfalls festgelegten Inspektionsintervallen, um die Betriebssicherheit zu gewährleisten. Beispielsweise müssen die Strukturkomponenten einer Windenergieanlage während des Stillstands mittels aufwendiger Ultraschall- oder Röntgenprüfverfahren untersucht werden. Besonders für Offshore-Anlagen ist dies aufgrund der Zugänglichkeit der Anlagen und ihrer Komponenten oft ein sehr komplexes und kostenintensives Vorgehen. Auch andere Strukturen aus modernen Hochleistungs-Faserverbundwerkstoffen benötigen intensive Wartungen und Inspektionen. Diese Werkstoffe sind zwar kaum einem Alterungsprozess unterworfen, aber besonders empfindlich gegenüber Stoßbelastungen. Der Einsatz solcher Materialien u.a. im Flugzeugbau zieht daher eine regelmäßige Schadensinspektion nach sich.

Dennoch können regelmäßige Inspektionen im Allgemeinen keine absolute Betriebs-

sicherheit garantieren. Risse können z.B. innerhalb eines Wartungsintervalls unerwartet schnell wachsen und zu einem katastrophalen Bauteilversagen führen [Fritzen, 2006]. Sicherheitsrelevante Bauteile haben daher oftmals im Wartungsplan fest vorgesehene Austauschintervalle. Dadurch kann es allerdings vorkommen, dass völlig intakte Bauteile ersetzt werden müssen und so unnötige Kosten entstehen.

Strukturüberwachungssysteme stellen nun eine Alternative zu diesen regelmäßigen Wartungs- und Instandhaltungskonzepten dar. Durch eine permanent installierte Sensorik und eine anschließende Datenanalyse sind solche Systeme in der Lage, kontinuierlich gewisse Strukturinformationen zu bestimmen und bei Bedarf abzurufen. Die gewonnenen Strukturinformationen sind dabei oft vielfältig. So können u.a. die strukturelle Integrität, die Belastungshistorie, das Risswachstum, gewisse Spannungspegel oder eine Lebensdauervorhersage von Interesse sein. Anlagenbetreiber und Hersteller können durch solch eine permanente Überwachung Kosten deutlich reduzieren, da Ressourcen optimal ausgenutzt und Stillstände minimiert werden. Auch eine automatische oder autarke Fernüberwachung ist so möglich. Falls die Überwachungssysteme den Abfall der strukturellen Integrität feststellen, kann sehr schnell eingegriffen werden, um katastrophalen Schäden vorzubeugen und die Betriebssicherheit zu erhöhen. Daher können schon bei der Konstruktion weniger strenge Schadenstoleranzen verwendet werden. Außerdem können die während des Betriebs gewonnenen Kenntnisse über eine Anlage oder auch über einen ganzen Maschinenpark genutzt werden, um das Strukturdesign zukünftiger Baureihen zu verbessern [Schmidt *et al.*, 2004].

Allerdings können nur die wenigsten der oben genannten Überwachungsgrößen direkt mittels geeigneter Sensoren gemessen werden. Strukturüberwachungssysteme zeichnen daher meist andere Parameter auf und bestimmen die gesuchten Überwachungsgrößen indirekt. In der Regel werden mechanische Strukturparameter betrachtet, da diese einfacher gemessen werden können. Welche Messgrößen genau verwendet werden, hängt stark von der spezifischen Überwachungsaufgabe ab. Die Messwerte müssen aber zwangsläufig von dem zu überwachenden Parameter beeinflusst werden. Für bestimmte Überwachungsaufgaben werden so z.B. hochfrequente Festkörperwellen gemessen und analysiert. Andere Verfahren wiederum nutzen statische bzw. niederfrequente Dehnungsmessungen. Je nach Einsatzgebiet können darüber hinaus Messdaten für Umgebungs- und Betriebsbedingungen hilfreich sein (z.B. Temperaturen, Windgeschwindigkeiten, Betriebsdrehzahlen). In [Farrar & Worden, 2012] wird der Strukturüberwachungsprozess in vier Schritte untergliedert:

1. Operationelle Bewertung: Definition der Überwachungsgröße
2. Datenerfassung: Definition des Messsystems und der Messdaten
3. Merkmalsselektion: Extraktion der relevanten Informationen
4. Bewerten / Handeln: Entscheiden aufgrund von Statistiken und Referenzwerten

Auch wenn bereits viele Überwachungsstrategien und Verfahren, um aus den Sensorsignalen indirekt die Überwachungsgrößen zu bestimmen, entwickelt werden konnten, gibt es noch viele ungelöste Probleme und Raum für Verbesserungen. Eine ganzheitliche Weiterentwicklung von Verfahren zur Strukturüberwachung erfordert eine interdisziplinäre Forschung in verschiedenen Themenfeldern [Chang, 1999]. Hier können neben der Sensorentwicklung u.a. die Forschungsgebiete der Datenübertragung, der Materialwissenschaften, der Signalverarbeitung und der Strukturmechanik genannt werden. Ein wesentlicher Entwicklungsbedarf stellt dabei die Steigerung der Zuverlässigkeit bei einer gleichzeitigen Reduktion des Sensornetzwerks dar.

Um die derzeitige Akzeptanz der Betreiber und Hersteller für Überwachungssysteme noch zu erhöhen, müssen die Systeme kostengünstig in der Anschaffung sein und gleichzeitig eine hohe und robuste Überwachungsqualität aufweisen. Die Anschaffungskosten sollten dabei deutlich geringer sein, als das Einsparpotential welches sie ermöglichen. Ein wesentlicher Kostenfaktor im Rahmen der Anschaffung ist die Anzahl der benötigten Messsensoren. Neben den Kosten für die Sensoren, kommt bei einer Vielzahl an Sensoren auch ein hoher Instrumentierungsaufwand hinzu und ggf. eine erhöhte Wartung oder Fehleranfälligkeit für das Sensornetzwerk selbst. Daher ist es wichtig, das installierte Sensornetzwerk so schlank wie möglich auszulegen und aus einer minimalen Anzahl an Sensoren bzw. Messwerten, den maximal möglichen Informationsgewinn zu erzielen.

1.2 Inverse Probleme

Wie zuvor beschrieben, geben die Messwerte oftmals die zu überwachende Größe nicht unmittelbar wieder. Die Messwerte werden lediglich von ihr beeinflusst. Daher muss zwangsläufig eine Ursache-Wirkungs-Beziehung zwischen Messgröße und Überwachungsgröße existieren (siehe Abb. 1.1). Für Strukturüberwachungszwecke sollte hier eine quantitative Beschreibung der Ursache-Wirkungs-Beziehung vorhanden sein. Solch eine quantitative Beziehung stellt einen funktionalen Zusammenhang zwischen Ursache und Wirkung, mit

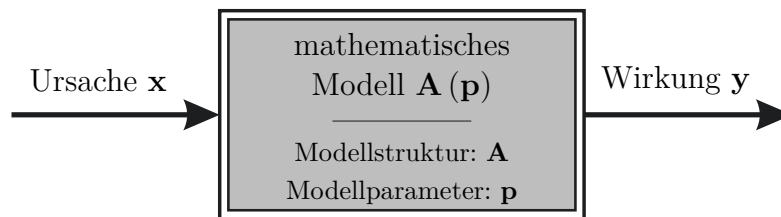


Abbildung 1.1: Schematische Darstellung der Ursache-Wirkungs-Beziehung; Strukturüberwachungsprozesse erfordern zumeist eine Invertierung dieser Beziehung

Hilfe eines mathematischen Modells $\mathbf{A}(\mathbf{p})$, her. Allgemein kann die mathematische Beziehung durch die Abbildung $\mathbf{A}(\mathbf{p}) : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$, $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{y}$ mit den vorgegebenen Räumen \mathbf{X} , \mathbf{Y} beschrieben werden [Natke, 1999]. Wobei die Ursache $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ und die Wirkung $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$ ist. Das mathematische Modell $\mathbf{A}(\mathbf{p})$ zur Beziehungsbeschreibung kann von einem oder mehreren Modellparametern beeinflusst sein, welche im Parametervektor \mathbf{p} zusammengefasst sind. Häufig kann die Ursache-Wirkungs-Beziehung durch ein algebraisches lineares Gleichungssystem beschrieben werden:

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{x} \quad (1.1)$$

Abhängig von der zugrundeliegenden Fragestellung kann nun zwischen direkten Problemen, inversen Problemen 1. und 2. Art, und gemischt inversen Problemen unterschieden werden (siehe Tab. 1.1) [Natke, 1999; Laermann, 2008].

Das vorwärts gerichtete Problem bzw. das direkte Problem entspricht einer Prognose. Hier sollen bei bekannter Ursache mit Hilfe des Modells die Auswirkungen abgeleitet werden. Bei mechanischen Systemen ist dies typischerweise eine Aufgabe im Auslegungsprozess von Strukturen, um z.B. die Deformationen aufgrund bestimmter Belastungsarten zu überprüfen. Die Qualität der Modellbeschreibung entscheidet dabei über die Güte der Prognose.

Strukturüberwachungssysteme müssen allerdings meist in der Lage sein, inverse Problemstellungen 1. Art, 2. Art oder sogar gemischte Probleme zu lösen. Da in der Regel nur die gemessene Wirkung bestimmt werden kann. Inverse Probleme 1. Art resultieren unmittelbar aus der Invertierung der Ursache-Wirkungs-Beziehung. Das Problem 1. Art beschreibt eben die Aufgabe, eine Ursache ermitteln zu müssen, falls lediglich die Effekte bzw. Wirkungen verfügbar sind, in denen sich die unbekannte Ursache manifestiert [Kirchgraber & Stoffer, 2006]. Eine Modellbeschreibung, die beide Größen in Verbindung setzt, sollte dazu im Vorhinein bestimmt werden. Ein Überwachungsalgorithmus muss

Tabelle 1.1: Klassifikation direkter und inverser Probleme

	bekannt:	unbekannt:
direktes Problem	$\mathbf{A}(\mathbf{p}), \mathbf{x}$	\mathbf{y}
inverses Problem 1. Art	$\mathbf{A}(\mathbf{p}), \mathbf{y}$	\mathbf{x}
inverses Problem 2. Art	\mathbf{x}, \mathbf{y}	$\mathbf{A}(\mathbf{p})$
gemischtes inverses Problem	$\mathbf{A}(\mathbf{p}_0), \mathbf{y}$	$\mathbf{x}, \mathbf{A}(\mathbf{p}_0 + \Delta\mathbf{p})$

dann bestimmte Merkmale interpretieren, welche in den Messdaten enthalten sind, um auf deren Ursache zu schließen.

Inverse Probleme 2. Art hingegen beschreiben die Aufgabe der Systemidentifikation. Bei bekannter Ursache und Wirkung soll deren Beziehung in Form eines Modells ermittelt werden. Für dieses Identifikationsproblem unterscheidet man zwischen *Black Box*- und Systemparameteridentifikation. Da bei der Black Box-Identifikation die Modellstruktur \mathbf{A} unbekannt ist, stellt diese die weitaus komplexere Aufgabenstellung dar. Ist die mathematische Modellstruktur allerdings bekannt, müssen lediglich die unbekanntesten Modellparameter \mathbf{p} bestimmt werden.

Im Falle von gemischten inversen Problemen ist nur die Wirkung und ein Ausgangsmodell $\mathbf{A}(\mathbf{p}_0)$ bekannt. Das Ausgangsmodell kann allerdings durch Modellfehler oder unberücksichtigte Einflüsse vom tatsächlichen Systemverhalten abweichen. Bei dieser Art von Problemen soll die Modellabweichung $\Delta\mathbf{p}$ und die unbekanntete Ursache gleichzeitig identifiziert werden.

Inverse Problemstellungen jeglicher Art sind im Allgemeinen deutlich schwieriger zu lösen als das direkte Problem zu berechnen. Die Schwierigkeiten, welche bei der Lösung inverser Probleme entstehen können, werden später aus mathematischer Sicht eingehend erläutert. Eine einfache Analogie aus dem Bereich der medizinischen Diagnose kann jedoch an dieser Stelle schon die Problematik sehr anschaulich verdeutlichen und die angestrebte Lösungsidee skizzieren: Beschreibt ein Patient die Symptome bzw. (Aus-)Wirkungen seiner Krankheit, muss der Arzt die inverse Problemstellung lösen und die Ursache für diese Symptome diagnostizieren. Oftmals reichen aber die beschriebenen Symptome nicht aus, um die Krankheit genau zu bestimmen. Da eine Unmenge von verschiedenen Krankheiten sich durch die gleichen Symptome bemerkbar macht, kann keine eindeutige Lösung für dieses inverse Problem gefunden werden. Der Arzt kann nun mittels diverser Untersuchungen und zusätzlicher Messungen (Bluttests, Bildgebungsverfahren usw.) weitere

Auswirkungen der Krankheit bestimmen, sodass sich die Anzahl der möglichen Ursachen deutlich reduziert, bis schließlich die richtige Krankheit gefunden wird.

In der Praxis wird der Arzt aber abhängig von den genannten Symptomen auch ohne kostspielige Untersuchungen und zusätzliche Messungen häufig eine Diagnose stellen können. Nennt der Patient z.B. Kopf- und Gliederschmerzen als einzige Beschwerden liegt nahe, dass der Patient eine gewöhnliche Grippe hat, obwohl eine Vielzahl an weiteren Krankheiten dieselben Symptome hervorrufen kann. Aus der Menge der möglichen Ursachen wird zur Diagnose die Wahrscheinlichste präferiert. Der Arzt hat an dieser Stelle Ockhams Sparsamkeitsprinzip angewendet. Dieses besagt, dass von mehreren möglichen Erklärungen für ein und denselben Sachverhalt die einfachste Theorie allen anderen vorzuziehen ist. Oder anders ausgedrückt:

Die einfachste Lösung ist meistens die Richtige.

Die Lösungsidee nach Ockham soll nun in dieser Arbeit auf inverse Probleme der Strukturüberwachung übertragen werden. So wird es ermöglicht, aus einem Minimum an Messdaten bzw. Messsensoren den maximalen Informationsgewinn zu erzielen. Dazu wird bei einer spezifischen Überwachungsaufgabe die trivialste Ursache für die gemessene Wirkung berechnet. Übersetzt man also die nach Ockham *triviale Lösung* für mathematisch inverse Problemstellungen, bedeutet das, dass zur Rekonstruktion so wenig Lösungselemente wie möglich verwendet werden sollten. Ein derartiger Lösungsvektor wird als *dünnbesetzt* bezeichnet. Abb. 1.2 zeigt eine piktografische Darstellung eines inversen Problems, wie es in Gl. (1.1) definiert ist. Der Lösungsvektor \mathbf{x} ist hier dünnbesetzt. Die meisten Vektorelemente entsprechen null und nur wenige Elemente sind ungleich null.

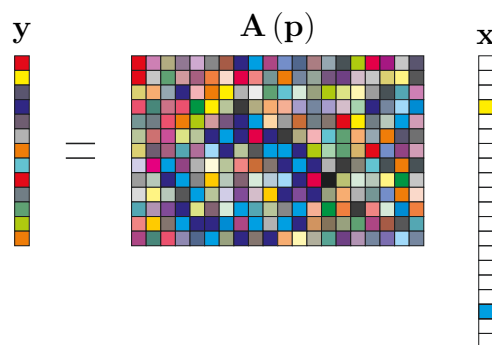


Abbildung 1.2: Die dünnbesetzte Lösung stellt die *einfachste* Lösung dar; Lineares Gleichungssystem mit dünnbesetztem Lösungsvektor \mathbf{x}

Ist die gesuchte Ursache natürlichen Ursprungs, ist es in der Regel immer möglich, solche Gleichungssysteme mit einer dünnbesetzten Lösung zu erzeugen. Beschreibt die

Ursache einen natürlichen Sachverhalt, sind die Lösungsvektoren nicht völlig beliebig, sondern haben immer eine gewisse innere Ordnung bzw. innere Struktur. Diese Struktur lässt es zu, die Ursache auf nur sehr wenige informationstragende Elemente zu komprimieren.

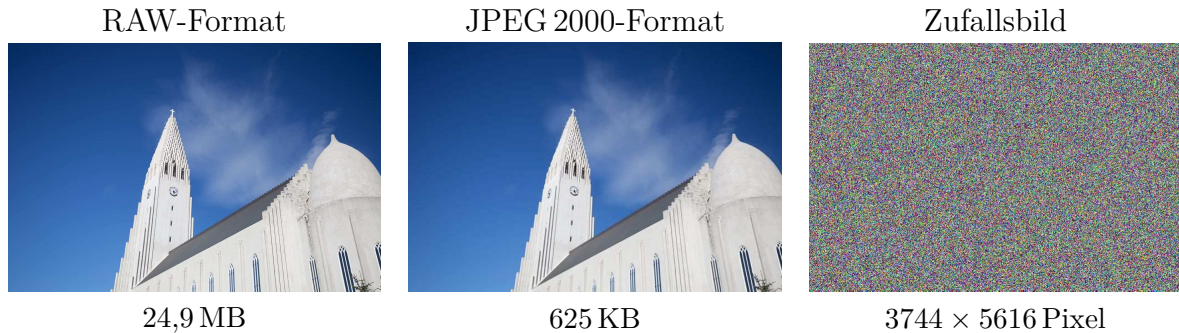


Abbildung 1.3: Reale bzw. natürliche Sachverhalte weisen meist eine innere Struktur auf, welche eine Kompression ermöglicht; Links und Mitte: Fotografie der Hallgrímskirkja Kirche in Reykjavik; Rechts: Bild erzeugt mittels eines Zufallsvektors

Um dies zu verdeutlichen, kann erneut eine Analogie aus einem anderen Themenfeld genutzt werden. Dazu soll eine Fotografie als Vektor einer sehr hohen Dimension betrachtet werden, bei dem jedes Vektorelement einen bestimmten Farbwert wiedergibt. Für eine reale Fotografie ergibt sich ein Bild wie es z.B. in Abb. 1.3 links zu sehen ist. In Abb. 1.3 ist dagegen rechts ein Bild dargestellt, welches aus einem Zufallsvektor erzeugt wurde. Es ist leicht verständlich, dass durch einen Zufallsvektor niemals ein Bild erzeugt werden kann, das einer tatsächlichen Fotografie ähnelt. So lässt sich erahnen, dass der Informationsgehalt der Fotografie deutlich geringer ist als die Dimension des Vektors suggeriert.

Speichert man das Original-Bild (links) Punkt für Punkt ab (RAW-Format) ist der Speicherbedarf sehr hoch. Kompressionsformate nutzen jetzt die innere Struktur der Fotografie, um das Bild auf sehr wenige informationstragende Elemente zu minimieren. Der Qualitätsverlust ist dabei oft vernachlässigbar klein (vgl. Abb. 1.3 rechts und Mitte). Da das Zufallsbild keine innere Struktur aufweist, ist hier eine solche Kompression nicht möglich. Für die gezeigte JPEG 2000-Komprimierung wird eine Wavelet-Transformation verwendet. Hier werden nur wenige dominante Wavelet-Koeffizienten beibehalten und alle übrigen vernachlässigt bzw. zu null gesetzt. Daher ist dieser Koeffizientenvektor nun dünnbesetzt.

Ist das Original-Bild bekannt, kann sehr einfach die komprimierte Form erzeugt werden. Für Strukturüberwachungsprozesse ist dagegen das vollständige *Bild* meist nicht sichtbar. Es sind nur an einzelnen wenigen Stellen Messinformationen vorhanden. Aus diesen spärlichen Informationen muss dann das vollständige Bild (bzw. hier die Überwachungsgröße) invers rekonstruiert werden. Für die meisten mechanischen Überwachungsgrößen findet man jedoch eine ähnliche innere Struktur, wie sie zuvor beschrieben wurde. Dies können beispielsweise bestimmte charakteristische Schadensmuster oder externe Anregungsprofile sein. Ist die innere Struktur der gesuchten Größe im Vorfeld bekannt, ist es daher sinnvoll, die komprimierte Darstellung der Größe zu rekonstruieren. Auch wenn unbekannt ist, welche Elemente die informationstragenden Einträge sind, kann man von einem dünnbesetzten Lösungsvektor ausgehen.

Lösungsstrategien für dünnbesetzte inverse Probleme wurden in den letzten Jahren intensiv erforscht, vor allem im Bereich des Compressed Sensing [Donoho & Huo, 2001; Candès & Wakin, 2008]. Auch für spezielle Anwendungen u.a. im Bereich der Elektrotechnik, der Radartechnik oder auch der Informatik konnten diese Lösungsideen erfolgreich adaptiert werden. Im Forschungsfeld der Strukturüberwachung sind solche Ansätze dennoch bis heute wenig verbreitet.

1.3 Fokus, Ziele und Struktur der Arbeit

Das zentrale Ziel dieser Arbeit besteht darin, Lösungsstrategien und Algorithmen zu entwickeln, welche es ermöglichen, aus einer minimalen Messinformation eine stabile Rekonstruktion der Überwachungsgrößen zu erzielen. Die Untersuchungen werden dabei vor dem Hintergrund durchgeführt, die benötigte Sensoranzahl des Überwachungsnetzwerks zu reduzieren und dennoch eine robuste Identifikation zu gewährleisten. So können Überwachungssysteme für ein breiteres Anwendungsspektrum eingesetzt werden. Außerdem steigt dadurch die Effektivität der Systeme. Um dies realisieren zu können, werden in dieser Arbeit Lösungsstrategien für dünnbesetzte inverse Probleme adaptiert und in den Strukturüberwachungsprozess integriert.

Hierzu ist es erforderlich, die mechanische Ursache-Wirkungs-Beziehung zwischen unbekannter Ursache und gemessener Wirkung zu identifizieren und mathematisch zu beschreiben. Darüber hinaus muss die innere Struktur der jeweiligen Überwachungsgröße analysiert werden. Dadurch kann eine geeignete Problemstellung mathematisch formuliert werden. Erst dann ist es möglich eine methodische Neuentwicklung bestehender

Überwachungsstrategien vorzunehmen und effiziente dünnbesetzte Lösungsverfahren zu implementieren.

Der Fokus dieser Arbeit liegt auf der Analyse von Schwingungssignalen und deren Nutzbarkeit für verschiedene Überwachungsaufgaben. Die betrachteten mechanischen Schwingungsantworten befinden sich im tiefen und mittleren Frequenzbereich. Diese lassen sich in der Regel messtechnisch sehr einfach durch herkömmliche Sensoren, wie z.B. Beschleunigungsaufnehmer oder Dehnungsmessstreifen bestimmen. Meist ist keine künstliche Strukturanregung notwendig, da dieser Frequenzbereich schon durch den Betrieb oder andere Umwelteinflüsse (z.B. Windlasten oder Verkehrslasten) zum Schwingen angeregt wird.

Speziell werden in dieser Arbeit Überwachungsstrategien zur Rekonstruktion von externen Belastungen und Strukturschäden untersucht. Beide Größen sind von zentraler Bedeutung für eine aussagekräftige Strukturüberwachung. Auf der einen Seite ist eine frühzeitige Schadensdetektion notwendig, um die strukturelle Integrität einer Gesamtanlage zu beurteilen und ein katastrophales Bauteilversagen zu verhindern. Auf der anderen Seite ist die Information der tatsächlichen externen Belastungssituation wichtig, um Anlagen optimal zu steuern, Überbelastungen zu erkennen oder Lebensdauerprognosen erstellen zu können. Da beide Überwachungsgrößen einen kombinierten Einfluss auf die gemessene Schwingungsantwort haben können, werden in dieser Arbeit auch Identifikationsstrategien zur simultanen Belastungs- und Schadensdetektion vorgestellt.

Die vorliegende Arbeit ist wie folgt untergliedert: Zunächst werden in Kapitel 2 die erforderlichen mechanischen Grundlagen erläutert. Hierbei handelt es sich um diverse Modellbeschreibungen für mechanische Strukturen. Eine mechanische Modellbeschreibung ist erforderlich, da alle später hergeleiteten Überwachungsstrategien der Klasse der modellgestützten Verfahren zugeordnet werden können. Des Weiteren wird in diesem Kapitel ein Verfahren zur messdatengestützten Identifikation solcher Modelle beschrieben und es werden die Grundlagen des Kalman-Filters als Zustandsschätzer dargelegt. Zum Abschluss des Kapitels 2 werden Verfahren zur optimalen Sensorpositionierung aufgezeigt.

Die mathematische Betrachtung inverser Probleme erfolgt in Kapitel 3. Nach der Problembeschreibung und der Darstellung konventioneller Lösungsverfahren, werden hier die neuartigen dünnbesetzten Lösungsstrategien vorgestellt. Die allgemeine Erläuterung solcher Lösungsansätze mittels L_1 -Minimierungsverfahren ist ebenso Bestandteil dieses Kapitels, wie die Beschreibung spezieller Rekonstruktionsalgorithmen.

Den wesentlichen Beitrag und Kern der Arbeit bilden die Kapitel 4 bis 6. Kapitel 4 widmet sich dem inversen Problem der Kraftidentifikation. Hier werden intensive Untersuchungen zur Impulslastdetektion durchgeführt, da solche Lasten oftmals besonders kritisch sind. Allerdings wird auch eine allgemeine Erweiterung für andere Belastungsarten hergeleitet. Eine detaillierte Untersuchung der Stabilität und eine experimentelle Validierung zeigt die Leistungsfähigkeit der Rekonstruktionsstrategien auf.

Schadensdetektionsstrategien sind der Inhalt von Kapitel 5. Hier werden Detektionsverfahren im Frequenzbereich und im Zeitbereich entwickelt. Für die hergeleiteten Verfahren schließt eine Schadensdetektion die Lokalisation des Schadens und eine Rekonstruktion des Schadensausmaßes mit ein. Ein wichtiger Aspekt der Analysen ist die Identifikation des Einflusses der verwendeten Sensoranzahl auf potentielle Rekonstruktionsfehler. So ist es möglich, Grenzen und Toleranzwerte der Überwachungsstrategien zu definieren.

In Kapitel 6 können dann die Erkenntnisse aus den Kapiteln 4 und 5 zusammengeführt werden, um Rekonstruktionsverfahren zur kombinierten Last- und Schadensdetektion zu entwerfen. Basierend auf der Schadensgröße wird hier zwischen zwei Identifikationskonzepten unterschieden. Die Arbeit endet mit einer Zusammenfassung der wichtigsten Erkenntnisse und einem Ausblick in Kapitel 7.

Kapitel 2

Theoretische Grundlagen

2.1 Mathematische Beschreibung dynamischer Systeme

Modellgestützte Strukturüberwachung erfordert die Beschreibung der relevanten Systemeigenschaften mittels mathematischer Formulierungen. Im Folgenden werden verschiedene mathematische Modelle vorgestellt, welche für die weiterführenden Untersuchungen von Bedeutung sind. Diese Modelle erlauben es die strukturdynamischen Prozesse zu beschreiben und zu analysieren.

2.1.1 Allgemeine Systembeschreibung im Zeitbereich

Mechanische, lasttragende Systeme sind in der Realität kontinuierliche Strukturen. Im Zuge der Modellbildung werden diese kontinuierlichen Strukturen oftmals räumlich diskretisiert, sodass ihre Strukturdynamiken mit Hilfe einer endlichen Anzahl n_n an Freiheitsgraden (FHGs) beschrieben werden können. Eine allgemeine Formulierung eines nichtlinearen, zeitvarianten mechanischen Systems mit n_n Freiheitsgraden wird in [Fritzen, 2006] durch

$$\mathbf{M}(\Theta_d, \Theta_e, \mathbf{x}, t) \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{g}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, \Theta_d, \Theta_e, t) = \mathbf{f}(t, \Theta_d, \Theta_e) \quad (2.1)$$

$$\dot{\Theta}_d = \Gamma(\Theta_d, \Theta_e, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) \quad (2.2)$$

$$\mathbf{y}(t) = \eta(\Theta_d, \Theta_e, \mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t) , \quad (2.3)$$

dargestellt. Gl. (2.1) beschreibt die nichtlineare zeitkontinuierliche Bewegungsgleichung. $\mathbf{M}(\cdot) \in \mathbb{R}^{n_n \times n_n}$ stellt hier die Massenmatrix dar. Der Vektor $\mathbf{g}(\cdot) \in \mathbb{R}^{n_n}$ gibt alle elasti-

schen Kräfte, Dämpfungskräfte usw. an. Die Freiheitsgrade werden durch den Verschiebungsvektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_n}$, den Geschwindigkeitsvektor $\dot{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^{n_n}$ und den Beschleunigungsvektor $\ddot{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^{n_n}$ beschrieben. Angeregt wird das System durch den Vektor der externen Kräfte $\mathbf{f}(\cdot) \in \mathbb{R}^{n_n}$. Dem Einfluss potentieller Strukturschäden im Hinblick auf die dynamischen Eigenschaften wird mittels des Schadensparametervektors $\Theta_d \in \mathbb{R}^{n_p}$ Rechnung getragen. Des Weiteren hängen die Dynamiken vom Parameter $\Theta_e \in \mathbb{R}^{n_e}$ ab, der den Einfluss von über die Zeit t veränderlichen Umgebungseinflüssen berücksichtigt, wie z.B. Temperaturänderungen oder veränderliche Randbedingungen.

Die zeitliche Evolution des Schadensparameters Θ_d definiert der nichtlineare Zusammenhang $\Gamma(\cdot)$ aus Gl. (2.2). Dieser kann z.B. die Reduktion der Steifigkeit bei Rissausbreitung beschreiben. Die gemessenen physikalischen Größen $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n_r}$ werden mit Hilfe der nichtlinearen Funktion $\eta(\cdot)$ aus Gl. (2.3) bestimmt. Die Änderung der Parameter Θ_d und Θ_e laufen allerdings im Vergleich zu den Strukturschwingungen auf einer anderen Zeitskala ab. Falls nur ein kurzer Zeitraum betrachtet wird, können sie daher als konstant angesehen werden und Gl. (2.2) kann in diesem Fall vernachlässigt werden [Fritzen, 2006; Kraemer, 2011].

Oftmals sind mechanische Strukturen durch ein lineares Systemverhalten gekennzeichnet. Die ungedämpfte Bewegungsgleichung kann dann durch eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung angegeben werden:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (2.4)$$

Lineare mechanische Systeme folgen dem Prinzip der Superposition. So erzeugt eine lineare Kombination von Anregungskräften dieselbe Strukturantwort, wie die Kombination aller Antworten, falls das System durch die entsprechenden Einzelkräfte angeregt wird [Klinkov, 2011]. In Gl. (2.4) ist $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{n_n \times n_n}$ die Struktursteifigkeitsmatrix. Um die charakteristischen Schwingungseigenschaften der Struktur zu bestimmen wird das homogene Gleichungssystem

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}, \quad (2.5)$$

mit dem Ansatz $\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\varphi}e^{i\omega t}$ und $\ddot{\mathbf{x}}(t) = -\omega^2\boldsymbol{\varphi}e^{i\omega t}$ gelöst. Nun können mit Hilfe des konservativen Eigenwertproblems

$$\left(\mathbf{K} - \omega_i^2\mathbf{M}\right)\boldsymbol{\varphi}_i = \mathbf{0}, \quad (2.6)$$

die Eigenkreisfrequenzen $\omega_i \in \mathbb{R}^{\geq 0}$ und die Eigenschwingungsformen $\varphi_i \in \mathbb{R}^{n_n}$ der Struktur, mit $i = 1, 2, \dots, n_n$ berechnet werden. Die Eigenvektoren φ_i können aufgrund ihrer Orthogonalitätseigenschaften genutzt werden, um die Massen- und Steifigkeitsmatrix zu diagonalisieren und somit die Differentialgleichung (2.5) zu entkoppeln. Es folgt für die generalisierte Masse und Steifigkeit:

$$\begin{aligned} \varphi_j^T \mathbf{M} \varphi_i &= \delta_{ij} M_i \stackrel{!}{=} \delta_{ij} & \text{mit} & \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases} \\ \varphi_j^T \mathbf{K} \varphi_i &= \delta_{ij} K_i = \delta_{ij} \omega_i^2 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Die Eigenvektoren wurden so skaliert, dass die Massen $M_i = 1$ entsprechen. δ_{ij} ist das Kronecker-Delta, mit den in Gl. (2.7) gezeigten mathematischen Eigenschaften.

Für viskos gedämpfte lineare Strukturen wird der Bewegungsgleichung aus Gl. (2.4) noch ein Term für die geschwindigkeitsproportionale Dämpfung mit der Dämpfungsmatrix $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n_n \times n_n}$ hinzugefügt:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{C} \dot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (2.8)$$

Bei der sogenannten *proportionalen Dämpfung* oder *Rayleigh-Dämpfung* wird vereinfachend angenommen, dass die Dämpfungsmatrix \mathbf{C} proportional zur Massen- und Steifigkeitsmatrix ist:

$$\mathbf{C} = \alpha_p \mathbf{M} + \beta_p \mathbf{K} \quad (2.9)$$

Wobei α_p und β_p reelle, skalare Konstanten sind. So lässt sich auch die Dämpfungsmatrix \mathbf{C} mittels der Eigenvektoren φ_i diagonalisieren [Gasch *et al.*, 2012]:

$$\varphi_j^T \mathbf{C} \varphi_i = \delta_{ij} C_i = \delta_{ij} 2\xi_i \omega_i \quad (2.10)$$

ξ_i wird als modale Dämpfung bezeichnet. Bei der Lösung des gedämpften Eigenwertproblems ergeben sich im Allgemeinen konjugiert komplexe Eigenwerte. Der Imaginärteil der Eigenwerte entspricht der Eigenkreisfrequenz ω_i^D des gedämpften Systems. Die gedämpfte Eigenfrequenz kann aber auch durch

$$\omega_i^D = \sqrt{1 - \xi_i^2} \omega_i, \quad (2.11)$$

bestimmt werden.

Für beliebig viskos gedämpfte Strukturen können hingegen die Eigenvektoren des ungedämpften Systems nicht mehr angesetzt werden und die Dämpfungsmatrix lässt sich im Allgemeinen nicht mehr diagonalisieren.

2.1.2 Zustandsraummodelle in Nodal- und Modalkoordinaten

Die Bewegungsdifferentialgleichungen 2. Ordnung aus Gl. (2.4) und (2.8) können leicht in eine Differenzialgleichung 1. Ordnung überführt werden. Die so erhaltene Zustandsraumformulierung lässt sich oftmals numerisch effizienter lösen. Die Zustandsraumdarstellung setzt sich ganz allgemein aus einer Systemgleichung (2.12) und einer Messwertgleichung (2.13) zusammen:

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}_c \mathbf{z}(t) + \mathbf{B}_c \mathbf{u}(t) \quad (2.12)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_y \mathbf{z}(t) + \mathbf{D}_y \mathbf{u}(t) \quad (2.13)$$

So kann nicht nur das Verhalten zwischen den Eingangsgrößen $\mathbf{u}(t)$ und den Ausgangsgrößen $\mathbf{y}(t)$ beschrieben werden, sondern auch die inneren Systemzustände $\mathbf{z}(t)$. Speziell für ein mechanisches System wird der Zustand in nodalen Koordinaten definiert als:

$$\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2n_n} \quad (2.14)$$

Nach Multiplikation der Gl. (2.8) von links mit der inversen Massenmatrix kann somit die Systemgleichung eines linearen zeitinvarianten gedämpften Systems sofort aufgestellt werden:

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \ddot{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix}}_{=\mathbf{A}_c} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}_u \end{bmatrix}}_{=\mathbf{B}_c} \mathbf{u}(t) \quad (2.15)$$

$\mathbf{A}_c \in \mathbb{R}^{2n_n \times 2n_n}$ wird als Systemmatrix und $\mathbf{B}_c \in \mathbb{R}^{2n_n \times n_f}$ als Eingangsmatrix bezeichnet. Der Index c der Matrizen kennzeichnet hier die zeitkontinuierliche Formulierung der Zustandsraumdarstellung. Die externe Kraftanregung $\mathbf{f}(t)$ wurde durch

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{B}_u \mathbf{u}(t) \quad (2.16)$$

ersetzt. Die Matrix $\mathbf{B}_u \in \mathbb{R}^{n_n \times n_f}$ ist eine Selektionsmatrix, welche die n_f anregenden Kräfte den entsprechenden Freiheitsgraden zuordnet.

Der Zustandsvektor $\mathbf{z}(t)$ beschreibt vollständig die inneren Systemeigenschaften. Daher kann bei bekannter Anregung $\mathbf{u}(t)$ jede beliebige physikalische Ausgangsgröße bzw. jeder Messwert $\mathbf{y}(t)$ an jeder Knotenposition abgeleitet werden. Für die Messgrößen der

Verschiebung, der Geschwindigkeit und der Beschleunigung ergeben sich für die Messgleichung:

$$\mathbf{y}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{C}_x & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{\dot{x}} \\ -\mathbf{C}_{\ddot{x}}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{C}_{\ddot{x}}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix}}_{=\mathbf{C}_y} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_{\ddot{x}}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{B}_u \end{bmatrix}}_{=\mathbf{D}_y} \mathbf{u}(t) \quad (2.17)$$

Die Matrix $\mathbf{C}_y \in \mathbb{R}^{n_r \times 2n_n}$ ist die Messmatrix und $\mathbf{D}_y \in \mathbb{R}^{n_r \times n_f}$ ist der Durchgriff des Systems. Die Matrizen $\mathbf{C}_x \in \mathbb{R}^{n_{r,x} \times 2n_n}$, $\mathbf{C}_{\dot{x}} \in \mathbb{R}^{n_{r,\dot{x}} \times 2n_n}$ und $\mathbf{C}_{\ddot{x}} \in \mathbb{R}^{n_{r,\ddot{x}} \times 2n_n}$, mit $n_{r,x} + n_{r,\dot{x}} + n_{r,\ddot{x}} = n_r$, sind Selektionsmatrizen, die die entsprechenden mechanischen Größen den physikalischen Messfreiheitsgraden zuordnen. Zustandsraummodelle lassen sich durch Ähnlichkeitstransformation in einer unendlichen Anzahl von Realisierungen darstellen. Allerdings entsprechen nur für eine einzige Realisierung die inneren Zustände den nodalen Koordinaten [Lunze, 2012; Koenen, 2016].

Für komplexe mechanische Strukturen mit vielen Freiheitsgraden ist eine Systembeschreibung in nodalen Koordinaten nicht sinnvoll, da die Systemmatrizen hier schnell sehr groß werden können, z.B. bei der Verwendung von FE-Modellen. Eine deutliche Reduktion der Systemgröße kann in der Regel durch eine Transformation des Modells in Modalkoordinaten erreicht werden (siehe z.B. [Gawronski, 2004]).

Die dynamischen Schwingungseigenschaften werden zumeist nur von sehr wenigen Schwingungsmoden φ_i mit den zugehörigen Eigenkreisfrequenzen ω_i , $i = 1, 2, \dots, n_m$ dominiert. Durch die Modaltransformation

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi} \mathbf{x}_m(t), \quad (2.18)$$

kann das Modell ausschließlich mittels dieser signifikanten Schwingungsformen beschrieben werden. $\mathbf{x}_m \in \mathbb{R}^{n_m}$ beschreibt nun die modalen Freiheitsgrade. Da die Eigenformen φ_i zueinander orthogonal sind, bildet die Modalmatrix $\mathbf{\Phi} \in \mathbb{R}^{n_n \times n_m}$

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \cdots & \varphi_{n_m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \cdots & \varphi_{1n_m} \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \cdots & \varphi_{2n_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{n_1} & \varphi_{n_2} & \cdots & \varphi_{n_n n_m} \end{bmatrix}, \quad (2.19)$$

für $n_m = n_n$ eine vollständige orthogonale Basis im \mathbb{R}^{n_n} . Häufig kann man sich aber nur auf wenige Moden beschränken und es kann $n_m \ll n_n$ gewählt werden. Der dadurch

entstehende Fehler ist für praktische Anwendungen häufig nur äußerst gering. In Gl. (2.7) und (2.10) wurde bereits gezeigt, dass durch die Eigenvektoren bzw. Eigenschwingungsformen φ_i die Bewegungsdifferentialgleichungen entkoppelt werden können, da diese die Massen-, Steifigkeits- und proportionale Dämpfungsmatrizen diagonalisieren. Fasst man die Eigenkreisfrequenzen ω_i und die modalen Dämpfungen ξ_i in den Diagonalmatrizen $\mathbf{\Omega} \in \mathbb{R}^{n_m}$ und $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{n_m}$ zusammen

$$\mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} \omega_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \omega_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \omega_{n_m} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Z} = \begin{bmatrix} \xi_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \xi_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \xi_{n_m} \end{bmatrix}, \quad (2.20)$$

kann die Bewegungsgleichung in Modalkoordinaten ausschließlich mit Hilfe der modalen Parameter $\mathbf{\Omega}$, $\mathbf{\Phi}$, \mathbf{Z} und \mathbf{M}_m entkoppelt beschrieben werden:

$$\ddot{\mathbf{x}}_m(t) + 2\mathbf{Z}\mathbf{\Omega}\dot{\mathbf{x}}_m(t) + \mathbf{\Omega}^2\mathbf{x}_m(t) = \mathbf{M}_m^{-1}\mathbf{\Phi}^T\mathbf{B}_u\mathbf{u}(t) \quad (2.21)$$

Die modale Masse $\mathbf{M}_m \in \mathbb{R}^{n_m \times n_m}$ ist dabei analog zu Gl. (2.7) definiert, ohne hierbei allerdings eine Skalierung der Eigenvektoren zu fordern:

$$\mathbf{M}_m = \mathbf{\Phi}^T\mathbf{M}\mathbf{\Phi} \quad (2.22)$$

Die modale Dämpfung ξ_i kann auch mittels der Parameter der proportionalen Dämpfung α_p und β_p aus Gl. (2.9) geschrieben werden als:

$$\xi_i = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_p}{\omega_i} + \beta_p \omega_i \right) \quad (2.23)$$

Legt man nun Gl. (2.21) zugrunde, können die Systemmatrizen des modalen Zustandsraummodells analog zu Gl. (2.15) und (2.17) definiert werden. Für die Systemgleichung gilt dann:

$$\dot{\mathbf{z}}_m(t) = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_m(t) \\ \ddot{\mathbf{x}}_m(t) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{\Omega}^2 & -2\mathbf{Z}\mathbf{\Omega} \end{bmatrix}}_{=\mathbf{A}_{cm}} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_m(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_m(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_m^{-1}\mathbf{\Phi}^T\mathbf{B}_u \end{bmatrix}}_{=\mathbf{B}_{cm}} \mathbf{u}(t) \quad (2.24)$$

Die modale Messwertgleichung für die mechanischen Größen Verschiebung, Geschwindigkeit und Beschleunigung lautet:

$$\mathbf{y}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{C}_x\mathbf{\Phi} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{\dot{x}}\mathbf{\Phi} \\ -\mathbf{C}_{\ddot{x}}\mathbf{\Phi}\mathbf{\Omega}^2 & -\mathbf{C}_{\ddot{x}}\mathbf{\Phi}2\mathbf{Z}\mathbf{\Omega} \end{bmatrix}}_{=\mathbf{C}_{ym}} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_m(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_m(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_{\ddot{x}}\mathbf{\Phi}\mathbf{M}_m^{-1}\mathbf{\Phi}^T\mathbf{B}_u \end{bmatrix}}_{=\mathbf{D}_{ym}} \mathbf{u}(t) \quad (2.25)$$

Die Dimension $2n_m$ des Zustandsvektors $\mathbf{z}_m(t)$ und damit die Größe der Systemmatrizen $\mathbf{A}_{cm} \in \mathbb{R}^{2n_m \times 2n_m}$, $\mathbf{B}_{cm} \in \mathbb{R}^{2n_m \times n_f}$, $\mathbf{C}_{cm} \in \mathbb{R}^{n_r \times 2n_m}$, und $\mathbf{D}_{cm} \in \mathbb{R}^{n_r \times n_f}$ ist gegenüber der nodalen Darstellung meist deutlich reduziert. Ein weiterer Vorteil dieser Darstellung ist, dass zur Beschreibung der Systemdynamiken ausschließlich modale Parameter verwendet wurden. Diese lassen sich in der Praxis oftmals einfacher und genauer bestimmen als die mechanischen Modellgrößen \mathbf{M} , \mathbf{C} und \mathbf{K} .

2.1.3 Zeitdiskrete Zustandsraummodelle

Um Messdaten rechnerisch verarbeiten zu können, müssen die kontinuierlichen Daten mit Hilfe eines Analog/Digital-Wandlers digitalisiert werden. Dabei werden die Messdaten in äquidistanten, diskreten Zeitabständen Δt abgetastet und die Messwerte betragsmäßig quantifiziert. Außerdem beschreibt ein Bit das Vorzeichen des Messwertes. Während der Fehlereinfluss der Betragsquantifizierung in der Regel vernachlässigbar ist, müssen die Systemgleichungen (2.15) und (2.24) neu formuliert werden, um der Diskretisierung der Zeitachse Rechnung zu tragen. Es liegen jetzt nicht mehr jederzeit Messwerte vor, sondern nur noch an den diskreten Zeitpunkten t_k mit $t_k = k\Delta t$, $k \in \mathbb{N}$. Zur Herleitung der diskreten Zustandsraumformulierung wird die Zustandsevolutionsgleichung

$$\mathbf{z}(t) = e^{\mathbf{A}_c(t-t_0)} \mathbf{z}(t_0) + \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}_c(t-\tau)} \mathbf{B}_c \mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (2.26)$$

herangezogen [Franklin *et al.*, 1998]. Mit Hilfe von (2.26) kann der Zustand $\mathbf{z}(t)$ zu einem beliebigen Zeitpunkt t , bei gegebenem Anfangszustand $\mathbf{z}(t_0)$ und bekanntem Anregungsverlauf $\mathbf{u}(\tau)$, $t_0 \leq \tau \leq t$ berechnet werden. Nun ersetzt man den Anfangs- und Endzeitpunkt t und t_0 durch zwei aufeinanderfolgende Abtastschritte $t_{k+1} = (k+1)\Delta t$ und $t_k = k\Delta t$ mit $\Delta t = t_{k+1} - t_k$. Außerdem wird $\mathbf{u}(\tau)$ für einen Zeitschritt $t_k \leq \tau \leq t_{k+1}$ als konstant angesehen. Substituiert man noch die Integrationsvariable $\tau' = (k+1)\Delta t - \tau$, dann ergibt sich der Zustand $\mathbf{z}((k+1)\Delta t) = \mathbf{z}(t_{k+1}) = \mathbf{z}_{k+1}$, aus $\mathbf{z}(k\Delta t) = \mathbf{z}(t_k) = \mathbf{z}_k$ und $\mathbf{u}(k\Delta t) = \mathbf{u}(t_k) = \mathbf{u}_k$, durch folgende Beziehung:

$$\mathbf{z}_{k+1} = \underbrace{e^{\mathbf{A}_c \Delta t}}_{=\mathbf{A}_d} \mathbf{z}_k + \underbrace{\int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{\mathbf{A}_c \Delta t} \mathbf{B}_c d\tau'}_{=\mathbf{B}_d} \mathbf{u}_k \quad (2.27)$$

Die zeitdiskrete Systemmatrix $\mathbf{A}_d \in \mathbb{R}^{2n_d \times 2n_d}$ und die zeitdiskrete Eingangsmatrix $\mathbf{B}_d \in \mathbb{R}^{2n_d \times n_f}$ können also, wie in Gl. (2.27) dargestellt, bestimmt werden. Die Herleitung ist allgemein gültig und nicht von der Art der Systembeschreibung abhängig, d.h. sie ist für nodale und für modale Koordinaten anwendbar. Das diskrete Zustandsraummodell lautet

somit:

$$\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{A}_d \mathbf{z}_k + \mathbf{B}_d \mathbf{u}_k \quad (2.28)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}_y \mathbf{z}_k + \mathbf{D}_y \mathbf{u}_k \quad (2.29)$$

Die Diskretisierung hat keinen Einfluss auf die Messwertgleichung. Sie ist daher mit der zeitkontinuierlichen Messwertgleichung identisch. Bei der Berechnung der Matrizen \mathbf{A}_d und \mathbf{B}_d nach Gl. (2.27) müssen für große Systeme in der Regel numerische Näherungsverfahren angewendet werden. Für mechanische Zustandsraummodelle kann man allerdings auf eine solche Näherungsverfahren verzichten, da hier gilt:

$$\mathbf{z}_{k+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k+1} \\ \dot{\mathbf{x}}_{k+1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \Delta t \mathbf{I} \\ -\Delta t (\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}) & -\Delta t (\mathbf{M}^{-1} \mathbf{C}) + \mathbf{I} \end{bmatrix}}_{= \mathbf{A}_d} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \dot{\mathbf{x}}_k \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \Delta t \mathbf{M}^{-1} \mathbf{B}_u \end{bmatrix}}_{= \mathbf{B}_d} \mathbf{u}_k \quad (2.30)$$

Die in Gl. (2.30) gezeigte Darstellung in nodalen Koordinaten kann analog auf Systeme in modaler Koordinatenbeschreibung übertragen werden.

Löst man das Eigenwertproblem für das diskrete Zustandsraummodell

$$(\mathbf{A}_d - \lambda_i^d \mathbf{I}) \boldsymbol{\Psi}_i = 0, \quad (2.31)$$

können mittels der komplexen Eigenwerte λ_i^d , die Eigenkreisfrequenzen ω_i und die modalen Dämpfungen ξ_i bestimmt werden. Dazu werden diese allerdings noch in den zeitkontinuierlichen Bereich transformiert:

$$\frac{\ln(\lambda_i^d)}{\Delta t} = -\xi_i \omega_i \pm i \sqrt{1 - \xi_i^2} \omega_i \quad (2.32)$$

Durch Projektion der komplexen Eigenvektoren $\boldsymbol{\Psi}_i$ auf die Messmatrix

$$\boldsymbol{\Phi}_i^d = \mathbf{C}_y \boldsymbol{\Psi}_i, \quad (2.33)$$

erhält man die Eigenschwingungsformen $\boldsymbol{\Phi}_i^d$ an den Messfreiheitsgraden.

2.1.4 Kombinierte deterministische und stochastische Modelle

Für die gezeigten Zustandsraumformulierungen wird angenommen, dass die Systemgleichung perfekt die tatsächlichen Systemdynamiken beschreibt und die Messwertgleichung die physikalischen Messdaten exakt determiniert. Allerdings sind beide Annahmen für

praktische Anwendungen nicht zutreffend. Die mathematische Systembeschreibung ist aufgrund von Modellannahmen stets mehr oder weniger fehlerbehaftet und reale Messwerte werden immer von einem gewissen Messrauschen überlagert. Aus diesem Grund geht man zu einer kombiniert deterministisch-stochastischen Modellbeschreibung über:

$$\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{A}_d \mathbf{z}_k + \mathbf{B}_d \mathbf{u}_k + \boldsymbol{\omega}_k \quad (2.34)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}_y \mathbf{z}_k + \mathbf{D}_y \mathbf{u}_k + \boldsymbol{\nu}_k \quad (2.35)$$

Die deterministische Zustandsraumdarstellung wurde um stochastische Größen erweitert. Diese spiegeln die Unsicherheit der System- und Messgleichung wider. $\boldsymbol{\omega}_k \in \mathbb{R}^{2n_d}$ wird als Prozessrauschen bezeichnet und ist ein Maß für die Abweichung zwischen realem System und mathematischer Modellbeschreibung. Darüber hinaus können so auch nicht modellierte Systemeingänge Berücksichtigung finden. Das Messrauschen wird durch $\boldsymbol{\nu}_k \in \mathbb{R}^{n_r}$ wiedergegeben. Die Größen des stochastischen Prozesses $\boldsymbol{\omega}_k$ und $\boldsymbol{\nu}_k$ werden in der Regel als stationär, mittelwertfrei und weiß, mit bekannten Kovarianzen angenommen. Daher gelten für diese Größen

$$\mathbb{E} \left\{ \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_k \\ \boldsymbol{\nu}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}_l^T & \boldsymbol{\nu}_l^T \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{Q}} & \tilde{\mathbf{S}} \\ \tilde{\mathbf{S}}^T & \tilde{\mathbf{R}} \end{bmatrix} \delta_{kl}, \quad (2.36)$$

und

$$\mathbb{E} \{ \boldsymbol{\omega}_k \} = \mathbb{E} \{ \boldsymbol{\nu}_k \} = \mathbf{0}. \quad (2.37)$$

Das Kronecker-Delta δ_{kl} wurde bereits in Gl. (2.7) definiert. $\mathbb{E} \{ \cdot \}$ ist der Erwartungswertoperator. Für die weiterführenden Untersuchungen wird darüber hinaus angenommen, dass das Prozessrauschen $\boldsymbol{\omega}_k$ und Messrauschen $\boldsymbol{\nu}_k$ unkorreliert sind, $\tilde{\mathbf{S}} = \mathbf{0}$. Diese Annahme ist für praktische Anwendungen oftmals plausibel. Des Weiteren gilt für stochastisch angeregte Systeme:

$$\mathbb{E} \{ \mathbf{z}_k \boldsymbol{\omega}_k^T \} = 0, \quad \mathbb{E} \{ \mathbf{z}_k \boldsymbol{\nu}_k^T \} = 0, \quad \mathbb{E} \{ \boldsymbol{\nu}_{k+1} \mathbf{y}_k^T \} = 0, \quad \mathbb{E} \{ \boldsymbol{\omega}_{k+1} \mathbf{y}_k^T \} = 0 \quad (2.38)$$

Wird ein System ausschließlich stochastisch angeregt und sind daher die Eingangsgrößen nicht determiniert, bezeichnet man es häufig als *Output-Only-System* [Peeters, 2000]:

$$\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{A}_d \mathbf{z}_k + \boldsymbol{\omega}_k \quad (2.39)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}_y \mathbf{z}_k + \boldsymbol{\nu}_k \quad (2.40)$$

Hier beschreibt ω_k die stochastische Systemanregung, welche z.B. aufgrund von Wind-, Wellen- oder Verkehrslasten entstehen kann. Wie solche Systeme aus gemessenen Output-Daten bestimmt werden können, wird in Abschnitt 2.2 beschrieben.

2.1.5 Impulsantwort-Modelle

Eine weitere Möglichkeit mechanische Modelle mathematisch zu beschreiben, bietet die Systemformulierung mittels Impulsantwortfunktionen. Eine solche Impulsantwortfunktion $h_{i_r, j_f}(t) \in \mathbb{R}$ beschreibt die dynamische Systemantwort an einer Position $i_r = 1, 2, \dots, n_r$, aufgrund einer ideal-impulsförmigen, normierten Anregung zum Zeitpunkt $t = 0$ an der Position $j_f = 1, 2, \dots, n_f$. Nun kann die Schwingungsantwort $y_{i_r}(t) \in \mathbb{R}$ aufgrund einer Anregung mit beliebigem Zeitverlauf $u_{j_f}(t) \in \mathbb{R}$ als Folge einer unendlichen Anzahl an zeitverschobenen Impulsantworten dargestellt werden. Die jeweiligen Anfangsbedingungen ergeben sich aus dem bisherigen Systemverlauf. Betrachtet man alle Anregungen $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^{n_f}$ und alle Systemausgänge $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^{n_r}$ gekoppelt, führt die geschilderte Systembeschreibung auf folgendes Faltungsintegral:

$$\mathbf{y}(t) = \int_0^t \mathbf{h}(t - \tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (2.41)$$

Bei dem gezeigten MIMO-System (*Multiple Input Multiple Output*) aus Gl. (2.41) enthält die Matrix $\mathbf{h}(t) \in \mathbb{R}^{n_r \times n_f}$ die Impulsantwortfunktionen für alle Übertragungspfade. Eine solche Form der Modellbeschreibung wird auch als Eingangs-Ausgangs-Modell bezeichnet. Hier werden die Systemeingänge bzw. die Kraftanregungen $\mathbf{u}(t)$ direkt mit den Systemausgängen $\mathbf{y}(t)$ in Verbindung gebracht. Die Systemgröße ist ausschließlich durch die Anzahl der Systemein- und ausgänge definiert und damit unabhängig von der Modellordnung n_m . Im Vergleich zu den in Abschnitt 2.1.2 gezeigten Zustandsraummodellen ist die Systembeschreibung durch Impulsantworten eindeutig.

Die experimentelle Bestimmung der Impulsantwortfunktion $h_{i_r, j_f}(t)$ ist in der Regel leicht möglich. Darüber hinaus lässt sich die Impulsantwort $\mathbf{h}(t)$ auch mit Hilfe der modalen Parameter darstellen:

$$\mathbf{h}(t) = \sum_{i=1}^{n_m} \frac{\boldsymbol{\varphi}_i \boldsymbol{\varphi}_i^T}{M_i \omega_i^D} e^{-\xi_i \omega_i t} \sin(\omega_i^D t) \quad (2.42)$$

Um digitale Messwerte analysieren zu können, ist es auch hier notwendig die zeitkontinuierliche Darstellung in eine zeitdiskrete Formulierung zu überführen. Die zeitdiskrete

Formulierung ($t_k = k\Delta t$, $k = 0, 1, 2, \dots, n_k$) von Gl. (2.41) lautet:

$$\mathbf{y}_k = \sum_{i=0}^k \mathbf{h}_i \mathbf{u}_{k-i} \quad (2.43)$$

Das Faltungsintegral wird im zeitdiskreten Fall zu einer Faltungssumme. Die Matrizen $\mathbf{h}_k \in \mathbb{R}^{n_r \times n_f}$ werden als Markov-Parameter bezeichnet und enthalten alle diskreten Systemantwortfunktion aufgrund eines Einheitsimpulses zum Zeitpunkt $t_k = 0$.

Die Markov-Parameter können mittels der Systemmatrizen der Zustandsraumdarstellung hergeleitet werden. Betrachtet man die rekursive Lösung der zeitdiskreten Zustandsraumformulierung aus der Ruhelage $\mathbf{z}_0 = \mathbf{0}$

$$\mathbf{y}_k = \sum_{i=1}^k \mathbf{C}_y \mathbf{A}_d^{k-1} \mathbf{B}_d \mathbf{u}_{k-i} + \mathbf{D}_y \mathbf{u}_k, \quad (2.44)$$

und regt das System mit einem Einheitsimpuls $\mathbf{u}_k = \mathbf{u}_k^I$ an

$$\mathbf{u}_k^I = \begin{cases} 1 & \text{für } k = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}, \quad (2.45)$$

dann ergibt sich für die Systemantwort \mathbf{y}_k gerade genau die Impulsantwort, $\mathbf{h}_k = \mathbf{y}_k$. Somit können die Markov-Parameter durch folgenden Zusammenhang bestimmt werden:

$$\mathbf{h}_0 = \mathbf{D}_y \quad \text{und} \quad \mathbf{h}_k = \mathbf{C}_y \mathbf{A}_d^{k-1} \mathbf{B}_d \quad (2.46)$$

Im Frequenzbereich wird das Faltungsintegral aus Gl. (2.41) zu einer einfachen algebraischen Gleichung:

$$\mathbf{Y}_\omega(\omega) = \mathbf{H}_\omega(\omega) \mathbf{U}_\omega(\omega) \quad (2.47)$$

Die Matrix $\mathbf{H}_\omega(\omega) \in \mathbb{R}^{n_r \times n_f}$ wird als Frequenzantwortfunktion (FRF, engl. *Frequency Response Function*) bezeichnet. Die Vektoren $\mathbf{Y}_\omega(\omega) \in \mathbb{R}^{n_r}$ und $\mathbf{U}_\omega(\omega) \in \mathbb{R}^{n_f}$ beschreiben den Systemausgang bzw. den Systemeingang im Frequenzbereich.

2.2 Systemidentifikation im Zeitbereich

Systemidentifikation beschreibt die Aufgabe, mathematische Modelle anhand von gewonnenen Messdaten zu erstellen bzw. diese Modelle bestmöglich an die Messdaten anzupassen. Zur Identifikation können sowohl Messdaten der Eingangs- und Ausgangsgrößen verwendet werden, als auch ausschließlich Messdaten des Systemausgangs, falls der Eingang

unbekannt ist. Die Identifikation mechanischer Systeme kann in drei elementare Schritte aufgeteilt werden [Reynders, 2012]: 1) Entwurf eines Messaufbaues der möglichst viele Informationen der Dynamiken aufzeichnet 2) Auswahl eines Modelltyps, z.B. stochastisches Zustandsraummodell, nicht-parametrisches Impulsantwort-Modell usw. 3) Auswahl eines Systemidentifikationsalgorithmus, der das Modell bestmöglich an die Messdaten anpasst. In [Ljung, 1999] wurde gezeigt, dass die Vielzahl an vorhandenen Identifikationsalgorithmen lediglich verschiedene Implementierungen einiger weniger genereller Identifikationskonzepte darstellen. Daher muss zwischen genereller Identifikationsstrategie und numerischem Algorithmus der Identifikation unterschieden werden. Eine Klassifikation der Verfahren kann beispielsweise anhand des verarbeiteten Signaltyps vorgenommen werden. Häufig kommen frequenzbasierte oder zeitreihenbasierte Verfahren zur Anwendung. Wobei die meisten Identifikationsverfahren im Zeitbereich ein Pendant im Frequenzbereich besitzen und vice versa. Sie unterscheiden sich lediglich durch die Fourier-Transformation bzw. die inverse Fourier-Transformation. Zur Vollständigkeit sei aber auf [Reynders, 2012] verwiesen. Hier ist ein detaillierter Überblick verschiedener Identifikationsverfahren im Hinblick auf vielfältige Anwendungen im Bereich der Strukturmechanik gegeben.

2.2.1 Stochastic Subspace Identification

In dieser Arbeit kommt die *Stochastic Subspace Identification* (SSI) - Methode zum Einsatz [Peeters & De Roeck, 1999; Peeters, 2000]. Die Methode gehört zur Klasse der nicht-parametrischen Systemidentifikationsverfahren und arbeitet mit *Output-Only*-Daten im Zeitbereich. Sie kann allerdings analog auch für die Darstellung im Frequenzbereich hergeleitet werden [Cauberghe, 2004]. Die SSI-Methode ist eine Erweiterung des Eigensystem-Realisierungs-Algorithmuses (ERA) [Juang, 1994] und hat sich für Probleme der Strukturüberwachung als sehr effizient erwiesen [Fritzen *et al.*, 2013]. SSI basiert auf der Annahme, dass das System ausschließlich durch weißes Rauschen angeregt wird. Damit kann eine Modellbeschreibung nach Gl. (2.39) und (2.40) zugrunde gelegt werden.

Ausgangspunkt des SSI-Verfahrens ist die Konstruktion einer Matrix $\mathcal{H}_{\tilde{a}, \tilde{b}}^{i-1}$ in Hankel-Struktur

$$\mathcal{H}_{\tilde{a}, \tilde{b}}^{i-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_i^{yy} & \mathbf{R}_{i+1}^{yy} & \cdots & \mathbf{R}_{i+\tilde{b}-1}^{yy} \\ \mathbf{R}_{i+1}^{yy} & \mathbf{R}_{i+2}^{yy} & \cdots & \mathbf{R}_{i+\tilde{b}}^{yy} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{R}_{i+\tilde{a}-1}^{yy} & \mathbf{R}_{i+\tilde{a}}^{yy} & \cdots & \mathbf{R}_{i+\tilde{a}+\tilde{b}-2}^{yy} \end{bmatrix}, \quad (2.48)$$

bestehend aus den Ausgangskovarianzmatrizen \mathbf{R}_i^{yy} für den Zeitversatz i

$$\mathbf{R}_i^{yy} = \mathbb{E} \left\{ \mathbf{y}_{k+i} \mathbf{y}_k^T \right\}. \quad (2.49)$$

Schätzungen $\hat{\mathbf{R}}_i^{yy}$ für die Ausgangskovarianzmatrizen können aus den gemessenen Zeitreihen generiert werden:

$$\hat{\mathbf{R}}_i^{yy} = \frac{1}{n_k - i - 1} \sum_{k=1}^{n_k - i} \mathbf{y}_{k+i} \mathbf{y}_k^T \quad (2.50)$$

Hierzu wird ein ergodischer Prozess vorausgesetzt. n_k entspricht der Anzahl an Abtastpunkten innerhalb des Messzeitraums. Die Hankel-Matrix $\mathcal{H}_{\bar{a}, \bar{b}}^{i-1}$ wird anschließend mittels Singulärwertzerlegung (SVD, engl. *Singular Value Decomposition*) aufgespalten. Für den Zeitversatz $i = 1$ ergibt sich durch die Zerlegung:

$$\mathcal{H}_{\bar{a}, \bar{b}}^0 = \mathbf{U} \mathbf{S} \mathbf{V}^T \quad (2.51)$$

Wobei \mathbf{U} und \mathbf{V} orthonormale Matrizen der singulär Vektoren sind, $\mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{V}^T \mathbf{V} = \mathbf{I}$. Die Singulärwertmatrix \mathbf{S} besitzt die Singulärwerte $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_p \geq \dots \geq s_{r_{\mathcal{H}}} \geq 0$ auf der Diagonalen. $r_{\mathcal{H}}$ ist der Rang der Hankel-Matrix $\mathcal{H}_{\bar{a}, \bar{b}}^0$. Der Index p beschreibt die Anzahl an signifikanten Singulärwerten. Durch Vernachlässigung aller Singulärwerte s_q für $q = p + 1, p + 2, \dots, r_{\mathcal{H}}$, lässt die Matrix $\mathcal{H}_{\bar{a}, \bar{b}}^0$ sich näherungsweise auch beschreiben durch:

$$\mathcal{H}_{\bar{a}, \bar{b}}^0 \approx \mathbf{U}_p \mathbf{S}_p \mathbf{V}_p^T \quad (2.52)$$

Daher wird p auch als Systemordnung bezeichnet. Die Matrizen \mathbf{U}_p und \mathbf{V}_p enthalten die ersten p Spalten von \mathbf{U} bzw. \mathbf{V} .

Definiert man die Zustands-Ausgangs-Kovarianzmatrix \mathbf{R}^{zy} als

$$\mathbf{R}^{zy} = \mathbb{E} \left\{ \mathbf{z}_{k+1} \mathbf{y}_k^T \right\}, \quad (2.53)$$

kann der Zusammenhang zwischen der Hankel-Matrix und den Systemmatrizen der Zustandsraumgleichung hergeleitet werden. Durch Ausnutzen der stochastischen Eigenschaften aus Gl. (2.38) und der rekursiven Lösung der stochastischen Zustandsraumformulierung, ergibt sich \mathbf{R}_i^{yy} alternativ zu Gl. (2.49) aus der Kovarianz \mathbf{R}^{zy} und der System- und Messmatrix:

$$\mathbf{R}_i^{yy} = \mathbf{C}_y \mathbf{A}_d^{i-1} \mathbf{R}^{zy} \quad (2.54)$$

Somit kann die Hankel-Matrix $\mathcal{H}_{\tilde{a},\tilde{b}}^0$ auch durch Multiplikation der Zustandsbeobachtbarkeitsmatrix $\mathcal{B}_{\tilde{a}}$

$$\mathcal{B}_{\tilde{a}} = \left[\mathbf{C}_y^T \quad \mathbf{A}_d^T \mathbf{C}_y^T \quad (\mathbf{A}_d^T)^2 \mathbf{C}_y^T \quad \cdots \quad (\mathbf{A}_d^T)^{\tilde{a}-1} \mathbf{C}_y^T \right]^T \quad (2.55)$$

mit der Zustandssteuerbarkeitsmatrix $\mathcal{C}_{\tilde{b}}$

$$\mathcal{C}_{\tilde{b}} = \left[\mathbf{R}^{zy} \quad \mathbf{A}_d \mathbf{R}^{zy} \quad \mathbf{A}_d^2 \mathbf{R}^{zy} \quad \cdots \quad \mathbf{A}_d^{\tilde{b}-1} \mathbf{R}^{zy} \right] \quad (2.56)$$

gewonnen werden:

$$\mathcal{H}_{\tilde{a},\tilde{b}}^0 = \mathcal{B}_{\tilde{a}} \mathcal{C}_{\tilde{b}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_y \mathbf{R}^{zy} & \mathbf{C}_y \mathbf{A}_d \mathbf{R}^{zy} & \cdots & \mathbf{C}_y \mathbf{A}_d^{\tilde{b}-1} \mathbf{R}^{zy} \\ \mathbf{C}_y \mathbf{A}_d \mathbf{R}^{zy} & \mathbf{C}_y \mathbf{A}_d^2 \mathbf{R}^{zy} & \cdots & \mathbf{C}_y \mathbf{A}_d^{\tilde{b}} \mathbf{R}^{zy} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{C}_y \mathbf{A}_d^{\tilde{a}-1} \mathbf{R}^{zy} & \mathbf{C}_y \mathbf{A}_d^{\tilde{a}} \mathbf{R}^{zy} & \cdots & \mathbf{C}_y \mathbf{A}_d^{\tilde{a}+\tilde{b}-2} \mathbf{R}^{zy} \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

Durch Berücksichtigung der Singulärwertzerlegung aus Gl. (2.52) der reduzierten Matrix $\mathcal{H}_{\tilde{a},\tilde{b}}^0$, können die Systembeobachtbarkeits- und die Systemsteuerbarkeitsmatrix wie folgt dargestellt werden:

$$\mathcal{B}_{\tilde{a}} = \mathbf{U}_p \mathbf{S}_p^{1/2} \quad \text{und} \quad \mathcal{C}_{\tilde{b}} = \mathbf{S}_p^{1/2} \mathbf{V}_p^T \quad (2.58)$$

Die Hankel-Matrix für $i = 2$ aus Gl. (2.48) berechnet sich demnach mit:

$$\mathcal{H}_{\tilde{a},\tilde{b}}^1 = \mathcal{B}_{\tilde{a}} \mathbf{A}_d \mathcal{C}_{\tilde{b}} \quad (2.59)$$

Eine Schätzung der Systemmatrix $\hat{\mathbf{A}}_d$ für die reduzierte Systemordnung p erhält man durch Umstellen von Gl. (2.59):

$$\hat{\mathbf{A}}_d = \mathbf{S}_p^{-1/2} \mathbf{U}_p^T \mathcal{H}_{\tilde{a},\tilde{b}}^1 \mathbf{V}_p \mathbf{S}_p^{-1/2} \quad (2.60)$$

Des Weiteren entsprechen die ersten n_r Zeilen der Beobachtbarkeitsmatrix genau der geschätzten Messmatrix $\hat{\mathbf{C}}_y$ (vgl. Gl. (2.55)):

$$\hat{\mathbf{C}}_y = \mathbf{S}_C \mathbf{U}_p \mathbf{S}_p^{1/2} \quad (2.61)$$

Wobei n_r hier wieder die Anzahl der Systemausgänge wiedergibt und \mathbf{S}_C eine entsprechende Selektionsmatrix ist.

Bei dem beschriebenen Verfahren handelt es sich um die sogenannte *Covariance-Driven Stochastic Subspace Identification* (SSI-COV). Eine Modifikation dieses Verfahrens ist die sogenannte *Data-Driven-SSI* (SSI-DATA) [Van Overschie & De Moor, 1993].

Für SSI-DATA wird die explizite Berechnung der Kovarianzmatrix \mathbf{R}_i^{yy} vermieden und stattdessen eine Projektion der zukünftigen Messwerte auf die vergangenen durchgeführt [Peeters & De Roeck, 2001].

Im Bereich der Strukturmechanik ist häufig nicht das identifizierte mathematische Modell selbst von Interesse, sondern vielmehr die modalen Parameter, welche aus ihm abgeleitet werden können. Um die modalen Parameter aus dem geschätzten Modell zu identifizieren, können die Gln. (2.31), (2.32) und (2.33) verwendet werden.

2.3 Zustandsschätzung mittels Kalman-Filter

Zur Schätzung der Zustandsgröße \mathbf{z}_k mit Hilfe der aufgezeichneten Messwerte, sowie der Systemeingänge, sind sogenannte Zustandsbeobachter notwendig. Der wohl bekannteste Algorithmus zur Zustandsschätzung ist das Kalman-Filter [Kalman, 1960; Kalman & Bucy, 1961]. Dieses ist in der Lage eine biasfreie Schätzung der Systemzustände zu erzeugen. Es setzt eine Systembeschreibung in Form eines Zustandsraummodells aus Gl. (2.34) und (2.35) voraus. Hierbei spielt es keine Rolle, ob das System mittels Messdaten identifiziert wurde (siehe Abschnitt 2.2) oder mit Hilfe eines analytischen oder numerischen mechanischen Ersatzmodells bestimmt wurde.

Im Folgenden wird der Estimationsalgorithmus des Kalman-Filters näher beschrieben. Eine detaillierte Ableitung, ausgehend von verschiedenen Ansätzen, wird z.B. in [Loffeld, 1990a] und [Loffeld, 1990b] oder [Grewal & Andrews, 2014] dargestellt. Für die Herleitung ist es wichtig, dass die Eigenschaften des Mess- und Prozessrauschens $\boldsymbol{\omega}_k$ und $\boldsymbol{\nu}_k$ aus Gl. (2.36), (2.37) und (2.38) bestehen bleiben und $\tilde{\mathbf{S}} = \mathbf{0}$ gilt. Darüber hinaus sollen $\boldsymbol{\omega}_k$ und $\boldsymbol{\nu}_k$ als normalverteilt angesehen werden, mit:

$$p(\boldsymbol{\omega}_k) \sim N(\mathbf{0}, \tilde{\mathbf{Q}}_k) \quad \text{und} \quad p(\boldsymbol{\nu}_k) \sim N(\mathbf{0}, \tilde{\mathbf{R}}_k) \quad (2.62)$$

Aufgrund der Linearität des Systems und der Voraussetzungen, ergibt sich der Systemzustand ebenfalls als normalverteilte Zufallsgröße $\hat{\mathbf{Z}}_k$, welche vollständig durch ihren Mittelwert $\hat{\mathbf{z}}_k$ und ihre Kovarianz $\hat{\mathbf{P}}_k$ beschrieben werden kann:

$$p(\hat{\mathbf{Z}}_k) \sim N(\hat{\mathbf{z}}_k, \hat{\mathbf{P}}_k) \quad (2.63)$$

Die Kovarianz $\hat{\mathbf{P}}_k$ lässt sich aus dem Schätzfehler berechnen. Der Schätzfehler ist die Differenz der Schätzung $\hat{\mathbf{z}}_k$ zum tatsächlichen Systemzustand \mathbf{z}_k :

$$\hat{\mathbf{P}}_k = E\{\mathbf{e}_k \mathbf{e}_k^T\} \quad \text{mit} \quad \mathbf{e}_k = \mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{z}}_k \quad (2.64)$$

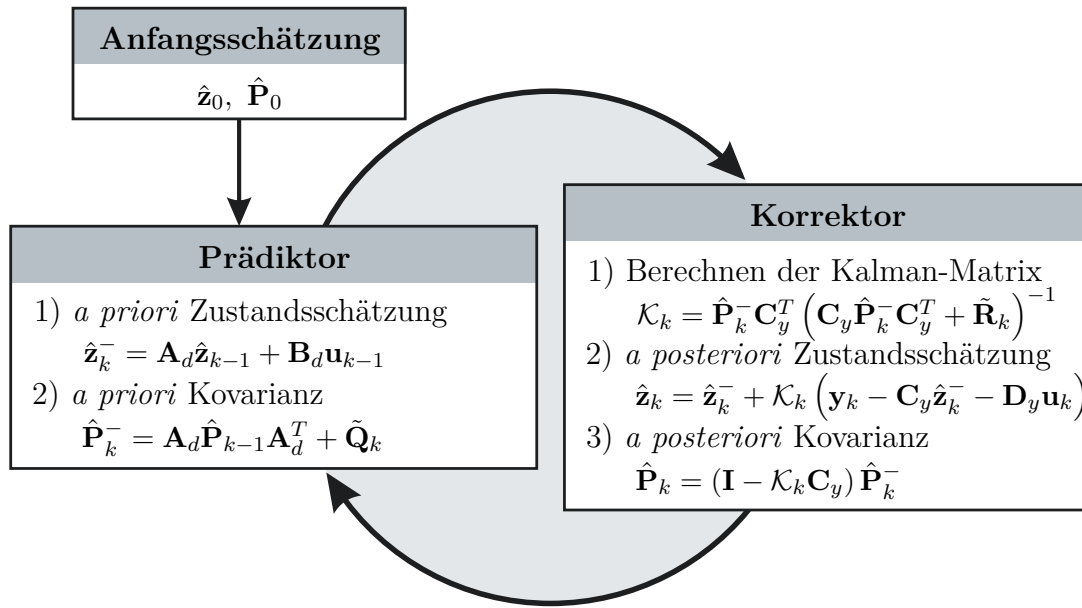


Abbildung 2.1: Darstellung der rekursiven Kalmanfilterstruktur (nach [Welch & Bishop, 1995])

Das Kalman-Filter ist ein rekursiver Estimationsalgorithmus, welches zu jedem Zeitpunkt k eine Schätzung des aktuellen Zustands generiert. Durch die rekursive Struktur wird eine Schätzung des aktuellen Systemzustandes $\hat{\mathbf{z}}_k$ als Linearkombination der vorangegangenen Schätzung $\hat{\mathbf{z}}_{k-1}$ und der aktuellen Messwerte \mathbf{y}_k erzeugt. So gehen auch vergangene Messdaten $\mathbf{y}_{k-1}, \mathbf{y}_{k-2}, \dots, \mathbf{y}_1$ in die aktuelle Schätzung $\hat{\mathbf{z}}_k$ mit ein, da diese bereits in der Schätzung des vergangenen Wertes $\hat{\mathbf{z}}_{k-1}$ enthalten sind. Das Kalman-Filter besteht im Wesentlichen aus einem Prädiktor- und einem Korrektor-Schritt (vgl. Abb. 2.1).

Prädiktor-Schritt

Im Prädiktor-Schritt wird die Schätzung zum vorherigen Zeitschritt der Systemdynamik unterworfen und so die *a priori* Schätzung $\hat{\mathbf{z}}_k^-$ des aktuellen Zeitschrittes erzeugt. Daher wird der Prädiktor-Schritt auch als Update bezeichnet:

$$\hat{\mathbf{z}}_k^- = \mathbf{A}_d \hat{\mathbf{z}}_{k-1} + \mathbf{B}_d \mathbf{u}_{k-1} \quad (2.65)$$

Für die Prädiktion der Kovarianz $\hat{\mathbf{P}}_k^-$ gilt:

$$\hat{\mathbf{P}}_k^- = \mathbf{A}_d \hat{\mathbf{P}}_{k-1} \mathbf{A}_d^T + \tilde{\mathbf{Q}}_k \quad (2.66)$$

Korrektor-Schritt

Die *a priori* Voraussagen $\hat{\mathbf{z}}_k^-$ werden im Korrektor-Schritt mit Hilfe der Information aus den neuen Messwerten \mathbf{y}_k angepasst und ergeben schließlich die *a posteriori* Schätzungen $\hat{\mathbf{z}}_k$:

$$\hat{\mathbf{z}}_k = \hat{\mathbf{z}}_k^- + \mathcal{K}_k \Delta \mathbf{y}_k \quad (2.67)$$

Die Kalman-Matrix \mathcal{K}_k

$$\mathcal{K}_k = \hat{\mathbf{P}}_k^- \mathbf{C}_y^T \left(\mathbf{C}_y \hat{\mathbf{P}}_k^- \mathbf{C}_y^T + \tilde{\mathbf{R}}_k \right)^{-1}, \quad (2.68)$$

gewichtet die Messwertinnovation $\Delta \mathbf{y}_k$ so, dass die *a posteriori* Kovarianz $\hat{\mathbf{P}}_k$ minimal wird. Die Messwertinnovation $\Delta \mathbf{y}_k$ gibt die Differenz von geschätztem Ausgangssignal zum tatsächlich gemessenen Signal an:

$$\Delta \mathbf{y}_k = \mathbf{y}_k - \left(\mathbf{C}_y \hat{\mathbf{z}}_k^- + \mathbf{D}_y \mathbf{u}_k \right) \quad (2.69)$$

Die *a posteriori* Kovarianz ergibt sich durch:

$$\hat{\mathbf{P}}_k = (\mathbf{I} - \mathcal{K}_k \mathbf{C}_y) \hat{\mathbf{P}}_k^- \quad (2.70)$$

Das Kalman-Filter wird als optimaler Zustandsschätzer bezeichnet. Optimalität bedeutet hier, dass der quadratische Fehler und die *a posteriori* Fehlerkovarianz $\hat{\mathbf{P}}_k$ minimal werden. Anschaulich betrachtet führt ein Messrauschen mit einer minimalen Kovarianz nach Gl. (2.68) dazu, dass den Messwerten mehr vertraut wird als der Zustandsschätzung und eine stärkere Gewichtung der Messwerte erfolgt, $\lim_{\tilde{\mathbf{R}} \rightarrow \mathbf{0}} \mathcal{K}_k = \mathbf{C}_y^{-1}$. Im Falle einer minimalen *a priori* Kovarianz wird den Messdaten weniger vertraut und der vorhergesagte Zustand daher stärker gewichtet, $\lim_{\hat{\mathbf{P}}_k^- \rightarrow \mathbf{0}} \mathcal{K}_k = \mathbf{0}$.

Eine Erweiterung des dargestellten Filter-Algorithmus auf nichtlineare Systeme ist mit Hilfe des sogenannten *Extended* Kalman-Filters (EKF) [Welch & Bishop, 1995; Eini-cke & White, 1999] oder des *Unscented* Kalman-Filters (UKF) [Wan & Van der Merwe, 2000; Julier & Uhlmann, 2004] möglich.

2.4 Sensorpositionierung

Zur Lösung von inversen Problemstellungen ist es hilfreich, dass unabhängig vom verwendeten Lösungsansatz, möglichst viele Informationen der messbaren Wirkung zur Verfügung stehen. Ein dichtes und flächendeckendes Sensornetzwerk auf der zu untersuchenden

Struktur ist aus diesem Grund wünschenswert. Dies steht jedoch im Widerspruch zu der Forderung nach einem minimalen bzw. kostengünstigen Messaufbau. Hier entsteht ein Zielgrößenkonflikt. Die verfügbaren Messsensoren sollten daher optimal an der Struktur positioniert werden, um einerseits ein breites Feld an potentiellen Ursachen zu unterscheiden und auf der anderen Seite redundante Informationen zu vermeiden. Eine Optimierung der Sensorpositionen ist im Vorfeld der Strukturüberwachung umso mehr von Bedeutung, da es oftmals schwierig ist, ein einmal installiertes Sensornetzwerk zu verändern. Darüber hinaus entscheiden die Sensorpositionen nicht nur über die *Informationsmenge*, sondern auch über die Qualität der Messsignale, da Messpositionen mit einer geringen Schwingungsamplitude zu einem schlechten Signal- zu Rauschverhältnis führen. Fehler, die an dieser wichtigen, ersten Stelle der Strukturüberwachungskette gemacht werden, pflanzen sich fort und erhöhen die Unsicherheit des Überwachungsergebnisses.

Die Anzahl der möglichen Sensorkonfigurationen n_V wird dabei mit

$$n_V = \binom{n_n}{n_r}, \quad (2.71)$$

schon bei kleinen Modellen sehr groß, sodass eine einfache Analyse jeder Konfiguration nicht praktikabel ist [Bohle, 2005]. Das Problem, eine bestimmte Anzahl an vorhandenen Sensoren zu positionieren, wird daher in der Regel mittels Optimierungsverfahren gelöst. Als Zielgröße der Optimierung haben sich verschiedene Kennwerte der Fisher-Informationmatrix (FIM) etabliert, z.B. die Spur, die Konditionszahl oder die Determinante dieser Matrix. Im Allgemeinen beschreibt die FIM den Informationsgehalt einer Zufallsvariablen über einen Parameter, welcher die Zufallsvariable bedingt. Sie gibt außerdem die Krümmung der *Likelihood*-Funktion wieder und kann auch durch Invertierung der Kovarianzmatrix berechnet werden [Krengel, 2005].

Bezeichnet man eine Sensorkonfiguration als (sub-)optimal, gilt dies immer mit Bezug auf den jeweiligen Anwendungsfall. In [Bohle, 2005] wurde gezeigt, dass sich beispielsweise die optimale Sensorkonfiguration zur Modalanalyse von der optimalen Konfiguration zur schwingungsbasierten Schadenserkennung unterscheidet. Je nach Anwendungsfall müssen daher unterschiedliche Matrizen zur Bildung der Fisher-Information herangezogen werden, dies kann z.B. die Modalmatrix oder die Eigensensitivitätsmatrix sein. Das Vorgehen zur Optimierung ist allerdings nach der Bestimmung der FIM weitgehend analog und wird im Folgenden für zwei Verfahren am Beispiel der Modalmatrix Φ beschrieben.

Die Effective Independence Methode (EIM) und die Kinetic Energy Methode (KEM) haben sich bereits in der Anwendung etabliert [Barthorpe & Worden, 2009; Marano *et al.*,

2011] und können im Rahmen einer sorgfältigen Voruntersuchung zur Sensorpositionierung genutzt werden. Für eine Beschreibung von diversen Sensorpositionierungsverfahren und deren Eigenschaften sei auf [Li, 2011], [Marano *et al.*, 2011], [Flynn & Todd, 2010] oder [Bohle, 2005] verwiesen.

2.4.1 Effective Independence Methode

Die in [Kammer, 1991] und [Kammer & Tinker, 2004] vorgeschlagene Effective Independence Methode maximiert die Fisher-Determinante der reduzierten Modalmatrix Φ_r in einem iterativen Verfahren. Unter der reduzierten Modalmatrix versteht man hier, die Reduktion der einzelnen Eigenschwingungsformen auf lediglich die physikalischen Messfreiheitsgrade, durch Ausblenden der komplementären Zeilen der Modalmatrix. Durch das EIM-Optimierungsverfahren wird der dynamische Beitrag für jede Eigenschwingungsform in der Summe maximiert. Das Ziel ist so eine räumliche Unabhängigkeit und eine hohe Signalstärke der einzelnen Messsensoren zu erreichen. Die Beschreibung des Verfahrens richtet sich hier nach [Bohle, 2005]. Die benötigte FIM kann aus der Transformation der Modalkoordinaten \mathbf{x}_m in physikalische Messfreiheitsgrade der Verschiebung abgeleitet werden:

$$\mathbf{y} = \Phi_r \mathbf{x}_m + \boldsymbol{\nu} \quad (2.72)$$

Wobei $\boldsymbol{\nu}$ das Messrauschen, mit den Eigenschaften aus Gl. (2.62), repräsentiert. Geht man von der plausiblen Annahme aus, dass die Standardabweichung des Messrauschens σ_ν für alle Messkanäle identisch ist, kann die Kovarianz für eine biasfreie Schätzung $\hat{\mathbf{x}}_m$ wie folgt bestimmt werden:

$$\mathbb{E} \left\{ (\mathbf{x}_m - \hat{\mathbf{x}}_m) (\mathbf{x}_m - \hat{\mathbf{x}}_m)^T \right\} = \sigma_\nu^2 (\Phi_r^T \Phi_r)^{-1} \quad (2.73)$$

Dies entspricht genau der Inversen der Fisher-Informationsmatrix Λ_{EIM} :

$$\Lambda_{\text{EIM}} = \frac{1}{\sigma_\nu^2} \Phi_r^T \Phi_r \quad (2.74)$$

Die FIM wird zur Bildung der Vorhersagematrix \mathbf{E}_{EIM} genutzt:

$$\mathbf{E}_{\text{EIM}} = \Phi_r \Lambda_{\text{EIM}}^{-1} \Phi_r^T \quad (2.75)$$

Die Vorhersagematrix \mathbf{E}_{EIM} ist eine sogenannte idempotente Matrix, das bedeutet u.a., dass die Spur der Matrix den Matrixrang angibt und somit jedes Diagonalelement den

Beitrag zum gesamten Rang. Der Matrixrang entspricht hier gerade genau der Anzahl der beobachtbaren Eigenvektoren. Der Vektor der Diagonalelemente

$$\mathbf{D}_{\text{EIM}} = \text{diag}(\mathbf{E}_{\text{EIM}}) \quad (2.76)$$

wird als Unabhängigkeitsvektor bezeichnet, da dieser den Beitrag einer Zeile zur linearen Unabhängigkeit der Spalten von Φ_r angibt.

Ausgehend von der Modalmatrix mit allen potentiellen Messfreiheitsgraden, wird nun in einem iterativen Verfahren jeweils die Zeile mit dem geringsten Betrag für \mathbf{D}_{EIM} gestrichen. Da durch die Reduktion der Modalmatrix die Beträge des Unabhängigkeitsvektors beeinflusst werden, wird in einem Ein-Schritt-Verfahren nach jeder Reduktion \mathbf{D}_{EIM} neu berechnet. Das Verfahren wird abgebrochen, wenn die gewünschte Anzahl an verbleibenden Messfreiheitsgraden erreicht wurde.

2.4.2 Kinetic Energy Methode

Das Ziel der Kinetic Energy Methode ist es, das Maß der gemessenen kinetischen Energie zu maximieren [Papadopoulos & Garcia, 1998]. Dabei ist die KEM eine zur EIM eng verwandte Sensorpositionierungsmethode [Li *et al.*, 2007; Li, 2011]. In diesem Fall wird die Fisher-Informationsmatrix mit der Massenmatrix \mathbf{M} gewichtet, anstatt mit der Standardabweichung des Messrauschens [Marano *et al.*, 2011]:

$$\Lambda_{\text{KEM}}^{pq} = \Phi_{pq} \sum_{k=1}^{n_n} M_{pk} \Phi_{kq} \quad (2.77)$$

Wobei der erste Index die Zeilen und der zweite Index die Spalten beschreibt. So stellt $\Lambda_{\text{KEM}}^{pq}$ die kinetische Energie der Mode q am Freiheitsgrad p dar und M_{pk} den Eintrag der Massenmatrix in der Zeile p und Spalte k . Als Sensorpositionen werden die Stellen mit den höchsten Werten für von $\Lambda_{\text{KEM}}^{pq}$ ausgewählt. Die KEM hilft, Positionen mit möglichst großen Amplituden auszuwählen und das Signal-Rausch-Verhältnis zu erhöhen.

Sowohl die EIM als auch die KEM sind für die beschriebene Aufgabe der Sensorpositionierung geeignet. Allerdings muss zur Anwendung der KEM die Massenmatrix bekannt sein. Darüber hinaus beruhen beide Sensorpositionierungsalgorithmen auf der Annahme, dass die Modalmatrix vollständig bekannt ist. Je nach Messaufgabe sollen aber die modalen Parameter erst exakt bestimmt werden, sodass hier im Vorfeld ein möglichst exaktes Ersatzmodell generiert werden muss. Mittels der Messungen kann im Anschluss das numerische Ersatzmodell validiert bzw. an die Messungen angepasst werden. Weicht die

mathematische Modellbeschreibung zu Beginn zu stark von der realen Struktur ab, ist das geschilderte Vorgehen zur Sensorpositionierung nicht mehr möglich.

Kapitel 3

Lösungsstrategien dünnbesetzter inverser Probleme

Nachdem in Kapitel 1 schon kurz inverse Probleme und die angestrebten Lösungsansätze vorgestellt wurden, soll nun das Problem aus mathematischer Sicht eingehender analysiert werden. Zu Beginn werden die spezifischen Schwierigkeiten, welche bei der Lösung von inversen Problemen entstehen, genauer dargelegt. Dies beinhaltet eine Beschreibung der konventionellen Lösungsstrategien für inverse Probleme nach Tikhonov [Tikhonov, 1963]. Erst danach werden die neuartigen L_1 -minimierenden Rekonstruktionsansätze und spezielle Lösungsalgorithmen vorgestellt.

3.1 Mathematische Formulierung inverser Probleme

Klassische Beschreibungen inverser Probleme gehen z.B. auf [Groetsch, 1984; Hansen, 1998] zurück. Hier wird als Ausgangspunkt das lineare Fredholm-Integral erster Art verwendet:

$$\int_0^1 K(s, t) f(t) dt = g(s), \quad 0 \leq s \leq 1 \quad (3.1)$$

Wobei der Kern K und der Term der rechten Seite g bekannt sind. Gesucht ist die Größe f . Im Sinne der Ursache-Wirkungsbeziehung entspricht g der messbaren Wirkung, K den Systemeigenschaften und f der gesuchten Ursache. Es kann gezeigt werden, dass beliebig kleine Störungen der rechten Seite Δg zu beliebig großen Fehlern Δf der Lösung führen (siehe z.B. [Hansen, 1994]). Dies gilt insbesondere bei hochfrequenten Störungen. Das inverse Problem aus Gl. (3.1) ist daher ein *schlecht-gestelltes* Problem [Hadamard,

1923]. Neben dieser Stabilitätseigenschaft definiert Hadamard ein Problem ebenfalls als schlecht gestellt, für den Fall, dass keine eindeutige Lösung zu Gl. (3.1) existiert.

Die Diskretisierung des Fredholm-Integrals (3.1) führt auf ein lineares Gleichungssystem der Form:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{y} \tag{3.2}$$

Hier beschreibt $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{M \times N}$ die Ursache-Wirkungsbeziehung. $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^M$ kennzeichnet die beobachtbare Wirkung und $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ die gesuchte Ursache. Allerdings kann \mathbf{A} ebenfalls ganz allgemein als Koeffizientenmatrix interpretiert werden, sowie \mathbf{x} als Lösungsvektor und \mathbf{y} als Vektor der rechten Seite. Auch wenn Gl. (3.2) nicht kontinuierlich ist und somit im streng mathematischen Sinn kein *schlecht-gestelltes* Problem nach [Hadamard, 1923] ist, kann die Lösung des Gleichungssystems annähernd die gleichen Eigenschaften besitzen wie jene des Problems aus Gl. (3.1). Das lineare Gleichungssystem (3.2) wird daher als *diskretes schlecht-gestelltes* Problem bezeichnet, wenn eines der folgenden Kriterien nicht erfüllt wird:

1. Existenz der Lösung
2. Eindeutigkeit der Lösung
3. Unempfindlichkeit der Lösung gegen Störungen der Beobachtung \mathbf{y}

Ist die Dimension M der Wirkung \mathbf{y} größer als die Dimension N der möglichen Ursachen \mathbf{x} ist das Gleichungssystem überbestimmt ($M > N$). Für den Fall hingegen, dass $M < N$ gilt, ist das Gleichungssystem unterbestimmt. Unterbestimmte Gleichungssysteme haben eine unendliche Anzahl an möglichen Lösungen und sind daher immer schlecht-gestellte Probleme. Für das inverse Problem bedeutet das, dass die beobachteten Wirkungen nicht ausreichen, um zwischen allen potentiellen Ursachen unterscheiden zu können. Ohne zusätzliche Informationen ist es daher unmöglich eine eindeutige Lösung zu generieren. Da unterbestimmte Gleichungssysteme bei Strukturüberwachungsproblemen sehr häufig auftreten, falls nur sehr wenige Messinformationen vorliegen, wird dieser Fall später noch eingehender diskutiert. Bevor allerdings genauer auf Lösungsstrategien unterbestimmter bzw. schlecht-gestellter Probleme eingegangen wird, sollen zunächst weitere wichtige Aspekte diskreter schlecht-gestellter Probleme erläutert werden.

Um das Gleichungssystem (3.2) direkt lösen zu können, muss die Inverse \mathbf{A}^{-1} , bzw.

die Pseudoinverse \mathbf{A}^+ für rechteckige Matrizen, gebildet werden:

$$\hat{\mathbf{x}}_{\text{LS}} = \arg \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N} \{\|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|_2\} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{y} = \mathbf{A}^+ \mathbf{y} \quad (3.3)$$

Die Lösung $\hat{\mathbf{x}}_{\text{LS}}$ aus Gl. (3.3) entspricht der Lösung der kleinsten Fehlerquadrate (engl. Least Squares (LS)). Für quadratische Matrizen ($N = M$) gilt: $\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^{-1}$. Allerdings lassen sich so nur für gut konditionierte Matrizen und nicht unterbestimmte Gleichungssysteme sinnvolle und vor allem stabile Lösungen erzielen.

3.1.1 Singulärwertzerlegung inverser Problemstellungen

Die Kondition der Matrix $\kappa(\mathbf{A})$ ist ein Maß für die Stabilität der direkten Lösung (3.3) und für den Grad des schlecht-gestellten Problems. Für Konditionszahlen $\kappa(\mathbf{A})$ zwischen 0 und 1 spricht man von einer guten Kondition. Gilt $\kappa(\mathbf{A}) \gg 1$ ist das Problem schlecht konditioniert. Zur Bestimmung und Analyse der Kondition einer Matrix \mathbf{A} , kann diese mittels Singulärwertzerlegung aufgespalten werden:

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \mathbf{S} \mathbf{V}^T = \sum_{i=1}^r \mathbf{u}_i s_i \mathbf{v}_i^T \quad (3.4)$$

Der Rang der Matrix \mathbf{A} entspricht hier r , $r = \text{rank}(\mathbf{A})$. Für die Singulärvektoren \mathbf{u}_i und \mathbf{v}_i gilt:

$$\mathbf{A} \mathbf{v}_i = s_i \mathbf{u}_i \quad (3.5)$$

$$\mathbf{A}^T \mathbf{u}_i = s_i \mathbf{v}_i \quad (3.6)$$

Die Konditionszahl $\kappa(\mathbf{A})$ berechnet sich aus dem Verhältnis des größten Singulärwerts s_1 zum kleinsten Wert s_r :

$$\kappa(\mathbf{A}) = \frac{s_1}{s_r} \quad (3.7)$$

Teilt man die Singulärvektoren \mathbf{U} und \mathbf{V} auf, in Vektoren $\mathbf{u}_r, \mathbf{v}_r$ mit zugehörigen Singulärwerten s_r ungleich null und Vektoren $\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0$ für Singulärwerte gleich null, kann Gl. (3.4) auch als

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_r & \mathbf{u}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{s}_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_r^T \\ \mathbf{v}_0^T \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

geschrieben werden. Aus Gl. (3.8) wird deutlich, dass die Unterräume welche durch \mathbf{u}_0 und \mathbf{v}_0 aufgespannt werden, keinen Einfluss auf die Beobachtung \mathbf{y} haben können, unabhängig von der Ursache \mathbf{x} . Diese Unterräume werden auch als *Dark Spots* bezeichnet

[Snieder & Trampert, 1999]. Aus den Eigenschaften der Singulärvektoren Gl. (3.5), (3.6) folgt außerdem:

$$\mathbf{u}_0^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (3.9)$$

Durch diese Beziehung kann gezeigt werden, dass eine Komponente von \mathbf{y} , welche in dem Unterraum \mathbf{u}_0 liegt, nicht durch die Beziehung $\mathbf{A} \mathbf{x}$ beschrieben werden kann, da \mathbf{u}_0 orthogonal zu $\mathbf{A} \mathbf{x}$ ist. \mathbf{u}_0 heißt daher Daten-Nullraum. Analog folgt aus Gl. (3.6), dass \mathbf{v}_0 der Modell-Nullraum ist:

$$\mathbf{A} \mathbf{v}_0 = \mathbf{0} \quad (3.10)$$

Die Modellkomponenten dieses Unterraums haben keinen Einfluss auf die Daten bzw. die Wirkungen \mathbf{y} [Lourens, 2012].

3.1.2 Glättung und diskrete Picard-Bedingung

Mit Hilfe der Singulärwertzerlegung kann ebenfalls der Aspekt der Glättung direkter Probleme bzw. der Verstärkung inverser Probleme näher beleuchtet werden. Betrachtet man dazu nun die Abbildung einer beliebigen Ursache \mathbf{x} auf das Modell \mathbf{A} , führt diese unter Zuhilfenahme der SVD, mit $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^r (\mathbf{v}_i^T \mathbf{x}) \mathbf{v}_i$, auf:

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \sum_{i=1}^r s_i (\mathbf{v}_i^T \mathbf{x}) \mathbf{u}_i \quad (3.11)$$

Es kann gezeigt werden, dass bei schlecht konditionierten Matrizen die Singulärvektoren \mathbf{u}_i und \mathbf{v}_i mit absteigenden Singulärwerten beginnen, stärker zu oszillieren. Das bedeutet, die Vektorkomponenten wechseln häufiger die Vorzeichen [Hansen, 1998]. Aus Gl. (3.11) wird deutlich, dass diese hochfrequenten Anteile von \mathbf{x} durch die Projektion auf die Singulärvektoren und die Multiplikation mit s_i stärker gedämpft werden als die niederfrequenten Anteile. Dies kann als Glättung bezeichnet werden. Bei der Lösung des inversen Problems tritt allerdings nun der gegenteilige Effekt auf und hochfrequente Anteile der Wirkung \mathbf{y} werden verstärkt. Nutzt man die Singulärwertzerlegung zur Lösung des Gleichungssystems (3.2), kann dieser Effekt gezeigt werden:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^r \frac{\mathbf{u}_i^T \mathbf{y}}{s_i} \mathbf{v}_i \quad (3.12)$$

Durch Multiplikation mit dem Kehrwert von s_i werden die höheren Frequenzen verstärkt. Um eine Lösung des inversen Problems mittels Gl. (3.12) zu erlangen, muss die

Summe konvergieren. Die Konvergenz kann mit Hilfe der sogenannten diskreten Picard-Bedingung bewiesen werden [Groetsch, 1984; Engl *et al.*, 2000]:

$$\sum_{i=1}^r \left(\frac{\mathbf{u}_i^T \mathbf{y}}{s_i} \right)^2 < \infty \quad (3.13)$$

Damit die Bedingung erfüllt wird, müssen die Koeffizienten $\mathbf{u}_i^T \mathbf{y}$ schneller abfallen als die dazugehörigen Singulärwerte s_i . Dies ist der Fall wenn sich \mathbf{y} im Spaltenraum von \mathbf{A} befindet. Für praktische Anwendungen ist \mathbf{y} allerdings immer durch (Mess-) Rauschen überlagert. Unabhängig von dem Betrag des Rauschens führt dies dazu, dass die Picard-Bedingung nicht erfüllt werden kann und die Summe in Gl. (3.12) divergiert [Klinkov, 2011]. Somit müssen für diesen Fall andere Lösungsverfahren verwendet werden.

3.1.3 Rangdefiziente schlecht-gestellte inverse Probleme

Wie zuvor bereits erwähnt, ist die Kondition der Matrix \mathbf{A} und die damit verbundenen Singulärwerte ein Maß, um das inverse Problem zu klassifizieren. Eine wichtige Unterscheidung inverser Probleme kann anhand des Verlaufs der Singulärwerte getroffen werden. Fallen die Singulärwerte ohne deutliche Lücke allmählich auf null ab, wird das Problem einfach als schlecht-gestelltes Problem bezeichnet.

Die zweite Klasse inverser Probleme wird hingegen durch einen deutlichen Sprung der Singulärwerte gekennzeichnet. Sie werden als rangdefiziente schlecht-gestellte Probleme bezeichnet. Der Rang beschreibt hier aber nicht den mathematischen Matrixrang im strengen Sinne, sondern viel mehr einen Pseudorang im praktischen Sinne. Dieser Pseudorang gibt an, inwieweit gewisse Zeilen oder Spalten unter Berücksichtigung von Fehlern linear voneinander abhängig sind [Hansen, 1998]. Die Gruppe der Singulärwerte unterhalb der Lücke gehört zu den nahezu linear abhängigen Zeilen und Spalten. Um eine gut konditionierte Matrix zu erhalten, können die entsprechenden Zeilen und Spalten aus dem Gleichungssystem entfernt werden. Hierbei kann es allerdings passieren, dass ein unterbestimmtes Gleichungssystem entsteht, welches zur Lösung weiterer Untersuchungen bedarf.

3.2 Tikhonov-Regularisierung

Aufgrund der geschilderten Stabilitätsprobleme und der fehlenden Informationsmenge unterbestimmter Gleichungssysteme, benötigen schlecht-gestellte inverse Probleme zusätzliche Bedingungen, um eine stabile, sinnvolle und eindeutige Lösung zu erhalten.

Der numerische Vorgang, schlecht-gestellte Probleme in gut-gestellte Probleme zu überführen, wird als Regularisierung bezeichnet. Durch die Regularisierung wird eine zum Ausgangsproblem ähnliche Problemformulierung erzeugt, welche allerdings gut-gestellt ist. Zu diesem Zweck müssen zusätzliche Nebenbedingungen in den Lösungsprozess integriert werden. Oftmals wird hier als Nebenbedingung $\Omega(\mathbf{x})$ eine Anforderung an die Vektornorm der Lösung $\hat{\mathbf{x}}$ gestellt. Eine genaue Beschreibung und Definition verschiedener Vektornormen ist im Abschnitt 3.3 zu finden. Obwohl eine Vielzahl von zusätzlichen Nebenbedingungen denkbar ist, war der lange Zeit vorherrschende Ansatz zur Regularisierung diskreter schlecht-gestellter Probleme, die euklidische L_2 -Vektornorm der Lösung zu minimieren:

$$\Omega(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|_2 \quad (3.14)$$

Wobei \mathbf{x}^* eine Eingangsschätzung darstellt, die in vielen Fällen allerdings dem Nullvektor entspricht.

Das wohl am besten bekannte L_2 -Regularisierungsverfahren ist die sogenannte Tikhonov-Regularisierung (oder Tikhonov-Phillips-Regularisierung) [Tikhonov, 1963; Tikhonov & Arsenin, 1977; Phillips, 1962]:

$$\hat{\mathbf{x}}_{\lambda_2} = \arg \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N} \left\{ \|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|_2^2 + \lambda_2^2 \|\mathbf{L}\mathbf{x}\|_2^2 \right\} \quad (3.15)$$

Die Tikhonov-Regularisierung ist eine Gewichtung zwischen bestmöglicher Datenanpassung $\|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|_2^2$ und minimaler L_2 -Norm der Lösung $\hat{\mathbf{x}}_{\lambda_2}$. Es wird hier also eine möglichst *glatte* Lösung bevorzugt. \mathbf{L} entspricht häufig der Einheitsmatrix. Kann aber auch als Ableitungsoperator erster oder zweiter Ordnung $\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2$ genutzt werden, um so eine Glättung der entsprechenden Ableitung sicherzustellen.

Für die Tikhonov-Regularisierung kann eine Lösung in geschlossener Form angegeben werden. Für $\mathbf{L} = \mathbf{I}$ gilt dann:

$$\hat{\mathbf{x}}_{\lambda_2} = \left(\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \lambda_2^2 \mathbf{I} \right)^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{y} \quad (3.16)$$

Im Vergleich zur Lösung der kleinsten Fehlerquadrate (3.3), wird durch den zusätzlichen Term $\lambda_2^2 \mathbf{I}$ aus dem schlecht-gestellten ein gut-gestelltes Problem. Die Lösung unter zur Hilfenahme der SVD (analog zu Gl. (3.12))

$$\hat{\mathbf{x}}_{\lambda_2} = \sum_{i=1}^r \frac{s_i \mathbf{u}_i^T \mathbf{y}}{s_i^2 + \lambda_2^2} \mathbf{v}_i \quad (3.17)$$

zeigt, dass der Regularisierungsparameter λ_2 für Singulärwerte s_i höherer Ordnung stärkeren Einfluss hat. Wie oben gezeigt, sind eben diese Terme für die Rauschverstärkung verantwortlich und können nun so gedämpft werden.

Aus Gl. (3.15) wird darüber hinaus ersichtlich, dass der Regularisierungsparameter λ_2 die Gewichtung zwischen einer Minimierung der Nebenbedingung und einer Minimierung der Residuumsnorm bestimmt. Das bedeutet, wird λ_2 sehr groß gewählt, wird eine Lösung nahe des Nullvektors mit sehr geringen Ausschlägen bevorzugt. In diesem Fall wird eine größere Abweichung zu den Messdaten \mathbf{y} in Kauf genommen. Für einen sehr kleinen Parameter λ_2 tritt dementsprechend der gegenteilige Effekt auf. Es wird deutlich, dass die Wahl des Regularisierungsparameters entscheidend ist, um eine geeignete Lösung zu generieren. Zur Bestimmung des Parameters λ_2 haben sich in der Vergangenheit zwei Verfahren als besonders geeignet erwiesen: Die *L-Curve* Methode [Tikhonov & Arsenin, 1977] und die *Generalized Cross Validation* Methode (GCV) [Golub *et al.*, 1979].

Die *L-Curve* Methode ist ein graphisches Bestimmungsverfahren. Hier wird die Glättung der Lösung $\|\hat{\mathbf{x}}\|_2$ über der Residuums L_2 -Norm $\|\mathbf{y} - \mathbf{A}\mathbf{x}\|_2$ in doppelt-logarithmischer Darstellung aufgetragen. Der Name des Verfahrens leitet sich aus der dabei typischerweise auftretenden *L*-förmigen Kurve ab. Der Eckpunkt der Kurve wird nun als optimaler Kompromiss zwischen Fehlernorm und Glättung definiert und der entsprechende Regularisierungsparameter wird zur Lösung des schlecht-gestellten Problems verwendet.

Das GCV Kriterium ist ein statistischer Ansatz, mit dem der λ_2 so bestimmt wird, dass auch fehlende Messdaten möglichst gut vorhergesagt werden können. Das in diesem Sinne optimale λ_2 wird aus dem absoluten Minimum folgender Funktion bestimmt:

$$\text{GCV}(\lambda_2) = \frac{\|\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_{\lambda_2} - \mathbf{y}\|_2}{\|\mathbf{I} - \mathbf{A}\mathbf{A}^+\|_2} \quad (3.18)$$

Da beide Methoden gewisse Nachteile haben können, ist es für praktische Anwendungen sinnvoll die Ergebnisse beider Verfahren zu vergleichen, um so einen geeigneten Regularisierungsparameter abzuleiten.

Aus Gründen der Vollständigkeit sei als verwandtes Verfahren zur Tikhonov-Regularisierung noch die so genannte *Truncated Singular Value Decomposition* (TSVD) erwähnt. Dieses Verfahren ist ebenfalls für inverse Probleme im Bereich der Strukturüberwachung erprobt. Die TSVD wird allerdings in dieser Arbeit nicht verwendet. Daher sei für eine detaillierte Beschreibung z.B. auf [Hansen, 1994; Klinkov, 2011] verwiesen.

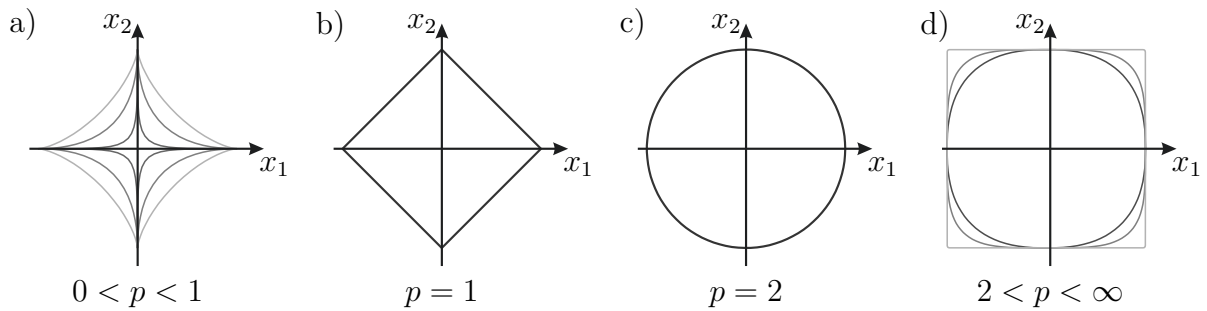


Abbildung 3.1: Vergleich zwischen verschiedenen Normkugeln: a) Normkugeln für konvexe Quasinormen; b) Rautenförmige Normkugel für Summennorm; c) Euklidische Normkugel; d) Für $p \rightarrow \infty$ nimmt die Normkugel quadratische Gestalt an

3.3 Vektornormen

Für die gezeigte Tikhonov-Regularisierung wurde die hinreichend bekannte euklidische L_2 -Vektornorm zur Minimierung verwendet. Bevor im nächsten Abschnitt alternative Lösungsansätze für schlecht-gestellte inverse Probleme näher beschrieben werden, ist es allerdings notwendig, an dieser Stelle den Begriff der Vektornorm genauer zu definieren.

Normen sind in der Mathematik ganz allgemein skalare Kennwerte, welche die abstrakte *Größe* verschiedener Objekte beschreiben. Diese Objekte können z.B. Funktionen, Folgen, Matrizen und Vektoren sein. Speziell für Vektoren wird eine Funktion $\|\cdot\|$ als Norm des Vektors $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ bezeichnet, falls folgende drei Bedingungen gelten:

$$\text{a) } \|\mathbf{x}\| = 0 \quad \text{nur falls } \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (\text{Definitheit}) \quad (3.19)$$

$$\text{b) } \|\lambda\mathbf{x}\| = |\lambda| \|\mathbf{x}\| \quad \text{für alle } \lambda \in \mathbb{R} \quad (\text{Homogenität}) \quad (3.20)$$

$$\text{c) } \|\mathbf{x} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{v}\| \quad \text{für alle } \mathbf{x}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^N \quad (\text{Dreiecksungleichung}) \quad (3.21)$$

Die allgemeine L_p -Vektornorm (oder nur p -Norm) ist definiert als:

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^N |x_i|^p \right)^{1/p} \quad \text{für } 1 \leq p < \infty \quad (3.22)$$

Abbildung 3.1 vergleicht im ebenen Fall ($N = 2$) verschiedene Vektornormkugeln für diverse Werte von p . Eine Normkugel ist dadurch gekennzeichnet, dass jeder Punkt auf einer Kugel die identische L_p -Norm besitzt. Im Falle $p = \infty$ gilt:

$$\|\mathbf{x}\|_\infty := \max_j |x_j|, \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (3.23)$$

Hier wird die Normkugel zu einem Quadrat (siehe Abb. 3.1 d)).

Zwei häufig verwendete Vektornormen erhält man für $p = 2$ und für $p = 1$. Die euklidische L_2 -Norm mit $p = 2$ ist definiert als:

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^N |x_i|^2} \quad (3.24)$$

Anschaulich betrachtet, gibt die L_2 -Norm die Länge eines Vektors an (Abb. 3.1 c)). Für $p = 1$ ergibt sich die L_1 -Norm oder auch Summennorm aus:

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^N |x_i| \quad (3.25)$$

Sie entspricht der Summe aller Absolutwerte der Vektorelemente x_i (Abb. 3.1 b)).

Eine sogenannte Quasinorm ist für $0 < p < 1$ definiert. Hier sind die Normkugeln nicht mehr konvex (siehe Abb. 3.1 a)) und daher wird die Bedingung (3.21) nicht mehr erfüllt. Die Dreiecksungleichung wird durch die schwächere Bedingung

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq C (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|) , \quad (3.26)$$

mit $C = 2^{1/p-1}$, ersetzt. Aus Gl. (3.22) ist des Weiteren leicht ersichtlich, dass die L_p -Norm für $p = 0$ nicht definiert ist. Dennoch wird die Bezeichnung L_0 -Norm oftmals im Zusammenhang mit der sogenannten *Zählnorm* verwendet

$$\|\mathbf{x}\|_0 = |\text{supp}(\mathbf{x})| , \quad (3.27)$$

wobei der Vektorsupport $\text{supp}(\mathbf{x})$ die Menge aller Vektorstützstellen von \mathbf{x} angibt, also diejenigen Elemente des Vektors \mathbf{x} , welche ungleich null sind:

$$\text{supp}(\mathbf{x}) := \{j : x_j \neq 0\} \quad (3.28)$$

Die L_0 -Norm gibt nun die Kardinalität $|\cdot|$ dieser Menge an. Somit zählt die L_0 -Norm alle Elemente eines Vektors, welche von null verschieden sind. Man kann die L_0 -Norm auch als Grenzwert von $\|\mathbf{x}\|_p^p$ interpretieren, für $p \rightarrow 0$.

Ist die Anzahl der Elemente ungleich null viel kleiner als die Dimension N des Vektors selbst ($\|\mathbf{x}\|_0 \ll N$), spricht man von einem *dünnbesetzten* (engl. sparse) Vektor. Ein Vektor \mathbf{x} wird auch als s -sparse bezeichnet, falls gilt:

$$\|\mathbf{x}\|_0 \leq s \quad (3.29)$$

3.4 L_1 -Regularisierungsverfahren

In diesem Abschnitt werden L_1 -Regularisierungsverfahren zur Lösung von schlecht-gestellten und unterbestimmten Gleichungssystemen beschrieben. Die hier vorgestellten Lösungsstrategien für hochgradig unterbestimmte Gleichungssysteme ($M \ll N$) wurden im Bereich des Compressed Sensing (CS) [Donoho & Huo, 2001; Candès & Wakin, 2008] entwickelt. Sie beruhen auf der Annahme, dass das Gleichungssystem (3.2) eine Lösung mit nur sehr wenig Elementen ungleich null besitzt. In Kapitel 1 wurde bereits beschrieben, dass die Annahme einer dünnbesetzten Lösung oftmals plausibel ist. Die Rechtfertigung solch einer Annahme für spezielle Probleme der Strukturüberwachung wird in späteren Kapiteln gezeigt. Dort wird darüber hinaus deutlich werden, dass mit Hilfe von dünnbesetzten Lösungsverfahren oftmals viel mehr mechanische Vorkenntnisse in den Lösungsprozess integriert werden können, sodass die erzielten Ergebnisse eine höhere Aussagekraft besitzen. In diesem Abschnitt sollen allerdings zuerst die mathematischen Grundlagen beschrieben werden, welche hinter den dünnbesetzten Lösungsverfahren stehen.

Ist die Lösung des Ausgangsproblems (3.2) nicht von Natur aus dünnbesetzt, kann diese oftmals mittels einer Transformation $\mathbf{x} = \Phi_T \mathbf{x}_s$ in einen dünnbesetzten Vektor überführt werden. Somit kann nun das transformierte Gleichungssystem

$$\mathbf{y} = \mathbf{A} \Phi_T \mathbf{x}_s = \mathbf{A}_T \mathbf{x}_s \quad \text{mit} \quad \mathbf{A}_T = \mathbf{A} \Phi_T \quad (3.30)$$

nach dem dünnbesetzten Lösungsvektor \mathbf{x}_s aufgelöst werden. Man kann also sagen, dass in diesen Fällen die *Sparsity* der Lösung in der inneren Struktur des Vektors versteckt ist und erst durch eine geeignete Koordinatentransformation Φ_T sichtbar wird. Zur Beschreibung und Herleitung dünnbesetzter Lösungsstrategien wird der Einfachheit halber im Folgenden angenommen, dass Gl. (3.2) direkt eine dünnbesetzte Lösung besitzt, bzw. $\Phi_T = \mathbf{I}$ gilt.

An dieser Stelle sei nochmals erwähnt, dass unterbestimmte Gleichungssysteme eine unendliche Anzahl an potentiellen Lösungen besitzen und die Rekonstruktionsalgorithmen die Aufgabe haben, aus der Vielzahl der Lösungen die *Richtige* zu bestimmen. Als notwendige Nebenbedingung soll hier nun definiert werden, dass die Lösung möglichst dünnbesetzt sein muss. Problematisch ist dabei allerdings, dass der Vektorsupport, also die Vektorpositionen ungleich null, nicht im Vorhinein bekannt sind. Sonst wäre es möglich das Gleichungssystem zu reduzieren und nur noch diejenigen Spalten aus \mathbf{A} bei-

zubehalten, welche zu den informationstragenden Elementen gehören. Das resultierende Gleichungssystem wäre nun (über-) bestimmt und je nach Kondition der Matrix könnten die oben beschriebenen, Lösungsansätze verwendet werden.

Die dünnbesetzteste Lösung für das unterbestimmte Gleichungssystem (3.2) erhält man ohne Vorkenntnisse des Vektorsupports, mit Hilfe der L_0 -Norm durch folgendes Minimierungsproblem:

$$\hat{\mathbf{x}}_0 = \arg \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N} \|\mathbf{x}\|_0 \quad \text{unter der Nebenbedingung} \quad \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (3.31)$$

Gl. (3.31) generiert durch die Minimierung der L_0 -Norm diejenige Lösung $\hat{\mathbf{x}}_0$ mit den wenigsten Elementen ungleich null, welche zusätzlich mit Hilfe des Modells \mathbf{A} die beobachtete Wirkung \mathbf{y} beschreibt. Im Sinne von Ockhams Sparsamkeitsprinzip wird also so die einfachste Ursache rekonstruiert, welche die Wirkung plausibel mit dem zugrundeliegenden Modell erklärt. Allerdings ist Gl. (3.31) ein nicht-konvexes Optimierungsproblem, welches im Allgemeinen rechnerisch nicht effizient lösbar ist, da es eine kombinatorische Suche erfordert. Im Rahmen der Komplexitätstheorie wird das Problem aus Gl. (3.31) auch als NP-Schwer bezeichnet. Der Durchbruch zur Lösung unterbestimmter dünnbesetzter Gleichungssysteme gelang Chen *et al.* [Chen *et al.*, 1998]. Sie substituierten die L_0 -Norm durch die L_1 -Norm:

$$\hat{\mathbf{x}}_1 = \arg \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N} \|\mathbf{x}\|_1 \quad \text{unter der Nebenbedingung} \quad \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} \quad (3.32)$$

Das Optimierungsproblem aus Gl. (3.32) wird als *Basis Pursuit Problem* bezeichnet. Die Substitution scheint intuitiv, da die L_1 -Norm die zur L_0 -Norm naheste konvexe Vektornorm darstellt. Die Schwierigkeit ist nun zu zeigen, dass in beiden Fällen die gleiche Lösung generiert wird [Kutyniok, 2014]. Das Optimierungsproblem (3.32) ist eine konvexe Minimierungsaufgabe und kann mittels effizienter Algorithmen, wie z.B. linearer Programmierung, gelöst werden. In Abschnitt 3.5 werden einige Algorithmen für L_1 -Minimierungsprobleme genauer vorgestellt.

Um eine stabile Rekonstruktion von \mathbf{x} gewährleisten zu können, falls die Messdaten \mathbf{y} verrauscht oder ungenau sind, muss Gl. (3.32) leicht modifiziert werden. Auch wenn der gesuchte Lösungsvektor nicht im strengen Sinne dünnbesetzt ist, sondern vielmehr einige wenige dominante Vektoreinträge besitzt, während die restlichen Elemente lediglich nahe null sind, wird Gl. (3.32) kein stabiles Rekonstruktionsergebnis erzeugen können. Nachfolgend werden drei Abwandlungen des L_1 -Minimierungsproblems vorgestellt, welche in diesen Fällen trotzdem eine stabile Rekonstruktion zulassen.

Das *Quadratically Constrained Basis Pursuit* Problem ist wie folgt definiert:

$$\hat{\mathbf{x}}_{\eta_1} = \arg \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N} \|\mathbf{x}\|_1 \quad \text{unter der Nebenbedingung} \quad \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2 \leq \eta_1 \quad (3.33)$$

Für dieses Optimierungsproblem muss als Nebenbedingung das Gleichungssystem (3.2) nicht mehr exakt erfüllt werden. Dies stabilisiert die Rekonstruktion gegen Rauschen und lässt dünnbesetzte Lösungen zu, selbst wenn die tatsächliche Lösung nur *fast* dünnbesetzt ist. Die zulässigen Abweichungen werden mittels des Parameters $\eta_1 \geq 0$ definiert.

Der sogenannte LASSO (*Least Absolute Shrinkage and Selection Operator*) [Tibshirani, 1996] löst das folgende sehr ähnliche Optimierungsproblem für verschiedene Parameter $\tau_1 \geq 0$:

$$\hat{\mathbf{x}}_{\tau_1} = \arg \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N} \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2 \quad \text{unter der Nebenbedingung} \quad \|\mathbf{x}\|_1 \leq \tau_1 \quad (3.34)$$

Das LASSO-Verfahren ist vor allem im Bereich der Statistik und des Maschinellen Lernens eine etablierte Methode zur Regressionsanalyse, siehe z.B. [Hastie *et al.*, 2009].

Eine häufig verwendete alternative Formulierung von Gl. (3.33) und (3.34) ist das *Basis Pursuit Denoising* Problem (BPDN) [Chen *et al.*, 1998]:

$$\hat{\mathbf{x}}_{\lambda_1} = \arg \min_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N} \left\{ \|\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2 + \lambda_1 \|\mathbf{x}\|_1 \right\} \quad (3.35)$$

Analog zur Tikhonov-Regularisierung (3.15) ist dieses Optimierungsproblem ein Kompromiss. Hier hingegen bestimmt der Parameter $\lambda_1 \geq 0$ die Gewichtung zwischen einer dünnbesetzten Lösung und bestmöglicher Datenanpassung. In [Foucart & Rauhut, 2013] wird gezeigt, dass abhängig vom jeweiligen Regularisierungsparameter alle drei Optimierungsvorschriften (3.33), (3.34) und (3.35), eine gemeinsame Lösung besitzen.

3.4.1 Anmerkungen zur L_1 -Minimierung

Betrachtet man speziell das BPDN-Problem (3.35) erkennt man, dass es im Grunde ein Least Square Schätzer mit einer L_1 -Regularisierung ist. Für $\lambda_1 = 0$ entspricht das BPDN-Problem eben genau der nicht-regularisierten LS-Schätzung. Geht $\lambda_1 \rightarrow \infty$, strebt das Optimum gegen die triviale Lösung $\hat{\mathbf{x}}_{\lambda_1} = \mathbf{0}$. Senkt man nun λ_1 sukzessive, entfernt sich die Lösung vom Nullpunkt und Vektorelemente ungleich null kommen zur Lösung hinzu. Eine weitere Reduktion von λ_1 führt dazu, dass neue Vektorelemente der Lösung hinzugefügt werden, aber möglicherweise auch bereits bestehende Elemente zu null werden. Der Lösungsweg für verschiedene Regularisierungsparameter ist daher nicht monoton in Bezug

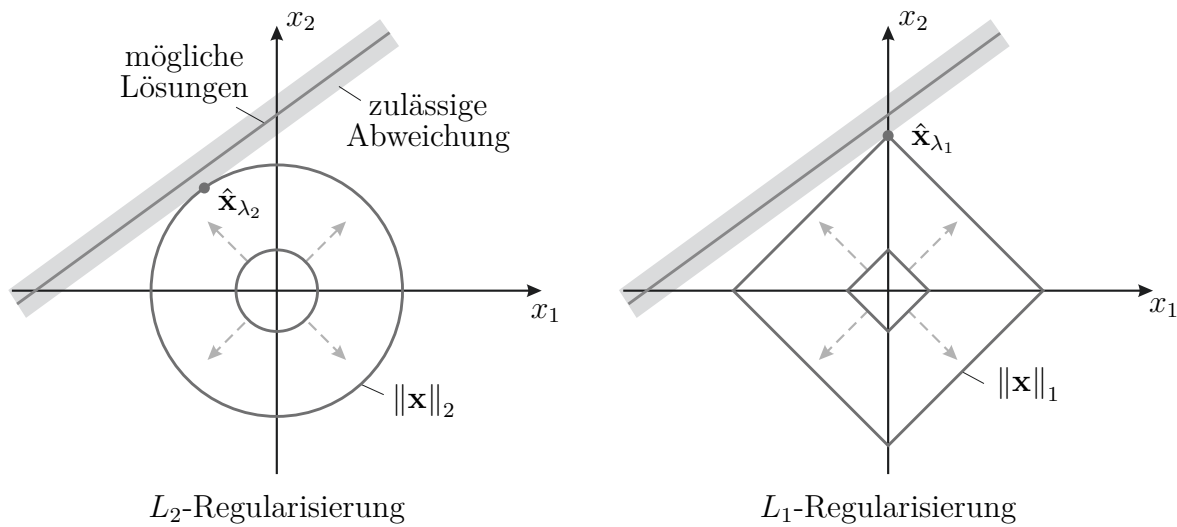


Abbildung 3.2: Vergleich von L_2 - und L_1 -Regularisierung für ein einfach unterbestimmtes Gleichungssystem

auf den Vektorsupport. Vergleicht man zwei Lösungen für verschiedene Regularisierungsparameter bedeutet das, dass der Vektorsupport einer stark regularisierten Lösung nicht notwendigerweise eine Untermenge des Supports einer schwach regularisierten Lösung ist. Dieses Problem gilt auch für das Vorzeichen der identifizierten Vektorelemente.

Die Minimierung der L_1 -Norm führt demnach zu einer variablen Selektion des Vektorsupports. Sie beinhaltet aber auch eine Dämpfung der jeweiligen Supportelemente. Bei einer starken Regularisierung wird die optimale Lösung stark bestraft. Dies kann einen erheblichen Einfluss auf die Größe der selektierten Vektorelemente haben. Eine praktische Herangehensweise zur Lösung dieses Problems ist es, zunächst die L_1 -Minimierung zu verwenden, um die Sparsity und den Vektorsupport zu bestimmen und anschließend eine konventionelle Lösungsmethode (z.B. Tikhonov-Regularisierung) für das reduzierte Gleichungssystem zu verwenden, um die selektierten Elemente betragsmäßig zu bestimmen [Rasmussen & Bro, 2012].

Es wird deutlich, dass auch hier die Wahl eines geeigneten Regularisierungsparameters von großer Bedeutung ist. Homotopie-Verfahren lösen daher z.B. Gl. (3.35) nicht nur für einen bestimmten Regularisierungsparameter λ_1 , sondern geben für eine bestimmte Bandbreite von verschiedenen Parametern λ_1 eine Lösung $\hat{\mathbf{x}}_{\lambda_1}(\lambda_1)$ an. Auf das Problem der Bestimmung des Regularisierungsparameters zur L_1 -Minimierung, wird in späteren Kapiteln noch anwendungsspezifisch genauer eingegangen.

Eine Illustration, warum L_1 -Minimierungsverfahren auch zu dünnbesetzten Lösungen führen, ist in Abbildung 3.2 dargestellt. Hier ist für den einfachsten Fall eines unterbestimmten Gleichungssystems (eine Gleichung mit zwei Unbekannten x_1, x_2), die Gerade aller möglichen Lösungen dargestellt. Alle Punkte auf der Geraden erfüllen das Gleichungssystem exakt. Darüber hinaus kennzeichnet ein Band die zulässige Abweichung von der exakten Lösung. Die Breite dieses Bands wird durch den Regularisierungsparameter definiert.

Vergleicht man nun die Lösung der Tikhonov-Regularisierung (Abb. 3.2 links) mit der Lösung des BPDN-Problems (Abb. 3.2 rechts), werden die Eigenschaften der zur Regularisierung verwendeten Vektornormen sehr deutlich. Durch L_2 -Regularisierungsverfahren hat das Optimum den minimalen Abstand zum Nullpunkt. Anschaulich betrachtet wird die L_2 -Normkugel expandiert bis sie einen Punkt $\hat{\mathbf{x}}_{\lambda_2}$ erreicht, der im Rahmen der Toleranzen das Gleichungssystem erfüllt. Da dieser Punkt den geringsten Abstand zum Koordinatenursprung hat, kann man diese Lösung als *energieminimal* bezeichnen.

Für L_1 -Regularisierungsverfahren wird hingegen die L_1 -Kugel expandiert. Da diese eine spitze Form besitzt, wird eine Lösung auf den Koordinatenachsen gefunden. Diese Lösung ist daher dünnbesetzt. Eine Regularisierung mittels einer Vektornorm $0 < p < 1$ würde zwar ebenfalls eine dünnbesetzte Lösung erzeugen (vgl. Abb. 3.1), da diese Normen aber nicht konvex sind, ist die L_1 -Norm die einzige Vektornorm, welche sowohl konvex ist, als auch dünnbesetzte Lösungen erzeugt.

3.4.2 Voraussetzungen für L_1 -Regularisierungsverfahren

An dieser Stelle soll der Frage nachgegangen werden, unter welchen Bedingungen ein L_0 -Minimierungsproblem durch eine L_1 -Minimierung ersetzt werden kann. Ob eine dünnbesetzte Lösung eindeutig rekonstruiert werden kann, hängt maßgeblich von der Anzahl der Elemente s , welche ungleich null sind und von den Eigenschaften der Matrix \mathbf{A} ab. Zur Analyse der Rekonstruierbarkeit soll hier der Kern $\mathcal{N}(\cdot)$ einer Matrix \mathbf{A} definiert werden:

$$\mathcal{N}(\mathbf{A}) := \{\tilde{\mathbf{v}} : \mathbf{A}\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{0}\} \quad (3.36)$$

Der Kern der Matrix gibt alle Vektoren an, welche auf den Nullvektor abbilden. Darüber hinaus wurde in [Donoho & Elad, 2003] der Begriff des *Spark* einer Matrix eingeführt. Dabei beschreibt $\text{spark}(\mathbf{A})$ die minimale Anzahl an linear abhängigen Spalten von \mathbf{A} .

Mittels $\mathit{spark}(\mathbf{A})$ wird also eine Aussage darüber gemacht, wie viele Elemente ungleich null der dünnbesetzteste Vektor des Kerns haben kann, da $\|\tilde{\mathbf{v}}\|_0 \geq \mathit{spark}(\mathbf{A})$ gilt. Man kann zeigen, dass wenn $\hat{\mathbf{x}}$ Gl. (3.2) löst und

$$s = \|\hat{\mathbf{x}}\|_0 < \frac{1}{2} \mathit{spark}(\mathbf{A}) \quad (3.37)$$

gilt, $\hat{\mathbf{x}}$ die Lösung mit den wenigsten Elementen ungleich null sein muss. Ein Beweis hierfür ist z.B. in [Elad, 2010] zu finden. Da die Bestimmung von $\mathit{spark}(\mathbf{A})$ ebenfalls eine kombinatorische Suche erfordert, ist dieses Kriterium allerdings in der Praxis nicht anwendbar.

Kerneigenschaften

Mit Hilfe des Kerns kann eine weitere hinreichende Bedingungen angegeben werden, wie groß die *Sparsity* s der Lösung $\hat{\mathbf{x}}$ maximal sein darf, sodass die L_0 -Minimierung (3.31) und die L_1 -Minimierung (3.32) die gleiche Lösung besitzen [Zhang, 2008]:

$$\sqrt{\|\hat{\mathbf{x}}\|_0} \leq \min \left\{ \frac{1}{2} \frac{\|\tilde{\mathbf{v}}\|_1}{\|\tilde{\mathbf{v}}\|_2} : \tilde{\mathbf{v}} \in \mathcal{N}(\mathbf{A}) \setminus \{\mathbf{0}\} \right\} \quad (3.38)$$

Die Bedingung (3.38) kann noch gelockert werden, falls weitere Vorkenntnisse den Kern der Matrix beschränken [Loffeld *et al.*, 2015].

Gegenseitige Kohärenz

Eine andere hinreichende Bedingung kann durch die *gegenseitige Kohärenz* (engl. Mutual Coherence) definiert werden. Die *Mutual Coherence* $\mu(\mathbf{A})$ ist ein Maß für die Kohärenz bzw. die Inkohärenz der Spalten \mathbf{a}_i der Matrix \mathbf{A} [Donoho & Huo, 2001]. Sie wird berechnet durch:

$$\mu(\mathbf{A}) = \max_{i \neq j} \frac{|\mathbf{a}_i^T \mathbf{a}_j|}{\|\mathbf{a}_i\|_2 \cdot \|\mathbf{a}_j\|_2} \quad (3.39)$$

Ist $\hat{\mathbf{x}}$ nun wieder eine Lösung des Gleichungssystems (3.2), dann ist es unter der Bedingung

$$\|\hat{\mathbf{x}}\|_0 < \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\mu(\mathbf{A})} \right), \quad (3.40)$$

die einzige Lösung von Gl. (3.31) und (3.32). Aus Gl. (3.40) wird außerdem die Balance zwischen *Mutual Coherence* und *Sparsity* deutlich. So ist eine exakte Rekonstruktion für alle Vektoren $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ möglich, falls $\mu(\mathbf{A}) = 0$ ist. Steigt die *Mutual Coherence* und somit

die Kohärenz der Spalten, sind weniger Elemente ungleich null in der Lösung zulässig [Kutyniok, 2014]. Eine untere Grenze der *Mutual Coherence* $\mu(\mathbf{A})$ ist allerdings durch die sogenannte *Welch-Schranke* über die Zeilen- und Spaltenanzahl von $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{M \times N}$ vorgegeben:

$$\mu(\mathbf{A}) \geq \sqrt{\frac{N-M}{M(N-1)}} \quad (3.41)$$

Restricted Isometry Property

Die *Restricted Isometry Property* (RIP) ist eine hinreichende Bedingung, welche die Orthogonalität von jeweils s Spalten einer Matrix berechnet [Candès & Tao, 2005]. Die Matrix \mathbf{A} erfüllt die RIP der Ordnung s , falls für alle Vektoren \mathbf{x}_s mit maximal s Elementen ungleich null, ein $\delta_s \in (0, 1)$ existiert, sodass folgende Ungleichung gilt:

$$(1 - \delta_s) \|\mathbf{x}_s\|_2^2 \leq \|\mathbf{A}\mathbf{x}_s\|_2^2 \leq (1 + \delta_s) \|\mathbf{x}_s\|_2^2 \quad (3.42)$$

Die Bestimmung von δ_s für eine gegebene Koeffizientenmatrix \mathbf{A} ist ein NP-schweres Problem. Für viele Zufallsmatrizen kann aber gezeigt werden, dass die Bedingung (3.42) Gültigkeit hat.

Forschungen im Bereich des CS haben sich zunächst häufig auf die Untersuchung von Zufallsmatrizen beschränkt, bevor die Methoden auch zur allgemeinen Rekonstruktion von dünnbesetzten Lösungen unterbestimmter Gleichungssysteme verwendet wurden [Kutyniok, 2014]. Dies mag auch ein Grund sein, weshalb bislang für eine gegebene Matrix \mathbf{A} lediglich hinreichende Bedingungen formuliert werden konnten, welche mit vertretbarem Aufwand nachgewiesen werden können.

Der Mangel an notwendigen Bedingungen und die Tatsache, dass die hinreichenden Kriterien oftmals sehr streng formuliert sind, führt in der Praxis dazu, dass L_1 -Minimierungsverfahren zur Lösung dünnbesetzter Gleichungssysteme erfolgreich anwendbar sind, auch falls keines der hinreichenden Kriterien erfüllt werden konnte. Daher kann man von einer teilweise heuristischen Herangehensweise sprechen, falls die L_1 -Minimierung für Gleichungssysteme angewendet wird, die keines der genannten hinreichenden Kriterien erfüllen.

3.5 Lösungsverfahren

Wie zuvor beschrieben, sind die L_1 -Optimierungsprobleme der Form (3.32), (3.33), (3.34) und (3.35) konvexe Minimierungsprobleme. Konvexe Optimierung gehört zu der am häu-

figsten untersuchten Klasse der Rekonstruktionsalgorithmen [Kutyniok, 2014]. Daher können zu deren Lösung standardisierte Verfahren der linearen Programmierung verwendet werden, wie z.B. Innere-Punkte-Verfahren (engl. Interior Point Method) oder Simplex-Algorithmen (zur eingehenderen Beschreibung siehe z.B. [Unger & Dempe, 2010]). Diese Algorithmen sind in der Lage nicht nur für L_1 -Minimierungsprobleme Lösungen zu generieren, sondern für jegliche Art konvexer Probleme. Somit sind diese Standardverfahren in der Regel sehr zuverlässig, aber auch vergleichsweise langsam. Speziell auf L_1 -Minimierung zugeschnittene Algorithmen können meist schneller eine geeignete Lösung erzeugen.

In z.B. [Candès & Romberg, 2005; Foucart & Rauhut, 2013] ist eine Auswahl weiterer L_1 -minimierender Algorithmen zu finden. Vor allem der dort beschriebene *Primal-Dual* Algorithmus muss erwähnt werden [Chambolle & Pock, 2011]. Dieser ist zwar für allgemeine konvexe Optimierungsprobleme einsetzbar, hat sich aber speziell auch für die L_1 -Minimierung als effizient herausgestellt.

Neben den L_1 -Minimierungsalgorithmen sei auch auf eine andere Möglichkeit hingewiesen dünnbesetzte Lösungen zu erzielen: Die sogenannten *Greedy*-Algorithmen. Diese Klasse der Algorithmen beruht nicht auf einem konvexen Minimierungsproblem. *Greedy*-Verfahren sind iterative Algorithmen. Hier wird in jedem Iterationsschritt der Spaltenvektor \mathbf{a}_j der Matrix \mathbf{A} bestimmt, welcher die größte lineare Abhängigkeit mit dem derzeitigen Residuum hat. So wird in jedem Schritt der Support des dünnbesetzten Lösungsvektors ergänzt und das Residuum aktualisiert, bis schließlich ein Abbruchkriterium erreicht wird. Als Algorithmen dieser Rekonstruktionsklasse sind besonders das *Orthogonal Matching Pursuit* (OMP) [Pati *et al.*, 1993; Tropp & Gilbert, 2007] und das *Compressive Sampling Matching Pursuit* (CoSaMP) [Needell & Tropp, 2009] zu nennen. In der Regel sind *Greedy*-Algorithmen deutlich schneller und einfacher zu implementieren als Minimierungsverfahren. Allerdings sind konvexe Optimierungsmethoden häufig präziser als *Greedy*-Algorithmen.

Für die späteren Analysen im Bereich der Strukturüberwachung sind für diese Arbeit vor allem zwei L_1 -Optimierungsalgorithmen von Bedeutung und werden daher im Folgenden eingehender vorgestellt. Dies ist zum einen der sogenannte *In-Crowd*-Algorithmus [Gill *et al.*, 2011]. Zum anderen wird in Abschnitt 3.5.2 die von Loffeld *et al.* entwickelte Rekonstruktionsmethode mittels Kalman-Filterung näher beschrieben [Loffeld *et al.*, 2015, 2016].

3.5.1 In-Crowd-Algorithmus zur L_1 -Minimierung

Der *In-Crowd*-Algorithmus ist einer der schnellsten Rekonstruktionsalgorithmen für sehr große und sehr dünnbesetzte Gleichungssysteme. Dieser Algorithmus wurde speziell entwickelt, um das BPDN-Problem (3.35) zu lösen. Die Rechenzeit dieser iterativen Methode wird durch die teilweise Isolierung des Algorithmus von der globalen Problemgröße erheblich reduziert. Das Gleichungssystem muss in seiner vollständigen Größe daher nur selten betrachtet werden. Eine detaillierte Beschreibung aller Eigenschaften des *In-Crowd*-Algorithmus und einen Vergleich zu anderen L_1 -Minimierungsverfahren ist in [Gill *et al.*, 2011] zu finden. Die folgende Beschreibung aller Rekonstruktionsschritte ist ebenfalls aus [Gill *et al.*, 2011] übernommen:

- Schritt 0) Setze $\hat{\mathbf{x}}_{\lambda_1} = \mathbf{0}$, sodass das Residuum $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{y} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_{\lambda_1}$ zu $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{y}$ wird. Außerdem definiere den Vektorsupport \mathcal{I} als die leere Menge, $\mathcal{I} = \{ \}$.
- Schritt 1) Berechne die *Nutzbarkeit* u_j einer Spalte \mathbf{a}_j von \mathbf{A} : $u_j = |\hat{\mathbf{r}}^T \mathbf{a}_j| \forall j \in \mathcal{I}^C$, wobei \mathcal{I}^C die Komplementärmenge zu \mathcal{I} darstellt.
- Schritt 2) Abbruch der Optimierung, falls kein $u_j > \lambda_1$ berechnet wurde.
- Schritt 3) Füge diejenigen Supportstellen der Menge \mathcal{I} hinzu mit den L größten Werten von u_j , für die gilt $u_j > \lambda_1$.
- Schritt 4) Löse das BPDN-Problem aus Gl. (3.35) exakt für das Unterproblem, welches entsteht, falls nur der aktive Vektorsupport \mathcal{I} berücksichtigt wird. Da das Unterproblem als ein *dichtbesetztes* Problem angesehen werden kann, können Standardverfahren der linearen oder quadratischen Programmierung zur Lösungserzeugung eingesetzt werden.
- Schritt 5) Entferne alle Elemente aus \mathcal{I} für die in Schritt 4) ein Wert von null berechnet wurde.
- Schritt 6) Setze alle Elemente von $\hat{\mathbf{x}}_{\lambda_1}$ zu null, außer denjenigen die zum aktuellen Vektorsupport \mathcal{I} gehören. Diese Elemente werden durch die Lösung aus Schritt 4) definiert.
- Schritt 7) Berechne das Residuum mit Hilfe der in Schritt 6) bestimmten aktuellen Lösung $\hat{\mathbf{x}}_{\lambda_1}$: $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{y} - \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_{\lambda_1}$.
- Schritt 8) Gehe zu Schritt 1).

Abhängig vom zugrunde liegenden Problem, bestimmt die Wahl des Parameters L aus Schritt 3) die Geschwindigkeit des Algorithmus. Aufgrund der Empfehlung in [Gill *et al.*,

2011] wurde $L = 25$ für alle folgenden Untersuchungen gewählt. Zur Lösung des *dichtbesetzten* Gleichungssystems in Schritt 4), kann als Standardverfahren wieder die Methode der Inneren-Punkte angewendet werden.

Zwar hat der *In-Crowd*-Algorithmus viele Gemeinsamkeiten mit den zuvor beschriebenen *Greedy*-Verfahren, da aber in Schritt 4) das reduzierte Minimierungsproblem (3.35) exakt gelöst wird, zählt er zu der Klasse der optimierenden L_1 -Rekonstruktionsverfahren.

3.5.2 Kalman-Filter Konzept zur L_1 -Minimierung

Der von Loffeld *et al.* entwickelte Rekonstruktionsalgorithmus beruht im Wesentlichen auf der rekursiven Prädiktor-Korrektor-Struktur des Kalman-Filters (vgl. Abschnitt 2.3). Hier wird die Eigenschaft einer dünnbesetzten Lösung in Form einer zusätzlichen L_1 -Beobachtung in die Messwertgleichung integriert. Darüber hinaus ist dieser Algorithmus in der Lage, sehr effizient eine Lösung zu erzielen, indem nicht direkt ein dünnbesetzter Lösungsvektor rekonstruiert wird, sondern vielmehr ein geeigneter Differenzvektor $\hat{\mathbf{x}}_\Delta$ zu einer Ausgangslösung. Die folgende Beschreibung des Rekonstruktionsalgorithmus richtet sich vorwiegend nach [Loffeld *et al.*, 2015].

Zur Herleitung werden zwei unterschiedliche Lösungen des unterbestimmten Gleichungssystems (3.2) herangezogen ($M < N$). Diese sollen hier beispielsweise die Lösung der kleinsten Fehlerquadrate $\hat{\mathbf{x}}_{LS}$ und die dünnbesetzteste Lösung $\hat{\mathbf{x}}_0$ sein. Da beide eine Lösung des unterbestimmten Gleichungssystems darstellen und daher gleichwertig die beobachtete Wirkung \mathbf{y} erklären, gilt:

$$\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_{LS} = \mathbf{y} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_0 \quad (3.43)$$

Durch eine einfache Transformation von Gl. (3.43)

$$\mathbf{A}[\hat{\mathbf{x}}_0 - \hat{\mathbf{x}}_{LS}] = \mathbf{0} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_\Delta \quad \text{mit} \quad \hat{\mathbf{x}}_0 - \hat{\mathbf{x}}_{LS} = \hat{\mathbf{x}}_\Delta \in \mathcal{N}(\mathbf{A}), \quad (3.44)$$

wird deutlich, dass die dünnbesetzte Lösung $\hat{\mathbf{x}}_0$ aus einer beliebigen Lösung (hier $\hat{\mathbf{x}}_{LS}$) und einem Differenzvektor $\hat{\mathbf{x}}_\Delta$, welcher im Kern $\mathcal{N}(\mathbf{A})$ liegen muss, gebildet werden kann. Dieser Differenzvektor $\hat{\mathbf{x}}_\Delta$ kann also durch die Basisvektoren des Kerns $\mathbf{e}_{\mathcal{N}_i}$ und geeigneten Gewichtungsfaktoren \hat{x}_i^λ dargestellt werden:

$$\hat{\mathbf{x}}_\Delta = \sum_{i=1}^{N-M} \mathbf{e}_{\mathcal{N}_i} \cdot \hat{x}_i^\lambda = \mathbf{E}_{\mathcal{N}} \hat{\mathbf{x}}_\lambda \in \mathcal{N}(\mathbf{A}) \quad (3.45)$$

Die Matrix $\mathbf{E}_{\mathcal{N}} \in \mathbb{R}^{N \times (N-M)}$ enthält alle Kernbasisvektoren $\mathbf{e}_{\mathcal{N}_i}$ und der Vektor $\hat{\mathbf{x}}_\lambda$ die entsprechenden Gewichtungsfaktoren \hat{x}_i^λ . Die Basisvektoren des Kerns $\mathbf{e}_{\mathcal{N}_i}$ können z.B. durch QR-Zerlegung oder Singulärwertzerlegung bestimmt werden. Der Kalman-Filteralgorithmus schätzt nun den Vektor $\hat{\mathbf{x}}_\lambda$, sodass der Differenzvektor $\hat{\mathbf{x}}_\Delta$ addiert mit der Ausgangslösung $\hat{\mathbf{x}}_{\text{LS}}$, eine Lösung $\hat{\mathbf{x}}_s$ mit minimaler L_1 -Norm bildet:

$$\hat{\mathbf{x}}_s = \hat{\mathbf{x}}_{\text{LS}} + \hat{\mathbf{x}}_\Delta = \hat{\mathbf{x}}_{\text{LS}} + \mathbf{E}_{\mathcal{N}} \hat{\mathbf{x}}_\lambda \quad (3.46)$$

Zu diesem Zweck wird die Systemgleichung des erforderlichen Zustandsraummodells, mit dem Zustandsvektor $\hat{\mathbf{x}}_\lambda$, wie folgt definiert:

$$\hat{\mathbf{x}}_\lambda(k+1) = \hat{\mathbf{x}}_\lambda(k) + \boldsymbol{\omega}(k) \quad (3.47)$$

Der jeweilige Iterationsschritt des Rekonstruktionsalgorithmus ist hier durch das Argument k bzw. $k+1$ gekennzeichnet. Da die Lösung nicht vom Iterationsschritt abhängig sein soll, wird die Systemgleichung durch einen sogenannten *Random-Walk* modelliert. Das Prozessrauschen $\boldsymbol{\omega}(k)$ gibt die Unsicherheit des Zustandsübergangs an und führt dazu, dass der Zustand im Laufe der Iteration nicht zwangsläufig konstant bleibt.

Der Messwertgleichung wird neben der eigentlichen Beobachtung \mathbf{y} nun noch eine zusätzliche Beobachtung $\gamma(k)$ der L_1 -Norm des rekonstruierten Lösungsvektors $\hat{\mathbf{x}}_s$ hinzugefügt: $\tilde{\mathbf{y}}(k) = [\mathbf{y}^T, \gamma(k)]^T$. Damit ergibt sich die erweiterte Messwertgleichung zu

$$\tilde{\mathbf{y}}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \gamma(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}_s(k) \\ \|\hat{\mathbf{x}}_s(k)\|_1 \end{bmatrix} + \tilde{\boldsymbol{\nu}}(k), \quad (3.48)$$

bzw. ausgedrückt in Abhängigkeit des Zustandsvektors $\hat{\mathbf{x}}_\lambda(k)$:

$$\tilde{\mathbf{y}}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{A} [\hat{\mathbf{x}}_{\text{LS}} + \mathbf{E}_{\mathcal{N}} \hat{\mathbf{x}}_\lambda(k)] \\ \sum_{j=1}^N |[\hat{\mathbf{x}}_{\text{LS}} + \mathbf{E}_{\mathcal{N}} \hat{\mathbf{x}}_\lambda(k)]_j| \end{bmatrix} + \tilde{\boldsymbol{\nu}}(k) \quad (3.49)$$

Wobei $[\cdot]_j$ hier den j -ten Vektoreintrag kennzeichnet. Ausgehend von der L_1 -Norm der LS-Lösung $\hat{\mathbf{x}}_{\text{LS}}$ für $k=0$, kann der fiktive Messwert $\gamma(k)$ nun in jedem Iterationsschritt reduziert werden:

$$\gamma(k) = \alpha(k) \|\hat{\mathbf{x}}_s(k-1)\|_1 \quad \text{mit} \quad 0 < \alpha(k) < 1 \quad (3.50)$$

So zwingt das Kalman-Filter die L_1 -Norm der rekonstruierten Lösung $\hat{\mathbf{x}}_s$ in jedem Schritt nach unten, bis ein Minimum erreicht wird. Aufgrund der Nichtlinearität der Messwertgleichung durch die zusätzliche L_1 -Beobachtung, muss diese in jedem Iterationsschritt um

den aktuellen Zustand linearisiert werden. In Abschnitt 5.3 wird die erforderliche Linearisierung im Zusammenhang mit speziellen Strukturüberwachungsproblemen nochmals genauer dargelegt. Für eine Schritt-für-Schritt Beschreibung des Rekonstruktionsalgorithmus sei nochmals auf [Loffeld *et al.*, 2015] verwiesen.

Durch die Kalman-Filterstruktur ist dieser Algorithmus leicht zu modifizieren und kann so sehr einfach Aufgaben im Bereich der Strukturüberwachung realisieren. In Abschnitt 5.3 wird dargelegt, wie damit Strukturschäden direkt im Zeitbereich identifiziert werden können.

Kapitel 4

Identifikation mechanischer Belastungen

Die externe Belastung, welche auf mechanische Bauteile einwirkt, ist ein zentraler Parameter der Strukturüberwachung. Die zeitliche Belastungscharakteristik gehört zu den entscheidenden Größen von Bauteilermüdungsprozessen. Zur Abschätzung der Lebensdauer ist die Kenntnis der dynamischen externen oder internen Lasten oftmals essentiell. Besonders nach extremen Belastungsspitzen müssen bestehende Lebensdauervorhersagen oftmals angepasst werden. Die genaue Überwachung und Identifizierung von Belastungen während des Betriebs von Anlagen und Maschinen ist somit für einen aussagekräftigen Strukturüberwachungsprozess dringend erforderlich. Darüber hinaus können die im Betrieb identifizierten Lasten dazu beitragen die Auslegung zukünftiger Strukturen zu verbessern. Die Information über den aktuellen Belastungszustand kann auch dazu verwendet werden, um eine Anlage im optimalen Auslegungspunkt zu betreiben und so die Gesamtbeanspruchung zu reduzieren.

Allerdings ist eine direkte Messung der externen Belastungen nur in Spezialfällen möglich bzw. sinnvoll. Die Gründe dafür sind vielfältig: So kann der genaue Ort der anregenden Kraft im Vorhinein unbekannt sein, sodass entsprechende Sensoren nicht geeignet positioniert werden können, oder aber die Anregungsposition ist für eine Instrumentierung nicht zugänglich, z.B. an Kontaktstellen von Baugruppen. Auch bei verteilten Lasten (z.B. Wind- und Wellenlasten) ist eine direkte Messung mit vertretbarem Aufwand meist nicht möglich bzw. sind dazu derzeit keine geeigneten Sensoren verfügbar.

In solchen Fällen müssen die externen Kräfte indirekt bestimmt werden. Eine Möglichkeit dazu ist es, diese anhand von messbaren Strukturantworten zu rekonstruieren.

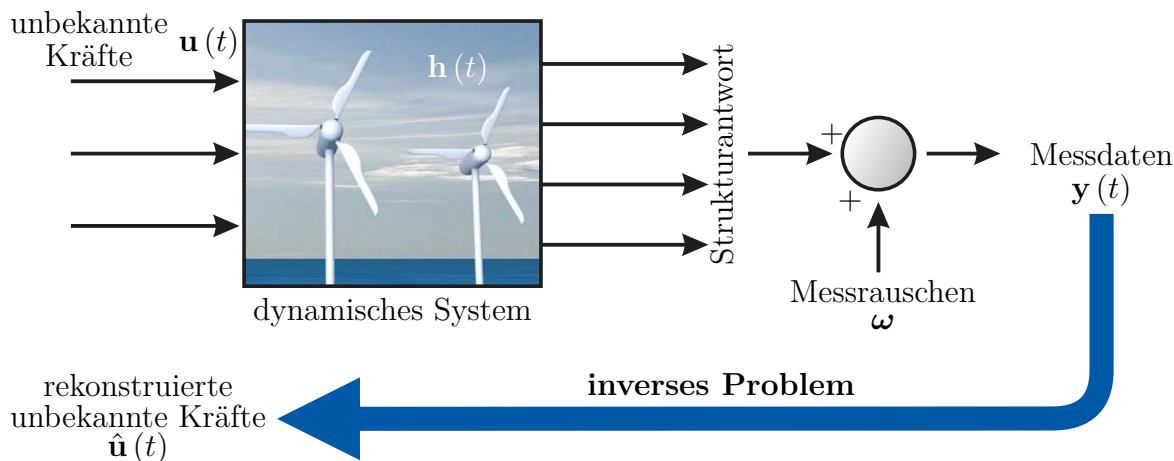


Abbildung 4.1: Das inverse Problem der Kraftrekonstruktion

Die Idee besteht darin, die statische oder dynamische Strukturdeformation zu nutzen, um dadurch Rückschlüsse über die einwirkenden Kräfte ziehen zu können. Die Strukturantworten sind in der Regel einfacher messtechnisch zu bestimmen, da die Messungen nicht von Art und Ort der anregenden Kräfte abhängig sind und verschiedenste Typen von Messensoren zulassen, wie z.B. Dehnungsmessstreifen (DMS), Geschwindigkeitssensoren oder Beschleunigungsaufnehmer.

Die auftretenden Strukturdeformationen sind immer eine Wirkung, verursacht durch den aufgetragenen Belastungszustand. Kraftrekonstruktion spiegelt somit eine Invertierung der Ursache-Wirkungsbeziehung wider. Es wird deutlich, dass Kraftrekonstruktion eine inverse Problemstellung darstellt (siehe Abb. 4.1). Kann allerdings die Invertierung erfolgreich durchgeführt werden, wird die Struktur zu ihrem eigenen Kraftsensor [Klinkov, 2011].

Bevor in diesem Kapitel neuartige Lastidentifikationsverfahren basierend auf L_1 -minimierenden Rekonstruktionsansätzen vorgestellt werden, wird zuerst ein Überblick der bereits bestehenden Verfahren gegeben. Darüber hinaus werden in Abschnitt 4.2 die verschiedenen Belastungsarten klassifiziert und belastungsspezifische Rekonstruktionsansätze benannt.

4.1 Überblick

Eine Vielzahl von wissenschaftlichen Veröffentlichungen hat sich innerhalb der letzten Jahrzehnte mit dem Problem der Kraftrekonstruktion beschäftigt. Der erste Überblick zu diesem Thema ist in [Stevens, 1987] zu finden. Aktuellere Überblicke wurden z.B. in

[Inoue *et al.*, 2001], [Uhl, 2007], [Klinkov & Fritzen, 2007] oder [Sanchez & Benaroya, 2014] veröffentlicht. In [Uhl, 2007] werden Kraftrekonstruktionsmethoden abhängig von der zugrundeliegenden Beschreibung des Ursache-Wirkungsmodells und deren Invertierung in drei Klassen aufgeteilt: 1) Deterministische Methoden, basierend auf einer rein mechanischen Modellbeschreibung; 2) Statistische Methoden, hier ist eine Beschreibung durch rein statistische oder kombiniert deterministisch-stochastische Modelle möglich; 3) Methoden der künstlichen Intelligenz, verwenden z.B. neuronale Netze.

Eine andere Unterscheidung von Kraftrekonstruktionsansätzen kann anhand des verarbeiteten Signaltyps vorgenommen werden. So ist Kraftidentifikation im Zeitbereich [Jankowski, 2009; Zhu *et al.*, 2014], im Frequenzbereich [Adams & Doyle, 2002; Parloo *et al.*, 2003; Rezayat *et al.*, 2016], sowie im Zeit-Frequenzbereich bzw. Wavelet-Bereich [Gaul & Hurlebaus, 1998] möglich. Unabhängig vom verwendeten Signaltyp, sind häufig genutzte Strategien zur Lösung des inversen Kraftrekonstruktionsproblems neben der Regularisierung [Jacquelin *et al.*, 2003], auch Methoden der dynamischen Programmierung [Adams & Doyle, 2002] oder Verfahren basierend auf Zustandsbeobachtern [Ha & Trinh, 2004].

Deterministische Ansätze beruhen zumeist auf einer direkten Modellinvertierung des Impulsantwortmodells im Zeitbereich [Jankowski, 2009; Mao *et al.*, 2010; Kirchner, 2018] oder im Frequenzbereich [Adams & Doyle, 2002; Rezayat *et al.*, 2016]. Daher sind diese Ansätze von der Güte der verwendeten Modellbeschreibung abhängig und häufig sehr anfällig für Fehler durch Messrauschen. Vorwiegend wird das schlecht-gestellte Problem durch Tikhonov-Regularisierungsverfahren in ein gut-gestelltes Problem überführt. Wie u.a. in [Laermann, 1998] oder [Klinkov, 2011] beschrieben, wird zur Anwendung dieser Verfahren bislang gefordert, dass die Anzahl an Messsensoren größer bzw. gleich der Anzahl der zu rekonstruierenden Kräfte sein muss, um sinnvolle Lösungen erzielen zu können.

Rein statistische Modelle wiederum stellen eine Korrelation zwischen Anregung und Messausgangssignal her. Zu diesem Zweck ist es jedoch notwendig, beide Größen im Vorfeld der Rekonstruktion in einer Trainingsphase messtechnisch zu erfassen [Trujillo & Busby, 1997; Zhang *et al.*, 2012a]. Bei der Verwendung von kombiniert stochastisch-deterministischen Modellen ist eine solche Trainingsphase nicht zwangsläufig notwendig. Für diese Modelle können auch Einflüsse durch Messrauschen und Modellfehler berücksichtigt werden (vgl. Abschnitt 2.1.4). Diverse Modifikationen des Kalman-Filters sind

die hier am häufigsten genutzten Rekonstruktionsstrategien [Liu *et al.*, 2000; Ma *et al.*, 2003; Deng & Heh, 2006].

Diese Art der Rekonstruktion führt neben einer Schätzung des Krafteingangs auch zu einer Rekonstruktion der inneren Systemzustände. Da das Kalman-Filter im eigentlichen Sinne keine Schätzung des Systemeingangs erzeugt, müssen hier meist Annahmen über den dynamischen Verlauf getroffen werden, um die anregenden Kräfte als Teil des Zustandsvektors darzustellen. In [Pan *et al.*, 2011] und [Gillijns & De Moor, 2007] wurden erstmals Algorithmen entwickelt, welche ohne Annahmen bzgl. des Kraftverlaufs auskommen. Obwohl beide Verfahren unterschiedlich hergeleitet wurden, führen sie auf dieselbe Filterstruktur [Niu & Fritzen, 2012]. Der Algorithmus wird als *Kalman-Filter with Unknown Inputs* (KF-UI) bezeichnet. Er ist in der Lage, beliebige Einzellasten in Echtzeit zu identifizieren. Aufgrund der notwendigen und hinreichenden Bedingungen erfordern dieses Verfahren allerdings eine Vielzahl an Sensoren. Es werden sowohl DMS als auch Beschleunigungssensoren benötigt. Erfolgreiche Anwendungen des KF-UI Algorithmus zur Kraft- und Zustandsrekonstruktion sind z.B. in [Lourens, 2012; Ginsberg *et al.*, 2013; Niu *et al.*, 2015] zu finden.

Verfahren, welche auf neuronalen Netzen [Worden & Staszewski, 2000; Uhl, 2002; Torres-Arredondo & Fritzen, 2012] oder Fuzzy-Algorithmen beruhen [Göral *et al.*, 2002], sind nur wenig verbreitet, da diese eine Lernphase benötigen, in der die Algorithmen mit Hilfe der Anregungsgrößen und der Ausgangssignale trainiert werden. Oftmals lassen sich diese Größen aber in der Praxis messtechnisch nicht bestimmen, sodass die Lernphase durch numerische Simulationen realisiert werden muss.

Je nachdem welcher Kraftrekonstruktionsansatz verwendet wird, werden andere Annahmen und Vorkenntnisse vorausgesetzt hinsichtlich der externen Kräfte, des notwendigen Sensorsetups oder der Art des Kraftverlaufs (siehe Abschnitt 4.2). Viele Rekonstruktionsmethoden setzen z.B. die genaue Kenntnis der Anregungsposition und der Anregungsrichtung voraus und beschränken sich auf die Rekonstruktion des Kraftverlaufs. Rekonstruktionsverfahren, welche darüber hinaus die Anregungsposition und deren Richtung identifizieren, benötigen in der Regel eine hohe Anzahl an Messsensoren.

Vergleiche der verschiedenen Rekonstruktionsstrategien zeigen, dass alle Methoden ihre spezifischen Vorzüge, Nachteile, Grenzen und Anforderung haben [Stevens, 1987; Klinkov & Fritzen, 2007; Sanchez & Benaroya, 2014]. Die Auswahl eines geeigneten Rekonstruktionsalgorithmus hängt also entscheidend von dem jeweiligen Anwendungsgebiet

ab. Es hat sich gezeigt, dass sich Lastrekonstruktionsalgorithmen in Abhängigkeit von der Belastungsart besonders stark voneinander unterscheiden. Daher wird im Folgenden eine Klassifikation verschiedener Belastungsarten vorgestellt.

4.2 Klassifikation externer Belastungen

Grundsätzlich können externe Belastungen durch ihren zeitlichen Verlauf und ihre räumliche Ausdehnung auf der Oberfläche der zu untersuchenden Struktur unterschieden werden. Grob kann man hier Kurzzeitbelastungen von kontinuierlich wirkenden dynamischen Belastungen und räumlich konzentrierte Lasten von verteilten Lasten unterscheiden.

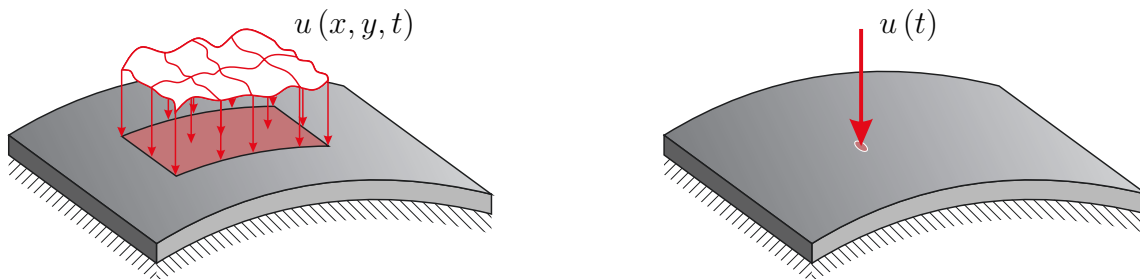


Abbildung 4.2: Schematische Darstellung verteilter Belastungen (links) und konzentrierter Belastungen (rechts)

4.2.1 Verteilte Belastungen

Verteilte Lasten wirken auf einen ausgedehnten Bereich der Strukturoberfläche. Dabei ist die Ausdehnung so groß, dass eine Annäherung durch eine ideal punktförmige Belastung nicht mehr gerechtfertigt ist. Beispiele hierfür sind u.a. statische Schneelasten oder dynamische Windlasten. Für die mechanische Modellbildung bedeutet das, dass die externe Kraft eine Funktion der Zeit und des Orts ist. Bei der Verwendung von FE-Modellen muss die Belastung also auf mehrere FHGs aufgebracht werden.

Die Klasse der verteilten Lasten stellt die allgemeinste Form der Belastungen dar. Eine Identifikation solcher Belastungen ist somit besonders schwierig und Rekonstruktionsansätze sind nur vereinzelt entwickelt worden [Granger & Perotin, 1999; Perotin & Granger, 1999]. Zumeist müssen zur Rekonstruktion plausible Annahmen über den räumlichen Verlauf der Kräfte getroffen werden. So können beispielsweise die Windlasten, welche auf eine Windenergieanlage oder ein Hochhaus wirken, als logarithmisch über

die Höhe verteilt angenommen werden. Zur vollständigen Kraftidentifikation müssen nun, neben dem zeitlichen Verlauf, noch entsprechende Gewichtungsfaktoren der Ansatzfunktionen für die räumliche Verteilung rekonstruiert werden. Durch diese zusätzlichen unbekannt Parameter wird die Rekonstruktion deutlich komplexer und es müssen in der Regel mehr Messinformationen vorhanden sein [Niu *et al.*, 2010; Hwang *et al.*, 2011; Niu *et al.*, 2015].

4.2.2 Konzentrierte Belastungen

Räumlich konzentrierte Lasten können als Spezialfall der verteilten Lasten angesehen werden. Die räumliche Kraftverteilung wird als ideal punktförmig angenommen, sodass der örtliche Verlauf durch einen Dirac-Stoß beschrieben wird. Bei der FE-Modellbildung greift in diesem Fall eine Einzellast direkt an einem Freiheitsgrad der Struktur an.

Für die Kraftrekonstruktion ist es entscheidend, ob der Ort der Anregung bekannt oder unbekannt ist. Viele Rekonstruktionsverfahren setzen die Kenntnis des genauen Kraftanregungsorts voraus und rekonstruieren lediglich den Kraftverlauf. Muss zusätzlich die Position der Anregung bestimmt werden, ist dies eine deutlich komplexere Problemstellung und benötigt oftmals wiederum signifikant mehr Messinformationen.

Wirken diese Einzellasten zeitlich kontinuierlich, unterscheidet man zwischen deterministischen Kräften (z.B. harmonisch, periodisch, quasi-periodisch) und Kräfte mit stochastischem Charakter (z.B. Fußpunkterregungen durch Fahrbahnunebenheiten). Harmonische Belastungen werden meist im Frequenzbereich rekonstruiert [Stevens, 1987]. Zur Überwachung von beliebigen Kräften werden hingegen üblicherweise Systembeobachter im Zeitbereich eingesetzt [Klinkov, 2011].

4.2.3 Impulsartige Belastungen

Impulslasten stellen einen weiteren Spezialfall dar. Sie sind gekennzeichnet durch einen kurzen zeitlichen Verlauf und eine räumliche Konzentration. Impulslasten werden in der Regel durch die Kollision zweier Körper verursacht, wie z.B. Hagelschlag auf einem Autodach oder die Kollision eines Vogels mit einem Flugzeug. Der charakteristische Kraftverlauf einer Impulsbelastung ist in Abbildung 4.3 zu sehen. Im linken Teil ist die schematische Darstellung des Verlaufs visualisiert. Häufig wird der Kraftverlauf durch einen Halbsinus oder einen gaußförmigen Verlauf angenähert [Yan & Zhou, 2009]. Im rechten Teil von Abbildung 4.3 sind experimentell bestimmte Kraftverläufe einer Impulsbelastung

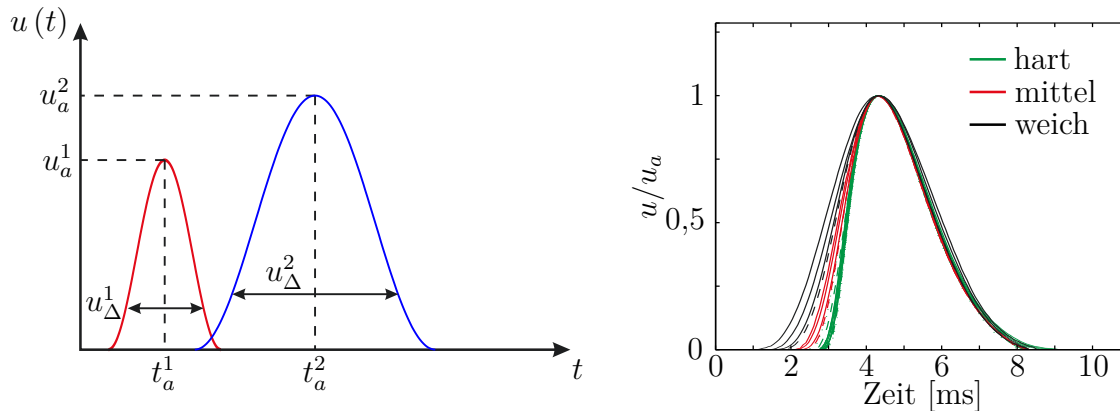


Abbildung 4.3: Kraftverlauf einer Impulsbelastung; Links: schematische Darstellung, Rechts: normierte experimentelle Messungen mit Hammerspitzen unterschiedlicher Härte

dargestellt. Die Impulsbelastung wurde mittels eines Impulshammers erzeugt. Dabei wurden Hammerspitzen unterschiedlicher Härte verwendet. Alle Kraftverläufe sind auf den gemessenen Maximalwert u_a normiert. Es zeigt sich, dass der Kraftverlauf hauptsächlich durch drei Parameter charakterisiert werden kann: Den Spitzenwert des Impulsstoßes u_a , den Zeitpunkt t_a zu dem dieser Spitzenwert erreicht wird und die zeitliche Impulsweite u_Δ . Die Impulsweite ist ein Maß für die Kontaktdauer der kollidierenden Körper und ist abhängig von deren Härte.

Impulsbelastungen sind für die strukturelle Integrität oftmals besonders kritisch. Moderne Hochleistungsfaserverbundwerkstoffe reagieren beispielsweise sehr empfindlich auf solche stoßartigen Belastungen. Um potentielle Schäden durch Impulslasten frühzeitig zu erkennen, haben sich auch schon in der Vergangenheit viele Forschungen zum Ziel gemacht, diese Impulslasten zu rekonstruieren. Dabei ist es wichtig, den Impuls nicht nur betragsmäßig zu identifizieren, sondern auch den Ort der Lasten zu lokalisieren. Ein Überblick verschiedener Rekonstruktionsverfahren ist in [Inoue *et al.*, 2001] zu finden. Allerdings setzen auch hier viele Identifikationsverfahren voraus, dass der Ort bekannt ist, sodass nur der Betrag bzw. der Kraftverlauf rekonstruiert werden kann.

Einige Rekonstruktionsverfahren schlagen daher ein zweistufiges Verfahren vor. Im ersten Schritt muss die Impulslast lokalisiert werden, bevor im zweiten Schritt die Höhe der Impulslast rekonstruiert werden kann [Inoue *et al.*, 2001; Klinkov, 2011]. Zur Lokalisation werden oftmals die durch den Impuls induzierten hochfrequenten Spannungswellen verwendet. Dazu wird ein dichtes Piezosensornetzwerk auf der Struktur appliziert und die Wellenlaufzeiten im Wavelet-Bereich analysiert [Gaul & Hurlebaus, 1998]. Die Kraftverlaufsrekonstruktion kann dann bei bekannter Anregungsposition im Zeit- oder

Frequenzbereich erfolgen [Doyle, 1984; Chang & Sun, 1989]. In [Jones *et al.*, 1997] wird eine simultane Identifikation von Impulsort und Impulshöhe mit Hilfe von neuronalen Netzen vorgeschlagen. Allerdings erfordert dieses Vorgehen ein intensives Training des Netzes im Vorfeld.

Im Folgenden soll ein neuer Ansatz zur Impulslastrekonstruktion vorgestellt werden. Mit Hilfe von dünnbesetzten Lösungsstrategien wird gezeigt, wie der Impulsverlauf und der Impulsort mit einer geringen Anzahl an Sensoren im tieffrequenten Zeitbereich rekonstruiert werden können. Basierend auf diesen Ergebnissen werden anschließend auch Rekonstruktionsstrategien für andere Belastungsarten abgeleitet.

4.3 Dünnbesetzte Lösungsstrategie zur Impulslastidentifikation

Ausgangspunkt der Lastrekonstruktion ist eine lineare Systembeschreibung mittels der Impulsantwortfunktion $\mathbf{h}(t)$, wie sie auch in Abschnitt 2.1.5 beschrieben wurde:

$$\mathbf{y}(t) = \int_0^t \mathbf{h}(t - \tau) \mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (4.1)$$

Die anregende Kraft wird durch den Eingang $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n_f}$ symbolisiert und der Systemausgang durch $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n_r}$. Für den Fall, dass digital abgetastete Messsignale vorliegen, ist allerdings die Beschreibung in zeitdiskreter Darstellung $t = t_k = k\Delta t$ mit Hilfe der Markov-Parameter \mathbf{h}_i notwendig:

$$\mathbf{y}_k = \sum_{i=0}^k \mathbf{h}_i \mathbf{u}_{k-i}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n_k) \quad (4.2)$$

Diese Gleichung kann durch einfache algebraische Umformungen in folgende Vektormatrix-Darstellung überführt werden:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{H}\mathbf{U} \quad (4.3)$$

Dabei ist $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n_r \cdot n_k}$ der Vektor aller Messwerte, $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{n_r \cdot n_k \times n_f \cdot n_k}$ die Transfermatrix und $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n_f \cdot n_k}$ der Krafteingangsvektor:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_0 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{h}_1 & \mathbf{h}_0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{h}_{n_k} & \mathbf{h}_{n_k-1} & \cdots & \mathbf{h}_0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_0 \\ \mathbf{y}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{n_k} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_0 \\ \mathbf{u}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{n_k} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Mithilfe der Gleichungen (4.1), (4.2) oder (4.3) können also bei bekannter Systemdynamik und bekannten externen Kräften die Schwingungsantworten bestimmt werden. Die anregenden Kräfte müssen dazu vollständig nach zeitlichem Verlauf, Richtung und Kraftangriffsposition bekannt sein. Sollen die Größen der dynamischen externen Kräfte allerdings aus den Schwingungsantworten des mechanischen Systems rekonstruiert werden, liegt eine inverse Problemstellung vor. Für gemessene Strukturantworten sind die erhaltenen Daten in der Regel verrauscht und Gl. (4.3) wird zu:

$$\mathbf{Y}_\nu = \mathbf{H}\mathbf{U} + \boldsymbol{\nu} \quad (4.5)$$

Wobei der Vektor $\boldsymbol{\nu}$ das Messrauschen beschreibt. Da in der Praxis die gewonnenen Messdaten immer mehr oder weniger stark verrauscht sind, soll im Folgenden ausschließlich das Problem aus Gl. (4.5) untersucht werden. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird auf die Indizierung des verrauschten Messwertvektors \mathbf{Y}_ν verzichtet und stattdessen das Symbol \mathbf{Y} zur Beschreibung genutzt.

Für den Fall, dass die Krafteinleitungsposition einer Einzellast bekannt ist, reduziert sich die Anzahl der Anregungspositionen zu $n_f = 1$ und das Kraftrekonstruktionsproblem wird stark vereinfacht. Diese Vereinfachung kann besonders gut anhand der Systembeschreibung aus Gl. (4.3) und der Dimension des Gleichungssystems deutlich gemacht werden: Bei realen Anwendungen ist die Anzahl der verfügbaren Sensoren n_r meist viel geringer als die Anzahl der möglichen Anregungspositionen n_f . Jede Stelle an der Strukturoberfläche ist eine mögliche Krafteinleitungsposition und somit je nach Modellbeschreibung identisch mit der Anzahl der Freiheitsgrade (FHGs). Liegt also bei unbekannter Krafteinleitungsposition zumeist noch ein stark unterbestimmtes Gleichungssystem vor ($n_r \ll n_f$), wird dieses im Falle einer bekannten Anregungsposition zu einem überbestimmten Gleichungssystem ($n_r > n_f$), welches in der Regel bedeutend einfacher zu lösen ist. Falls die Krafteinleitungsposition nicht bekannt ist, kann durch Vorselektion der möglichen Krafteinleitungsposition ($n_r^{\text{red}} \geq n_f$) auch ein (über-) bestimmtes Gleichungssystem erreicht werden. Solch eine Selektion ist allerdings nur in Ausnahmefällen möglich.

In der vorliegenden Arbeit wird ein Verfahren hergeleitet, welches in der Lage ist, direkt das unterbestimmte Gleichungssystem aus Gl. (4.3) bzw. Gl. (4.5) zu lösen und somit ohne Vorkenntnisse über die Krafteinleitungsposition, Kräfte zu lokalisieren und zu identifizieren. Die Lösung der entstehenden unterbestimmten Gleichungssysteme wird mit Hilfe der in Abschnitt 3.4 beschriebenen L_1 -minimierenden Lösungsverfahren generiert.

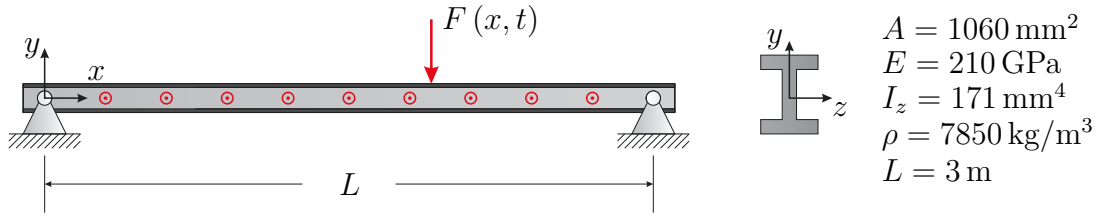


Abbildung 4.4: Beidseitig gelagerter Balken

Bei vielen praktischen Anwendungen wirken nicht zeitlich und räumlich beliebige externe Kräfte auf die Struktur. Vielmehr haben die Kraftanregungsvektoren immer eine gewisse innere Struktur. Diese charakteristische Eigenschaft der äußeren Kräfte ist oftmals bekannt und sollte im Rekonstruktionsprozess berücksichtigt werden. Möchte man beispielsweise Impulslasten rekonstruieren, ist über die äußere Kraft bekannt, dass die Last nur für einen kurzen Zeitpunkt wirkt. Außerdem wird hier angenommen, dass die Last räumlich konzentriert ist. Allerdings sind auch andere Verteilungen möglich. Die charakteristischen Eigenschaften einer Impulslast wurden bereits in Abschnitt 4.2.3 eingehender beschrieben (siehe dazu auch Abb. 4.3).

Aus diesen Eigenschaften kann abgeleitet werden, dass der Krafteingangsvektor \mathbf{U} im Falle einer Impulsbelastung nur wenige Einträge ungleich null besitzt. D.h. dünnbesetzte Lösungsstrategien zur Behandlung der inversen Problemstellung der Impulslastrekonstruktion sind unmittelbar gerechtfertigt. Eine Schätzung $\hat{\mathbf{U}}$ des gesamten Krafteingangsvektors \mathbf{U} kann somit durch folgendes L_1 -Minimierungsproblem generiert werden:

$$\hat{\mathbf{U}} = \arg \min_{\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n_f \cdot n_k}} \left\{ \|\mathbf{Y} - \mathbf{H}\mathbf{U}\|_2^2 + \lambda_1 \|\mathbf{U}\|_1 \right\} \quad (4.6)$$

Mit der Schätzung $\hat{\mathbf{U}}$ wird der Krafteingangsverlauf an allen im Modell definierten Kräfteinleitungspositionen simultan bestimmt. Durch Analyse der Schätzung $\hat{\mathbf{U}}$ kann damit also sehr einfach die Impulslast nach Verlauf, Position und Richtung identifiziert werden.

4.3.1 Simulationsstudien zur Impulslastidentifikation

Die Eigenschaften dünnbesetzter Lösungsstrategien zur Impulslastrekonstruktion werden im Folgenden anhand verschiedener Simulationsuntersuchungen gezeigt. Der Fokus liegt hier auf der Identifikation wichtiger Rekonstruktionsparameter und der Quantifizierung potentieller Fehlereinflüsse. Zu Beginn werden grundlegende Eigenschaften des Rekonstruktionsverfahrens an einer einfachen Balkenstruktur beschrieben. Die Überführung des analytischen Euler-Bernoulli-Balkenmodells zur Systembeschreibung nach Gl. (4.2)

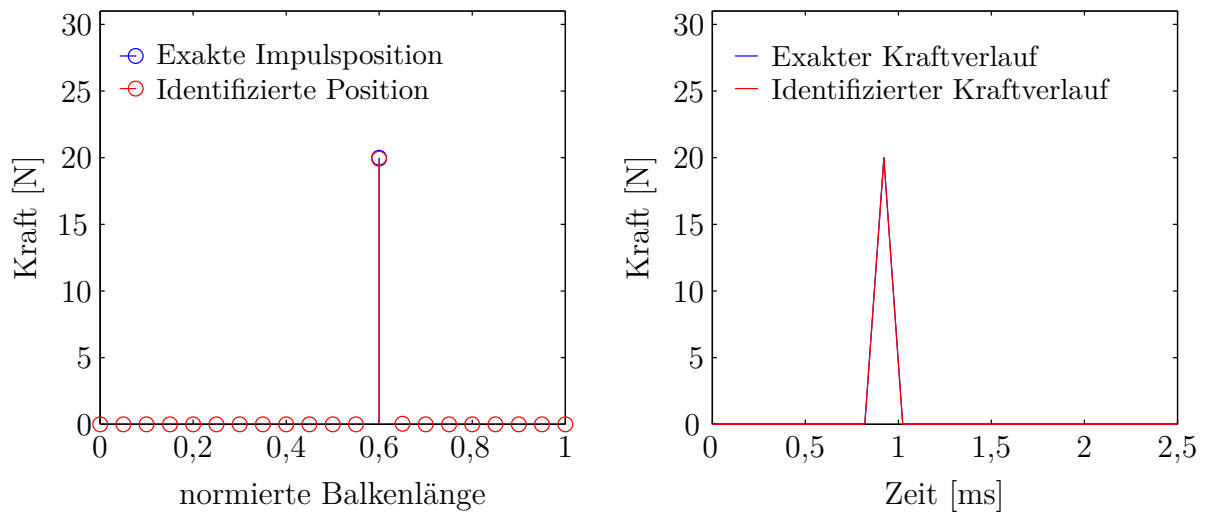


Abbildung 4.5: Ergebnis der Impulsidentifikation (links: Impulslokalisationsergebnis, rechts: Gegenüberstellung des Kraftverlaufs)

ist im Anhang hergeleitet. Die Balkenparameter dieser Simulationsuntersuchung können Abb. 4.4 entnommen werden. Der betrachtete Balken hat eine Länge von $L = 3$ m. Alle Positionen x_i entlang der Balkenkoordinatenachse werden in normierter Länge $\tilde{x}_i = x_i/L$ angegeben.

Da es sich um ein analytisches Strukturmodell handelt, gibt es theoretisch eine unendlich große Anzahl an möglichen Krafteinleitungspositionen. Diese können aber, wie im Anhang gezeigt, durch Diskretisierung auf eine endliche Anzahl n_f reduziert werden. Die Einleitungspositionen können als potentielle Impulsorte interpretiert werden (in Abb. 4.4 rot gekennzeichnet). Allerdings sind zur Definition dieser Punkte ansonsten keinerlei weitere Informationen bzw. Vorkenntnisse des Impulseinleitungsortes notwendig. Um eine ausreichend gute Lokalisation des Impulses zu gewährleisten, sollten die potentiellen Einleitungspositionen möglichst dicht und gleichmäßig entlang der Balkenstruktur verteilt werden.

Als Strukturschwingungsantworten werden simulierte Beschleunigungsmessdaten verwendet, da Beschleunigungen in der Anwendung messtechnisch sehr einfach erfasst werden können. Die simulierten Beschleunigungen werden mit gaußverteilterm weißem Rauschen überlagert, um die Eigenschaften von tatsächlichen Beschleunigungsmessdaten wiederzugeben. Die Standardabweichung des Rauschens beträgt 3% des maximalen Beschleunigungsausschlages. Die anregende Kraft wird als ein idealer Impuls modelliert und wirkt auf einen Punkt entlang der Balkenachse.

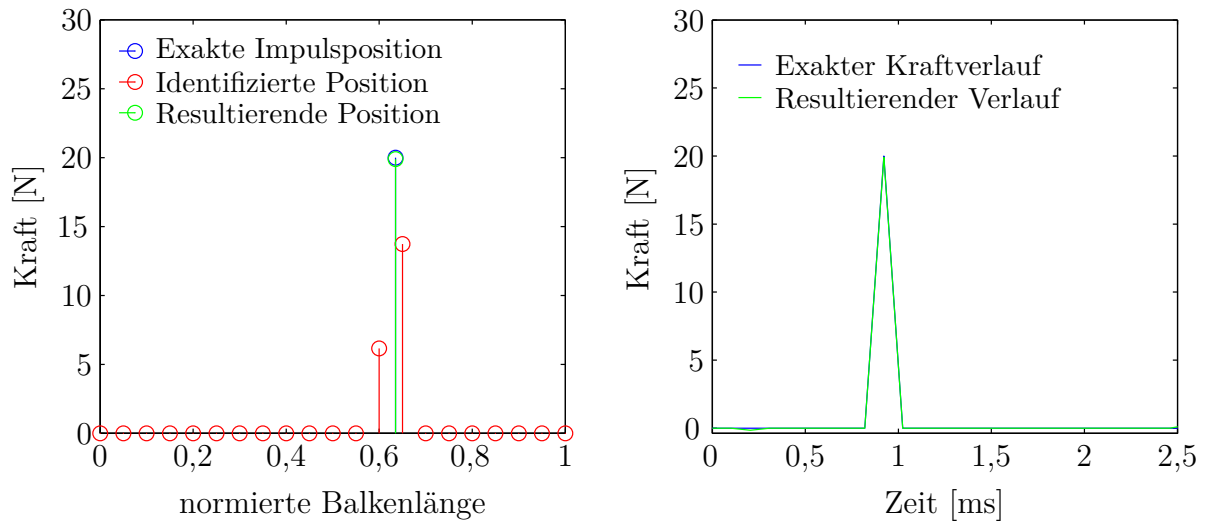


Abbildung 4.6: Ergebnis der Impulsidentifikation nach Resultierendenbildung (links: Impulslokalisierungsergebnis, rechts: Gegenüberstellung des Kraftverlaufs)

Für die folgenden Simulationsuntersuchungen werden zur Impulslastrekonstruktion nur drei Beschleunigungsantworten ($n_r = 3$) an den Balkenpositionen $\tilde{x}_1 = 0,35$, $\tilde{x}_2 = 0,4$ und $\tilde{x}_3 = 0,5$ genutzt. Das verwendete Strukturmodell zur Simulation der Beschleunigungsmessdaten und jenes zur Kraftrekonstruktion sind identisch. Zur Impulsidentifikation sollen nur tieffrequente Schwingungsantworten berücksichtigt werden, sodass das Strukturmodell lediglich aus den ersten sechs Moden aufgebaut wird. Die sechste Mode liegt bei ca. 600 Hz. Der Einfluss der Sensorpositionierung und Modellfehlern wird später nochmals genauer diskutiert. Die Krafteinleitungspunkte werden äquidistant in einem Abstand von $\Delta\tilde{x} = 0,05$ entlang des Balkens definiert. Somit ergibt sich für das inverse Problem der Impulslastidentifikation bei $n_f = 21$ und $n_r = 3$ ein stark unterbestimmtes System.

Das BPDN-Minimierungsproblem aus Gl. (4.6) wird mit dem *In-Crowd*-Algorithmus gelöst (siehe Abschnitt 3.5.1). Abb. 4.5 zeigt ein Rekonstruktionsergebnis bei dem der Impuls direkt auf eine der vordefinierten Krafteinleitungspositionen aufgebracht wurde. Rechts sind der identifizierte und der exakte Kraftverlauf gegenübergestellt. Hier lässt sich eine sehr gute Übereinstimmung beider Verläufe erkennen. Die Maximalwerte weichen 0,17% voneinander ab. Im linken Teil der Abb. 4.5 ist die identifizierte und exakte Lastverteilung entlang des Balkens geplottet. Es ist zu erkennen, dass der Impulsort korrekt rekonstruiert wurde.

Für den Fall, dass der Impuls zwischen zwei definierten Einleitungspunkten aufge-

bracht wird, identifizieren dünnbesetzte Lösungsstrategien Kräfte nahe der tatsächlichen Einleitungsposition. Abb. 4.6 zeigt beispielhaft ein solches Rekonstruktionsergebnis. Die tatsächliche Impulslast wurde an der Balkenposition $\tilde{x}_{\text{Imp}} = 0,635$ aufgebracht (blauer Plot). Der L_1 -Minimierungsalgorithmus aus Gl. (4.6) identifiziert, als dünnbesetzteste Lösung, Kräfte an den benachbarten Krafteinleitungspositionen \tilde{x}_I und \tilde{x}_{II} (roter Plot). Um nun den Ort der Impulslast und deren zeitlichen Verlauf genauer zu bestimmen, können die rekonstruierten Kräfte $\hat{F}(\tilde{x}_I, t)$ und $\hat{F}(\tilde{x}_{II}, t)$ zu einer resultierenden Kraft $\hat{F}_{\text{Res}}(t)$ zusammengefasst werden:

$$\hat{F}_{\text{Res}}(t) = \hat{F}(\tilde{x}_I, t) + \hat{F}(\tilde{x}_{II}, t) \quad (4.7)$$

Der Impulsort \tilde{x}_{Res} ergibt sich aus der Betrachtung der Momentenwirkung. Die Summe der Momente hervorgerufen durch $\hat{F}(\tilde{x}_I, t)$ und $\hat{F}(\tilde{x}_{II}, t)$ bzgl. $\tilde{x} = 0$, muss identisch mit dem Moment sein, welches von \hat{F}_{Res} hervorgerufen wird. Zur Berechnung wird der Zeitpunkt t_{max} betrachtet, an dem die resultierende Kraft \hat{F}_{Res} maximal wird:

$$\tilde{x}_{\text{Res}} = \frac{\hat{F}(\tilde{x}_I, t_{\text{max}}) \cdot \tilde{x}_I + \hat{F}(\tilde{x}_{II}, t_{\text{max}}) \cdot \tilde{x}_{II}}{\hat{F}_{\text{Res}}(t_{\text{max}})} \quad (4.8)$$

Im gezeigten Beispiel aus Abb. 4.6 beträgt die Abweichung des Kraftverlaufs lediglich 0,48% des Maximalwertes und der Lokalisationsfehler ist mit $\Delta\tilde{x}_{\text{Error}} = 0,0002$ vernachlässigbar klein.

Um eine automatisierte Entscheidung treffen zu können, ob eine Impulslast direkt auf eine vordefinierte Einleitungsposition aufgebracht wurde oder eine resultierende Kraft berechnet werden muss, kommt ein Soft-Thresholding Verfahren zum Einsatz. Dazu werden die rekonstruierten Maximalwerte an allen Einleitungspunkten durch ein k -Means Clusteringalgorithmus in zwei Klassen unterteilt (siehe z.B. [Gordon, 1999; Duda *et al.*, 2012]). Befindet sich in der Klasse der betragsmäßig größeren Impulslasten nur ein Wert, so wurde eine Kraft direkt auf einem Einleitungspunkt identifiziert. Sind hingegen zwei Werte in dieser Klasse, wird eine resultierende Kraft nach Gl. (4.7) und Gl. (4.8) bestimmt.

4.3.2 Einfluss von Messrauschen

Die Gewichtung zwischen Rauschkompensation und L_1 -Minimierung wird in Gl. (4.6) durch den Parameter λ_1 definiert. Welchen Einfluss die Höhe des Messrauschens und der Gewichtungparameter λ_1 haben, soll im Folgenden näher untersucht werden. Zu diesem Zweck wurde eine Vielzahl an Simulationen mit unterschiedlich stark verrauschten

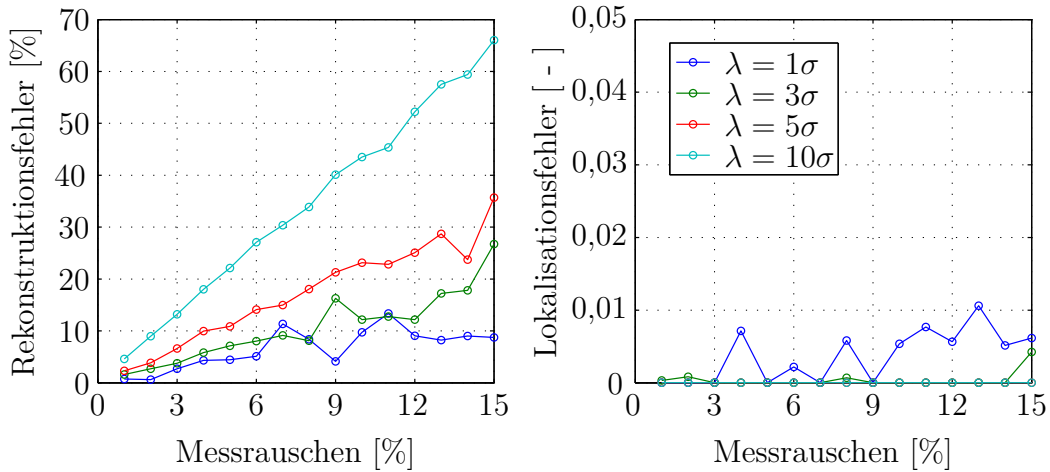


Abbildung 4.7: Einfluss von Messrauschen auf Rekonstruktionsergebnis (links: Relativer Fehler des Kraftverlaufs, rechts: Lokalisationsfehler)

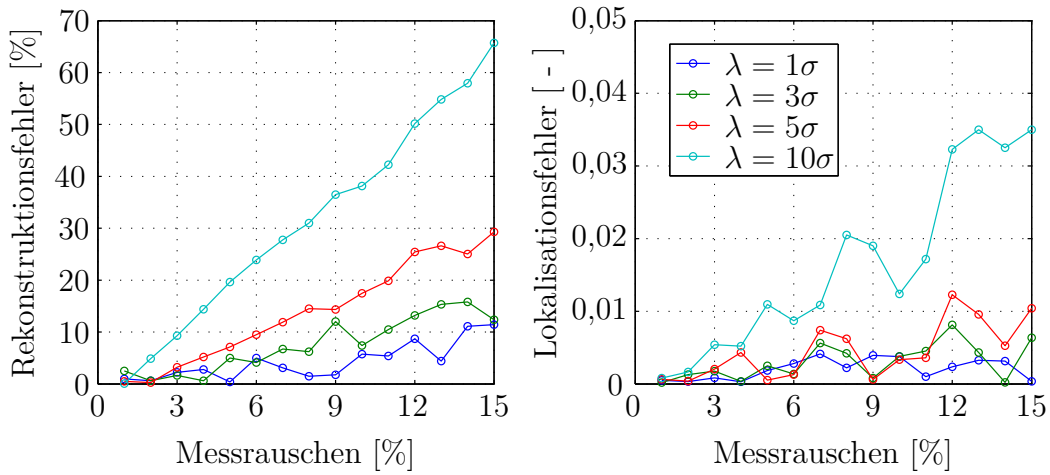


Abbildung 4.8: Einfluss von Messrauschen auf Rekonstruktionsergebnis nach Bildung einer resultierenden Kraft (links: Relativer Fehler des Kraftverlaufs, rechts: Lokalisationsfehler)

Daten durchgeführt. Der Gewichtungsfaktor λ_1 wird dabei für alle Simulationsstudien in Abhängigkeit der mittleren Standardabweichung σ des vorliegenden Messrauschens definiert. Dazu wird an dieser Stelle angenommen, dass die statistischen Eigenschaften des Messrauschens bekannt sind bzw. im Vorfeld bestimmt werden können. Abb. 4.7 zeigt die Rekonstruktionsfehler ΔF_{Res} für den maximalen Ausschlag und die Lokalisationsfehler, falls der Impuls direkt auf einen Einleitungspunkt wirkt. Der Rekonstruktionsfehler ΔF_{Res} wird berechnet durch:

$$\Delta F_{Res} = \frac{\|\hat{F}_{Res}(t_{max}) - F_{Res}(t_{max})\|}{\|\hat{F}_{Res}(t_{max})\|} \cdot 100\% \quad (4.9)$$

Abb. 4.8 stellt hingegen die Fehler dar, für den Fall, dass die Impulslast nicht auf einen solchen Punkt aufgebracht wurde. Es wird in beiden Fällen deutlich, dass die Rekonstruktion des Kraftverlaufs mit zunehmendem Messrauschen ungenauer wird. Darüber hinaus führt für den ersten Fall eine stärkere Betonung des L_1 -Minimierungsterms zu einem exakten Lokalisationsergebnis (siehe Abb 4.7 rechts). Allerdings wird dadurch der maximale Ausschlag stets unterschätzt. Da für den Fall, dass die Krafteinleitung zwischen zwei Modellpunkten erfolgt, die Schätzung des maximal Betrages nach Gl. (4.8) auch in die Berechnung der Impulslokalisierung mit einfließt, steigt hier mit zunehmenden σ auch der Lokalisationsfehler (Abb 4.8 rechts). In beiden gezeigten Fällen ist der Lokalisationsfehler allerdings stets kleiner als $\Delta\tilde{x}_{\text{Error}} = 0,05$ und somit geringer als der Abstand der definierten Einleitungspunkte im Strukturmodell.

Die Position der Impulslast kann daher sehr zuverlässig bestimmt werden. Ist ein genaueres Rekonstruktionsergebnis für den Kraftverlauf notwendig, kann in einem zweiten bzw. weiterführenden Schritt diese bei bekannter Einleitungsposition nochmals mit anderen Rekonstruktionsverfahren neu geschätzt werden (vgl. Abschnitt 4.7).

4.3.3 Einfluss der Anregungsposition

Die Modellbeschreibungen nach Abschnitt 2.1.2 und 2.1.5 machen deutlich, dass die Strukturantwort stark von der Anregungsposition abhängig ist. So wird beispielsweise durch eine Anregung in einem Schwingungsknoten einer Mode, diese Mode keinen Beitrag zur Strukturantwort liefern.

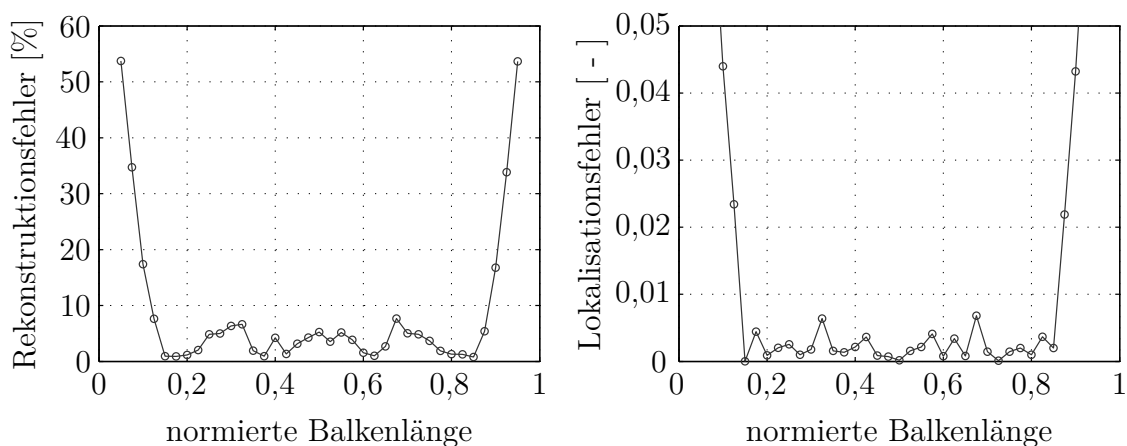


Abbildung 4.9: Einfluss von Impulsanregungsposition auf Rekonstruktionsergebnis (links: Relativer Fehler des Kraftverlaufs, rechts: Lokalisationsfehler)

In Abb. 4.9 sind die Rekonstruktionsfehler für verschiedene Impulsanregungspositionen entlang der Balkenachse bei ansonsten gleichbleibenden Bedingungen aufgetragen. Es ist deutlich zu erkennen, dass die Fehler an den Balkenenden überproportional ansteigen. Durch die Lagerung an diesen Stellen werden dort alle modalen Eigenformen den Wert null annehmen bzw. nahe der Lagerstellen sehr klein sein (vgl. Eigenformen aus Gl. (A.4)). Betrachtet man nun nochmals die Krafteinleitungsmatrix des modalen Zustandsraummodells \mathbf{B}_m (siehe Abschnitt 2.1.2, Gl. (2.24))

$$\mathbf{B}_m = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_m^{-1} \Phi^T \mathbf{B}_u \end{bmatrix}, \quad (4.10)$$

so erkennt man, dass durch die Projektion der Einleitungsselektionsmatrix \mathbf{B}_u auf die Modalmatrix Φ eine Krafteinleitung an den Lagern keinen bzw. nur einen sehr geringen Einfluss auf die Schwingungsantwort haben kann. Dies führt dazu, dass im messbaren Strukturantwortsignal nur sehr wenig bis keinerlei Informationen über das Anregungssignal enthalten sein können. Eine Steuerbarkeit der Struktur ist damit an diesen Stellen nicht gegeben. Wie auch in [Maes *et al.*, 2015] dargelegt, ist die Systemsteuerbarkeit neben der Systembeobachtbarkeit eine wichtige Größe für Kraftrekonstruktionsverfahren. Eine Rekonstruktion äußerer Belastungen ist somit an solchen Lagerstellen mit inversen, schwingungsbasierten Rekonstruktionsverfahren nicht möglich.

4.3.4 Einfluss der Sensorpositionen

Bei allen zuvor gezeigten Untersuchungen wurden ausschließlich drei Beschleunigungsmessreihen an den Positionen $\tilde{x}_1 = 0,35$, $\tilde{x}_2 = 0,4$ und $\tilde{x}_3 = 0,5$ zur Rekonstruktion verwendet. Nun soll der Einfluss des verwendeten Sensorsetups genauer untersucht werden. Hierzu werden bis zu zehn Sensoren entlang der Balkenachse verteilt. Die Sensorpositionen wurden dabei mit Hilfe der Effective Independence Method (EIM) (siehe Abschnitt 2.4.2) bestimmt. Abb. 4.10 zeigt die mittleren Rekonstruktionsfehler für eine steigende Sensorenanzahl bei verschiedenen, beliebig gewählten Anregungspositionen \tilde{x}_{Imp} . Es wird deutlich, dass für eine sehr geringe Anzahl von nur ein bis zwei Beschleunigungssensoren die Abweichungen für die Impulshöhe noch recht groß sind. Allerdings nimmt der Fehler bei einer Anzahl von drei Sensoren deutlich ab. Darüber hinaus zeigen die Ergebnisse, dass bei der Verwendung von lediglich einem Sensor eine grobe Lokalisierung des Impulses möglich ist. Hier steigt die Lokalisationsgenauigkeit aber ebenfalls mit der Anzahl der Sensoren.

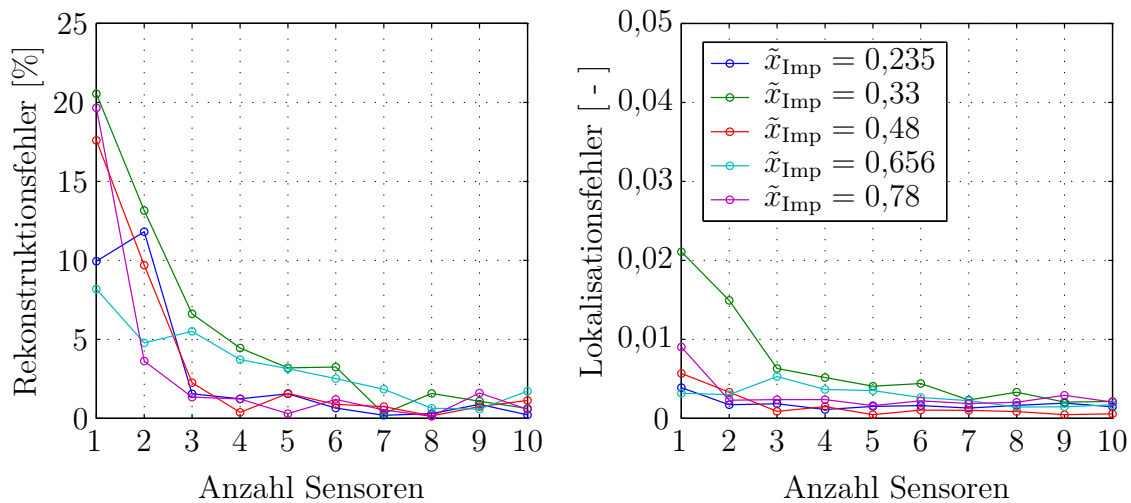


Abbildung 4.10: Einfluss der Sensoranzahl (links: Relativer Fehler des Kraftverlaufs, rechts: Lokalisationsfehler)

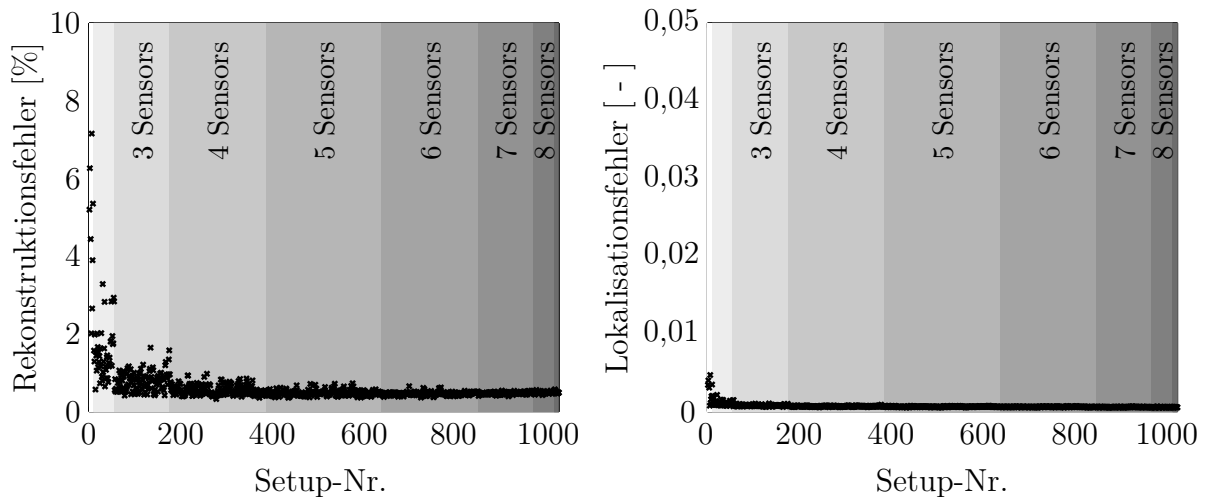


Abbildung 4.11: Einfluss der Sensoranzahl für alle möglichen Sensorkombinationen; Links: Fehler der Rekonstruktion des Kraftverlaufs, Rechts: Lokalisationsfehler

In einem weiteren Schritt soll neben der Sensoranzahl auch der Einfluss der Sensorpositionierung analysiert werden. Im Gegensatz zur vorherigen Untersuchung werden nun die Sensorpositionen nicht mittels Optimierungsverfahren bestimmt, sondern Sensoren an beliebigen Balkenpositionen angebracht. Es werden die in Tab. 4.1 angegebenen Sensorpositionen ausgewählt. In der Analyse werden alle Kombinationsmöglichkeiten der zehn ausgewählten Sensorpositionen zugelassen. Für eine Sensoranzahl von einem bis zehn Beschleunigungssensoren führt dies zu 1023 verschiedenen Sensorkonfigurationsmöglichkeiten.

Abb. 4.11 zeigt für alle Kombinationsmöglichkeiten die sich einstellenden Rekonstruk-

tionsfehler. Bei dieser Simulationsuntersuchung werden für alle Sensorkonfigurationen die Impulslasten auf 30 verschiedene Balkenpositionen aufgebracht und die jeweils auftretenden Fehler gemittelt. Das Ergebnis in Abb. 4.11 zeigt einen ähnlichen Trend für eine steigende Sensoranzahl, wie in Abb. 4.10 für den Fall der optimierten Sensorpositionierung. Eine Voruntersuchung zur Bestimmung der genauen Sensorpositionierung kann aufgrund der gezeigten Ergebnisse auch entfallen und führt so zu einer vereinfachten Anwendung des Rekonstruktionsverfahrens in der Praxis.

Sensor	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Position	0,4	0,65	0,5	0,31	0,725	0,45	0,2	0,81	0,15	0,93

Tabelle 4.1: Beliebig gewählte Sensorpositionen; angegeben in normierter Balkenlänge

4.4 Dictionary-basierte Lastidentifikation

Der bislang betrachtete Impulsverlauf wurde stark idealisiert. Im Folgenden wird eine Modifikation der gezeigten Rekonstruktionsstrategie vorgestellt, welche die spezifischen zeitlichen Eigenschaften einer Impulsbelastung berücksichtigt. Dazu wird die Impulsbelastung analog zu [Yan & Zhou, 2009], durch einen einzelnen Halbsinus beschrieben. Wie in Abschnitt 4.2.3 gezeigt, kann der Kraftverlauf $u(t)$ so in Abhängigkeit von lediglich drei Parametern ausgedrückt werden: Der Impulsweite $u_\Delta \in [u_\Delta^{\min}, u_\Delta^{\max}]$, welche mit der Frequenz des Halbsinus verknüpft ist, dem Zeitpunkt der maximalen Kraft $t_a \in [0, t_a^{\max}]$ und dem zugehörigen Spitzenwert $u_a(t_a, u_\Delta) \in \mathbb{R}$ der Kraft selbst. Zusätzlich zum Impulsanregungsort müssen also diese drei Parameter mit Hilfe der Strukturantworten rekonstruiert werden. Der halbsinusförmige Impulskraftverlauf ist definiert als:

$$\tilde{u}(t, t_a, u_\Delta) = \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi(t-t_a+\frac{1}{2}u_\Delta)}{u_\Delta}\right) & \text{für } t_a - \frac{u_\Delta}{2} < t < t_a + \frac{u_\Delta}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.11)$$

Da die Ansatzfunktionen $\tilde{u}(t, t_a, u_\Delta)$ des Impulsverlaufs auf eins normiert ist, kann der Kraftverlauf $u(t, t_a, u_\Delta)$ als Produkt aus Ansatzfunktion und Spitzenwert $u_a(t_a, u_\Delta)$ dargestellt werden:

$$u(t, t_a, u_\Delta) = \tilde{u}(t, t_a, u_\Delta) \cdot u_a(t_a, u_\Delta) \quad (4.12)$$

Die Ansatzfunktionen werden im Folgenden dazu verwendet, ein sogenanntes *Impuls-Dictionary* zu erstellen. Das Impuls-Dictionary enthält alle potentiellen Parameterkombinationen der Ansatzfunktionen $\tilde{u}(t, t_a, u_\Delta)$, für alle potentiellen Anregungspositionen

$j = 1, 2, \dots, n_f$ in einer normierten Darstellung. Zu diesem Zweck muss das Intervall des Spitzenwertzeitpunkts $[0, t_a^{\max}]$ entsprechend der Abtastzeit diskretisiert werden, mit $t_a = l\Delta t$, ($l = 0, 1, 2, \dots, n_l$) und $t_a^{\max} = n_l\Delta t$. Auch das Intervall der Impulsweite $[u_\Delta^{\min}, u_\Delta^{\max}]$ muss in geeigneter Form diskretisiert werden:

$$u_\Delta = u_\Delta^{\min} + (p-1)u_\Delta^{n_p} \quad \text{mit } p = 1, 2, \dots, n_p \quad (4.13)$$

Hierbei gibt $u_\Delta^{n_p}$ die Unterteilung des Intervalls an. Diese Unterteilung führt dazu, dass das Impuls-Dictionary diverse potentielle Impulsweiten für verschiedene Kontaktdauern der Kollisionskörper enthält. Die diskretisierte Form des Kraftverlaufs an der Position j kann in Abhängigkeit des Parameters p für die Impulsweite und des Parameters l für den Zeitpunkt der maximalen Kraft als

$$u_{k,l,p}^j = \tilde{u}_{k,l,p}^j \cdot a_{l,p}^j, \quad (4.14)$$

geschrieben werden. Der Index k symbolisiert den diskreten Zeitpunkt $t_k = k\Delta t$ und $a_{l,p}^j \in \mathbb{R}$ den Spitzenwert des diskreten Kraftverlaufs.

Überlagert man nun bei bekannter Anregungsposition j^* alle Kraftverläufe für alle möglichen Parameterkombinationen, entspricht dies nur dem tatsächlich wirkenden Impuls, falls alle Spitzenwerte $a_{l,p}^{j^*}$ null sind, außer jene welche zur tatsächlichen Parameterkombination $[l^*, p^*]$ gehören. Dies kann für die überlagerte Kraft $\bar{u}_k^{j^*}$ mit Hilfe des Kronecker-Deltas beschrieben werden:

$$\bar{u}_k^{j^*} = \sum_{l=0}^{n_l} \sum_{p=1}^{n_p} \tilde{u}_{k,l,p}^{j^*} \delta_{l,l^*} \delta_{p,p^*} a_{l,p}^{j^*} \quad (4.15)$$

Ist die Anregungsposition unbekannt, müssen zusätzlich alle potentiellen Krafeinleitungspositionen überlagert werden. Setzt man diese überlagerte Anregung in die Modellbeschreibung aus Gl. (4.2) ein, erhält man:

$$\mathbf{y}_k = \sum_{i=0}^k \mathbf{h}_i \cdot \sum_{l=0}^{n_l} \sum_{p=1}^{n_p} \tilde{\mathbf{u}}_{k-i,l,p} \delta_{l,l^*} \delta_{p,p^*} \mathbf{a}_{l,p} \quad (4.16)$$

Die Matrix $\tilde{\mathbf{u}}_{k,l,p} \in \mathbb{R}^{n_f \times n_f}$ enthält die normierten Ansatzfunktion des Kraftverlaufs für alle n_f potentiellen Anregungspositionen zum diskreten Zeitpunkt k . Der zugehörige Spitzenwertvektor $\mathbf{a}_{l,p} \in \mathbb{R}^{n_f}$ darf hier lediglich Einträge ungleich null enthalten, welche zur tatsächlichen Anregungsposition j^* zugeordnet sind. Die Umformulierung von Gl. (4.16) in Vektor-Matrix-Schreibweise führt zu:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{H} \cdot \sum_{p=1}^{n_p} \tilde{\mathbf{U}}_p \mathbf{A}_p \quad (4.17)$$

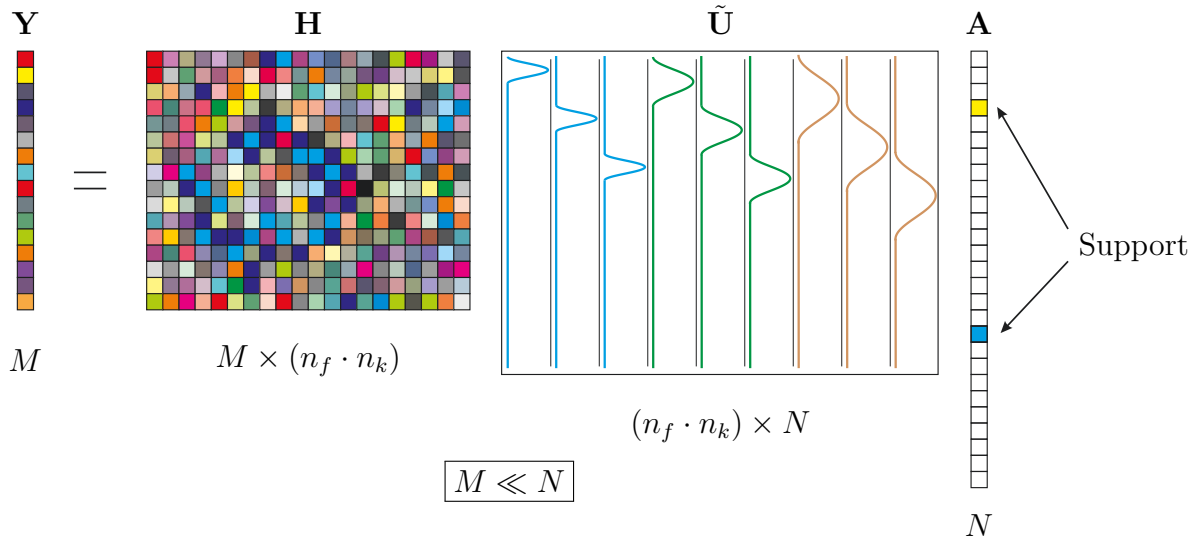


Abbildung 4.12: Durch die Verwendung eines Impuls-Dictionary kann die Anzahl der Elemente im Lösungsvektor weiter reduziert werden

Hier ist $\tilde{\mathbf{U}}_p \in \mathbb{R}^{n_f \cdot n_k \times n_f \cdot n_l}$ eine Dictionary-Matrix und $\mathbf{A}_p \in \mathbb{R}^{n_f \cdot n_l}$ der entsprechende Spitzenwertvektor:

$$\tilde{\mathbf{U}}_p = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}_{0,0,p} & \tilde{\mathbf{u}}_{0,1,p} & \cdots & \tilde{\mathbf{u}}_{0,n_l,p} \\ \tilde{\mathbf{u}}_{1,0,p} & \tilde{\mathbf{u}}_{1,1,p} & \ddots & \tilde{\mathbf{u}}_{1,n_l,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{\mathbf{u}}_{n_k,0,p} & \tilde{\mathbf{u}}_{n_k,1,p} & \cdots & \tilde{\mathbf{u}}_{n_k,n_l,p} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_p = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{0,p} \\ \mathbf{a}_{1,p} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{n_l,p} \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

Der Messwertvektor \mathbf{Y} und die Transfermatrix \mathbf{H} sind identisch zu jenen aus Gl. (4.4). Berücksichtigt man die Eigenschaften des Kronecker-Deltas, kann Gl. (4.16) nur in Gl. (4.17) überführt werden, falls \mathbf{A}_p für alle $p \neq p^*$ der Nullvektor ist und falls \mathbf{A}_{p^*} lediglich für $l = l^*$ Elemente ungleich null besitzt. Eine alternative Schreibweise zu Gl. (4.17) lautet

$$\mathbf{Y} = \mathbf{H} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{U}}_1 & \tilde{\mathbf{U}}_2 & \cdots & \tilde{\mathbf{U}}_{n_p} \end{bmatrix}}_{=:\tilde{\mathbf{U}}_I} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^T & \mathbf{A}_2^T & \cdots & \mathbf{A}_{n_p}^T \end{bmatrix}^T}_{=:\mathbf{A}_I}, \quad (4.19)$$

oder verkürzt:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{H} \cdot \tilde{\mathbf{U}}_I \cdot \mathbf{A}_I \quad (4.20)$$

Schließlich kann die Matrix $\tilde{\mathbf{U}}_I$ als gesamtes Impuls-Dictionary betrachtet werden. Es enthält alle potentiellen Impulslasten in einer normierten Form als Spalten der Matrix $\tilde{\mathbf{U}}_I$. Der Spitzenwertvektor $\mathbf{A}_I \in \mathbb{R}^{n_f \cdot n_l \cdot n_p}$ skaliert nun die Spalten des Dictionary entsprechend. Multipliziert man die Transfermatrix \mathbf{H} mit dem Dictionary $\tilde{\mathbf{U}}_I$ entsteht eine

neue Transfermatrix $\tilde{\mathbf{H}}$:

$$\mathbf{Y} = \tilde{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{A}_I \quad \text{mit} \quad \tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{H} \cdot \tilde{\mathbf{U}}_I \quad (4.21)$$

Zur Impulsrekonstruktion muss somit Gl. (4.21) nach \mathbf{A}_I aufgelöst werden. Es wird deutlich, dass die neue Transfermatrix $\tilde{\mathbf{H}} \in \mathbb{R}^{n_r \cdot n_k \times n_f \cdot n_l \cdot n_p}$ in der Regel mehr Spalten ($N := n_f \cdot n_l \cdot n_p$) als Zeilen ($M := n_r \cdot n_k$) besitzt, sodass das Gleichungssystem (4.21) unterbestimmt ist. Allerdings wird aus der Herleitung ersichtlich, dass der Lösungsvektor nur sehr wenig Elemente ungleich null besitzen wird und daher dünnbesetzte Lösungsstrategien angewendet werden können. Die piktographische Darstellung des Gleichungssystems in Abb. 4.12 verdeutlicht die beschriebene Transformation des ursprünglichen Problems mit Hilfe des Impuls-Dictionary. Der dünnbesetzte Lösungsvektor wird auch hier mittels des BPDN-Minimierungsproblems bestimmt:

$$\hat{\mathbf{A}}_I = \arg \min_{\mathbf{A}_I \in \mathbb{R}^N} \left\{ \left\| \mathbf{Y} - \tilde{\mathbf{H}} \mathbf{A}_I \right\|_2^2 + \lambda_1 \left\| \mathbf{A}_I \right\|_1 \right\} \quad (4.22)$$

Da durch Gl. (4.22) nicht mehr der Krafteingang direkt rekonstruiert wird, sondern lediglich der Spitzenwertvektor \mathbf{A}_I , muss dieser auf das Dictionary projiziert werden, um den Kraftverlauf $\hat{\mathbf{U}}$ an allen potentiellen Einleitungspositionen zu bestimmen:

$$\hat{\mathbf{U}} = \tilde{\mathbf{U}}_I \hat{\mathbf{A}}_I \quad (4.23)$$

4.4.1 Simulationsstudien zu Fehlereinflüssen

Die Eigenschaften der Dictionary-basierten Lastidentifikation werden anhand der zuvor bereits verwendeten Balkenstruktur gezeigt. So können die Resultate unmittelbar verglichen werden. Für die ersten Simulationsstudien wird angenommen, dass spezifische Informationen über die Kollisionskörper vorhanden sind. Diese können z.B. aus Voruntersuchungen gewonnen werden. Somit kann die Impulsweite der Ansatzfunktion u_{Δ}^{true} als bekannt angesehen werden und für das Impuls-Dictionary gilt $n_p = 1$. Werden nur drei Beschleunigungssensoren verwendet, ist das Gleichungssystem allerdings weiterhin unterbestimmt. Abb. 4.13 vergleicht die Rekonstruktionsergebnisse mit und ohne Impuls-Dictionary mit der tatsächlichen Impulsbelastung. Im linken Teil der Abbildung wird deutlich, dass eine Impulslastlokalisierung in beiden Fällen möglich ist. Die Rekonstruktion des Kraftverlaufs ist mit Dictionary deutlich besser. Da der Impulsverlauf nun durch mehr Elemente ungleich null abgebildet werden muss, kann das Rekonstruktionsproblem ohne Dictionary nicht mehr so stark regularisiert werden und somit kann das Optimierungsproblem nicht mehr ganz so effizient gelöst werden. Wird ein Impuls-Dictionary

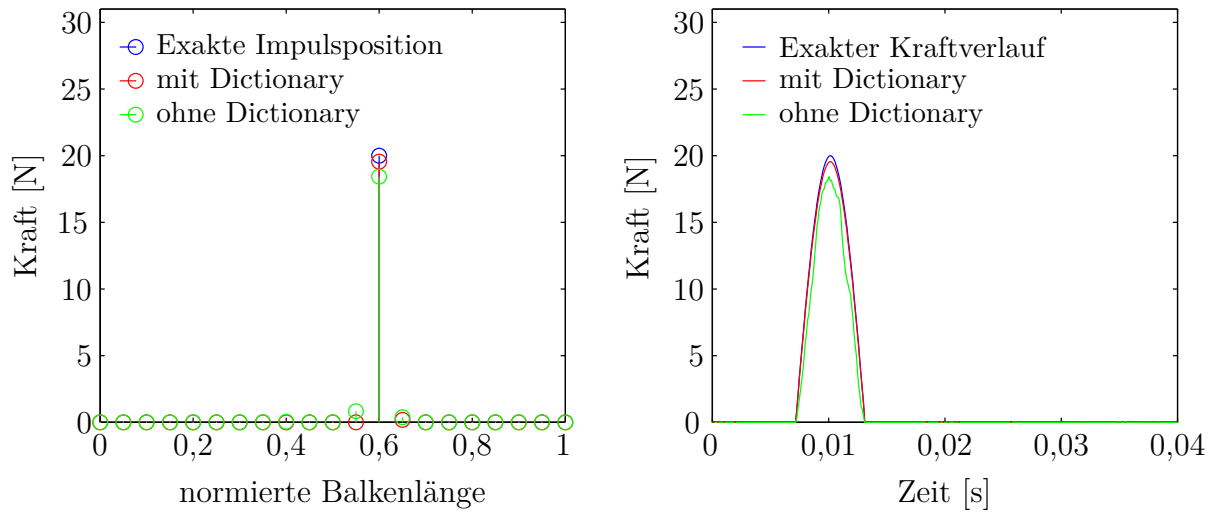


Abbildung 4.13: Vergleich der Impulsrekonstruktion unter Verwendung eines Dictionary und ohne Dictionary (links: Impulslokalisationsergebnis, rechts: Gegenüberstellung des Kraftverlaufs)

verwendet, ist die Anzahl der Elemente im Lösungsvektor weiterhin äußerst gering, wodurch die Stabilität der dünnbesetzten Lösungsverfahren erhöht werden kann.

Liegen keine Informationen über die Eigenschaften der kollidierenden Körper vor, müssen entweder plausible Annahmen getroffen werden oder eine Vielzahl an möglichen Impulsbreiten ins Dictionary aufgenommen werden. Rekonstruktionsfehler aufgrund falscher Annahmen der Impulsweite u_{Δ} sind in Abb. 4.14 dargestellt. Die Abweichung u_{Δ}^{diff} zwischen tatsächlicher Impulsweite u_{Δ}^{true} und im Dictionary verwendeter Impulsweite u_{Δ}^{used} ist definiert als:

$$u_{\Delta}^{\text{diff}} = \frac{|u_{\Delta}^{\text{used}} - u_{\Delta}^{\text{true}}|}{u_{\Delta}^{\text{true}}} \quad (4.24)$$

Der Rekonstruktionsfehler des Kraftverlaufs (RFKV) berechnet sich aus dem tatsächlichen Verlauf $\mathbf{u}^{j^*} \in \mathbb{R}^{n_k}$ und dem rekonstruierten Verlauf $\hat{\mathbf{u}}^{j^*} \in \mathbb{R}^{n_k}$ an der Einleitungsposition j^* aus:

$$\text{RFKV} := \sqrt{\frac{\|\mathbf{u}^{j^*} - \hat{\mathbf{u}}^{j^*}\|_2^2}{\|\mathbf{u}^{j^*}\|_2^2}} \quad (4.25)$$

Hier ist $\hat{\mathbf{u}}^{j^*}$ die j^* -te Spalte der in Gl. (4.23) berechneten gesamten Krafteingangsmatrix $\hat{\mathbf{U}}$.

Da häufig der Spitzenwert der Impulsbelastung für eine weiterführende Schadensbeurteilung von größerem Interesse ist, als geringfügige Unterschiede des Kraftverlaufs,

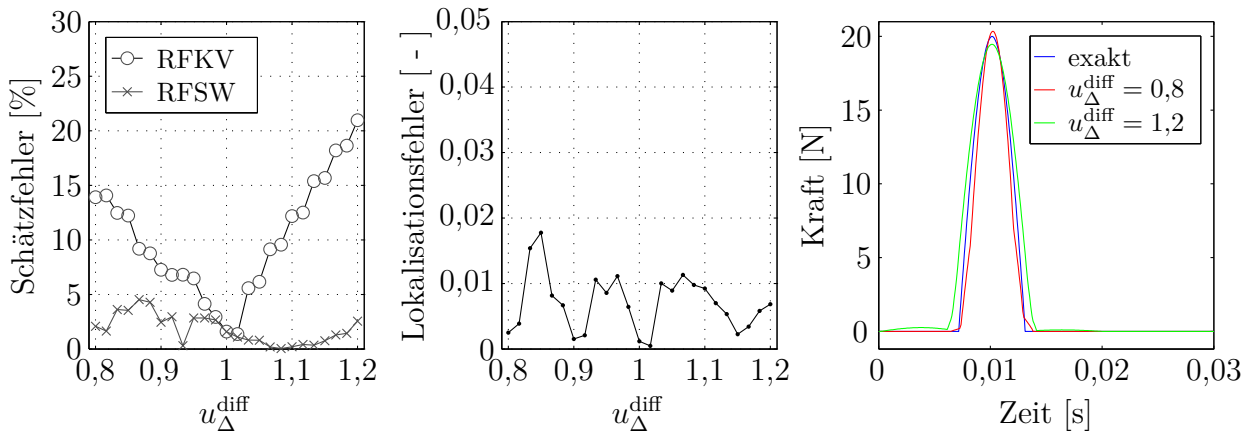


Abbildung 4.14: Abweichungen aufgrund fehlerhafter Impulsweiten; Links: Schätzfehler der Belastungsgröße, Mitte: Lokalisationsfehler, Rechts: Vergleich des zeitlichen Verlaufs

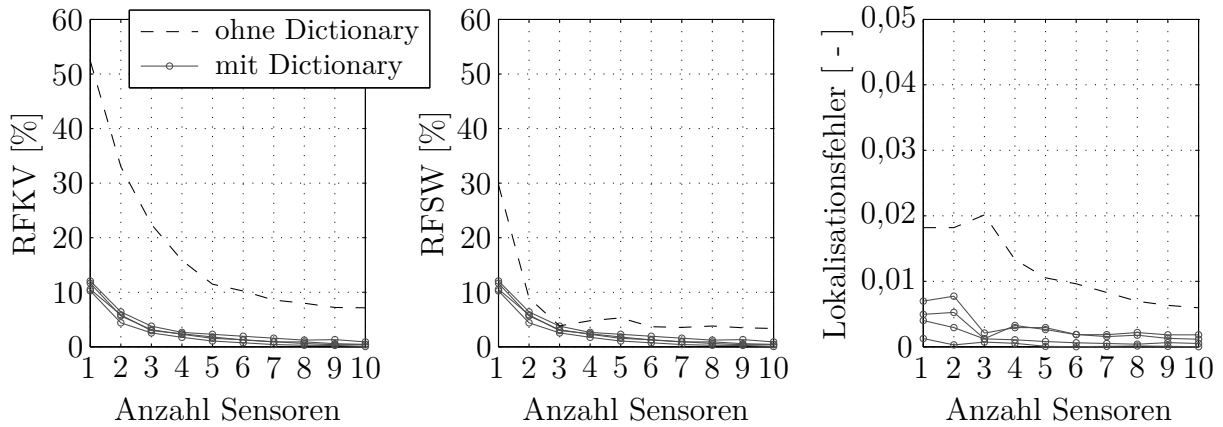


Abbildung 4.15: Rekonstruktionsfehler bei steigender Sensoranzahl für diverse Anregungspositionen; Referenzwerte ohne Impuls-Dictionary als gestrichelte Linie gekennzeichnet

werden zusätzlich die Rekonstruktionsfehler des Spitzenwerts (RFSW) angegeben:

$$\text{RFSW} := \frac{|a_{l^*,p^*}^{j^*} - \hat{a}_{l^*,p^*}^{j^*}|}{|a_{l^*,p^*}^{j^*}|} \quad (4.26)$$

Der rechte Teil von Abb. 4.14 zeigt den rekonstruierten Kraftverlauf für eine Abweichung der verwendeten Impulsweite von $\pm 20\%$. Die Kraftspitze kann in beiden Fällen mit einem Fehler von unter 5% identifiziert werden. Die Fehler des Kraftverlaufs (RFKV) sind durch den unterschiedlichen Anstieg der Impulsflanken deutlich größer. Diese Eigenschaft wird auch im linken Teil von Abb. 4.14 verdeutlicht. Die Lokalisation ist unabhängig vom geschätzten Kraftverlauf sehr zuverlässig und die Lokalisationsfehler in jedem Fall geringer als der Abstand der Krafteinleitungspunkte. Die Erkenntnisse aus Abb. 4.14 können für

eine geeignete Diskretisierung der Impulsweiten (siehe Gl. (4.13)) herangezogen werden.

Abb. 4.15 zeigt die Rekonstruktionsfehler für eine steigende Anzahl an Sensoren. Wie zuvor wurden die Sensoren entsprechend Tab. 4.1 positioniert. Das Impuls-Dictionary wurde nun aus Impulsen mit verschiedenen Impulsweiten ($n_p = 20$) zusammengesetzt. Für die Dictionary-basierte Rekonstruktion sind die Fehler für diverse Anregungspositionen entlang der Balkenachse angegeben. Es zeigt sich, dass die Fehler für alle Anregungspositionen ähnlich groß sind und mit steigender Sensoranzahl geringer werden. Die gestrichelte Linie dient als Referenz. Sie stellt die gemittelten Fehler für dieselben Einleitungspositionen dar, falls kein Impuls-Dictionary verwendet wird. Es wird deutlich, dass durch die Verwendung eines Impulslast-Dictionary alle Fehler signifikant reduziert werden.

Da es sich bei den vorgestellten Rekonstruktionsverfahren um modellbasierte Methoden handelt, ist ein Einfluss durch Modellfehler auf das Identifikationsresultat zu erwarten. In Abb. 4.16 sind die entstehenden Rekonstruktionsfehler gezeigt, falls Strukturmodell und tatsächliche Struktur nicht identisch sind. Der Modellfehler wird durch eine globale Änderung des Elastizitätsmoduls beschrieben. Gl. (A.4) im Anhang zeigt den Zusammenhang zwischen Elastizitätsmodul und Balkeneigenfrequenzen. Wie im Gegensatz dazu lokale Modellfehler berücksichtigt werden können und das Kraftrekonstruktionsergebnis beeinflussen, wird in Abschnitt 6.3 genauer beschrieben.

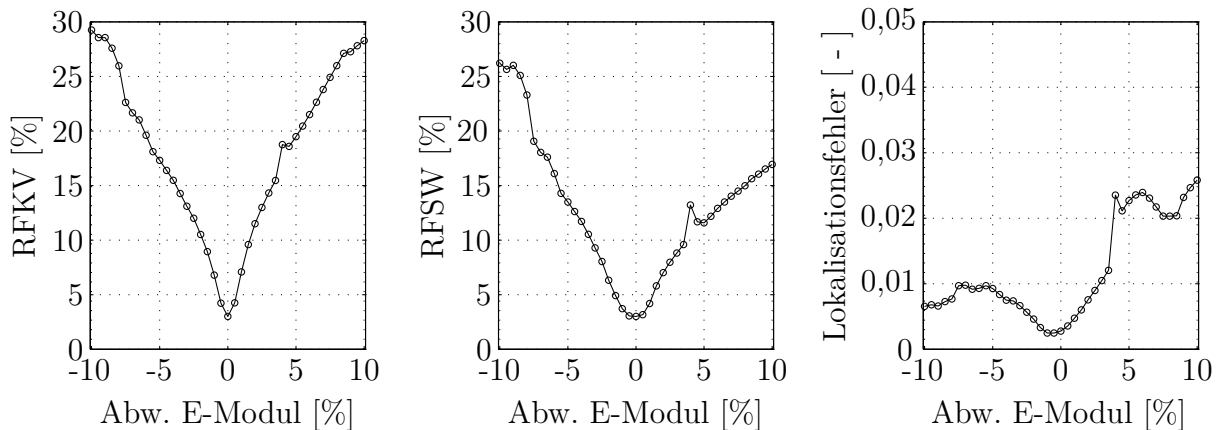


Abbildung 4.16: Einfluss von Modellfehlern in Form von Abweichungen des Elastizitätsmoduls auf die Rekonstruktionsgenauigkeit

Hier werden zur Impulsidentifikation wieder lediglich drei Beschleunigungssensoren verwendet. Die Ergebnisse in Abb. 4.16 zeigen, dass trotzdem eine zuverlässige Lokalisierung erfolgen kann. Was die Identifikation des Kraftverlaufs und des Spitzenwertes betrifft,

tenpunkte ausgewählt (Knoten-Nr. 43, 45, 62 und 106). An diesen Positionen werden die Beschleunigungssignale senkrecht zur Platte bestimmt. Ist jeder Knotenpunkt eine potentielle Krafteinleitungsposition gilt $n_f = 144$ und $n_r = 4$ und somit $n_r \ll n_f$.

Für eine Anwendung unter realen Betriebsbedingungen, sind neben dem geeigneten Strukturmodell und Sensorsetup auch die passenden Mess- und Datenverarbeitungskonzepte wichtige Faktoren. Wie u.a. in [Klinkov, 2011] beschrieben, kann zwischen passiven oder aktiven Konzepten unterschieden werden. Beide Konzepte können mit Hilfe der gezeigten Lösungsstrategien realisiert werden.

4.5.1 Passives Identifikationskonzept

Bei passiven Konzepten wird eine Messung und die anschließende Datenverarbeitung erst durch ein Impulsereignis initialisiert. Zuvor befindet sich das Sensorsystem in einem Standby- bzw. Beobachtungsmodus. Ein *Trigger*-Signal startet eine Messung und die aufgezeichneten Daten werden anschließend verarbeitet. Ein solches Trigger-Signal wird hier durch die Überschreitung eines Beschleunigungsgrenzwerts definiert. Der Grenzwert sollte aufgrund von Messrauschen und Betriebsschwingungen nicht zu gering gewählt werden, um so ein vorzeitiges Triggern zu verhindern. Ein höherer Grenzwert führt allerdings zu einem verspäteten Messbeginn, sodass eine gewisse Zeitspanne vor dem Trigger-Signal in der Datenauswertung berücksichtigt werden sollte. Dies wird als Pre-Trigger-Messung bezeichnet. Etabliert hat sich ein Grenzwert, welcher dem fünffachen der Standardabweichung des Messrauschens σ entspricht [Klinkov, 2011].

Besonders für passive Identifikationskonzepte sollte unter Betriebsbedingungen beachtet werden, dass für viele Systeme die mechanischen Anfangsbedingungen \mathbf{z}_0 nicht vollständig bekannt sind bzw. die Strukturen nicht aus einer perfekten Ruhelage ausgelenkt werden. Meist sind die Strukturen zusätzlich von unbekanntem Betriebsschwingungen beeinflusst. Abb. 4.18 stellt die Rekonstruktionsergebnisse für ein solches passives Identifikationskonzept dar. Es werden die Fehler gezeigt, die entstehen, falls die Anfangsbedingungen nicht exakt bekannt sind. Im linken Teil sind die Identifikationsfehler über eine relative Abweichung der Anfangsbedingungen aufgetragen. Es ist zu erkennen, dass der Fehler des Spitzenwerts der Impulslast bei einer größeren Abweichung der Anfangsbedingungen deutlich ansteigt. Allerdings konnten für alle in dieser Untersuchung durchgeführten Impulslastrekonstruktionen die Anregungsknoten zuverlässig lokalisiert werden. Im rechten Teil der Abbildung ist exemplarisch der rekonstruierte Kraftverlauf

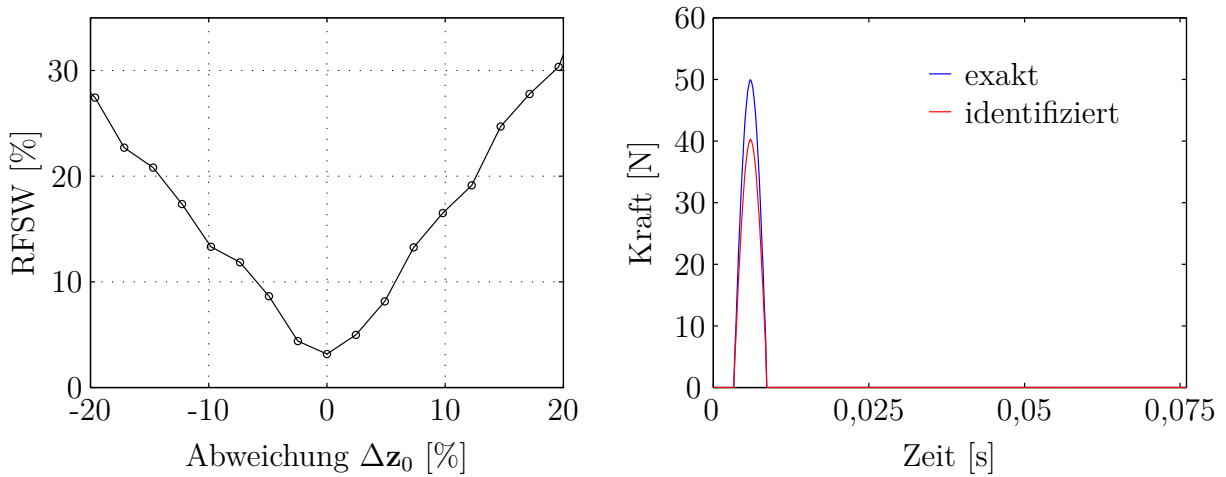


Abbildung 4.18: Einfluss von Abweichungen der Anfangsbedingungen (links); Exemplarisches Identifikationsergebnis für eine Abweichung von 12,25% (rechts)

für eine Abweichung der Anfangsbedingungen von 12,25% dargestellt.

4.5.2 Moving-Window Identifikation

Im Gegensatz zu passiven Konzepten zeichnen aktive Mess- und Datenverarbeitungskonzepte die Messdaten permanent auf und verarbeiten diese anschließend unmittelbar. Realisiert wird ein solches Überwachungskonzept hier mit Hilfe eines gleitenden Zeitfensters (engl. Moving-Window) der Länge n_k^* über den Überwachungszeitraum der Gesamtlänge n_k . Die Last wird dann für jedes Fenster mit Hilfe der gezeigten dünnbesetzten Lösungsstrategien bestimmt.

Da für jedes Fenster die Anfangsbedingungen stark unterschiedlich sein können, empfiehlt es sich die Systemzustände \mathbf{z}_k parallel mit Hilfe des Kalman-Filters zu schätzen. Die geschätzten Zustände $\hat{\mathbf{z}}_{n_k^*}$ am Ende jedes Fensters lassen sich so als Anfangsbedingungen $\hat{\mathbf{z}}_0$ des neuen Zeitfensters in den Rekonstruktionsprozess integrieren. Als Eingangsgrößen für das Kalman-Filter werden, neben den Beschleunigungsmesswerten $\mathbf{Y}_{i_n} = [\mathbf{y}_{i_n}, \dots, \mathbf{y}_{i_n+n_k^*}]$ eines Fensters, auch der rekonstruierte Kraftverlauf des vorherigen Fensters $\hat{\mathbf{U}}_{i_{n-1}}$ benötigt. Mit Hilfe der Systemmatrix \mathbf{A}_d und der Messmatrix \mathbf{C}_y der Zustandsraumbeschreibung können Anfangsbedingungen, welche von der Ruhelage $\mathbf{z}_0 = \mathbf{0}$ abweichen, in der Systembeschreibung aus Gl. (4.2) berücksichtigt werden:

$$\mathbf{y}_k - \mathbf{C}_y \mathbf{A}_d^k \hat{\mathbf{z}}_0 = \sum_{i=0}^k \mathbf{h}_i \mathbf{u}_{k-i} \quad (4.27)$$

In Vektor-Matrix-Schreibweise wird Gl. (4.27) zu:

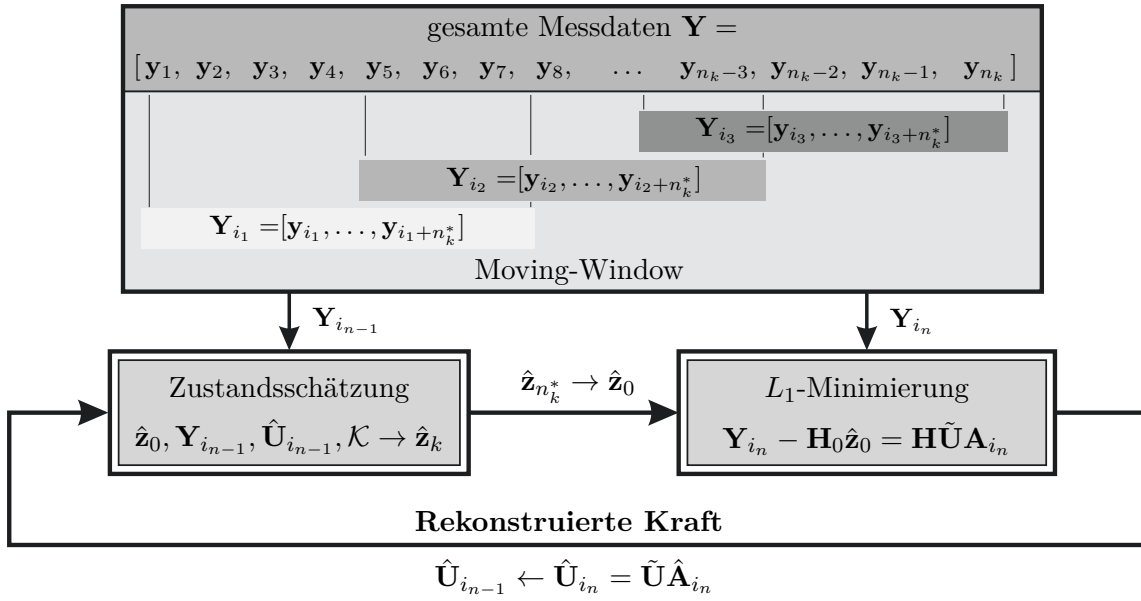


Abbildung 4.19: Schematische Darstellung einer aktiven und kontinuierlichen Lastrekonstruktion

$$\mathbf{Y}_{i_n} - \mathbf{H}_0 \hat{\mathbf{z}}_0 = \mathbf{H} \cdot \mathbf{U}_{i_n} \quad (4.28)$$

Nachdem die Messdaten vom Einfluss der Anfangsbedingungen bereinigt wurden, kann das Gleichungssystem wie zuvor nach \mathbf{U} aufgelöst werden. Die Matrix $\mathbf{H}_0 \in \mathbb{R}^{n_r \cdot n_k^* \times n_d}$ ist dabei definiert als:

$$\mathbf{H}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_y \mathbf{A}_d^0 \\ \mathbf{C}_y \mathbf{A}_d^1 \\ \vdots \\ \mathbf{C}_y \mathbf{A}_d^{n_k^*} \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

Die Verwendung eines Dictionary $\tilde{\mathbf{U}}$ führt dazu, dass Gl. (4.28) zu

$$\mathbf{Y}_{i_n} - \mathbf{H}_0 \hat{\mathbf{z}}_0 = \mathbf{H} \cdot \tilde{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{A}_{i_n} \quad (4.30)$$

wird und das Gleichungssystem nach dem Vektor \mathbf{A} aufgelöst werden kann. In Abb. 4.19 ist der schematische Ablauf einer solchen Rekonstruktionsstrategie dargestellt.

Abb. 4.20 stellt die so erhaltenen Rekonstruktionsergebnisse dar. In dieser Simulationsstudie wurden an verschiedenen Knotenpositionen der Aluminiumplatte Impulslasten aufgebracht. Im rechten Teil der Abbildung zeigt sich, dass mit diesem aktiven Identifikationskonzept auch mehrfache Impulsereignisse über einen längeren Zeitraum rekonstruiert werden können.

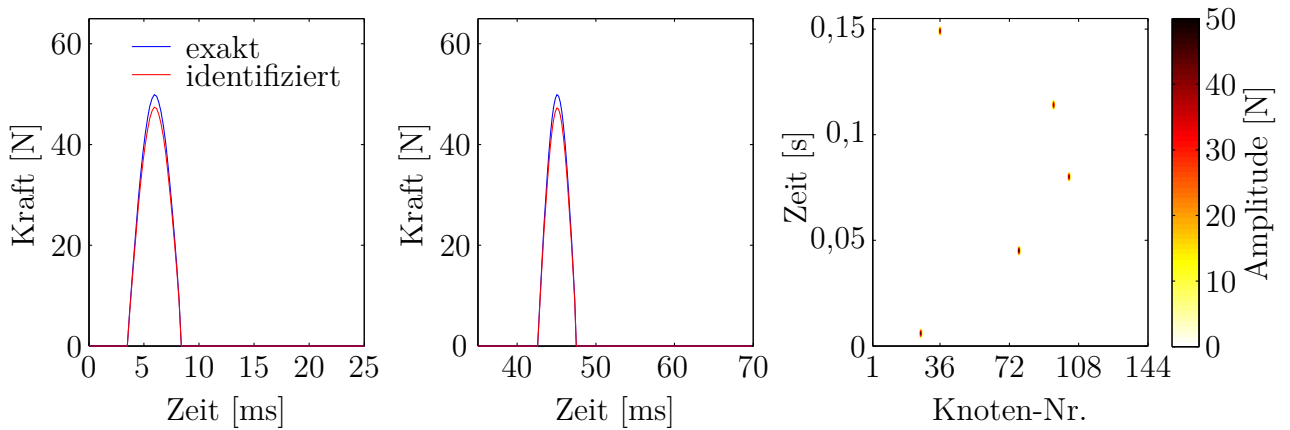


Abbildung 4.20: Moving-Window Lastrekonstruktion; Links und Mitte: Rekonstruierter Kraftverlauf der Impulslast, Rechts: Gesamter Krafteingang

4.6 Identifikation anderer Belastungsarten

Prinzipiell können alle Vorkenntnisse einer Lastcharakteristik genutzt werden, um ein Last-Dictionary zu erstellen. Daher ist es möglich, auch andere Belastungszustände oder Kombinationen verschiedener Belastungen mit dem hergeleiteten Rekonstruktionsverfahren zu identifizieren. Die Vorkenntnisse können die Last sowohl in ihrer räumlichen Ausdehnung, als auch in ihrem zeitlichen Verlauf charakterisieren. Je genauer die Vorkenntnisse sind, desto präziser kann ein entsprechendes Dictionary erzeugt werden.

Im Folgenden soll das Vorgehen am Beispiel von harmonischen Lasten genauer beschrieben werden. Eine harmonische Anregung an der Anregungsposition j lässt sich durch

$$w^j(t) = a_h \cdot \cos(\omega_u t + \varphi) = a_c \cdot \cos(\omega_u t) + a_s \cdot \sin(\omega_u t) \quad (4.31)$$

beschreiben. Somit wird die harmonische Anregung vollständig durch ihre Amplitude a_h , die Frequenz $f_u = \omega_u / (2\pi)$ und ihre Phasenverschiebung φ definiert. Alternativ zur Phasenverschiebung kann auch die Darstellung mit Hilfe der Amplituden a_c und a_s verwendet werden. Ähnlich wie schon zuvor für Impulslasten gezeigt, wird nun ein Dictionary $\tilde{\mathbf{U}}_H$ für harmonische Lasten mit entsprechendem Amplitudenvektor \mathbf{A}_H erstellt:

$$\tilde{\mathbf{U}}_H = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{U}}_{HC} & \tilde{\mathbf{U}}_{HS} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{A}_H = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{HC}^T & \mathbf{A}_{HS}^T \end{bmatrix}^T \quad (4.32)$$

Die Matrizen $\tilde{\mathbf{U}}_{HC}$ und $\tilde{\mathbf{U}}_{HS}$ enthalten normierte Kosinus bzw. Sinus Kraftverläufe verschiedener Kreisfrequenzen $\omega_u \in [\omega_u^{\min}, \omega_u^{\max}]$ für alle potentiellen Anregungspositionen.

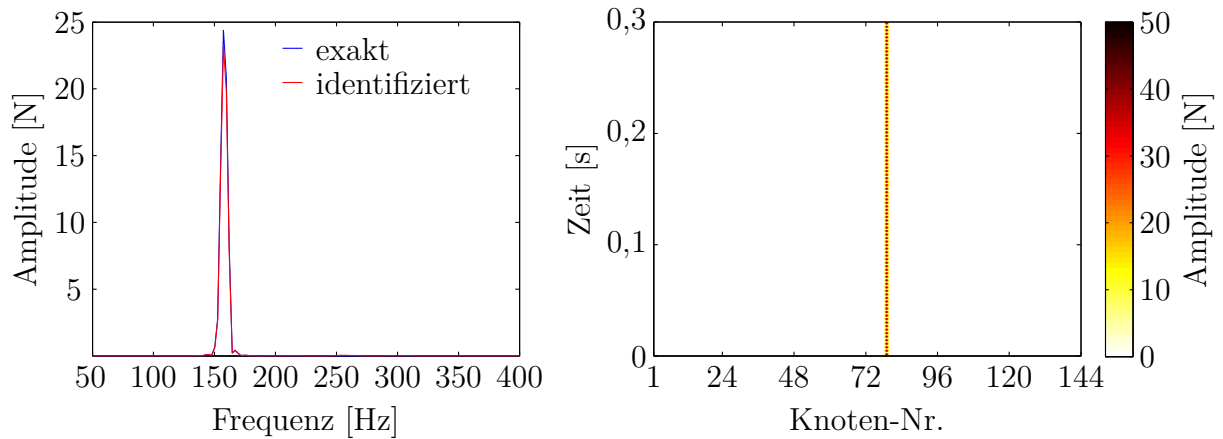


Abbildung 4.21: Identifikation harmonischer Belastungen; Links: Vergleich des Frequenzspektrums, Rechts: Identifizierter Kraftverlauf für alle Anregungspositionen

Die Diskretisierung des Frequenzintervalls $[\omega_u^{\min}, \omega_u^{\max}]$ und damit die Frequenzauflösung $\Delta\omega_u$ ist von der Länge n_k des verwendeten Messsignals und der Abtastzeit Δt abhängig:

$$\Delta\omega_u = \frac{1}{n_k} \frac{2\pi}{\Delta t} \quad (4.33)$$

Dieser Zusammenhang ist auch schon von der diskreten Fourier-Transformation bekannt. Allerdings kann die Frequenzauflösung für die Kraftrekonstruktion auch meist deutlich größer gewählt werden, als es die Messdauer n_k zulassen würde. So kann die Spaltenanzahl des Gleichungssystems und somit die Rechenzeit reduziert werden. Für eine äquidistante Intervallteilung gilt dann:

$$\omega_u = \omega_u^{\min} + (q - 1) \Delta\omega_u \quad \text{mit} \quad q = 1, 2, \dots, n_\omega \quad (4.34)$$

Die entstandene Dictionary-Matrix $\tilde{\mathbf{U}}_H \in \mathbb{R}^{n_f \cdot n_k \times 2 \cdot n_f \cdot n_\omega}$ kann auch als inverse Fourier-Transformationsmatrix interpretiert werden. Durch das Dictionary der harmonischen Kräfte wird das inverse Kraftrekonstruktionsproblem zu:

$$\mathbf{Y} = \tilde{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{A}_H \quad \text{mit} \quad \tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{H} \cdot \tilde{\mathbf{U}}_H \quad (4.35)$$

Sind nur einige wenige Frequenzen im Anregungssignal dominant, ist \mathbf{A}_H ein dünnbesetzter Vektor, sodass die Lösung des Gleichungssystems mit Hilfe des BPDN-Problems generiert werden kann.

In Abb. 4.21 ist ein exemplarisches Rekonstruktionsergebnis dargestellt. Die betrachtete Struktur ist die schon zuvor genutzte quadratische Platte mit lediglich vier Beschleunigungssensoren. Die Platte wurde an Knotenposition-Nr. 79 mit einer Frequenz von

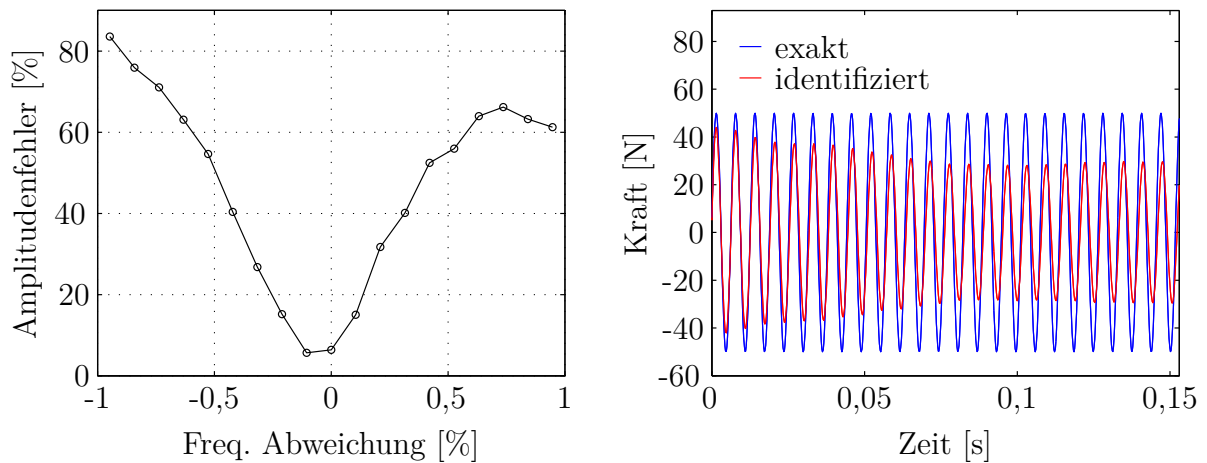


Abbildung 4.22: Einfluss der Frequenzauflösung auf das Rekonstruktionsergebnis (links); Rekonstruktionsergebnis für eine Abweichung von Dictionary-Frequenz und tatsächlicher Anregung von 0,38% (rechts)

158 Hz angeregt. Im rechten Teil der Abbildung ist zu erkennen, dass die Anregungsposition lokalisiert werden konnte. Die identifizierten Kräfte an anderen Knotenpositionen sind null bzw. vernachlässigbar klein. Der Vergleich des Spektrums zeigt, dass auch die Anregungsfrequenz identifiziert wurde.

Abb. 4.22 zeigt den Einfluss der Frequenzauflösung auf das Rekonstruktionsergebnis. Im rechten Teil ist beispielhaft ein rekonstruierter Kraftverlauf dargestellt. Tatsächlich wurde die Struktur wieder mit einer Frequenz von 158 Hz harmonisch angeregt. Die Frequenzauflösung des Dictionary beträgt 3,16 Hz, was einer maximal möglichen Abweichung von 1% entspricht. Im linken Teil ist der im Frequenzspektrum ermittelte Rekonstruktionsfehler für verschiedene Abweichungen zwischen tatsächlicher Anregungsfrequenz und der geeignetsten Dictionary-Frequenz dargestellt. Hier sind teilweise Rekonstruktionsfehler über 80% im Amplitudenspektrum zu erkennen. Zur Fehlerreduktion kann entweder die Auflösung des Frequenz-Dictionary verfeinert werden, oder wie in Abschnitt 4.7 beschrieben, ein zweistufiges Rekonstruktionsverfahren verwendet werden.

Last-Dictionaries verschiedener Belastungsarten können auch kombiniert werden. So ist es möglich, auch komplexere Belastungszustände mit Hilfe dünnbesetzter Lösungsstrategien zu identifizieren. Beispielhaft soll ein Impuls-Dictionary mit einem Dictionary für harmonische Lasten verknüpft werden:

$$\tilde{\mathbf{U}}_G = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{U}}_I & \tilde{\mathbf{U}}_H \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{A}_G = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_I^T & \mathbf{A}_H^T \end{bmatrix}^T \quad (4.36)$$

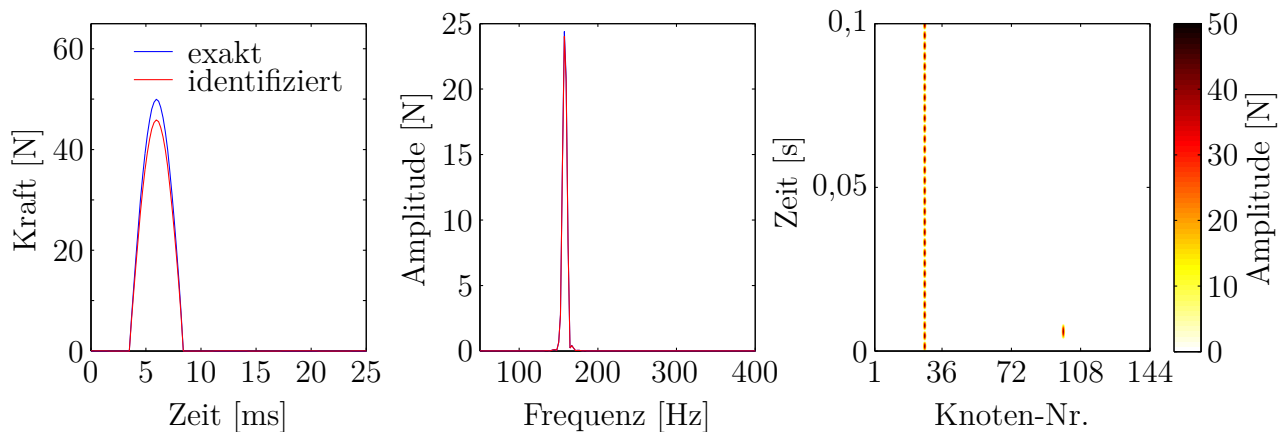


Abbildung 4.23: Kombinierte Lastrekonstruktion; Links: Kraftverlauf der Impulslast, Mitte: Spektrum der harmonischen Anregung, Rechts: Gesamter Krafteingang

Das Gesamt-Dictionary $\tilde{\mathbf{U}}_G$ setzt sich aus den Spalten der Dictionaries beider Belastungsarten zusammen. Der Amplituden- bzw. Spitzenwertvektor \mathbf{A}_G wird analog gebildet.

Abb. 4.23 zeigt die Rekonstruktionsergebnisse. Die Platte wurde an Knoten-Nr. 27 durch eine harmonische Kraft und an Knoten-Nr. 99 durch eine Impulslast angeregt. Es ist zu erkennen, dass sowohl die Impulslast als auch die harmonische Anregung lokalisiert und quantifiziert werden konnte.

4.7 Zweistufiges Identifikationsverfahren

Die gezeigten Untersuchungen zur Kraftrekonstruktion machen deutlich, dass eine simultane Kraftlokalisierung und Kraftquantifizierung mittels dünnbesetzter Lösungsstrategien möglich ist. Es konnte gezeigt werden, dass besonders die Lokalisation anhand von nur sehr wenigen tieffrequenten Schwingungsantworten robust gegenüber Fehlereinflüssen ist. Die Rekonstruktion des Kraftverlaufs hingegen ist teilweise mehr oder weniger großen Abweichungen unterworfen. Kritisch hierbei ist die Tatsache, dass die Kräfte meist betragsmäßig unterschätzt werden, da bei hohem Messrauschen oder größeren Modellfehlern der L_1 -Regularisierungsterm stärker betont werden muss. Werden diese unterschätzten Lasten zur Schadensdetektion oder Lebensdauervorhersage herangezogen, kann dies unter Umständen fatale Folgen haben.

Sind allerdings die Krafteinleitungspositionen in einem ersten Schritt zuverlässig ermittelt worden, kann das ursprüngliche Gleichungssystem stark vereinfacht werden und der Kraftverlauf in einem zweiten Schritt erneut bestimmt werden. Bei den gezeigten

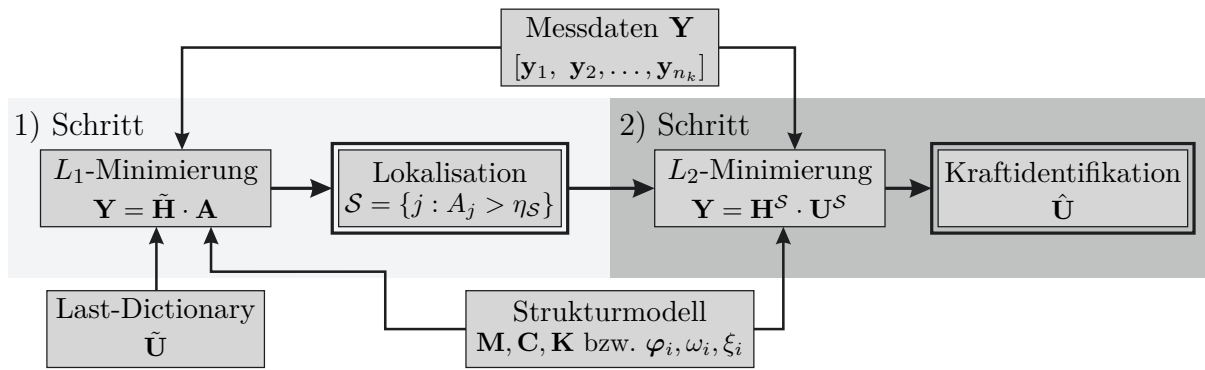


Abbildung 4.24: Schematische Darstellung der zweistufigen Lastrekonstruktion

Rekonstruktionsverfahren entspricht eine Lokalisation der Bestimmung des Vektorsupports \mathcal{S} des Lösungsvektors \mathbf{U} bzw. \mathbf{A} :

$$\mathcal{S} = \{j : A_j > \eta_S\} \quad (4.37)$$

Der Vektorsupport \mathcal{S} ist hier durch die dominanten Elemente des Lösungsvektors gekennzeichnet. Alle Einträge unterhalb eines Grenzwertes η_S finden keine Berücksichtigung. Der Grenzwert kann, ähnlich wie bei der Resultierendenbildung in Abschnitt 4.3.1, entweder mittels Soft-Thresholding Klassifikationsverfahren (z.B. k -Means Clustering) automatisch definiert oder durch Voruntersuchungen bestimmt werden.

Ist der Vektorsupport bzw. die Anregungsposition identifiziert, kann das unterbestimmte Gleichungssystem reduziert werden und lediglich die Spalten aus dem ursprünglichen Gleichungssystem (4.3) beibehalten werden, welche zum Vektorsupport gehören. Es entsteht eine neue Matrix $\mathbf{H}^{\mathcal{S}} \in \mathbb{R}^{n_r \cdot n_k \times n_s \cdot n_k}$, sodass für das reduzierte Gleichungssystem gilt:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{H}^{\mathcal{S}} \mathbf{U}^{\mathcal{S}} \quad (4.38)$$

$\mathbf{U}^{\mathcal{S}} \in \mathbb{R}^{n_s \cdot n_k}$ gibt nun direkt den Kraftverlauf an den Anregungspositionen wieder. Zur Verlaufsrekonstruktion wird also hier auf die Verwendung von Dictionaries verzichtet. Ist die Anzahl der Sensoren n_r größer als die Anzahl der bestimmten Anregungspositionen $n_s = |\mathcal{S}|$, liegt ein (über-) bestimmtes Gleichungssystem vor und es können zur Bestimmung des Kraftverlaufs $\mathbf{U}^{\mathcal{S}}$, an den nun bekannten Anregungspositionen, konventionelle Gleichungslöser eingesetzt werden (siehe z.B. [Klinkov, 2011]). In Abb. 4.24 ist die Rekonstruktionsstrategie einer zweistufigen Lastidentifikation schematisch dargestellt.

Abb. 4.25 zeigt deutlich die Verbesserungen, welche durch eine nachträgliche Betragschätzung erzielt werden können. Die Platte aus Abb. 4.17 wurde auch hier mit einer har-

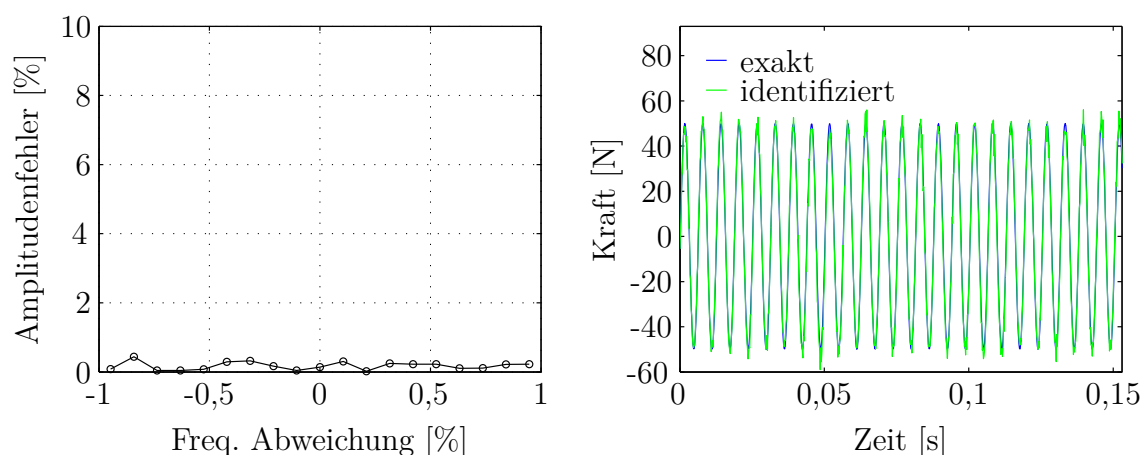


Abbildung 4.25: Ergebnisse des zweistufigen Rekonstruktionsverfahrens; Links: Dictionary-Fehler haben keinen Einfluss auf Kraftverlaufsidentifikation, Rechts: Rekonstruierter Kraftverlauf für zuvor ermittelte Anregungsposition

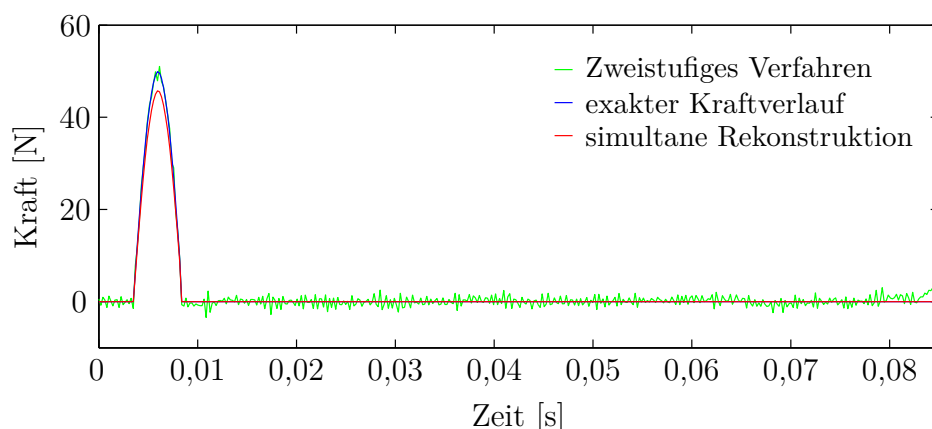


Abbildung 4.26: Vergleich von simultaner Impulslokalisierung und Kraftverlaufsrekonstruktion mit zweistufigem Verfahren

monischen Kraft von 158 Hz angeregt. Im linken Teil von Abb. 4.25 ist zu erkennen, dass die Fehler im Dictionary nun keinen Einfluss mehr auf die Betragsschätzung haben, da dieses nur zur Lokalisation verwendet wurde. Das überbestimmte Gleichungssystem aus Gl. (4.38) wurde im zweiten Schritt mittels Tikhonov-Regularisierung gelöst. Im rechten Teil von Abb. 4.25 ist exemplarisch der identifizierte Kraftverlauf und die tatsächliche harmonische Anregung gegenübergestellt.

Abb. 4.26 zeigt, dass auch für die Impulslastrekonstruktion eine verbesserte Schätzung des Maximalwerts möglich ist. Es wird allerdings auch deutlich, dass für die Tikhonov-Regularisierung eine bessere Schätzung des Maximalwerts mit einer schlechteren Rauschunterdrückung einhergeht.

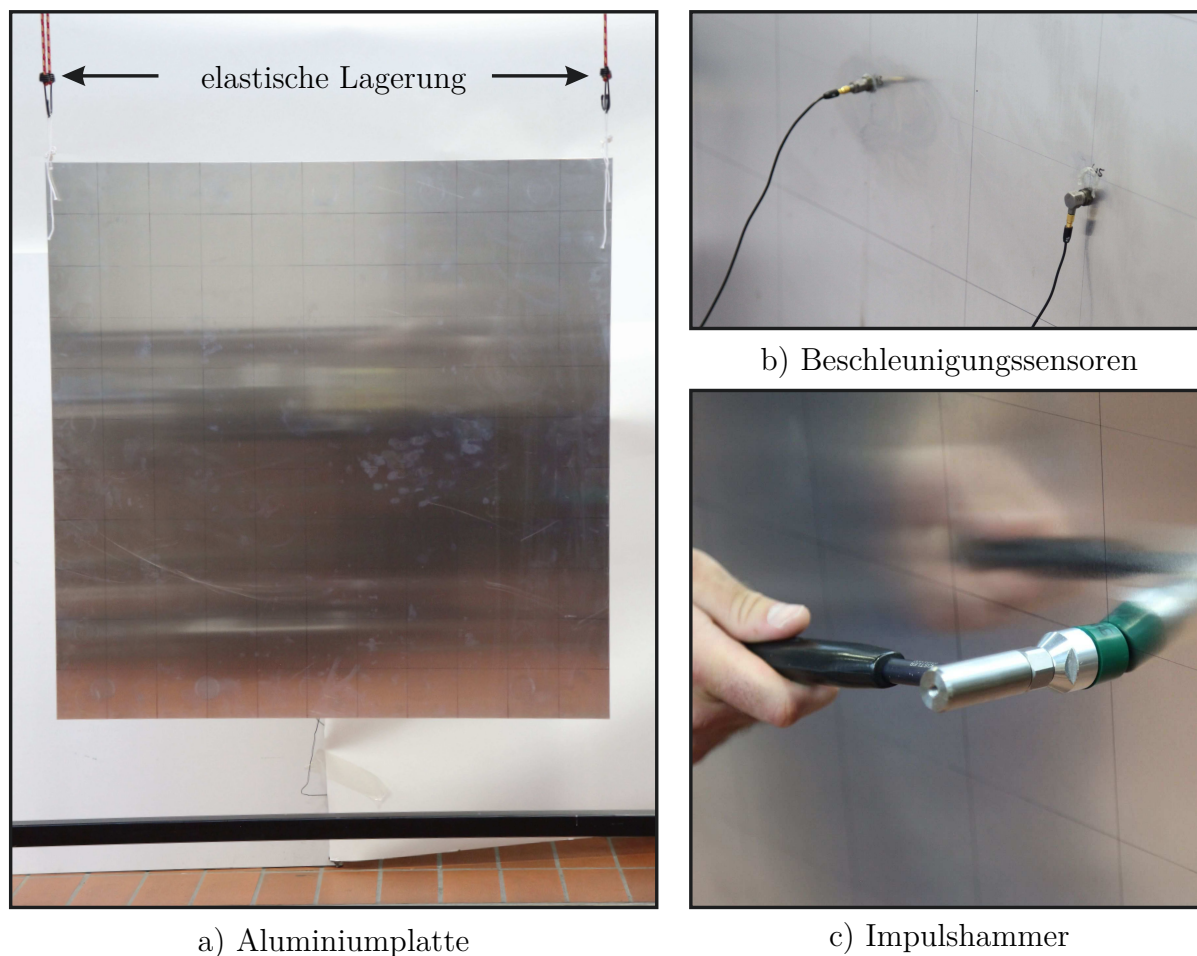


Abbildung 4.27: Experimentelle Validierung an Aluminiumplatte; a) Betrachtete Plattenstruktur, b) Piezoelektrische Beschleunigungssensoren appliziert auf Plattenrückseite, c) Impulsanregung mittels Impulshammer auf Vorderseite

4.8 Experimentelle Validierung

Zur Validierung wird ein experimenteller Versuchsstand analog zur Plattenstruktur der Simulationsstudien betrachtet. Dieser Versuchsstand wird im weiteren Verlauf der Arbeit mehrfach zur Validierung diverser Überwachungsalgorithmen betrachtet. Abb. 4.27 a) zeigt die quadratische Aluminiumplatte mit einer Kantenlänge von 1 m und einer Plattendicke von 2 mm. Durch die elastische Aufhängung der Platte können die Randbedingungen einer freien Platte sehr präzise nachgebildet werden. Das zur Rekonstruktion notwendige Strukturmodell, ist identisch mit dem bereits zuvor genutzten FE-Modell. Um den Abgleich der jeweiligen Sensor- und Anregungspositionen zwischen Modell und realer Struktur zu vereinfachen, wird das Modellgitter aus Abb. 4.17 auf die Platte übertragen. Vier piezoelektrische Beschleunigungssensoren werden auf der Plattenrückseite an den in

Abb. 4.28 gezeigten Positionen angebracht (siehe auch Abb. 4.27 b)). Diese Positionen sind identisch mit den Knoten-Nr. 43, 45, 62 und 106. Die Abtastrate zur Datenaufzeichnung beträgt 1 kHz. Für alle gezeigten experimentellen Untersuchungen werden die Daten mit einem analogen 100 Hz-Tiefpassfilter gefiltert, bevor sie digitalisiert und verarbeitet werden.

Die Platte wird durch einen Impulshammer mit verschiedenen Hartgummispitzen angeregt (siehe Abb. 4.27 c)). Je nach Spitze können Frequenzen von maximal 300 Hz bis 600 Hz angeregt werden. Da der Impulshammer einen eingebauten Kraftsensor besitzt, kann später die gemessene Kraft mit der rekonstruierten Kraft verglichen werden.

Abb. 4.28 zeigt drei exemplarische Rekonstruktionsergebnisse. Bei allen Versuchen wird der Impuls an einer beliebigen Plattenposition aufgebracht. Im Unterschied zur Simulation können im Experiment Impulslasten an jeder Position der Platte eingeleitet werden und nicht nur an Modellfreiheitsgraden. Wird ein Impuls innerhalb eines Elements eingeleitet, identifizieren die L_1 -minimierenden Lösungsverfahren eine Kräfteinleitung an den vier Knoten des jeweiligen Elements. Ein Element hat bei der genutzten Diskretisierung eine Größe von $9,09 \text{ cm} \times 9,09 \text{ cm}$. Analog zur Impulslastlokalisierung unter Verwendung der analytischen Balkenstruktur in Abschnitt 4.3.1, werden die vier rekonstruierten Kräfte zu einer Resultierenden zusammengefasst.

Der Vergleich zwischen Dictionary-basierter Rekonstruktion und Rekonstruktion ohne Impuls-Dictionary zeigt im rechten Teil von Abb. 4.28, dass in beiden Fällen der Einleitungsort zuverlässig lokalisiert werden kann. Der maximale Lokalisationsfehler aller Versuche beträgt $2,86 \text{ cm}$. Für eine Bewertung dieses Fehlers, sollte allerdings die Breite der Hammerspitze von 2 cm berücksichtigt werden. Für die Rekonstruktion des Kraftverlaufs ergeben sich hingegen große Unterschiede zwischen Lastrekonstruktion unter Verwendungen eines Dictionary und ohne ein solches Dictionary (siehe linken Teil von Abb. 4.28). Der Spitzenwert der Impulslast kann aber für beide Rekonstruktionsverfahren grob wiedergegeben werden. Die Dictionary-basierte Rekonstruktion führt zu einer sehr präzisen Identifikation des Kraftverlaufs. Der Fehler für die Rekonstruktion des Spitzenwerts der Impulslast bei allen Versuchen beträgt im Mittel $12,25\%$, bei einer Standardabweichung von $6,32\%$ und einem maximalen Fehler von $28,41\%$.

Darüber hinaus kann direkt durch die Analyse des Supports des rekonstruierten Spitzenwertvektors und der zugeordneten Spalten des Impuls-Dictionary, die verwendete Hammerspitze bestimmt werden. Wird beispielsweise eine Spalte für eine sehr kurze zeit-

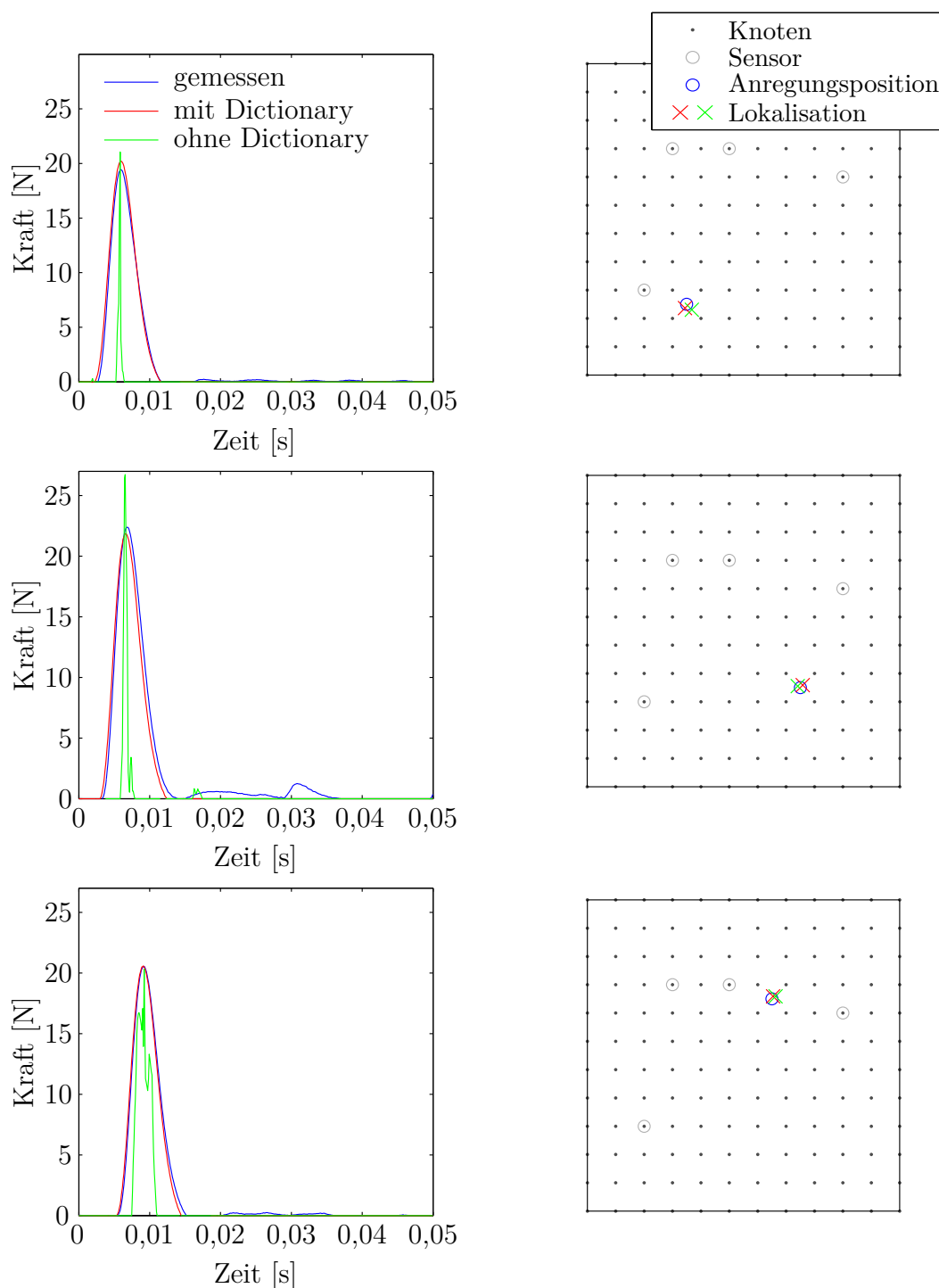


Abbildung 4.28: Experimenteller Vergleich der Lastrekonstruktion mit und ohne Dictionary; Links: Vergleich des Kraftverlaufs, Rechts: Lokalisationsergebnisse

liche Impulsbelastung identifiziert, ist eine harte Hammerspitze zur Anregung verwendet worden. Spalten mit einer längeren Belastungsdauer korrespondieren mit einer weicheren Hammerspitze.

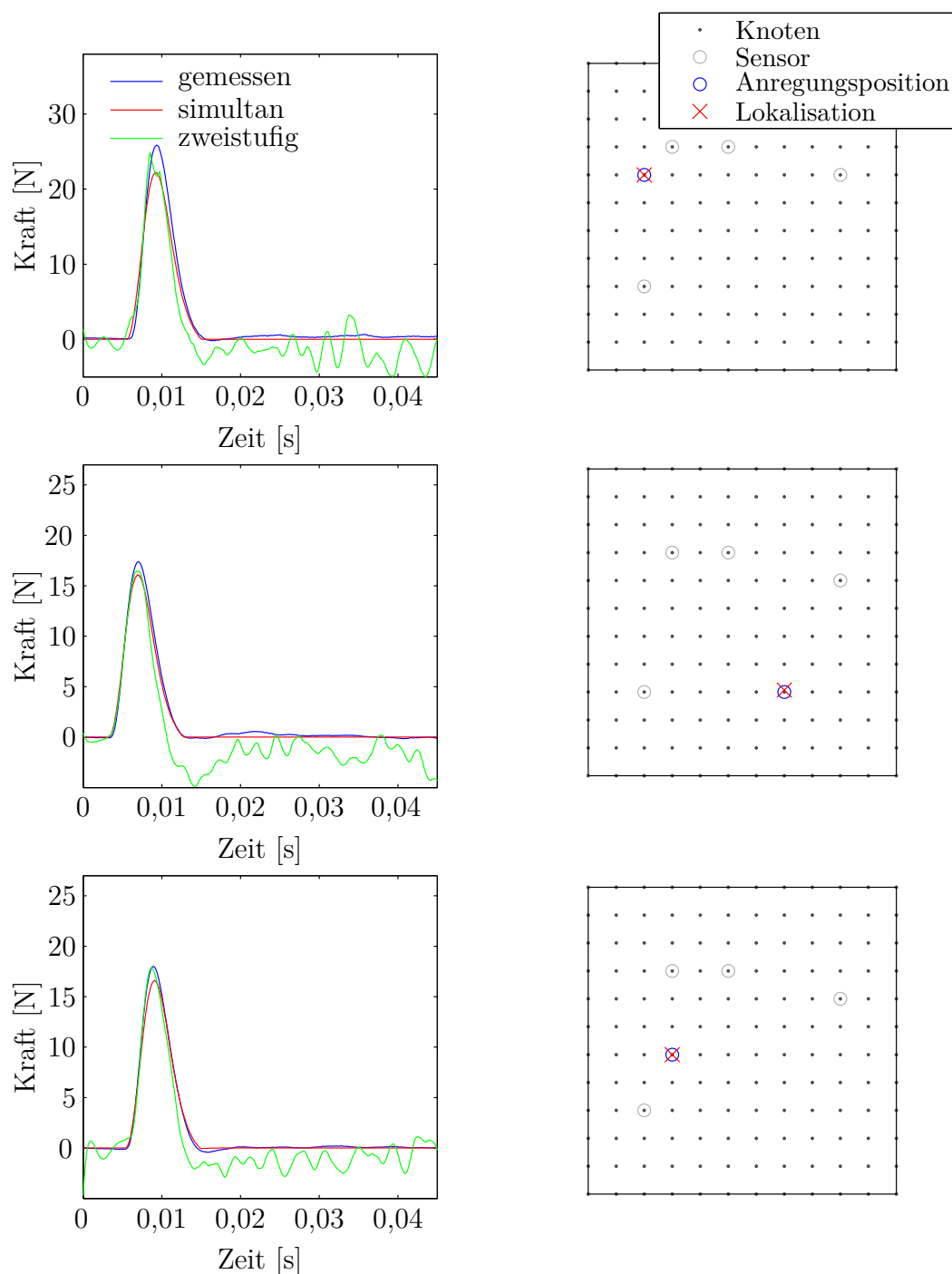


Abbildung 4.29: Experimenteller Vergleich von zweistufiger und simultaner Lastrekonstruktion; Links: Vergleich des Kraftverlaufs, Rechts: Lokalisationsergebnisse

Alle Rekonstruktionsergebnisse aus Abb. 4.28 konnten durch eine simultane Impulslokalisierung und Kraftverlaufsrekonstruktion generiert werden. In Abb. 4.29 hingegen werden die Ergebnisse eines zweistufigen Verfahrens und der simultanen Rekonstruktion gegenübergestellt. Es zeigt sich, dass die Spitzenwerte für ein zweistufiges Verfahren

zwar besser identifiziert werden, dass Messrauschen, Modellfehler und andere Störeinflüsse allerdings dazu führen, dass das Ergebnis viel stärkeren Abweichungen unterworfen ist.

Mit Hilfe der durchgeführten experimentellen und numerischen Analysen konnte gezeigt werden, dass Kraftrekonstruktion im Zeitbereich durch eine direkte Entfaltung von Gl. (4.2) mittels L_1 -Minimierung möglich ist. Große Vorteile ergeben sich insbesondere im Hinblick auf die Lokalisierung der anregenden Kraft und für die Anzahl an Sensoren. Da nur niederfrequente Signalanteile verwendet werden, kann das benötigte Messequipment auch vergleichsweise einfach ausgelegt werden.

Kapitel 5

Strukturschadenserkennung

Moderne Maschinen- und Strukturkomponenten müssen stetig höheren Ansprüchen genügen. So sind Bauteilanforderungen, Lastwechsel oberhalb von $2 \cdot 10^8$ Zyklen standzuhalten keine Seltenheit mehr. Hierzu zählen beispielsweise Bauteile wie Wälzlager für Kraftfahrzeuge, Radsätze im Schienenverkehr oder Strukturelemente von Windenergieanlagen. Letztere sollen darüber hinaus eine Lebensdauer von 20 Jahren und mehr erreichen. Heutige Auslegungsprozesse können bisher allerdings nicht alle Belastungsfaktoren und besonders nicht die Reihenfolge deren Auftreten berücksichtigen. Schäden können daher bereits in einem frühen Stadium unerwartet auftreten. Grund hierfür können darüber hinaus ebenfalls Überlastungen durch unbeabsichtigte Bauteilkollisionen oder extreme Umwelteinflüsse, wie z.B. Stürme, sein. Auch Fehlbedienungen einer Anlage oder einer Maschine können zu überproportional hohen Lastspitzen und daher zum frühzeitigen Bauteilversagen führen.

Da sich die Entstehung von Schäden nicht komplett ausschließen lässt, gewinnt die Schadensdetektion zu einem möglichst frühen Zeitpunkt zunehmend an Bedeutung. Die Schadensfrüherkennung gehört zu den wichtigsten Aufgaben eines Strukturüberwachungssystems. Vielfältige Structural Health Monitoring (SHM) Methoden wurden zu diesem Zweck entwickelt. Im Vergleich zu anderen zerstörungsfreien Prüfverfahren (NDT: Non-Destructive Testing) liefern SHM-Systeme durch ihre permanent installierte Sensorik eine kontinuierliche Aussage über die strukturelle Integrität. Höhere Anschaffungskosten aufgrund zusätzlicher SHM-Systeme amortisieren sich besonders für wartungsintensive Strukturen und Anlagen meist sehr schnell. Dennoch ist es wünschenswert, das SHM-System in Bezug auf das benötigte Sensornetzwerk so schlank wie möglich zu gestalten.

Bevor in den Abschnitten 5.2 und 5.3 vor diesem Hintergrund zwei neuartige An-

sätze zur Schadensrekonstruktion vorgestellt werden, wird zur besseren Einordnung im Folgenden ein Überblick der bereits bestehenden SHM-Systeme gegeben.

5.1 Überblick

Rytter definierte 1993 in seiner Dissertation verschiedene Stufen der Schadensidentifikation [Rytter, 1993]. SHM-Systeme können anhand der erreichten Stufe klassifiziert werden:

- Stufe 1) Detektion des Schadens
- Stufe 2) Lokalisation des Schadens
- Stufe 3) Bewertung des Schadens
- Stufe 4) Prognose der Restlebensdauer

SHM-Systeme sind in der Lage bei Erreichen der Stufe 1) die Existenz eines Schadens zu detektieren und eine Aussage über die Integrität der Struktur zu machen. Systeme der Stufe 2) können darüber hinaus den Schadensort lokalisieren. In Stufe 3) wird der Schaden näher beschrieben. Dazu wird diese Stufe oftmals auch in zwei parallele Stufen gesplittet. Eine Stufe gibt dabei eine Auskunft über das Ausmaß des Schadens, die andere Stufe zeigt die Art des Schadens auf. Während die Stufen 1) bis 3) eine Schadensdiagnose des gegenwärtigen Zustands ermöglichen, wird in der Stufe 4) eine Prognose zur zukünftigen Schadensentwicklung gemacht und die verbleibende Restlebensdauer abgeschätzt.

In der Folgezeit wurden die vier Stufen nach Rytter noch um eine 5. Stufe der *Smart Structures* erweitert [Inman, 2001; Worden & Dulieu-Barton, 2004]. Solche Smart Structures sind in der Lage sich selbst zu bewerten, eine Selbstheilung von Strukturschäden durchzuführen oder sich selbst zu steuern bzw. zu regeln.

Eine weitere Klassifikation von SHM-Systemen kann je nach Größe des überwachten Gebietes vorgenommen werden. In [Mengelkamp, 2006] wird zwischen lokalen, globalen und ergänzenden Verfahren unterschieden. Lokale Methoden überwachen lediglich einen räumlich sehr begrenzten Bereich. Aus diesem Grund benötigt man genaue Kenntnisse über potentielle Schwachstellen und meistens auch ein relativ dichtes Sensornetzwerk. Hier kommen zur Schadensdetektion häufig hochfrequente Ultraschallwellen zum Einsatz. Die Wellenlänge liegt dabei in der gleichen Größenordnung wie die zu identifizierenden Schäden [Giurgiutiu, 2007]. So haben diese lokalen SHM-Systeme ein sehr hohes Auflösungsvermögen und sind daher sehr empfindlich auch gegenüber kleineren Schäden.

Für diese Methoden ist es oftmals erforderlich, die Strukturen mittels mindestens einem Aktuator anzuregen.

Globale SHM-Systeme sind dagegen durch ein weit weniger dichtes Sensornetzwerk gekennzeichnet, wobei die Sensoren über die ganze Struktur verteilt sind. Kenntnisse über potentielle Schadenspositionen sind hier nicht erforderlich. Zur Schadensdetektion werden in der Regel globale Strukturparameter wie die Eigenfrequenzen, die modalen Dämpfungen und die Eigenformen herangezogen. Daher werden diese Verfahren auch als schwingungsbasierte Verfahren bezeichnet. Globale Methoden nutzen dabei meist nur die niedrigen Eigenschwingungsmoden der Struktur, die schon während des Betriebs und/oder durch Umwelteinflüsse angeregt werden. Somit sind keine zusätzlichen Aktuatoren notwendig. Das genaue Anregungsniveau und dessen Anregungsort ist in diesen Fällen allerdings unbekannt. Deshalb basieren viele globale Methoden ausschließlich auf gemessenen System-schwingungsdaten. Ein Überblick zu globalen schwingungsbasierten Verfahren ist z.B. in [Doebeling *et al.*, 1998] und [Fritzen, 2006] zu finden.

Zu den ergänzenden SHM-Verfahren zählen nun alle Methoden, welche nicht eindeutig einer Gruppe zugeordnet werden können bzw. gleichzeitig Eigenschaften lokaler und globaler Verfahren haben, siehe z.B. [Staszewski *et al.*, 2004].

Die Bandbreite aller in den letzten Jahrzehnten entwickelten schwingungsbasierten Schadensidentifikationsalgorithmen ist groß. Eine erste Einordnung der Datenanalysealgorithmen kann in rein datenbasierte [Basseville *et al.*, 2000; Fugate *et al.*, 2001; Sohn & Farrar, 2001] oder in modellgestützte Verfahren [Friswell & Mottershead, 1995; Bohle, 2005; Kraemer, 2011; Natke & Cempel, 2012] vorgenommen werden. Je nachdem welcher Algorithmus verwendet wird, werden die Messdaten im Zeitbereich, im Frequenzbereich oder im Zeit-Frequenzbereich (Wavelet-Bereich) verarbeitet.

Der Fokus der folgenden Untersuchungen liegt auf der Entwicklung, Adaption und Analyse von schwingungsbasierten SHM-Verfahren im niederfrequenten Bereich. Niederfrequente Schwingungssignale sind deutlich einfacher messtechnisch zu erfassen als hochfrequente Strukturschwingungen oder Ultraschallwellen. Die entwickelten Algorithmen nutzen die charakteristischen Eigenschaften der Schädigungsmuster aus, um so eine sehr effiziente Lösung mit Hilfe von dünnbesetzten Lösungsstrategien zu ermöglichen. Sie können in die Gruppe der globalen, modellgestützten SHM-Verfahren im Frequenz- und im Zeitbereich eingeordnet werden.

5.2 Schadensidentifikation im Frequenzbereich

Im Folgenden werden die allgemeinen mathematischen Grundlagen der modellgestützten Schadensidentifikation vorgestellt. Die beschriebenen Ansätze basieren u.a. auf [Natke, 1988; Friswell & Mottershead, 1995]. In Abschnitt 5.2.4 wird dann gezeigt, wie diese Ansätze mit Hilfe der L_1 -Minimierung sehr effizient gelöst werden können.

Die grundlegende Idee der modellgestützten Schadensdiagnose basiert auf der Annahme, dass Strukturschäden zu einer Änderung der mechanischen Größen der Massenmatrix \mathbf{M} , der Dämpfungsmatrix \mathbf{C} oder der Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} des Systems führen und somit das dynamische Verhalten beeinflussen. Strukturänderungen werden hierbei immer gegenüber einem ungeschädigten Referenzzustand $\mathbf{M}_{\text{ref}}, \mathbf{C}_{\text{ref}}, \mathbf{K}_{\text{ref}}$ betrachtet, welcher im Folgenden durch den Index *ref* gekennzeichnet wird. Der geschädigte Zustand wird mit Hilfe der Größen $\mathbf{M}_{\text{dam}}, \mathbf{C}_{\text{dam}}, \mathbf{K}_{\text{dam}}$ und dem Index *dam* beschrieben. Daher gilt

$$\mathbf{M}_{\text{dam}}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}_{\text{dam}}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}_{\text{dam}}\mathbf{x} = \mathbf{f}, \quad (5.1)$$

bzw.

$$(\mathbf{M}_{\text{ref}} + \Delta\mathbf{M})\ddot{\mathbf{x}} + (\mathbf{C}_{\text{ref}} + \Delta\mathbf{C})\dot{\mathbf{x}} + (\mathbf{K}_{\text{ref}} + \Delta\mathbf{K})\mathbf{x} = \mathbf{f} \quad (5.2)$$

Die Abweichungen aufgrund einer Schädigung werden also durch $\Delta\mathbf{M}$, $\Delta\mathbf{C}$ bzw. $\Delta\mathbf{K}$ repräsentiert. Dabei sei allerdings erwähnt, dass ein Schaden zumeist lediglich eine Reduktion der Struktursteifigkeit und/oder der Dämpfung zur Folge hat. Der Vollständigkeit halber wird aber auch der Fall einer Massenänderung mit berücksichtigt.

Die strukturellen Änderungen $\Delta\mathbf{M}$, $\Delta\mathbf{C}$ und $\Delta\mathbf{K}$ können auf einer Element- bzw. Substrukturebene durch Linearisierung nach dem dimensionslosen Parameter Δp_j formuliert werden als:

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{M} &\approx \sum_{j=1}^{n_E} \frac{\partial\mathbf{M}}{\partial\mathbf{p}_j} \Delta p_j = \sum_{j=1}^{n_E} \mathbf{M}_j \Delta p_j, \\ \Delta\mathbf{K} &\approx \sum_{j=1}^{n_E} \frac{\partial\mathbf{K}}{\partial\mathbf{p}_j} \Delta p_j = \sum_{j=1}^{n_E} \mathbf{K}_j \Delta p_j, \\ \Delta\mathbf{C} &\approx \sum_{j=1}^{n_E} \frac{\partial\mathbf{C}}{\partial\mathbf{p}_j} \Delta p_j = \sum_{j=1}^{n_E} \mathbf{C}_j \Delta p_j \end{aligned} \quad (5.3)$$

Diese dimensionslose Parametrisierung lässt sich auf alle Größen anwenden, welche in die Elementmatrizen eingehen, wie beispielsweise der E-Modul oder die Querkontraktionszahl. Sind alle Parameter $\Delta\mathbf{p} = [\Delta p_1, \Delta p_2, \dots, \Delta p_{n_E}]$ bekannt bzw. rekonstruiert worden, lässt sich so der Schaden lokalisieren und quantifizieren. Aufgrund der Linearisierung

können bei großen Veränderungen der Parameter allerdings Linearisierungsfehler auftreten.

Zur Schadensidentifizierung im Frequenzbereich werden Änderungen der modalen Struktureigenschaften betrachtet. Die modalen Eigenschaften lassen sich messtechnisch sehr viel einfacher aus den dynamischen Strukturantworten bestimmen, als die Struktursteifigkeit und die genaue Massenverteilung. Wie genau die Modaldaten aus gemessenen Zeitrohdaten unter Betriebsbedingungen extrahiert werden können, wird in Abschnitt 5.2.3 eingehend beschrieben.

Das Eigenwertproblem aus Gl. (2.6) macht bereits deutlich, dass Änderungen der Massen- und Steifigkeitsmatrix, z.B. durch Schäden, direkten Einfluss auf die modalen Parameter haben. Eine solche Änderung führt zu einer charakteristischen Verschiebung des Eigenfrequenzspektrums, welche zur Identifikation herangezogen werden kann. In der Regel sind höhere Moden stärker von einer Frequenzverschiebung betroffen. Daher wird die Änderung der Eigenfrequenzen \mathbf{r}_f relativ betrachtet:

$$\mathbf{r}_f = \left[\Delta f_1/f_1^{\text{ref}}, \Delta f_2/f_2^{\text{ref}}, \dots, \Delta f_{n_\omega}/f_{n_\omega}^{\text{ref}} \right]^T \quad \text{mit} \quad \Delta f_i = f_i^{\text{dam}} - f_i^{\text{ref}} \quad (5.4)$$

Durch die zusätzliche Verwendung von Eigenschwingungsformen $\boldsymbol{\varphi}_i \in \mathbb{R}^{n_r}$ können räumliche Informationen des dynamischen Verhaltens und der potentiellen Schäden berücksichtigt werden, sodass z.B. auch symmetrische Strukturen überwacht werden können. Die Änderungen der massennormierten Eigenschwingungsformen der geschädigten Struktur im Vergleich zur ungeschädigten Referenzstruktur ergeben sich aus:

$$\mathbf{r}_\varphi = \left[\Delta \boldsymbol{\varphi}_1, \Delta \boldsymbol{\varphi}_2, \dots, \Delta \boldsymbol{\varphi}_{n_\varphi} \right]^T \quad \text{mit} \quad \Delta \boldsymbol{\varphi}_i = \boldsymbol{\varphi}_i^{\text{dam}} - \boldsymbol{\varphi}_i^{\text{ref}} \quad (5.5)$$

Die Betrachtung der Eigenschwingungsformen ist darüber hinaus sinnvoll, um eine bessere Zuordnung der Spektren vornehmen zu können. Der Gesamtresiduenvektor ergibt sich nun aus Gl. (5.4) und (5.5) zu:

$$\mathbf{r}_{\text{Ges}} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_\omega \\ \mathbf{r}_\varphi \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

5.2.1 Kenngrößen modaler Korrelation

Bei der Bildung der Differenz in Gl. (5.5) muss beachtet werden, dass die Referenzformen und die zu testenden Eigenformen richtig zugeordnet und identisch normiert wurden. Als Kenngrößen zur modalen Korrelation und Skalierung haben sich das *Modal*

Assurance-Kriterium (MAC) und der *Modale Skalierungsfaktor* (MSF) etabliert. Diese beiden wichtigen Kenngrößen werden im Folgenden kurz vorgestellt.

Modal Assurance-Kriterium (MAC)

Das MAC wird verwendet, um zwei Modalmatrizen Φ_α und Φ_β miteinander zu vergleichen. Dabei wird die Ähnlichkeit zweier Vektoren $\varphi_{\alpha,i}$ und $\varphi_{\beta,j}$ durch den von beiden Vektoren eingeschlossenen Winkel $\gamma_{\alpha\beta,ij}$ beschrieben:

$$\gamma_{\alpha\beta,ij} = \arccos \left(\frac{\varphi_{\alpha,i}^T \varphi_{\beta,j}}{|\varphi_{\alpha,i}| |\varphi_{\beta,j}|} \right) \quad (5.7)$$

Der MAC-Wert zweier Vektoren ist definiert als

$$\text{MAC}_{\alpha\beta,ij} = \cos^2(\gamma_{\alpha\beta,ij}) = \frac{(\varphi_{\alpha,i}^T \varphi_{\beta,j})^2}{(\varphi_{\alpha,i}^T \varphi_{\alpha,i}) (\varphi_{\beta,j}^T \varphi_{\beta,j})}, \quad (5.8)$$

und bildet für alle möglichen Kombinationen die sogenannte MAC-Matrix. Aus Gl. (5.8) wird deutlich, dass das MAC nur Werte zwischen null und eins annehmen kann. Parallele Vektoren führen auf einen MAC-Wert von eins, orthogonale Vektoren auf einen Wert von null (vgl. bspw. Abb. 5.11). Die MAC-Matrix erlaubt so eine Zuordnung der Vektorpaare mit der höchsten Korrelation und eine gleichzeitige Charakterisierung ihrer Übereinstimmung. Darüber hinaus können mit Hilfe der MAC-Matrix die Eigenfrequenzen im Spektrum passend zugeordnet werden.

Modaler Skalierungsfaktor (MSF)

Die Bildung von Residuen der Eigenvektoren nach Gl. (5.5) ist nur sinnvoll, falls beide Eigenvektoren identisch normiert wurden. Um dies zu gewährleisten, wird jedes Eigenvektorpaar, welches mittels MAC gebildet werden konnte, durch den MSF skaliert und so die Normierung angepasst. Der MSF wird mit Hilfe des betrachteten Vektorpaares berechnet als:

$$\text{MSF}_{\alpha\beta,ij} = \frac{\varphi_{\alpha,i}^T \varphi_{\beta,j}}{\varphi_{\beta,j}^T \varphi_{\beta,j}} \quad (5.9)$$

Alternativ kann der MSF auch durch die Beträge und den eingeschlossenen Winkel berechnet werden:

$$\text{MSF}_{\alpha\beta,ij} = \frac{|\varphi_{\alpha,i}|}{|\varphi_{\beta,j}|} \cos(\gamma_{\alpha\beta,ij}) \quad (5.10)$$

5.2.2 Inverses Eigensensitivitätsverfahren

Zur Schadensidentifikation ist eine Bestimmung der modalen Abweichungen durch Residuenbildung allerdings nicht ausreichend. Die Abweichungen allein erlauben keine Rückschlüsse über die Quelle der modalen Änderungen. Daher muss ein Strukturmodell verfügbar sein, das die Beziehung zwischen modalen Änderungen und Steifigkeitsänderungen herstellen kann. Das Modell erlaubt auch die Berechnung der partiellen Ableitungen erster Ordnung, welche die Sensitivität der Eigenfrequenzen und Eigenvektoren in Bezug auf Parameteränderungen beschreibt. Wird die Dämpfung vernachlässigt, können folgende Beziehungen hergeleitet werden.

Eigenfrequenzsensitivität

Die partiellen Ableitungen $\partial f_i / \partial p_j$ der Eigenfrequenzen nach den Parametern p_j werden ausgehend vom Eigenwertproblem Gl. (2.6) hergeleitet. Für die Sensitivität der Eigenfrequenz gilt dann mit $\omega_i^2 = 4\pi^2 f_i^2$

$$\frac{\partial}{\partial p_j} \left([\mathbf{K} - 4\pi^2 f_i^2 \mathbf{M}] \boldsymbol{\varphi}_i \right) = \mathbf{0}, \quad (5.11)$$

bzw. nach Anwenden der Kettenregel

$$\left[\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial p_j} - 4\pi^2 f_i^2 \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial p_j} - 8\pi^2 f_i \frac{\partial f_i}{\partial p_j} \mathbf{M} \right] \boldsymbol{\varphi}_i + [\mathbf{K} - 4\pi^2 f_i^2 \mathbf{M}] \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_i}{\partial p_j} = \mathbf{0}. \quad (5.12)$$

Die symmetrische Massen- und Steifigkeitsmatrix erhält man durch Multiplikation mit $\boldsymbol{\varphi}_i^T$ von links:

$$\boldsymbol{\varphi}_i^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial p_j} \boldsymbol{\varphi}_i - 4\pi^2 f_i^2 \boldsymbol{\varphi}_i^T \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial p_j} \boldsymbol{\varphi}_i - 8\pi^2 f_i \frac{\partial f_i}{\partial p_j} \boldsymbol{\varphi}_i^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_i + \boldsymbol{\varphi}_i^T [\mathbf{K} - 4\pi^2 f_i^2 \mathbf{M}] \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_i}{\partial p_j} = 0 \quad (5.13)$$

Nach Umstellen von Gl. (5.13) führt dies, unter Verwendung von

$$\boldsymbol{\varphi}_i^T [\mathbf{K} - 4\pi^2 f_i^2 \mathbf{M}] = \left[\underbrace{[\mathbf{K} - 4\pi^2 f_i^2 \mathbf{M}] \boldsymbol{\varphi}_i}_{=\mathbf{0}} \right]^T = \mathbf{0}, \quad (5.14)$$

und für massennormierte Eigenvektoren, auf die partielle Ableitung der Eigenfrequenzen:

$$\frac{\partial f_i}{\partial p_j} = \frac{1}{8\pi^2 f_i} \left(\boldsymbol{\varphi}_i^T \mathbf{K}_j \boldsymbol{\varphi}_i - 4\pi^2 f_i^2 \boldsymbol{\varphi}_i^T \mathbf{M}_j \boldsymbol{\varphi}_i \right) \quad (5.15)$$

Eigenvektorsensitivität

Die Eigenvektorableitung $\partial \boldsymbol{\varphi}_i / \partial p_j$ kann entweder exakt nach [Nelson, 1976] oder näherungsweise nach [Fox & Kapoor, 1968] berechnet werden. Da die Berechnung nach [Fox

& Kapoor, 1968] vor allem für große Modelle meist sehr viel schneller ist und trotzdem gute Ergebnisse liefert, wird diese im Folgenden beschrieben. Für dieses Berechnungsverfahren wird die Eigenschaft der Eigenvektoren ausgenutzt, dass sie eine vollständige Basis im n_r -dimensionalen Raum aufspannen. Zur Berechnung der partiellen Ableitung kann daher der Summenansatz

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial p_j} = \sum_{k=1}^n a_{ijk} \varphi_k \quad (n \leq n_r), \quad (5.16)$$

verwendet werden. Der Ausgangspunkt der Herleitung ist auch hier die partielle Ableitung des Eigenwertproblems aus Gl. (2.6) nach dem Parameter p_j . Nach Anwendung der Kettenregel führt dies zu:

$$[\mathbf{K} - \omega_i^2 \mathbf{M}] \frac{\partial \varphi_i}{\partial p_j} = - \left(\frac{\partial}{\partial p_j} [\mathbf{K} - \omega_i^2 \mathbf{M}] \right) \varphi_i \quad (5.17)$$

Setzt man nun den Summenansatz (5.16) ein und multipliziert die Gl. (5.17) von links mit dem Eigenvektor φ_l^T erhält man:

$$\sum_{k=1}^n a_{ijk} \varphi_l^T [\mathbf{K} - \omega_i^2 \mathbf{M}] \varphi_k = - \varphi_l^T \left(\frac{\partial}{\partial p_j} [\mathbf{K} - \omega_i^2 \mathbf{M}] \right) \varphi_i \quad (5.18)$$

Gl. (5.18) kann unter Verwendung der Eigenschaften aus Gl. (2.7) nach den gesuchten Koeffizienten a_{ijl} für $l \neq i$ umgestellt werden:

$$a_{ijl} = \frac{1}{\omega_i^2 - \omega_l^2} \left(\varphi_l^T \frac{\partial}{\partial p_j} [\mathbf{K} - \omega_i^2 \mathbf{M}] \varphi_i \right) \quad (5.19)$$

Die Koeffizienten für $i = l$ erhält man für massennormierte Eigenvektoren durch Ableiten von Gl. (2.6), nachdem der Summenansatz eingesetzt wurde:

$$2 \varphi_i^T \mathbf{M} \sum_{k=1}^n a_{ijk} \varphi_k = - \varphi_i^T \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial p_j} \varphi_i \quad \text{mit} \quad a_{iji} = - \frac{1}{2} \varphi_i^T \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial p_j} \varphi_i \quad (5.20)$$

Für den Fall, dass ausschließlich Steifigkeitsänderungen Einfluss auf die modalen Eigenschaften haben vereinfachen sich Gl. (5.15) zu

$$\frac{\partial f_i}{\partial p_j} = \frac{1}{8\pi^2 f_i} \varphi_i^T \mathbf{K}_j \varphi_i \quad (5.21)$$

und Gl. (5.19) zu

$$a_{ijl} = \frac{1}{\omega_i^2 - \omega_l^2} \left(\varphi_l^T \mathbf{K}_j \varphi_i \right) \quad \text{bzw.} \quad a_{iji} = 0 \quad (\text{für } i = l). \quad (5.22)$$

Inverses Problem und Lösungsansatz mittels L_1 -Minimierung

Mit Hilfe der partiellen Ableitungen kann nun eine Beziehung zwischen den Abweichungen der modalen Eigenschaften $\mathbf{r}_{\text{Ges}} \in \mathbb{R}^{n_\omega + n_\varphi n_r}$ und den Änderungen der Strukturparameter $\Delta \mathbf{p} \in \mathbb{R}^{n_E}$ hergestellt werden. Dazu wird eine sogenannte Sensitivitätsmatrix $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{(n_\omega + n_\varphi n_r) \times n_E}$ aus den jeweiligen partiellen Ableitungen der Eigenfrequenzsensitivität und der Eigenvektorsensitivität gebildet:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_f \\ \mathbf{S}_\varphi \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

Für die Sensitivitätsmatrix der Eigenfrequenzen \mathbf{S}_f und für die Sensitivitätsmatrix der Eigenvektoren \mathbf{S}_φ gilt dabei:

$$\mathbf{S}_f = \begin{bmatrix} \frac{1}{f_1} \frac{\partial f_1}{\partial p_1} & \frac{1}{f_1} \frac{\partial f_1}{\partial p_2} & \dots & \frac{1}{f_1} \frac{\partial f_1}{\partial p_{n_E}} \\ \frac{1}{f_2} \frac{\partial f_2}{\partial p_1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{f_{n_\omega}} \frac{\partial f_{n_\omega}}{\partial p_1} & \dots & \dots & \frac{1}{f_{n_\omega}} \frac{\partial f_{n_\omega}}{\partial p_{n_E}} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S}_\varphi = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial p_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial p_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial p_{n_E}} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial p_1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_{n_\varphi}}{\partial p_1} & \dots & \dots & \frac{\partial \varphi_{n_\varphi}}{\partial p_{n_E}} \end{bmatrix} \quad (5.24)$$

Somit kann folgendes lineares Gleichungssystem für das inverse Eigensensitivitätsproblem aufgestellt werden

$$\mathbf{r}_{\text{Ges}} = \mathbf{S} \Delta \mathbf{p}, \quad (5.25)$$

bzw.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}_\omega \\ \mathbf{r}_\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_f \\ \mathbf{S}_\varphi \end{bmatrix} \cdot \left[\Delta p_1 \quad \Delta p_2 \quad \dots \quad \Delta p_{n_E} \right]^T. \quad (5.26)$$

Die Matrix \mathbf{S} repräsentiert die Sensitivität des Modells bzgl. der Veränderungen in den Modaldaten und \mathbf{r}_{Ges} das Residuum dieser Daten. Löst man nun Gl. (5.25) nach den unbekanntem Parametern Δp_i auf, kann die Strukturänderung bzw. der Strukturschaden bestimmt werden. Allerdings liegt hier erneut eine inverse Problemstellung vor. Als Wirkungen können die dynamischen Eigenschaften in Form modaler Verschiebungen gemessen werden. Die zugrundeliegende Ursache einer Struktursteifigkeitsänderung muss, basierend auf den gemessenen Wirkungen, rekonstruiert werden.

Die hier beschriebene inverse Eigensensitivitätsmethode ist ein bereits etabliertes Verfahren für die modellgestützte Schadenslokalisation und wurde beispielsweise in [Fritzen, 2005; Bohle, 2005; Fritzen, 2006; Kraemer, 2011] erfolgreich zur schwingungsbasierten Schadensidentifikation eingesetzt. Zur Lösung der inversen Problemstellung sind

bislang verschiedenste Verfahren zur Anwendung gekommen. Zu den wichtigsten zählen die Tikhonov-Regularisierung [Tikhonov, 1963; Tikhonov & Arsenin, 1977], die Robuste Regression [Bohle, 2005; Montgomery *et al.*, 2006] und die Robuste Ridge-Regression [Montgomery *et al.*, 2006].

Bei einer Vielzahl an unbekanntem Parametern benötigen diese Verfahren meistens eine Parametervorselektion. Die Vorselektion schränkt den Lösungsraum ein und soll die für die Lösung bedeutsamen Parameter identifizieren. Als Algorithmen zur Parametervorselektion sind das Bootstrapverfahren [Efron & Tibshirani, 1994], die Parameterselktion mit Hilfe der schrittweisen Regression [Draper & Smith, 1998] und die QR-Zerlegung mit Vorwärtsselektion [Fritzen *et al.*, 1998; Jennewein, 1999] zu nennen. Verwendet man nun hingegen Lösungsstrategien für dünnbesetzte Gleichungssysteme, ist eine solche Vorselektion nicht mehr zwangsläufig erforderlich.

Geht man von der plausiblen Annahme aus, dass Strukturschäden z.B. durch Risse lediglich in einer räumlich sehr begrenzten Zone zu einer Steifigkeitsreduktion führen, bleibt ein Großteil der globalen Steifigkeit unverändert. Nur sehr wenig Elemente Δp_j des Lösungsvektors $\Delta \mathbf{p} \in \mathbb{R}^{n_E}$ sind notwendig, um die durch den Schaden verursachte Steifigkeitsreduktion zu beschreiben. Der Lösungsvektor ist für solche Schädigungen dünnbesetzt. Die Anzahl der Elemente in der Lösung $\Delta \mathbf{p}$ ist viel kleiner als die Dimension n_E des Vektors:

$$\|\Delta \mathbf{p}\|_0 \ll n_E \quad (5.27)$$

Somit ist die Anwendung dünnbesetzter Lösungsverfahren zur Identifikation solcher Schäden gerechtfertigt. Die dünnbesetzte Lösung kann mit Hilfe des BPDN-Problems generiert werden:

$$\Delta \hat{\mathbf{p}} = \arg \min_{\Delta \mathbf{p} \in \mathbb{R}^{n_E}} \left\{ \|\mathbf{r}_{\text{Ges}} - \mathbf{S} \Delta \mathbf{p}\|_2^2 + \lambda_1 \|\Delta \mathbf{p}\|_1 \right\} \quad (5.28)$$

5.2.3 Identifikation modaler Parameter unter Betriebsbedingungen

Sollen Schäden mittels der gezeigten inversen Eigensensitivitätsmethode identifiziert werden, müssen allerdings in einem ersten Schritt die benötigten Modaldaten aus den gemessenen Zeitrohdaten extrahiert werden. Durch das Werkzeug der operationellen Modalanalyse (OMA) können dynamische Eigenschwingungsgrößen unter Betriebsbedingungen be-

stimmt werden. Die dynamischen Eigenschwingungsgrößen beinhalten die Eigenfrequenz, die modale Dämpfung und die Eigenschwingungsform.

Im Gegensatz zur experimentellen Modalanalyse (EMA) muss zur Bestimmung der modalen Größen keine Messung des Anregungssignals vorhanden sein. Eine Schwingungsanregung durch die ambienten Betriebslasten (z.B. Wind- oder Verkehrslasten) ist ausreichend. Die unbekanntes Betriebslasten werden üblicherweise als stochastische Größen mit unbekanntes Parametern, aber bekanntem Verhalten modelliert. Häufig wird z.B. eine Anregung durch ein mittelwertfreies weißes Rauschen mit unbekannter Kovarianz angenommen. Da die operationelle Modalanalyse somit, im Gegensatz zur experimentellen Modalanalyse, lediglich Messungen der Systemantwort verwendet, wird sie oftmals auch als Output-Only-Modalanalyse bezeichnet. Ein Überblick verschiedener Verfahren zur operationellen Modalanalyse ist u.a. in [Ewins, 1984; Peeters, 2000; Reynders, 2012] zu finden.

Der Modalanalyseprozess besteht im Wesentlichen aus drei Schritten: 1) Erhebung von Messdaten; 2) Systemidentifikation; 3) Extrahieren und Validieren der modalen Parameter. Die Erhebung der Messdaten und der damit verbundene Messaufbau sind stark von der zu untersuchenden Struktur abhängig. Daher wird dies später anwendungsspezifisch genauer dargelegt. In Abschnitt 2.2 wurde bereits die zur Anwendung kommende Stochastic Subspace Identification (SSI) zur Systemidentifikation beschrieben. Diese bildet die Grundlage der vorgestellten Modalanalyse. Sie liefert eine Systembeschreibung in Zustandsraumdarstellung. Die modalen Parameter können im Anschluss an die Systemidentifikation mit Hilfe der Gleichungen (2.31), (2.32) und (2.33) bestimmt werden.

Da die Systemordnung p des SSI-Verfahrens meist unbekannt ist und zusätzlich die Messdaten durch Messrauschen überlagert werden, treten neben den physikalischen Moden bzw. Polen auch immer mathematische Pole auf. Um die physikalischen Pole von den mathematischen zu trennen, können sogenannte Stabilitätsdiagramme genutzt werden, siehe Abb. 5.1. Hierfür werden die Pole für verschiedene Systemordnungen p berechnet und über der Frequenz aufgetragen. Die Ordnung p gibt die Anzahl der signifikanten Singulärwerte an (vgl. Abschnitt 2.2).

Dabei hat die Systemordnung nur einen geringen Einfluss auf die physikalischen Pole. Im Gegensatz dazu allerdings einen großen Einfluss auf die mathematischen Pole. So werden diejenigen Pole als stabile bzw. physikalische Pole bezeichnet, welche sich von einer Modellordnung p zur nächst höheren Ordnung $p+1$ nur in einem gewissen Toleranzbereich

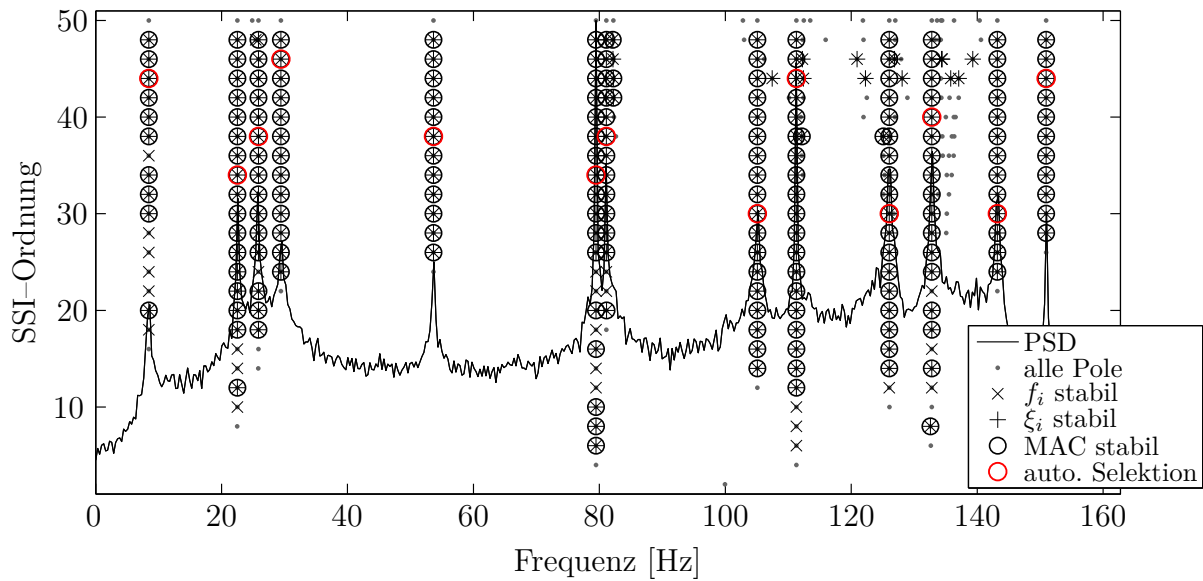


Abbildung 5.1: Stabilitätsdiagramm erzeugt mit Hilfe der Stochastic Subspace Identification (SSI)

verändern. U.a. in [Ewins, 1984] wurden folgende drei Stabilitätskriterien definiert, welche sich zur Analyse des Stabilitätsdiagramms etabliert haben:

$$1) \text{ Kriterium: } f_{\text{tol}} \geq \frac{|f_p - f_{p+1}|}{f_p} \quad (\text{stabile Frequenz}) \quad (5.29)$$

$$2) \text{ Kriterium: } \xi_{\text{tol}} \geq \frac{|\xi_p - \xi_{p+1}|}{\xi_p} \quad (\text{stabile Dämpfung}) \quad (5.30)$$

$$3) \text{ Kriterium: } \text{MAC}_{\text{tol}} \geq \frac{(\varphi_{p+1}^T \varphi_p)^2}{\|\varphi_{p+1}\|_2^2 \|\varphi_p\|_2^2} \quad (\text{stabile Eigenform}) \quad (5.31)$$

Der Toleranzbereich für f_{tol} , ξ_{tol} und MAC_{tol} muss im Vorhinein festgelegt werden. Für das Stabilitätsdiagramm aus Abb. 5.1 wurden die Toleranzen $f_{\text{tol}} = 0,3\%$, $\xi_{\text{tol}} = 5\%$ und $\text{MAC}_{\text{tol}} = 0,995$ gewählt. Diese liegen nach [Ewins, 1984; Peeters, 2000; Kraemer, 2011] im gängigen Wertebereich der Toleranzangaben. Die stabilen Pole sind in Abhängigkeit des erfüllten Toleranzkriteriums in Abb. 5.1 entsprechend gekennzeichnet. Nur Pole, die alle drei Kriterien erfüllen, sollten als physikalische Moden ausgewählt werden.

Die Kurve in Abb. 5.1 stellt ein für alle Sensorsignale gemittelt Leistungsdichtespektrum dar. Dieses wird allerdings für die Berechnungen der modalen Parameter nicht verwendet. Es dient lediglich als visueller Vergleich zwischen Spektrum und identifizierten Systempolen. So wird eine manuelle Selektion geeigneter Systempole unterstützt. Die manuelle Selektion der Systempole und die Analyse des Stabilitätsdiagramms erfordern eine gewisse Erfahrung und Systemverständnis der beobachteten mechanischen Struktur. Soll

der Strukturüberwachungsprozess autark bzw. ohne Eingriff eines Bedieners einsatzfähig sein, ist eine automatisierte Polselektion notwendig.

Automatische Operationelle Modalanalyse

Bei der Implementierung von Strukturüberwachungssystemen ist es wünschenswert, den geringstmöglichen Bedarf an menschlichem Eingriff zu erzeugen. Dennoch sind automatische Modalanalysealgorithmen, welche das Stabilitätsdiagramm vollständig autark auswerten, bisher eher wenig verbreitet. Oftmals müssen nach einer automatischen Vorselektion noch Pole mit Hilfe von Erfahrungswerten und mechanischem Systemverständnis hinzugefügt bzw. entfernt werden.

Wie in [Reynders *et al.*, 2012] beschrieben, wurden bislang hauptsächlich drei unterschiedliche Strategien zur vollständigen automatischen Analyse des Stabilitätsdiagramms entwickelt: 1) Analyse von Pol-Histogrammen [Scionti *et al.*, 2003]; 2) Nicht-hierarchische Clustering Verfahren [Verboven *et al.*, 2002; Scionti & Lanslots, 2005] und 3) Hierarchische Clustering Verfahren [Pappa *et al.*, 1998; Reynders *et al.*, 2012]. Unter diesen Algorithmen zeigt sich das hierarchische Clustering Verfahren als das vielversprechendste Verfahren, um eine vollständig automatische Polselektion zu gewährleisten [Da Silva Oliveira, 2016]. Daher wird dieses im Folgenden näher erläutert. Die Beschreibung richtet sich dabei u.a. nach [Reynders *et al.*, 2012] und [Da Silva Oliveira, 2016].

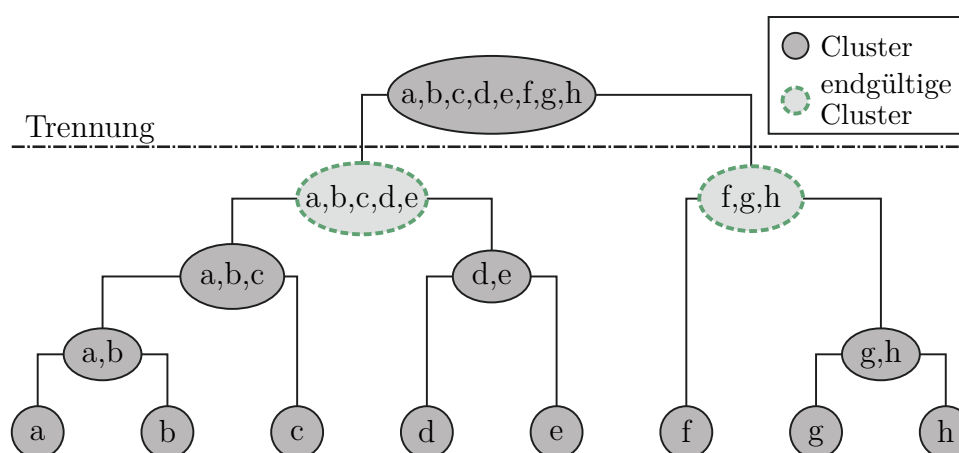


Abbildung 5.2: Schematische Darstellung der hierarchischen Clusteranalyse

Zur Definition des Polabstands in Schritt 1) werden die Eigenfrequenzen und die Eigenschwingungsformen als modale Parameter genutzt. In [Magalhães *et al.*, 2009] wurde

der Abstand δ_{ij} zwischen den Polen i und j definiert als:

$$\delta_{ij} = \frac{|f_i - f_j|}{f_j} + (1 - \text{MAC}_{ij}) \quad (5.32)$$

Allgemein sind Clustering-Verfahren (hierarchische und nicht-hierarchische) multivariate statistische Analysetechniken zur Klassifikation von Objekten. Dabei werden die Objekte (hier die Pole) in eine bestimmte Anzahl von disjunkten Klassen (auch Cluster genannt) unterteilt [Gordon, 1999]. Die Klassen werden durch Integration von ähnlichen Objekten bzw. der Trennung von nicht verwandten Objekten erzeugt. So können also Clustering-Verfahren genutzt werden, um physikalische Pole der gleichen Schwingungsmode zu gruppieren und diese von den mathematischen Polen zu trennen. Dazu werden die modalen Eigenschaften der Pole als quantitative Parameter im jeweiligen Clustering-Verfahren ausgenutzt.

Bei der hierarchischen Clusteranalyse wird im ersten Schritt jeder Pol für alle berechneten SSI-Ordnungen als individuelles Cluster definiert. In jedem weiteren Schritt werden die Pole mit der geringsten Distanz in ein gemeinsames Cluster verschoben, bis alle Pole zu einem großen Cluster zusammengefasst sind (siehe Abb. 5.2). Der Algorithmus kann in vier Schritte zusammengefasst werden:

- Schritt 1) Definition eines Abstandskriteriums. Diese Eigenschaft beschreibt die Entfernung zwischen zweier Pole.
- Schritt 2) Berechnung der Ähnlichkeit zwischen allen Clustern.
- Schritt 3) Verknüpfung der Cluster in einem hierarchischen Baum.
- Schritt 4) Definition einer Regel zur Trennung des hierarchischen Baums. Diese Regel definiert die endgültige Anzahl von Clustern.

Das bedeutet, je kleiner die Distanz δ_{ij} zweier Pole ist, umso größer ist deren Ähnlichkeit und die Wahrscheinlichkeit, dass sie zur selben Schwingungsmode gehören. In Gl. (5.32) wurde bewusst die modale Dämpfung vernachlässigt. Diese kann für unterschiedliche Schwingungsmoden denselben Wert annehmen. Außerdem weisen die berechneten Dämpfungswerte oft eine hohe Varianz auf. Daher ist die Dämpfung für eine Charakterisierung des Polabstands nicht geeignet.

In Schritt 2) wird die Ähnlichkeit der Cluster untereinander durch das sogenannte *Single Link*-Kriterium bestimmt. Dieses Kriterium definiert die Ähnlichkeit zwischen zwei

Clustern als den kleinsten Abstand der Pole innerhalb der beiden Cluster. Der berechnete Abstand ist derselbe wie schon in Gl. (5.32).

Nachdem der hierarchische Baum konstruiert wurde, ist es notwendig ein Kriterium zur Trennung des Baumes zu definieren. Da die endgültige Anzahl an Clustern bzw. Polen unbekannt ist, können keine festen Grenzwerte angegeben werden. Das hier gewählte Kriterium nutzt den Grad an Homogenität innerhalb des Clusters. Der Grenzwert gibt die maximale Entfernung zwischen einem beliebigen Pol und seinem nächst gelegenen Pol im selben Cluster an. Die so berechneten Cluster und deren Zentren beschreiben nun die physikalischen Pole. Die mit Hilfe dieses Verfahrens automatisch selektierten Pole sind in Abb. 5.1 rot gekennzeichnet.

5.2.4 Simulationsstudien und Vergleich zu konventionellen Verfahren

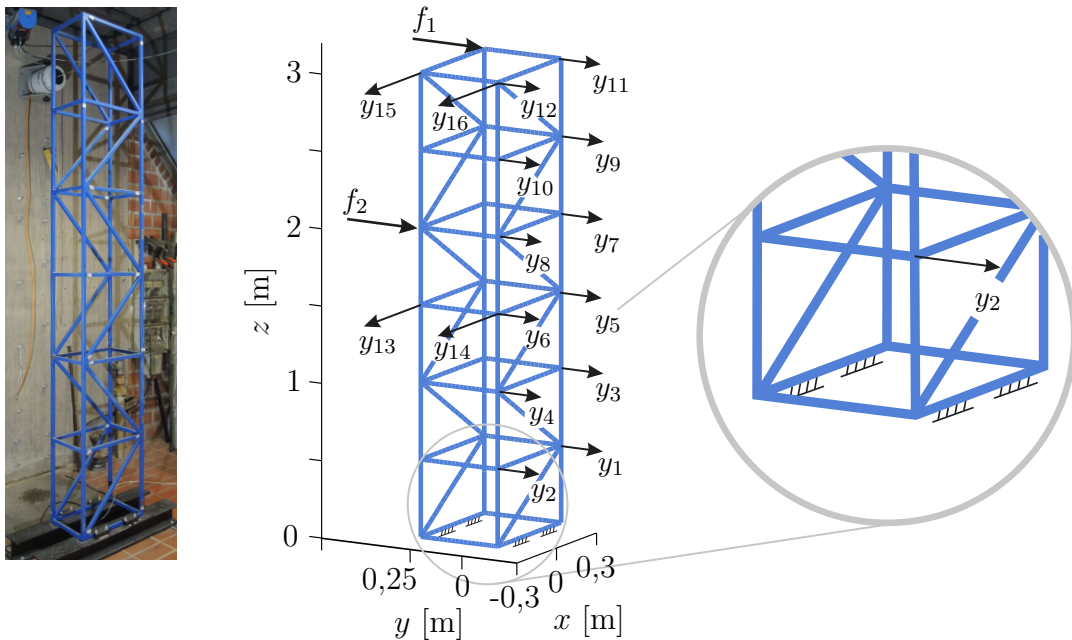


Abbildung 5.3: Fachwerkstruktur zur Analyse der frequenzbasierten Schadensidentifikation

Im Folgenden soll die zuvor beschriebene Schadensidentifikation anhand von Simulationsstudien genauer analysiert werden und die vorgeschlagenen L_1 -minimierenden Algorithmen konventionellen Lösungsverfahren gegenüber gestellt werden. Die dazu verwendete Simulationsstruktur ist angelehnt an die Fachwerkstruktur, welche auch in Abschnitt 5.2.5 zur experimentellen Validierung herangezogen wird. Abb. 5.3 zeigt diese

Struktur. Es handelt sich um eine Fachwerkstruktur mit einer Höhe von 3 m bei einer Grundfläche von $0,5 \text{ m} \times 0,3 \text{ m}$. Das Fachwerk besteht aus 64 Stabelementen mit einem quadratischen Rechteckstahlprofil von $0,02 \text{ m} \times 0,02 \text{ m}$. Der Aufbau lässt sich in sechs Ebenen untergliedern. Das Gesamtgewicht der Struktur beträgt 25,1 kg. Die Randbedingungen sind durch eine feste Einspannung an vier Punkten im unteren Strukturbereich definiert (vgl. Abb. 5.3). Das zur Schadensidentifikation benötigte Strukturmodell wird durch eine FE-Formulierung beschrieben. Das FE-Modell besteht ausschließlich aus linearen Timoshenko-Balkenelementen und ist aus insgesamt 1062 Knoten und 1097 Balkenelementen aufgebaut.

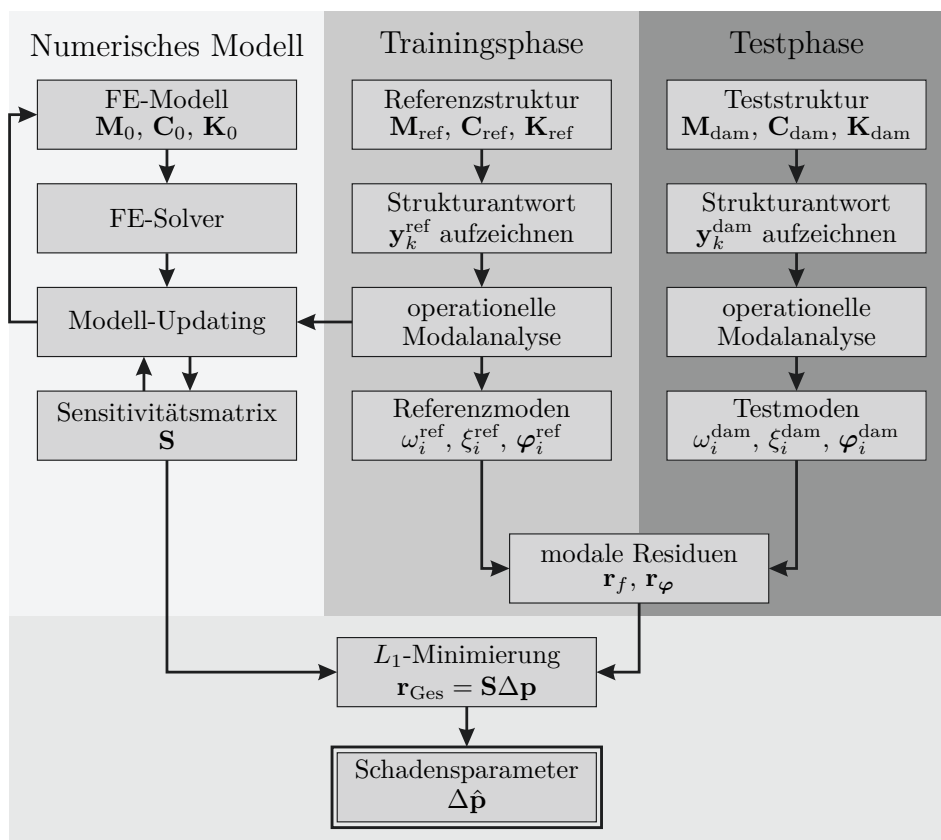


Abbildung 5.4: Prozessplan der frequenzbasierten Schadensidentifikation

Für die Simulationsuntersuchungen wird das FE-Modell ebenfalls zur Erzeugung fiktiver Beschleunigungsmessdaten genutzt. Hierzu wird eine modale Reduktion des Modells und eine Beschreibung im Zustandsraum verwendet (siehe Abschnitt 2.1.2). Den simulierten Messdaten wird anschließend ein künstliches Rauschen hinzugefügt. Der Simulationsablauf entspricht einem tatsächlichen Schadensidentifikationsprozess in der praktischen Anwendung. Abb. 5.4 zeigt den Ablauf des frequenzbasierten Schadensidentifikationsprozesses. Ausgehend von Beschleunigungsantworten einer breitbandig angeregten

Struktur, werden mittels der operationellen Modalanalyse die Eigenfrequenzen und die Eigenschwingungsformen bestimmt.

Um die potentiellen schadensinduzierten Änderungen des Schwingungsverhaltens in Form von modalen Residuen zu bestimmen, werden in der Praxis die Referenzmoden meist während einer Trainingsphase im ungeschädigten Zustand identifiziert. Die Referenzmoden können allerdings auch direkt mit Hilfe des FE-Modells berechnet werden. Dazu muss das zugrundeliegende Strukturmodell jedoch sehr zuverlässig sein.

Für die folgenden Simulationen stimmen das FE-Modell zur Bestimmung der Sensitivitäten und das Referenzmodell perfekt überein. So können Einflüsse resultierend aus einer fehlerhaften Modellbildung an dieser Stelle ausgeschlossen werden und die Leistungsfähigkeit des jeweiligen Rekonstruktionsverfahrens isoliert betrachtet werden. Stimmen das Referenzmodell und die reale Struktur nicht überein, kann wie in Abb. 5.4 gezeigt, ein Modell-Updating, basierend auf den gemessenen Modaldaten der Trainingsstruktur, in den Identifikationsprozess integriert werden.

Die Messdaten $\mathbf{y} = [y_1, y_2, \dots, y_{16}]$ werden an den in Abb. 5.3 gezeigten Positionen aufgezeichnet. Es werden 16 uniaxiale Beschleunigungssensoren verwendet. Die Sensorpositionen wurden mit Hilfe der EIM bestimmt und führen für die ersten 15 Eigenmoden der ungeschädigten Struktur zu einer optimalen Auto-MAC-Matrix. Für diese Eigenmoden liegen die Eigenfrequenzen unterhalb von 200 Hz. Aufgrund der Geometrie sind die zugeordneten Eigenformen vorwiegend Schwingungsmoden in die y -Richtung und Torsionsmoden, sodass die Mehrheit der Sensoren in y -Richtung ausgerichtet werden muss. Angeregt wird die Struktur an zwei Positionen (siehe Abb. 5.3) durch ein 250 Hz tiefpassgefiltertes Zufallssignal. Dies entspricht beispielsweise einer ambienten Anregung durch Windlasten.

Der simulierte Schaden wird in Form einer Steifigkeitsreduktion einer oder mehrerer Stabelemente eingebracht. Der Schadensparametervektor $\Delta\mathbf{p}$ wird also in diesem Simulationsbeispiel auf einer Substrukturebene definiert und beschreibt die Steifigkeit eines einzelnen Stabes. Die Dimension von $\Delta\mathbf{p}$ ist daher durch $n_E = 64$ gegeben. Die Verschiebung der ersten 15 Eigenfrequenzen liegt für alle simulierten Schadensfälle zwischen 0,5% und 2,5%.

Abb. 5.5 stellt exemplarisch die Rekonstruktionsergebnisse unterschiedlicher Lösungsverfahren für verschiedene Schadensfälle dar. Neben dem L_1 -Minimierungsverfahren sollen zum Vergleich auch die schrittweise Regression [Draper & Smith, 1998] und die

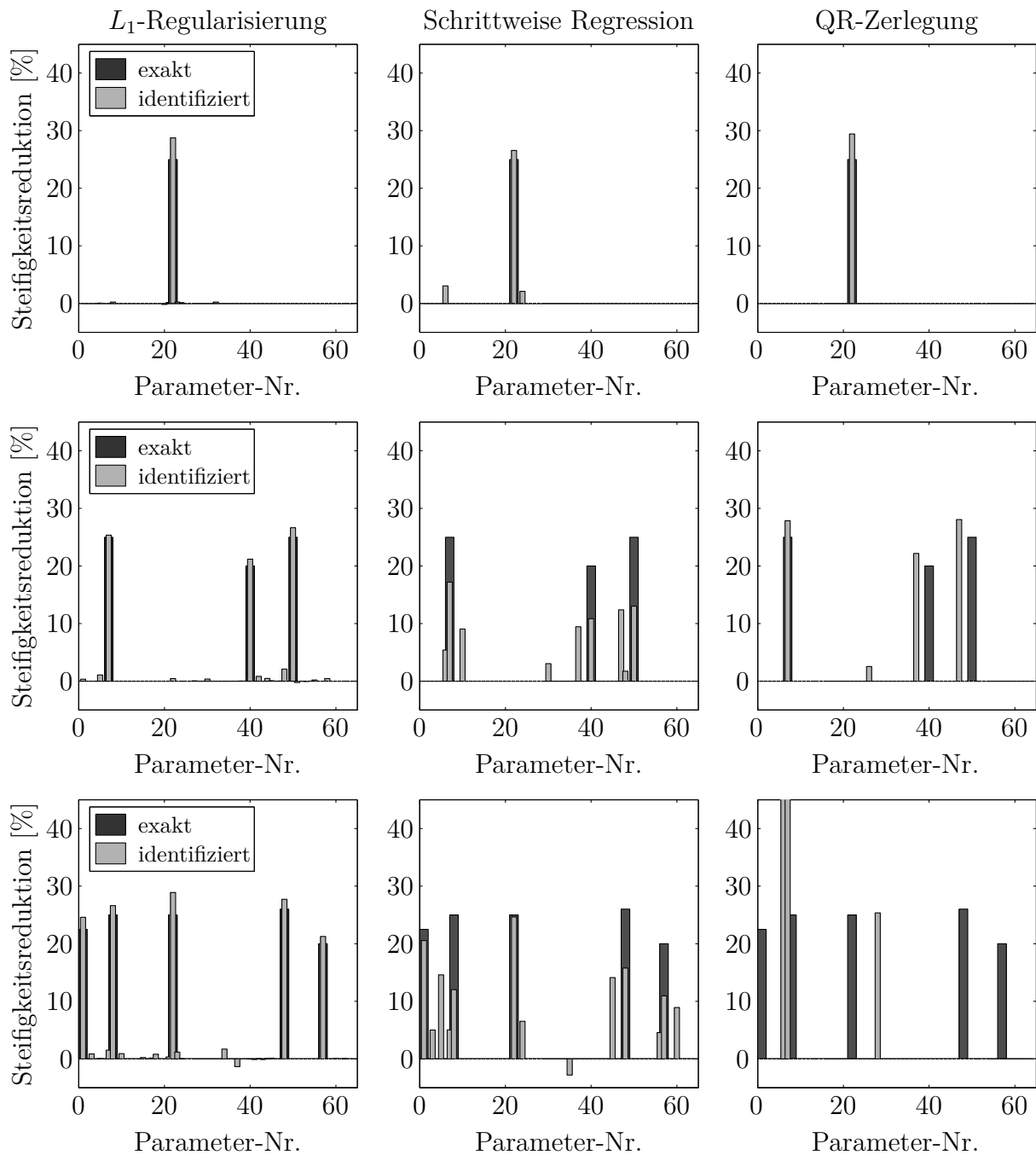


Abbildung 5.5: Vergleich der Rekonstruktionsqualität verschiedener Lösungsverfahren für eine unterschiedliche Anzahl an Strukturschäden (Links: L_1 -Minimierung; Mitte: Schrittweise Regression; Rechts: QR-Zerlegung)

Bestimmung mittels QR-Zerlegung [Fritzen *et al.*, 1998; Jennewein, 1999] für jeweils den selben Schadensfall angewendet werden. Es ist zu erkennen, dass für lediglich einen Strukturschaden alle Lösungsverfahren den Parameter im Rahmen gewisser Toleranzen rekonstruieren können. Der Schaden konnte in allen Fällen lokalisiert werden. Das

Schadensausmaß wird hingegen stets geringfügig überschätzt. Diese Abweichungen sind auf Linearisierungsfehler bei der Erstellung der Sensitivitätsmatrix zurückzuführen. Neben dem Wert für den tatsächlichen Schadensparameter identifiziert die schrittweise Regression noch fälschlicherweise zusätzliche Parameteränderungen. Die QR-Zerlegung rekonstruiert für lediglich einen Schaden das klarste Schadensbild. Steigt die Anzahl der geschädigten Stabelemente auf drei bis fünf Elemente, versagt die Rekonstruktion mittels QR-Zerlegung, da diese zu wenige Elemente im Lösungsvektor identifiziert. Auch die schrittweise Regression liefert kein klares Schadensbild. Für die drei exemplarisch gezeigten Schadensmuster kann nur die L_1 -Regularisierung in allen Fällen eine gute Schadensidentifikation generieren.

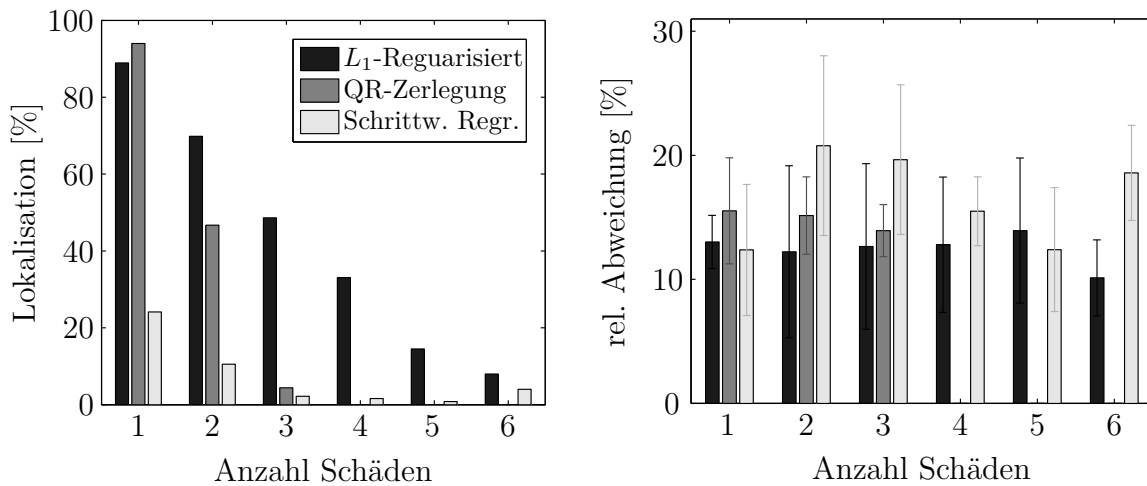


Abbildung 5.6: Monte-Carlo Simulation für eine steigende Anzahl an Strukturschäden; Links: Anteil der korrekt lokalisierten Schadensfälle; Rechts: Abweichung der Schadensgröße bei korrekter Lokalisation

Um die gezeigten Ergebnisse statistisch zu validieren, stellt Abb. 5.6 die Ergebnisse einer Monte-Carlo Simulation dar. Es wurden 5000 Simulationsdurchläufe ausgeführt. Die Anzahl der geschädigten Stabelemente liegt dabei zwischen eins und sechs. Der Schadensort wird zufällig gleichverteilt in jeder Simulation neu bestimmt. Die Schadensgröße ist für die Monte-Carlo Simulation eine normalverteilte Größe mit einem Mittelwert von 25% Steifigkeitsreduktion bei einer Standardabweichung von 2%.

Abb. 5.6 zeigt links den Anteil der korrekt lokalisierten Schadensmuster aufgetragen über der Anzahl der Strukturschäden. Das Schadensmuster wird als korrekt lokalisiert definiert, falls alle geschädigten Stabelemente richtig lokalisiert wurden. Weicht beispielsweise nur eine von fünf möglichen Schäden von der exakten Position ab, gilt das Schadens-

muster als nicht lokalisiert. Es ist deutlich zu erkennen, dass für eine steigende Anzahl an Schäden die Strukturparameteränderungen nur noch in wenigen Fällen zuverlässig identifiziert werden können. Für lediglich einen Schaden zeigt die Rekonstruktion mittels QR-Zerlegung die etwas besseren Lokalisationsergebnisse. Mit zunehmender Anzahl an Schäden werden diese aber schnell schlechter. Hier sind die L_1 -Regularisierungsverfahren deutlich besser als die zwei Referenzalgorithmen.

Im rechten Teil von Abb. 5.6 sind die Rekonstruktionsabweichungen des Schadensausmaßes für die korrekt lokalisierten Schadensmuster dargestellt. Die L_1 -Minimierungsverfahren liefern im Vergleich die besten Ergebnisse. Da die QR-Zerlegung ab einer Anzahl von vier Schäden keine korrekte Lokalisation mehr generieren konnte, können in diesen Fällen keine Abweichungen bestimmt werden.

Der negative Trend der Lokalisationsfähigkeit bei der L_1 -Minimierung ist aufgrund zweierlei Gesichtspunkte zu erklären: 1) Durch die steigende Anzahl an Schäden ist der Lösungsvektor zunehmend weniger dünnbesetzt. 2) Nicht alle Schäden beeinflussen die betrachteten Moden gleich stark. Die verwendeten Moden sind somit nicht sensitiv für Schäden bestimmter Stabelemente des Fachwerks. Steigt nun die Anzahl der Strukturschäden, steigt auch die Wahrscheinlichkeit, dass ein solches Element im Schadensmuster des jeweiligen Monte-Carlo-Durchlaufs enthalten ist.

Abb. 5.7 zeigt im linken Teil die maximale Sensitivität eines jeden Parameters für alle beobachteten Eigenfrequenzen und Eigenformen. Anders ausgedrückt, stellt dieser Plot den maximalen Wert einer jeden Spalte der Sensitivitätsmatrix \mathbf{S} dar. Die Sensitivitäten sind hier auf den höchsten Wert normiert worden. Es ist zu erkennen, dass eine Steifigkeitsreduktion einiger Elemente kaum Einfluss auf die modalen Parameter haben. Alle diejenigen Parameter welche eine maximale Sensitivität von unter 20% haben, sind im rechten Teil der Abb. 5.7 farbig markiert. Eine Schadensidentifikation ist also für diese Elemente mittels der inversen Eigensensitivitätsmethode kaum möglich.

Abb. 5.8 zeigt die Rekonstruktionsergebnisse der Monte-Carlo Simulation für den Fall, dass keine Schädigung an den in Abb. 5.7 gekennzeichneten Elementen vorliegt. Die Sensitivitätsmatrix \mathbf{S} bleibt allerdings unverändert, sodass weiterhin 64 potentielle Parameteränderungen rekonstruiert werden müssen. Die Performance der L_1 -Regularisierung zur Schadensidentifikation ist, bei ansonsten unveränderten Simulationsparametern, im Vergleich zu den Ergebnissen aus Abb. 5.6 deutlich verbessert. Insbesondere für Schadensszenarien bei den zwei und mehr Elemente geschädigt sind, ergeben sich mittels

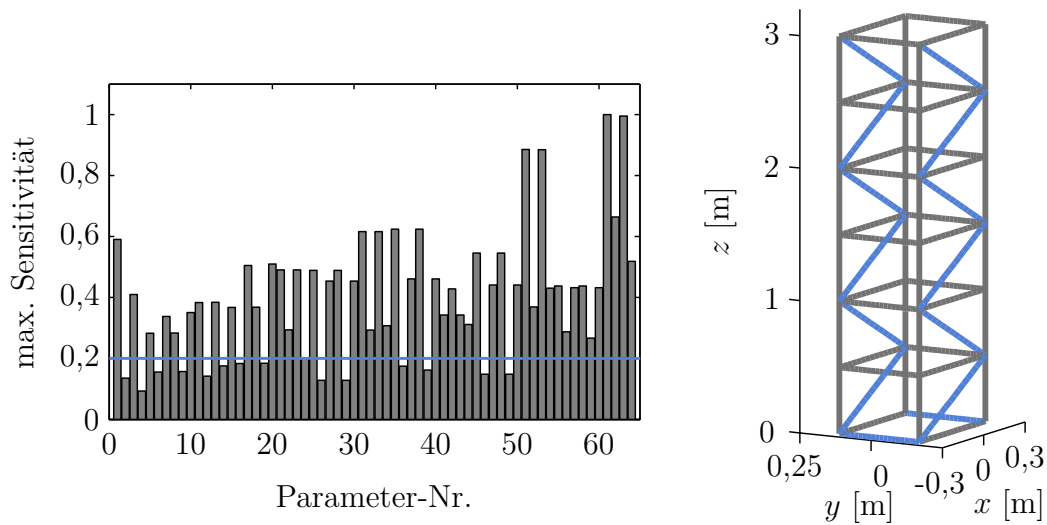


Abbildung 5.7: Maximale Sensitivität jedes Parameters bezüglich aller betrachteten Schwingungsmoden, normiert auf die höchste Sensitivität

L_1 -Regularisierung deutlich bessere Lokalisierungsergebnisse.

Allerdings fällt die Wahrscheinlichkeit das Schadensmuster komplett korrekt zu lokalisieren ab einer Anzahl von sechs Schäden auf unter 50%. Dennoch zeigen die Ergebnisse, dass durch die Verwendung der L_1 -Regularisierung eine Verbesserung der inversen Eigensensitivitätsverfahren zur Schadensdetektion erzielt werden kann, besonders im Vergleich zu den üblichen Lösungsverfahren.

5.2.5 Experimentelle Validierung an Fachwerkstruktur

Zur experimentellen Validierung soll die bereits in Abb. 5.3 vorgestellte Fachwerkstruktur verwendet werden. Die Laborstruktur wird mittels zweier Shaker zum Schwingen angeregt. Wie auch schon in der Simulation, wird dazu ein 250 Hz tiefpass-gefiltertes Zufalls-signal verwendet. Die Beschleunigungsantworten werden an den in Abb. 5.3 dargestellten 16 Messpositionen mit Hilfe von piezoelektrischen Beschleunigungssensoren aufgezeichnet. Die Abtastrate beträgt hierzu 1 kHz. Die Messdauer zur Bestimmung der modalen Parameter mittels operationeller Modalanalyse ist auf 300 s festgelegt.

Abb. 5.9 stellt die ersten fünf Eigenschwingungsformen des schon zuvor verwendeten FE-Modells dar. Zum Vergleich sind in Abb. 5.10 die ersten fünf Moden gezeigt, welche mittels OMA bestimmt werden konnten. In dieser Trainingsphase wurden die Messungen in einem ungeschädigten Referenzzustand durchgeführt. Es ist zu erkennen,

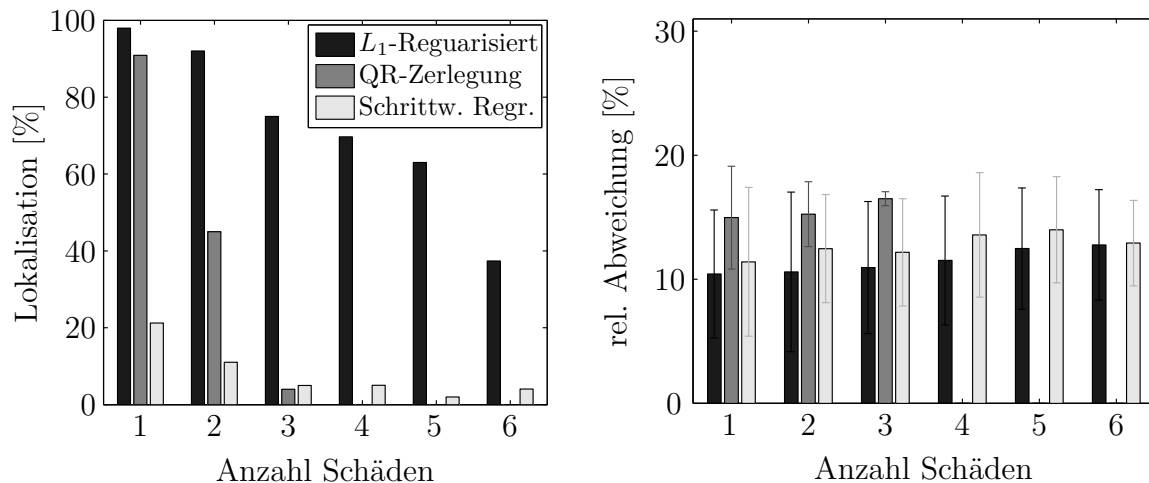


Abbildung 5.8: Monte-Carlo Simulation für Strukturschäden erhöhter Sensitivität; Links: Anteil der korrekt lokalisierten Schadensfälle; Rechts: Abweichung der Schadensgröße bei korrekter Lokalisation

dass die operationelle Modalanalyse nur Informationen zu den Eigenschwingungsformen an den Messpositionen liefern kann. Daher ist die Dimension der Eigenvektoren deutlich geringer als für die numerisch berechneten Eigenvektoren. Die Eigenschwingungsformen können räumlich nicht mehr so genau aufgelöst werden. Dies erschwert eine Korrelation der Moden mittels MAC-Matrix, insbesondere für höhere Moden mit komplexeren Eigenschwingungsformen. Dennoch korrelieren hier die ersten fünf identifizierten Moden mit den FE-Moden. Vergleicht man die Eigenfrequenzen ist allerdings eine deutliche Abweichung zu erkennen.

Der linke Teil der Abb. 5.11 verdeutlicht nochmals diese relativen Abweichungen der Eigenfrequenzen für alle Moden, welche mittels der MAC-Matrix einander zugeordnet werden konnten. Der rechte Teil zeigt diese MAC-Matrix für FE-Moden und Referenz-OMA-Moden. Hier ist unter anderem eine Verschiebung der Moden sechs und sieben zu erkennen. Einige höhere Moden können nicht zugeordnet werden.

Um ein geeignetes FE-Modell zu erhalten, muss ein Modell-Updating durchgeführt werden. Das Modell-Updating wird mit Hilfe der kommerziellen Berechnungsplattform FEMTools realisiert. Das zugrundeliegende Verfahren nutzt ebenfalls modale Residuen, um so mit Unsicherheiten behaftete Modellparameter anzupassen. Das Vorgehen zum Modell-Updating ist dabei weitestgehend identisch zu der in Abschnitt 5.2.2 beschriebenen Schadensparameteridentifikation. Allerdings kann hier nicht von einer dünnbesetzten Lösung ausgegangen werden und es wird zur Lösung des Gleichungssystems die Tikhonov-

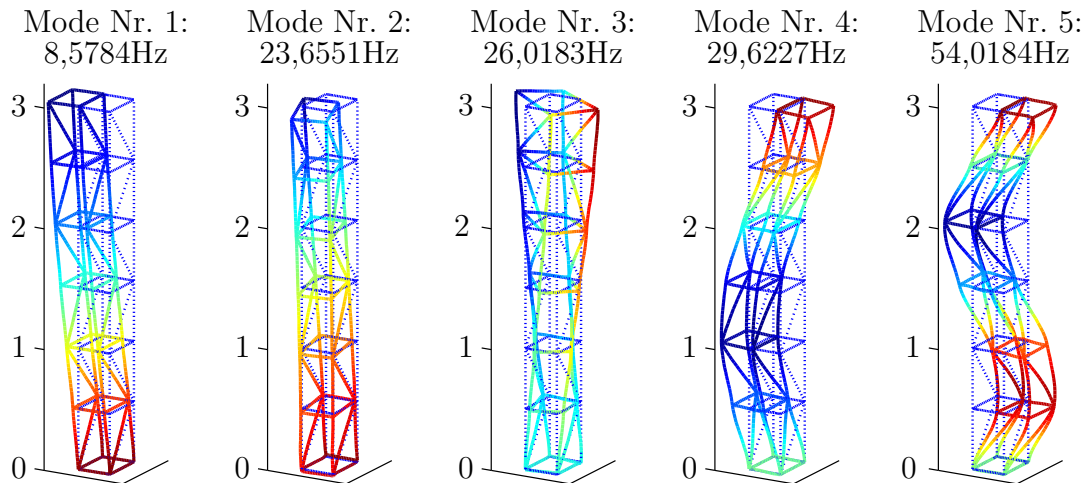


Abbildung 5.9: Numerisch berechnete Eigenschwingungsformen Nr.1 bis 5

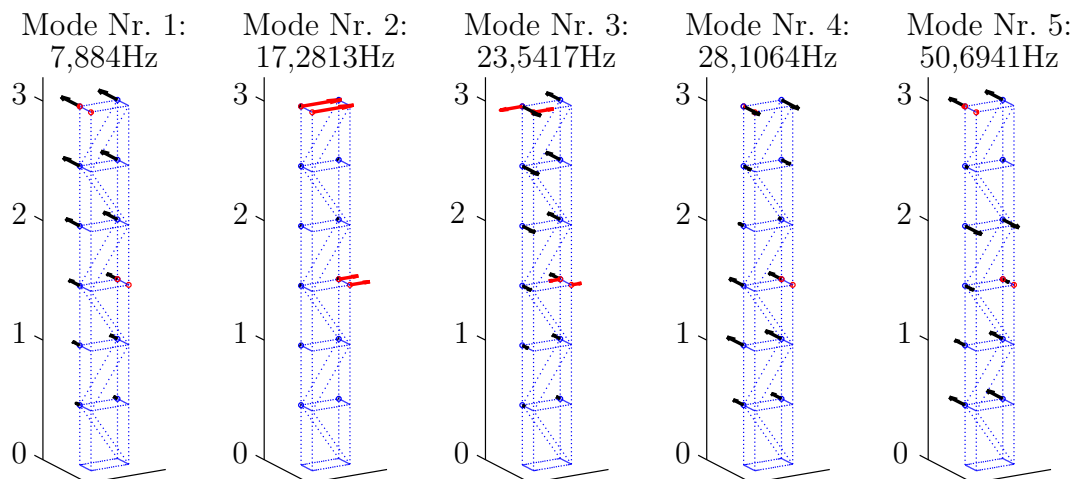


Abbildung 5.10: Mittels OMA bestimmte Eigenschwingungsformen Nr.1 bis 5

Regularisierung verwendet. Daher müssen im Vorfeld Erfahrungen, Vorkenntnisse und Systemverständnis genutzt werden, um die Dimension des Parametervektors so gering wie möglich zu halten.

Im konkreten Anwendungsfall werden als Modellparameter der globale E-Modul und eine Modifikation der Randbedingungen verwendet. Die Randbedingungen werden von einer festen Einspannung hin zu einer elastischen Lagerung mit einer sehr hohen Federsteifigkeit verändert. Der genaue Wert der Federsteifigkeit wird durch das Modell-Updating bestimmt und so an die gemessenen modalen Eigenschaften angepasst. Die Abweichungen der Eigenfrequenzen und die MAC-Matrix für das FE-Modell nach dem Modell-Updating sind in Abb. 5.12 dargestellt. Es ist eine signifikante Verbesserung sichtbar. Zur Schadens-

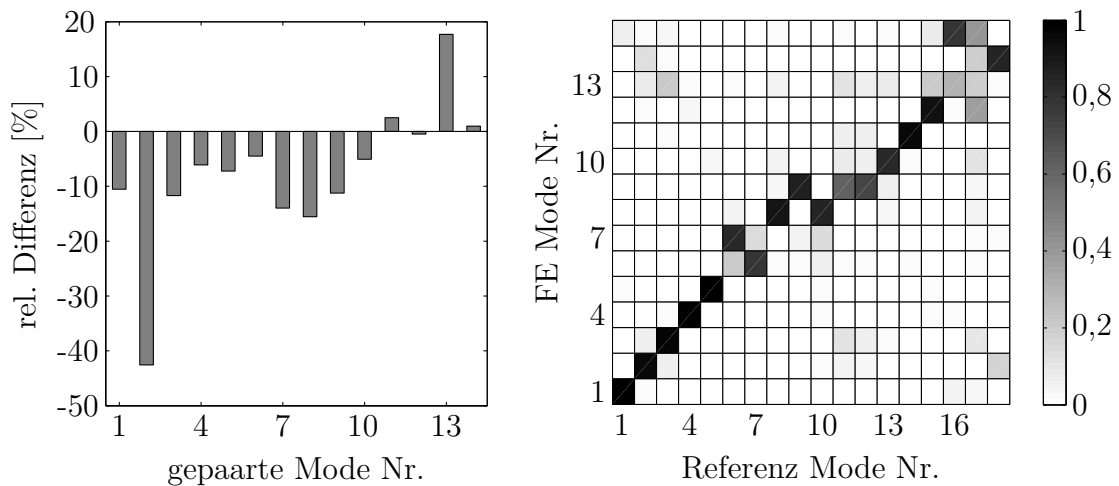


Abbildung 5.11: Vergleich der Eigenfrequenzen (links) und Schwingungsformen (rechts) zwischen FE-Modell und OMA

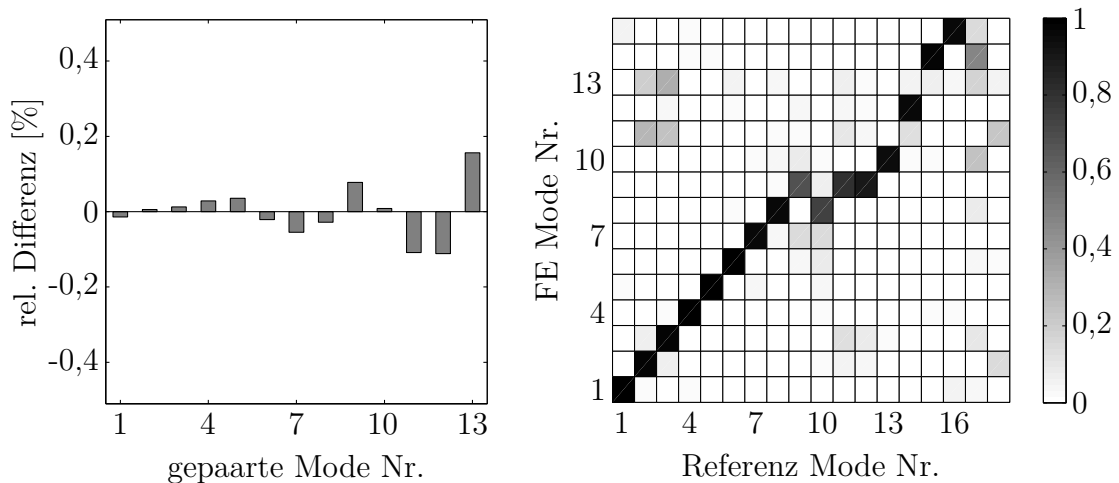


Abbildung 5.12: Vergleich der Eigenfrequenzen (links) und Schwingungsformen (rechts) zwischen updatetem FE-Modell und OMA

detektion werden die Residuen allerdings weiterhin in Bezug auf die modalen Parameter der Trainingsphase gebildet. Lediglich die Sensitivitätsmatrix \mathbf{S} wird mit Hilfe des FE-Modells erzeugt.

Strukturschäden werden für diese experimentelle Untersuchung in Form einer Massenänderung simuliert. Eine Zusatzmasse von 2 kg wird dazu an verschiedenen Stellen der Struktur angebracht. Abb. 5.14 zeigt die Rekonstruktionsergebnisse unter Verwendung der L_1 -Minimierung für drei verschiedene Schadensbilder. Abb. 5.13 stellt exemplarisch die MAC-Matrix und die relative Frequenzverschiebung für das Schadensmuster a) dar. Für dieses Schadensmuster konnten elf Moden miteinander korreliert werden (vgl. MAC-

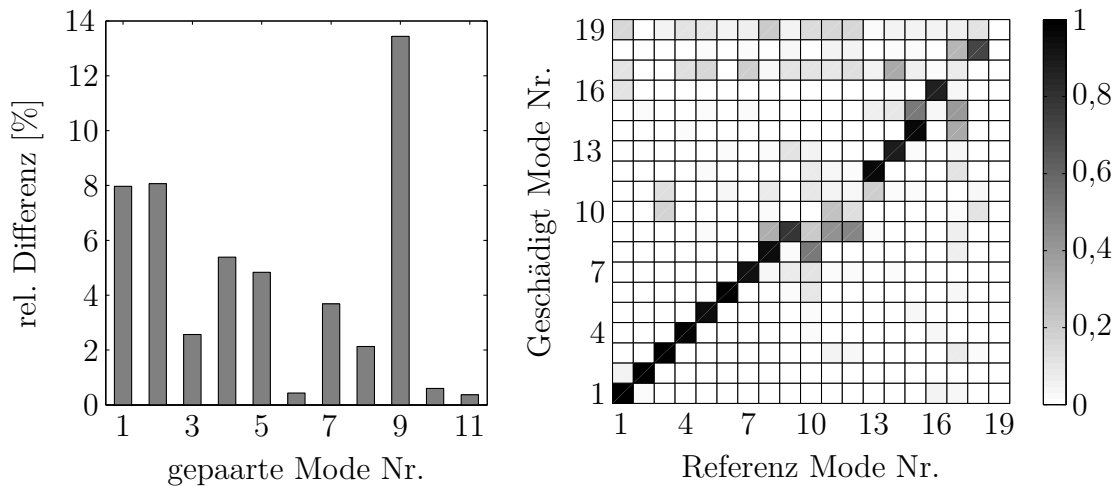


Abbildung 5.13: Änderung der Eigenfrequenzen und Eigenformen aufgrund einer Zusatzmasse von 2 kg am obersten Stabelement

Matrix in Abb. 5.13 rechts). Ausschließlich diese gepaarten Moden können zur Schadensidentifikation herangezogen werden.

Abb. 5.14 zeigt, dass in allen drei Fällen die Position der Zusatzmasse lokalisiert werden kann. Je tiefer diese jedoch an der Struktur angebracht wird, desto größer werden die Abweichungen für den Betrag der Masse. Für Schadensfall c) ist die Masse im mittleren Bereich angebracht. Hier beträgt der Wert der rekonstruierten Masse nur noch 50% des tatsächlichen Wertes. Aufgrund der festen Einspannung am Fußpunkt der Struktur hat eine Zusatzmasse im unteren Bereich nur einen sehr geringen Einfluss auf die Eigenfrequenzen, daher wird eine frequenzbasierte Detektion hier deutlich erschwert.

In Abb. 5.15 sind die Rekonstruktionsresultate der L_1 -Regularisierung den herkömmlichen Lösungsstrategien gegenübergestellt. In diesem Fall wurden zwei Zusatzmassen von je 2 kg im oberen Bereich des Fachwerks angebracht. Mit Hilfe des L_1 -Lösungsansatzes können die Massen korrekt lokalisiert werden. Die Rekonstruktion durch QR-Zerlegung lokalisiert eine Masse korrekt, die zweite Masse wird allerdings einem Stab der falschen Seite des Fachwerks zugeordnet. Mittels des Verfahrens der schrittweisen Regression kann eine Aussage darüber gemacht werden, dass es zu einer Erhöhung der Masse im oberen Bereich gekommen ist. Die genaue Position wird aber nicht identifiziert.

Aufgrund der gezeigten numerischen und experimentellen Untersuchungen wird deutlich, dass durch die Verwendung von L_1 -minimierenden Algorithmen eine Verbesserung zur Lösung des inversen Eigensensitivitätsproblems erzielt werden kann. Die schrittweise Regression identifiziert oftmals zu viele Parameteränderungen mit einem geringen Wert.

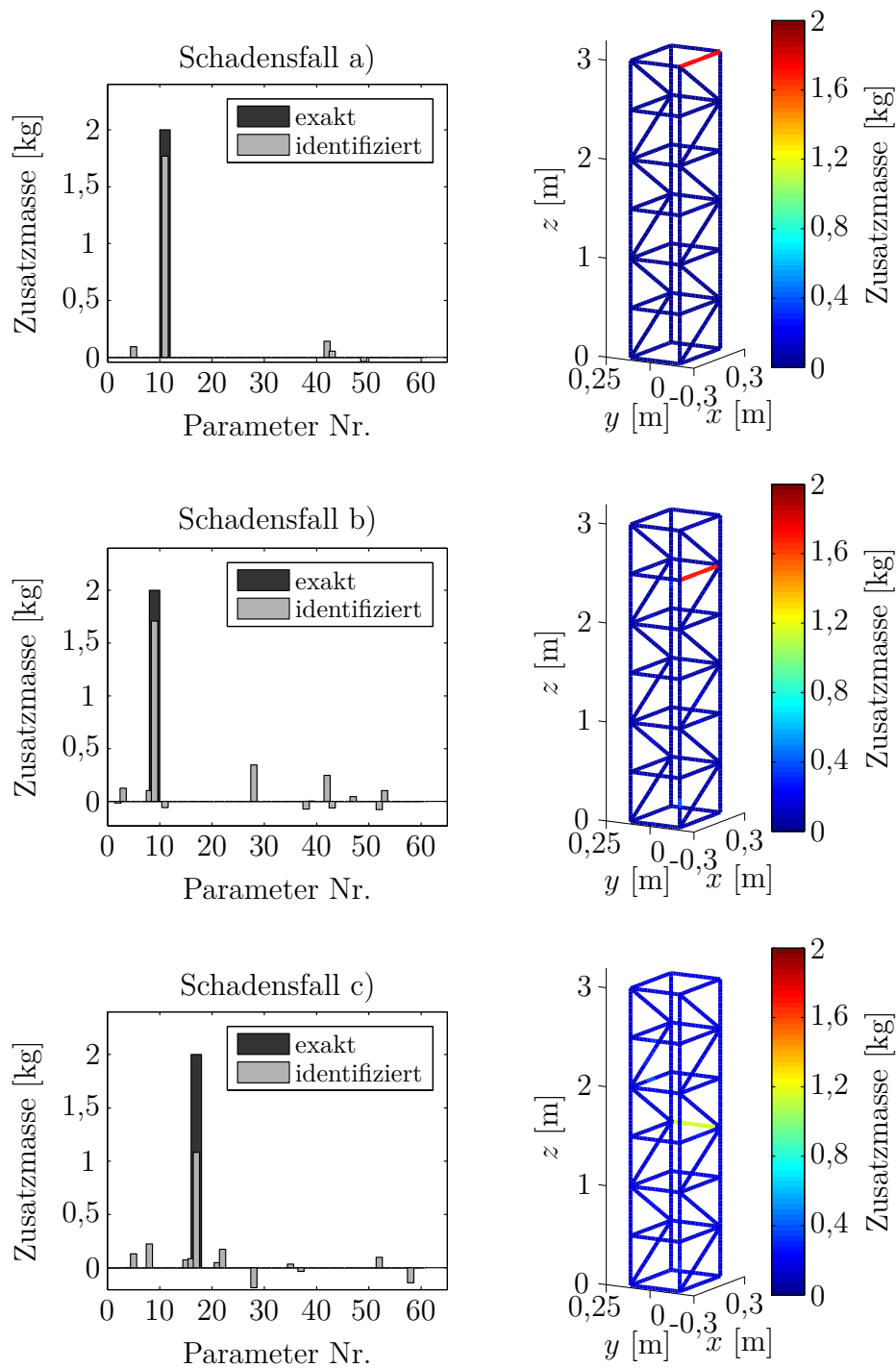


Abbildung 5.14: Experimentelle Rekonstruktionsergebnisse mittels L_1 -Minimierung für drei unterschiedliche Schadensfälle. Links: Identifizierter und exakter Parametervektor; Rechts: Rekonstruiertes Schadensbild

Die QR-Zerlegung hingegen generiert gute Ergebnisse für Schadensmuster bei denen lediglich ein Parameter betroffen ist. Für multiple Schadensfälle lässt die Zuverlässigkeit dieser Lösungsstrategie deutlich nach.

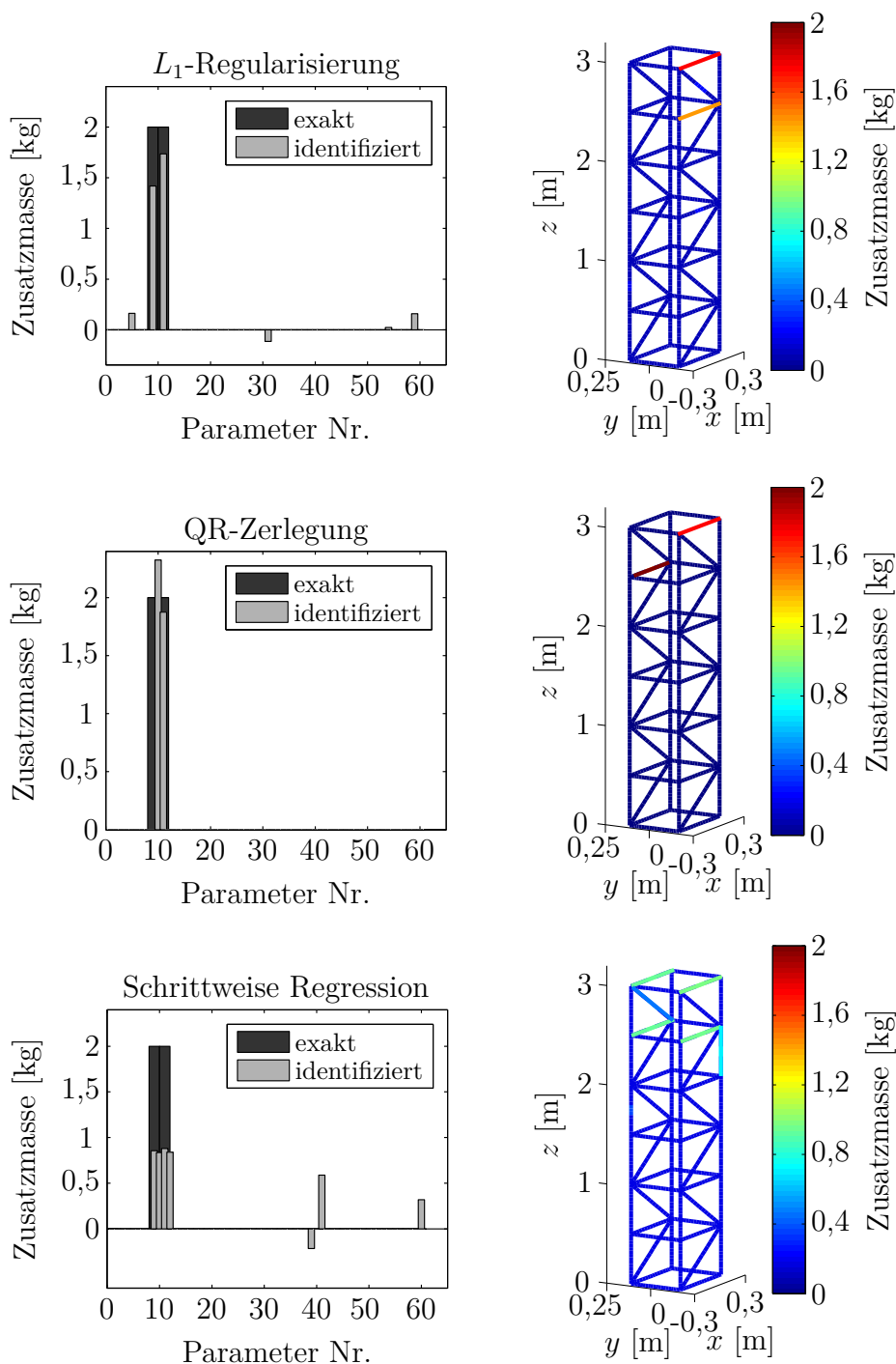


Abbildung 5.15: Vergleich der Rekonstruktion mittels L_1 -Minimierung und herkömmlichen Lösungsverfahren für zwei zusätzliche Massen

Das Lösungsverfahren des inversen Eigensensitivitätsproblems kann zwar mit Hilfe dünnbesetzter Lösungsansätze verbessert werden, eine Reduktion der benötigten Sensoranzahl oder eine grundlegende Modifikation des Schadensidentifikationsprozesses ist allerdings nicht möglich. Probleme bei der Sensorreduktion treten hier beispielsweise für

die Korrelation der Eigenschwingungsformen von verschiedenen Messdurchläufen auf. Zur Korrelation ist eine gute Auflösung der Eigenformen erforderlich. Mit steigender Anzahl an Moden nimmt auch die dazu benötigte Anzahl an Sensoren zu.

5.3 Schadensidentifikation im Zeitbereich

Eine direkte Schadensidentifikation im Zeitbereich bietet den Vorteil, dass keine Bestimmung der modalen Parameter durch einen zusätzlichen Zwischenschritt notwendig ist. Die Zeitrohdaten können direkt zur Identifikation von potentiellen Strukturschäden herangezogen werden. Ein dichtes Sensornetzwerk zur Auflösung der höheren Eigenschwingungsformen, ist im Gegensatz zur zuvor beschriebenen frequenzbasierten Schadensidentifikation nicht zwangsläufig erforderlich.

In den letzten Jahrzehnten wurden bereits diverse Schadensidentifikationsalgorithmen im Zeitbereich entwickelt. Zu den bekanntesten Verfahren zählen u.a. Methoden basierend auf einer Schätzung der kleinsten Fehlerquadrate [Smyth *et al.*, 1999; Yang & Lin, 2005] oder Ansätze, welche spezielle Filteralgorithmen nutzen [Sato & Qi, 1998; Ching *et al.*, 2006; Wu & Wang, 2014]. Für Letzteres ist das Extended Kalman-Filter (EKF) das wohl am häufigsten verwendete Filter, siehe z.B. [Corigliano & Mariani, 2004; Liu *et al.*, 2009; Lei *et al.*, 2013; Ding & Guo, 2016; Chandrasekar *et al.*, 2007].

Die EKF-basierte Schadensparameteridentifikation gehört zur Klasse der modellgestützten Rekonstruktionsansätze. Hier wird ein Referenzmodell der ungeschädigten Struktur in jedem Filterschritt gegenüber dem tatsächlichen System getestet. Im Filterprozess wird der Zustandsvektor typischerweise um den zu schätzenden Schadensparameter erweitert [Seibold, 1995; Liu *et al.*, 2009]. Unter Verwendung des Anregungssignals und der Messdaten für den Systemausgang wird eine Schätzung des Schadenparameters in jedem Filterschritt erhalten.

Auch wenn das ursprüngliche Kalman-Filter als optimales lineares Filter bekannt ist, ist die Schadenparameteridentifikation mittels EKF problematisch. Probleme entstehen zum einen durch einen hohen Rechenaufwand der Linearisierung für große Systeme und vor allem durch eine intrinsische Unterbestimmtheit des inversen Schadenidentifikationsproblems [Zhang *et al.*, 2016].

Um das Problem der Unterbestimmtheit zu überwinden, wird in der Regel der Schadensparameterraum stark reduziert, indem nur Schaden-*Hot-Spots* überwacht werden

oder aber die Anzahl an Sensoren wird drastisch erhöht. Im Folgenden wird ein L_1 -minimierendes EKF-Konzept vorgestellt. Dies erlaubt es, eine Schadensüberwachung an der gesamten Struktur durchzuführen und die erforderliche Anzahl von Sensoren gering zu halten.

5.3.1 Problemformulierung zur Schadensidentifikation im Zeitbereich

Die benötigte Problembeschreibung zur Schadensparameteridentifikation wird in Form eines modifizierten Zustandsraummodells hergeleitet. Eine ähnliche Problemformulierung wurde schon in [Ebrahimian *et al.*, 2015] zur Parameteridentifikation vorgeschlagen. Ausgangspunkt der Herleitung ist eine mechanische Systembeschreibung mit Hilfe der linearen Bewegungsdifferentialgleichung im diskreten Zeitbereich:

$$\mathbf{M}(\Theta_k) \ddot{\mathbf{x}}_k + \mathbf{C}(\Theta_k) \dot{\mathbf{x}}_k + \mathbf{K}(\Theta_k) \mathbf{x}_k = \mathbf{f}_k \quad (5.33)$$

Die Systemmatrizen der Massenmatrix \mathbf{M} , der Dämpfungsmatrix \mathbf{C} und der Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} hängen von dem Schadensparametervektor $\Theta \in \mathbb{R}^{n_p}$ ab. Der Schadensparametervektor Θ beschreibt den Strukturschaden eindeutig nach Position und Schadensausmaß. Die Schadensparameterrevolution und die Messwertgleichung ergeben sich analog zu Gl. (2.2) und Gl. (2.3) für den zeitdiskreten Bereich zu:

$$\Theta_{k+1} = \Gamma(\Theta_k, \mathbf{x}_k, \dot{\mathbf{x}}_k, k) \quad (5.34)$$

$$\mathbf{y}_k = \eta(\Theta_k, \mathbf{f}_k, \mathbf{x}_k, \dot{\mathbf{x}}_k, k) \quad (5.35)$$

Der Einfluss der EOCs wurde an dieser Stelle vernachlässigt.

Wie bereits in Abschnitt 2.1.1 erwähnt, findet die Schadensevolution und die Strukturschwingung auf einer unterschiedlichen Zeitskala statt. Zwar können durch z.B. Stoßbelastungen Strukturschäden plötzlich auftreten, die anschließende Schadensentwicklung ist aber wiederum ein vergleichsweise langsamer Prozess. Daher kann der Schadensparameter als nahezu konstant über einen kurzen Messzeitraum angesehen werden und es ist gerechtfertigt, die Schadensevolution aus Gl. (5.34) durch einen Random-Walk zu beschreiben:

$$\Theta_{k+1} = \Theta_k + \omega_k \quad (5.36)$$

Das Prozessrauschen $\boldsymbol{\omega}_k \in \mathbb{R}^{n_p}$ des Random-Walk ist eine stochastische, mittelwertfreie Größe mit der Kovarianz $\tilde{\mathbf{Q}}_k$:

$$\mathbb{E} \{ \boldsymbol{\omega}_k \boldsymbol{\omega}_k^T \} = \tilde{\mathbf{Q}}_k \quad (5.37)$$

Die Messwertgleichung (5.35) kann alternativ, ausgehend von den dynamischen Anfangsbedingungen $\mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_0$ und dem Anregungsverlauf

$$[\mathbf{F}]_k = \left[\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_k \right]^T, \quad (5.38)$$

geschrieben werden als:

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{h}(\boldsymbol{\Theta}_k, [\mathbf{F}]_k, \mathbf{x}_0, \dot{\mathbf{x}}_0, k) + \boldsymbol{\nu}_k \quad (5.39)$$

Diese Art der Beschreibung integriert die Bewegungsdifferentialgleichung aus Gl. (5.33) implizit in die Messwertgleichung. Darüber hinaus wird Messrauschen durch $\boldsymbol{\nu}_k \in \mathbb{R}^{n_r}$ berücksichtigt, mit der Kovarianz $\tilde{\mathbf{R}}_k$ und $\boldsymbol{\nu}_k \sim N(\mathbf{0}, \tilde{\mathbf{R}}_k)$. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird ohne Verlust der Allgemeinheit angenommen, dass die Anfangsbedingungen $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ und $\dot{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{0}$ gelten, sodass auf die Abhängigkeit der Messgleichung bezüglich dieser Größen im Folgenden verzichtet wird.

Die Kombination aus Gl. (5.36) und Gl. (5.39) kann nun als stochastisches Zustandsraummodell interpretiert werden. Der Random-Walk stellt die Systemgleichung dar und Gl. (5.39) die nichtlineare Messwertgleichung. Die Systemmatrix des Zustandsraummodells entspricht für den Random-Walk der Einheitsmatrix. Der Schadensparametervektor $\boldsymbol{\Theta}_k$ bildet den Zustandsvektor des hergeleiteten Modells.

5.3.2 L_1 -minimierendes Extended Kalman-Filter

Zur Schätzung des Schadenparameters bzw. des Zustandsvektors $\boldsymbol{\Theta}$ des hergeleiteten nichtlinearen Zustandsraummodells wird das Extended Kalman-Filter verwendet. Definiert man die Schadensparameter Θ_j , mit $j = 1, 2, \dots, n_p$, wie bereits zuvor in Gl. (5.3) zur Beschreibung der schadensinduzierten Steifigkeitsreduktion, kann man erneut davon ausgehen, dass der Parametervektor dünnbesetzt ist. Analog zum Vorgehen von Loffeld *et al.* in [Loffeld *et al.*, 2015] und [Loffeld *et al.*, 2016] wird die Vorkenntnis genutzt, dass der Zustandsvektor dünnbesetzt sein wird. Diese Information wird in Form einer zusätzlichen nichtlinearen Beobachtung in das Zustandsraummodell integriert. Zu diesem Zweck wird die L_1 -Norm des Zustands als weiterer skalarer Messwert $\gamma_k \in \mathbb{R}$ herangezogen:

$$\gamma_k = \|\boldsymbol{\Theta}_k\|_1 = \sum_{j=1}^{n_p} |\Theta_{j,k}| \quad (5.40)$$

Ausgehend von $\gamma_0 = \|\Theta_0\|_1$ wird der fiktive Messwert γ_k in jeden Filterschritt um den Faktor α_1 reduziert:

$$\gamma_{k+1} = \alpha_1 \|\Theta_k\|_1 \quad \text{mit} \quad 0 < \alpha_1 < 1 \quad (5.41)$$

Der Faktor α_1 wird als Filterinput vorgegeben. Die zusätzliche Beobachtung aus Gl. (5.41) führt dazu, dass die L_1 -Norm in jedem Filterschritt an den vorgegebenen fiktiven Messwert γ_k angepasst wird. Daher wird der Zustandsvektor im Verlauf des Filterprozesses zunehmend dünnbesetzter. Für die nun erhaltene erweiterte Beobachtungsgleichung gilt:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{y}_k \\ \gamma_k \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{y}}_k} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{h}(\Theta_k, [\mathbf{F}]_k, k) \\ \|\Theta_k\|_1 \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{h}}(\Theta_k, [\mathbf{F}]_k, k)} + \underbrace{\begin{bmatrix} \boldsymbol{\nu}_k \\ v_k \end{bmatrix}}_{\tilde{\boldsymbol{\nu}}_k} \quad (5.42)$$

Der neue Messwertvektor $\tilde{\mathbf{y}}_k$ wurde durch Erweiterung der tatsächlichen Messwerte \mathbf{y}_k mit der fiktiven L_1 -Norm γ_k erhalten. So können im Filteralgorithmus sowohl die Messwerte \mathbf{y}_k als auch die Minimierung der L_1 -Norm berücksichtigt werden. Die stochastische Größe $v_k \in \mathbb{R}$, mit

$$\mathbb{E}\{v_k v_k\} = R_k^{L_1}, \quad (5.43)$$

spiegelt die Unsicherheit der zusätzlichen L_1 -minimierenden Beobachtungsgleichung wider. Außerdem kann $R_k^{L_1} \in \mathbb{R}$ als Gewichtungparameter zwischen einer bestmöglichen Datenanpassung und einem möglichst dünnbesetzten Schadensparametervektor interpretiert werden.

Der Random-Walk (5.36) und die neue Beobachtungsgleichung (5.42) können nun gemeinsam als erweitertes Zustandsraummodell genutzt werden. Das EKF wird an dieser Stelle zur Zustandsschätzung dieses nichtlinearen Modells verwendet, um eine L_1 -minimale Rekonstruktion des Parametervektors Θ zu generieren. Das EKF ist von seiner Struktur weitgehend analog zu dem in Abschnitt 2.3 vorgestellten rekursiven Filteralgorithmus des klassischen Kalman-Filters für lineare Systeme. Da die Zustandsgleichung linear und die Systemmatrix die Einheitsmatrix ist, ergibt sich für den Prädiktor-Schritt:

$$\hat{\Theta}_k^- = \hat{\Theta}_{k-1} \quad (5.44)$$

$$\hat{\mathbf{P}}_k^- = \hat{\mathbf{P}}_{k-1} + \mathbf{Q}_k \quad (5.45)$$

Mit Hilfe der Startwerte für $\hat{\Theta}_0$ und $\hat{\mathbf{P}}_0$ wird in jedem Schritt k eine Prädiktion des Zustandes $\hat{\Theta}_k^-$ und der zugehörigen Kovarianz $\hat{\mathbf{P}}_k^-$ erzeugt.

Im Korrektor-Schritt wird die Prädiktion mit Hilfe der Kalman-Matrix \mathcal{K}_k an die aktuellen Messdaten und die um den Faktor α_1 reduzierte L_1 -Norm angepasst:

$$\hat{\Theta}_k = \hat{\Theta}_k^- + \mathcal{K}_k \Delta \tilde{\mathbf{y}}_k \quad (5.46)$$

Die Messwertinnovation $\Delta \tilde{\mathbf{y}}_k$ wird durch

$$\Delta \tilde{\mathbf{y}}_k = \tilde{\mathbf{y}}_k - \tilde{\mathbf{h}} \left(\hat{\Theta}_k^-, [\mathbf{F}]_k, k \right) \quad (5.47)$$

berechnet. Die Kalman-Matrix \mathcal{K}_k ergibt sich aus der Gleichung

$$\mathcal{K}_k = \hat{\mathbf{P}}_k^- \mathbf{H}_k^T \left(\mathbf{H}_k \hat{\mathbf{P}}_k^- \mathbf{H}_k^T + \tilde{\mathbf{R}}_k \right)^{-1}, \quad (5.48)$$

und die korrigierte Kovarianz $\hat{\mathbf{P}}_k$ aus:

$$\hat{\mathbf{P}}_k = (\mathbf{I} - \mathcal{K}_k \mathbf{H}_k) \hat{\mathbf{P}}_k^- \quad (5.49)$$

Die Jacobi-Matrix \mathbf{H}_k stellt die Linearisierung der nichtlinearen Messwertgleichung um die in der Prädiktion vorhergesagten Zustände $\hat{\Theta}_k^-$ dar:

$$\mathbf{H}_k = \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial \mathbf{h}(\Theta_k, [\mathbf{F}]_k, k)}{\partial \Theta} \right|_{\Theta = \hat{\Theta}_k^-} \\ \left. \frac{\partial \|\Theta_k\|_1}{\partial \Theta} \right|_{\Theta = \hat{\Theta}_k^-} \end{bmatrix} \quad (5.50)$$

Die Linearisierung der L_1 -Norm

$$\frac{\partial \|\Theta\|_1}{\partial \Theta} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \|\Theta\|_1}{\partial \Theta_1} & \frac{\partial \|\Theta\|_1}{\partial \Theta_2} & \dots & \frac{\partial \|\Theta\|_1}{\partial \Theta_{n_p}} \end{bmatrix}, \quad (5.51)$$

kann für reelle Zahlen analytisch mittels der Signumfunktion, mit den in Gl. (5.52) gezeigten Eigenschaften, berechnet werden:

$$\frac{\partial \|\Theta\|_1}{\partial \Theta_j} = \text{sign}(\Theta_j) \quad \text{mit} \quad \text{sign}(\Theta_j) = \begin{cases} 1 & \text{für } \Theta_j > 0 \\ 0 & \text{für } \Theta_j = 0 \\ -1 & \text{für } \Theta_j < 0 \end{cases} \quad (5.52)$$

Durch die Linearisierung der Messwertgleichung $\mathbf{h}(\cdot)$ wird die Sensitivität der Systemausgänge \mathbf{y}_k bzgl. der Schadensparameter angegeben. Die Sensitivität kann entweder numerisch durch die Methode der Finiten Differenzen bestimmt werden oder für lineare Bewegungsgleichungen analytisch, durch das in Abschnitt 5.3.3 gezeigte Verfahren, ermittelt werden.

Da Strukturschäden normalerweise keinen direkten Einfluss auf die Messungen zum selben spezifischen Zeitschritt k haben, wird eine Erweiterung des tatsächlichen Messwertvektors \mathbf{y}_k vorgeschlagen. Durch diese Erweiterung werden mehrere Messwerte in jedem Filterschritt verarbeitet:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}_k \\ \mathbf{y}_{k+1} \\ \mathbf{y}_{k+2} \\ \vdots \\ \mathbf{y}_{k+l} \end{bmatrix} = \mathbf{h}^l(\Theta_k, [\mathbf{F}]_k, k, l) + \mathbf{v}_k^l \quad (5.53)$$

Durch diese *en bloc*-Verarbeitung von Messdaten arbeitet das Filter im strengen Sinne nicht mehr in Echtzeit, sondern mit einer Zeitverzögerung $t_l = l\Delta t$ in der Vergangenheit.

5.3.3 Sensitivität von Systemausgängen im Zeitbereich

Das in Abschnitt 5.3.2 gezeigte EKF muss lediglich die nichtlineare Messausgangsgleichung linearisieren, da die Systemgleichung bereits linear ist. Die benötigte Sensitivität der Systemausgänge $\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \Theta_j}$ kann ausgehend von der üblichen Zustandsraumbeschreibung der linearen Bewegungsgleichung (5.33) hergeleitet werden (siehe hierzu die Gln. (2.12)-(2.13) oder (2.24)-(2.25)). Die Herleitung der Sensitivität orientiert sich im Folgenden an [Jennewein, 1999].

Die Sensitivität ergibt sich aus der Ableitung der System- und Messwertgleichung nach den Schädigungsparametern Θ_j . Nach Berücksichtigung der Produktregel und dem Satz von Schwarz erhält man für die Systemgleichung:

$$\left(\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \Theta_j} \right)^\bullet = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \Theta_j} \mathbf{z} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \Theta_j} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \Theta_j} \mathbf{u} \quad (5.54)$$

Die Sensitivität der Systemausgänge $\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \Theta_j}$ ergibt sich aus der Ableitung der Messwertgleichung:

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \Theta_j} = \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \Theta_j} \mathbf{z} + \mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \Theta_j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \Theta_j} \mathbf{u} \quad (5.55)$$

Die Zustandsgleichung (2.12) und deren Ableitung (5.54) können in einer Differentialgleichung zusammengefasst werden:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \Theta_j} \end{bmatrix}^\bullet = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \Theta_j} & \mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \Theta_j} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \Theta_j} \end{bmatrix} \mathbf{u} \quad (5.56)$$

Bei bekannten Anfangsbedingungen \mathbf{z}_0 und $\left. \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \Theta_j} \right|_{\mathbf{z}_0}$ können so beide Gleichungen gemeinsam integriert werden. Ist damit der Verlauf des Zustands \mathbf{z} und dessen Ableitung $\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \Theta_j}$ bestimmt, kann mit Hilfe der Gl. (5.55) der Verlauf der Ausgangssensitivität $\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \Theta_j}$ berechnet werden.

Um Rechenzeit einzusparen kann alternativ auch die Systemgleichung (2.12) vorab separat integriert werden und der berechnete Zustand \mathbf{z} als Eingangsgröße folgender Differentialgleichung genutzt werden:

$$\left(\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \Theta_j} \right)^{\bullet} = \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \Theta_j} + \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \Theta_j} & \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \Theta_j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} \quad (5.57)$$

So wird die Sensitivität für jeden Schadensparameter getrennt bestimmt.

Die Gln. (2.15) und (2.17) zeigen, dass zu Berechnung der Ableitung der Systemmatrizen \mathbf{A} und \mathbf{B} die partielle Ableitung der inversen Massenmatrix \mathbf{M} benötigt wird. Für eine nichtsinguläre Massenmatrix gilt:

$$\frac{\partial \mathbf{M}^{-1}}{\partial \Theta_j} = \mathbf{M}^{-1} \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial \Theta_j} \mathbf{M}^{-1} \quad (5.58)$$

Ist die Zustandsgleichung wie in den Gln. (2.24) und (2.25) in Modalkoordinaten formuliert, erfordert die Ableitung der Systemmatrizen die Berechnung der Eigenfrequenzsensitivität und der Eigenvektorsensitivität, wie sie bereits in Abschnitt 5.2.2 beschrieben ist. Für die Ableitung der Systemmatrix $\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \Theta_j}$ ergibt sich dann unter Zuhilfenahme von Gl. (2.23):

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \Theta_j} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\frac{\partial \lambda_i}{\partial \Theta_j} & - \left[2 \frac{\partial \omega_i}{\partial \Theta_j} \xi_i + \omega_i \left(-\frac{\alpha_p}{\omega_i^2} \frac{\partial \omega_i}{\partial \Theta_j} + \beta_p \frac{\partial \omega_i}{\partial \Theta_j} \right) \right] \end{bmatrix} \quad (5.59)$$

Die Ableitung der Eingangsmatrix \mathbf{B} lautet für massennormierte Eigenvektoren:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \Theta_j} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial \Theta_j} \right)^T \end{bmatrix} \quad (5.60)$$

Analog können die Ableitungen $\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \Theta_j}$ und $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \Theta_j}$ der Messwertgleichung berechnet werden.

Muss an Stelle der linearen Bewegungsgleichung (5.33) die allgemeine nichtlineare Bewegungsgleichung aus Gl. (2.1) verwendet werden, ist zwar eine Schadenparameteridentifikation mittels des vorgeschlagenen EKF-Konzepts weiterhin zulässig. Allerdings ist das gezeigte Verfahren zur Bestimmung der Sensitivitäten der Systemausgänge $\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \Theta_j}$

nicht anwendbar. In diesem Fall müssen die Sensitivitäten durch Linearisierung mittels der Methode der Finiten Differenzen berechnet werden.

Ungeachtet des genutzten Linearisierungsverfahrens kann die Rechenzeit reduziert werden, falls nur in jedem zweiten oder dritten Filterschritt die Jacobi-Matrix \mathbf{H}_k neu bestimmt und angepasst wird. Dies stabilisiert darüber hinaus den Filterprozess zu Beginn der Rekonstruktion.

5.3.4 Simulationsstudien

Die Rekonstruktionseigenschaften werden im Folgenden durch Simulationsstudien an einer einfachen Plattenstruktur gezeigt. Bei dem verwendeten Strukturmodell handelt es sich um dieselbe FE-Modellierung wie sie bereits in Abschnitt 4.5 zum Einsatz gekommen ist, mit 144 Knoten und 121 linearen Schalenelementen (siehe Abb. 4.17). Um allerdings den Einfluss einer Lagerung auf die Schadensidentifikation darzustellen, wird hier die Aluminiumplatte allseitig fest eingespannt. Das modal-reduzierte Modell beschreibt, mit Hilfe der verwendeten ersten 30 Moden, Vibrationen bis zu 450 Hz. Die Abtastrate beträgt 5 kHz. Zu Beginn werden lediglich fünf Beschleunigungssensoren zur Schadensdetektion genutzt. Die Positionierung der Sensoren erfolgt erneut mittels EIM, sodass die Beschleunigungssignale an den Knoten Nr. 28, 65, 70, 91 und 112 senkrecht zur Plattenebene aufgezeichnet werden. Angeregt wird die Struktur durch einen impulsförmigen Kraftverlauf an verschiedenen, zufällig definierten Plattenpositionen, ebenfalls senkrecht zur Platte. Die so simulierte Strukturantworten sind durch weißes Rauschen mit einer Standardabweichung von 3% vom maximalen Beschleunigungswert überlagert.

In einer ersten Simulationsstudie wurde ein Schaden in Form einer Steifigkeitsreduktion von Element Nr. 81 um 20% eingebracht. Die Platte wird durch eine impulsförmige Kraft mit bekanntem zeitlichen Verlauf senkrecht zur Plattenoberfläche am Knoten Nr. 67 angeregt. Abb. 5.16 zeigt das Identifikationsergebnis. Im linken Teil ist die Schadensparameterentwicklung von Element Nr. 81 über die Zeit aufgetragen. Es ist zu erkennen, dass ausgehend von den Anfangsbedingungen ($\Theta_0 = \mathbf{0}$) der Parameter des geschädigten Elements gegen den tatsächlichen Wert für die Steifigkeitsreduktion konvergiert. Im rechten Teil der Abb. 5.16 sind die Werte für alle Schadensparameter am Ende des Simulationsdurchlaufes dargestellt. Alle übrigen Parameter erreichen Werte nahe null. Somit wird der Schaden lokalisiert und quantifiziert.

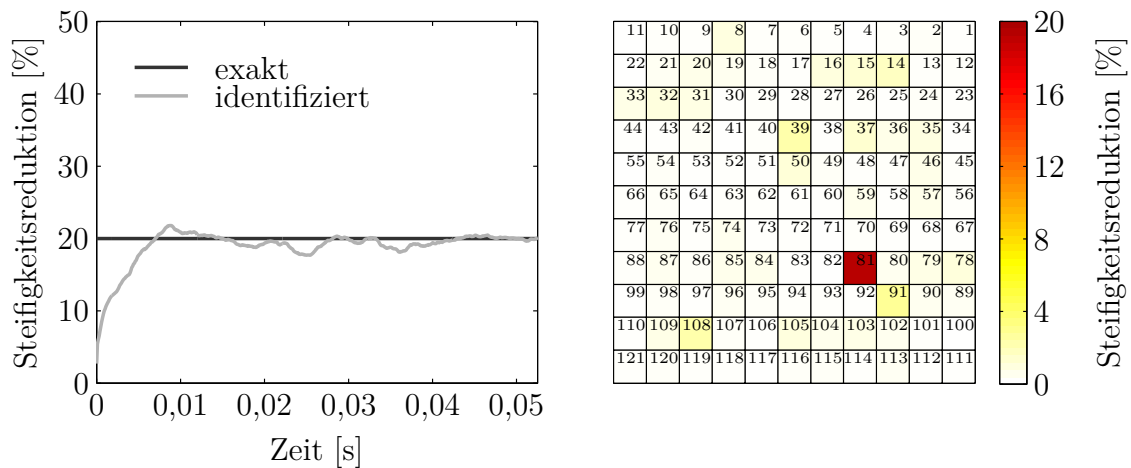


Abbildung 5.16: Ergebnis der Schadensidentifikation; Links: Schadensentwicklung des Schadensparameter Nr. 81; Rechts: geschätzte Steifigkeitsreduktion für alle Elemente am Ende der Simulationszeit

Abb. 5.17 vergleicht die Rekonstruktionsergebnisse der Schadensparameteridentifikation für das vorgeschlagene Extended-Kalman Filterverfahren mit und ohne zusätzlicher L_1 -minimierender Beobachtung. Es wird deutlich, dass ohne die L_1 -Beobachtung kein klares Schadensbild erzielt werden kann (linker Teil der Abbildung). Obwohl der rekonstruierte Parameter für das Element Nr. 81 nahezu den korrekten Wert wiedergibt, werden darüber hinaus noch viel mehr Elementsteifigkeitsänderungen (sowohl Zunahmen als auch Reduktionen) identifiziert. Auf der rechten Seite von Abb. 5.17 kann deutlich zwischen geschädigten und ungeschädigten Elementen unterschieden werden. Die zusätzliche L_1 -Beobachtung stabilisiert somit die Lösung und führt zu einem klaren Schadensbild, da so eine dünnbesetzte Lösung erzeugt wird.

Im nächsten Schritt wird ein Szenario mit multiplen Schäden untersucht. Hier wird der Strukturschaden durch eine Steifigkeitsreduktion verschiedener Elemente unterschiedlicher Größe modelliert. Dies bedeutet, dass der zu identifizierende Schadensparametervektor etwas dichterbesetzt sein muss, als im Falle einer Einzelelementsteifigkeitsreduktion.

Abb. 5.18 zeigt die Ergebnisse der Schadensidentifikation am Ende der Simulation für zwei bzw. drei geschädigte Elemente. In beiden Fällen wird eine ähnliche eindeutige Schadensidentifikation wie bereits zuvor generiert. In Abb. 5.19 wird ein Schadensszenario simuliert, bei dem eine größere Fläche durch mehrere Elementsteifigkeitsreduktionen geschädigt ist. Im linken Teil der Abbildung ist das tatsächliche Schadensmuster darge-

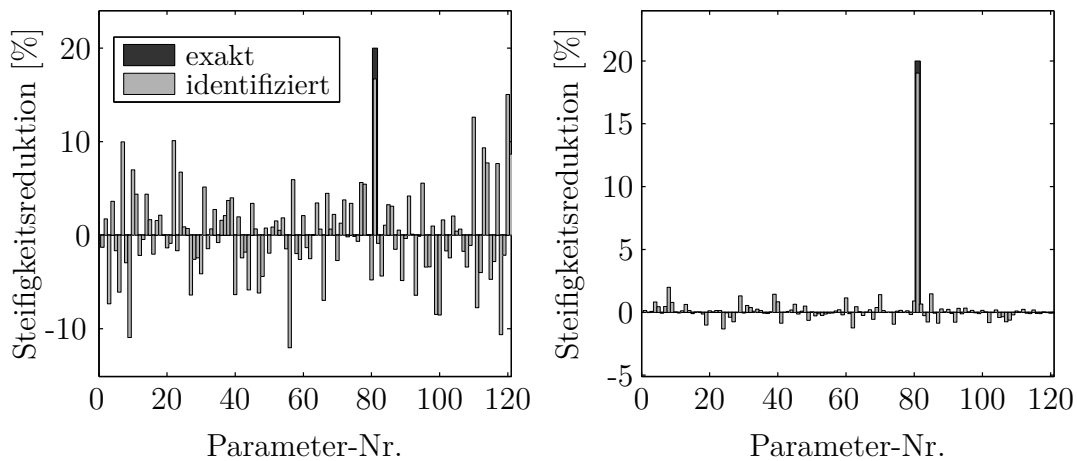


Abbildung 5.17: Vergleich der Schadensparameterschätzung; Links: Kalman-Filter-Rekonstruktion ohne zusätzliche L_1 -Beobachtung; Rechts: Rekonstruktionsergebnis mit L_1 -minimierender Beobachtung

stellt. Das identifizierte Schadensmuster auf der rechten Seite stimmt mit diesem überein. Neben den eigentlichen Schadenselementen weisen nur wenige andere Elemente eine vernachlässigbare Steifigkeitsänderung auf.

Monte-Carlo Simulation

Bei den bisher gezeigten Rekonstruktionsergebnissen handelt es sich um ausgewählte Schadensmuster. Für eine statistische Validierung wird auch hier eine Monte-Carlo-Simulation analysiert. Zu diesem Zweck werden 5000 Simulationsdurchläufe mit verschiedenen Schadensszenarien durchgeführt. In jedem der 5000 Durchläufe wird ein einzelner Schaden in die Struktur eingebracht, indem die Steifigkeit nur eines Elements reduziert wird. Der Schadensort wird dabei zufällig, gleichverteilt über alle Elemente gewählt. Das Schadensausmaß ist ein gaußverteilter Zufallsparameter mit einem Mittelwert von 25% Steifigkeitsreduktion und einer Standardabweichung von 5%.

Die Ergebnisse dieser Monte-Carlo Simulation sind in Abb. 5.20 dargestellt. Im rechten Teil ist für jedes Element die im Mittel auftretende Abweichung des rekonstruierten Schadensausmaßes gezeigt. Die Ergebnisse zeigen eindeutig eine schlechte Leistung für die Rekonstruktion eines Schadens der Randelemente. Da die Platte an allen Seiten festgespannt ist, sind die Strukturantworten an diesen Stellen sehr gering und schwingungsbasierte Ansätze können dort nur sehr begrenzt zur Schadensdetektion eingesetzt werden.

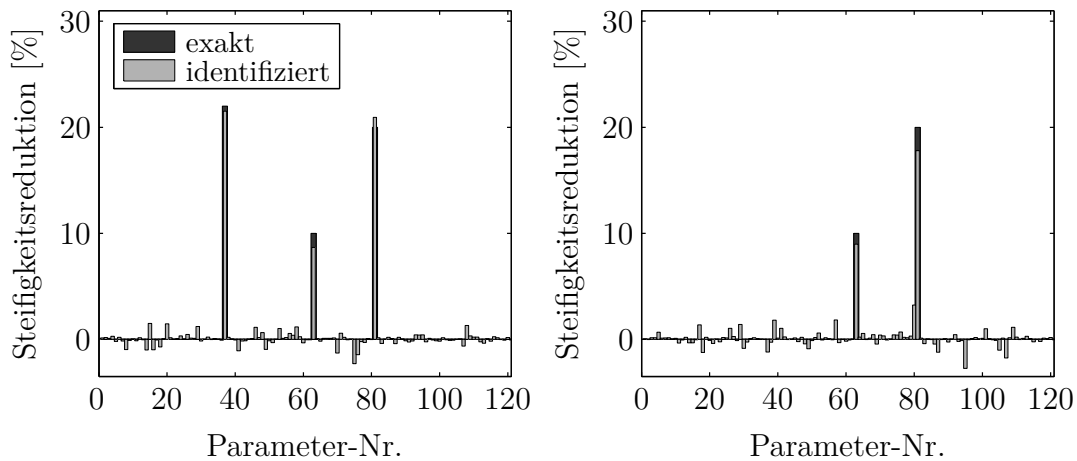


Abbildung 5.18: Multiple Steifigkeitsreduktion; Links: Zwei geschädigte Elemente Nr. 63 und 81; Rechts: Drei geschädigte Elemente Nr. 37, 63 und 81

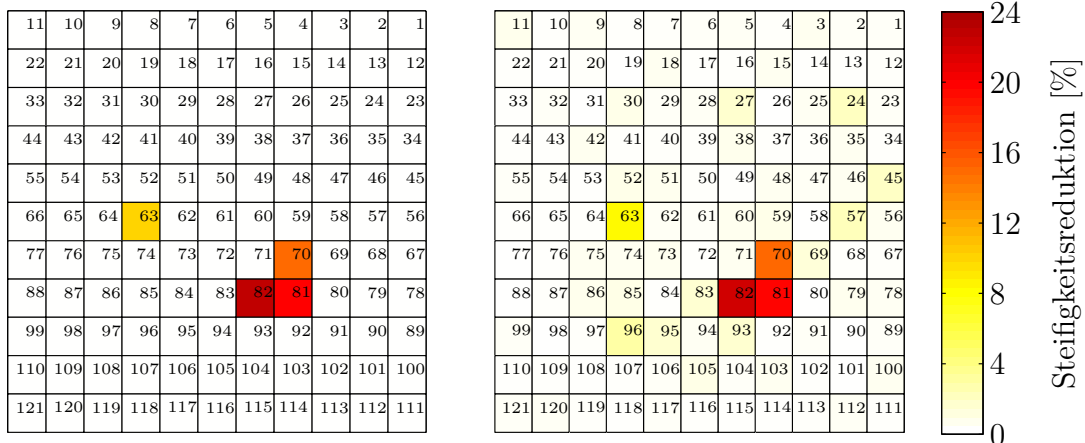


Abbildung 5.19: Schadensidentifikation für eine großflächige Steifigkeitsreduktion; Links: Tatsächliches Schadensmuster; Rechts: Identifiziertes Schadensmuster

Die Schadensidentifikation ist allerdings für alle Elemente im inneren der Platte sehr zuverlässig. Der linke Teil von Abb. 5.20 zeigt, dass der mittlere Schätzfehler für alle inneren Elemente deutlich unterhalb von 10% liegt. Darüber hinaus wird der Schadensort stets korrekt wiedergegeben. Lediglich an den schwarz gekennzeichneten Eckelementen ist eine korrekte Lokalisation nicht möglich.

Abb. 5.21 zeigt die Ergebnisse einer weiteren Monte-Carlo Simulation. In dieser Simulationsstudie wird der Einfluss der Sensoranzahl und der Anzahl von geschädigten Elementen analysiert. In Abb. 5.21 ist links der Anteil der Simulationsdurchläufe, welche das Schadensmuster korrekt lokalisieren, über der Anzahl der geschädigten Elemente aufgetragen. Auf der rechten Seite ist der gemittelte Fehler des rekonstruierten Schadens-

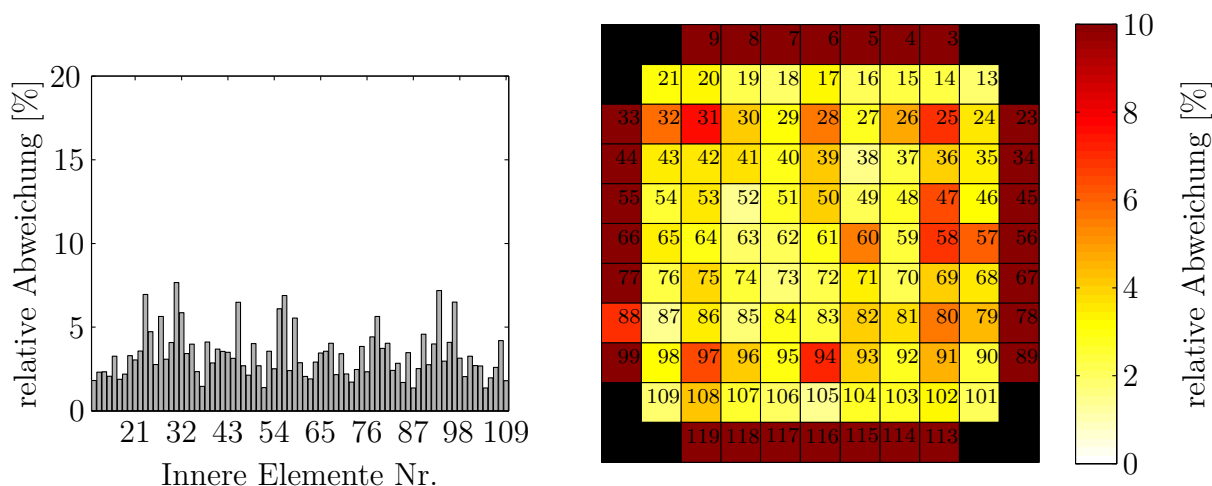


Abbildung 5.20: Resultat der Monte-Carlo Simulation für jeweils ein geschädigtes Element: Rechts: Darstellung der gemittelten Abweichung; Links: Mittlere Abweichung der inneren Strukturelemente

ausmaßes für die korrekt lokalisierten Simulationsdurchläufe dargestellt. Die Ergebnisse sind für eine Anzahl von fünf, acht und zwölf Beschleunigungssensoren dargestellt. Alle drei Sensorkonfigurationen wurden mittels EIM positioniert. Für jede Konfiguration wurden jeweils 2500 Simulationsdurchläufe durchgeführt.

Bis zu einer Anzahl von zehn geschädigten Elementen kann der Schaden für alle drei Sensorkonfigurationen zuverlässig rekonstruiert werden. Werden lediglich fünf Sensoren verwendet, sinkt die Zuverlässigkeit ab einer Anzahl von 14 Schäden signifikant. Aus Abb. 5.21 wird deutlich, dass durch die Verwendung von mehr Sensoren allerdings die Anzahl an detektierbaren Schäden erhöht werden kann. Einen ähnlichen Abfall der Rekonstruktionsgenauigkeit mit steigender Anzahl an Lösungselementen ungleich null wurde auch schon in [Loffeld *et al.*, 2015] und [Loffeld *et al.*, 2016] beschrieben. Hier zeigt sich ebenfalls, dass bis zu einem gewissen Grad der *sparsity* die Lösung sehr Zuverlässig (>99%) richtig gefunden wird, darüber hinaus die Rekonstruktionsgenauigkeit aber stark abfällt.

5.3.5 Kompensation von Modellfehlern

Da die vorgeschlagene Schadensidentifikation im Zeitbereich den modellbasierten Ansätzen zuzuordnen ist, werden Modellfehler einen Einfluss auf die Rekonstruktionsergebnisse haben. Bei vielen praktischen Anwendungen gibt es Modellparameter, welche nicht ein-

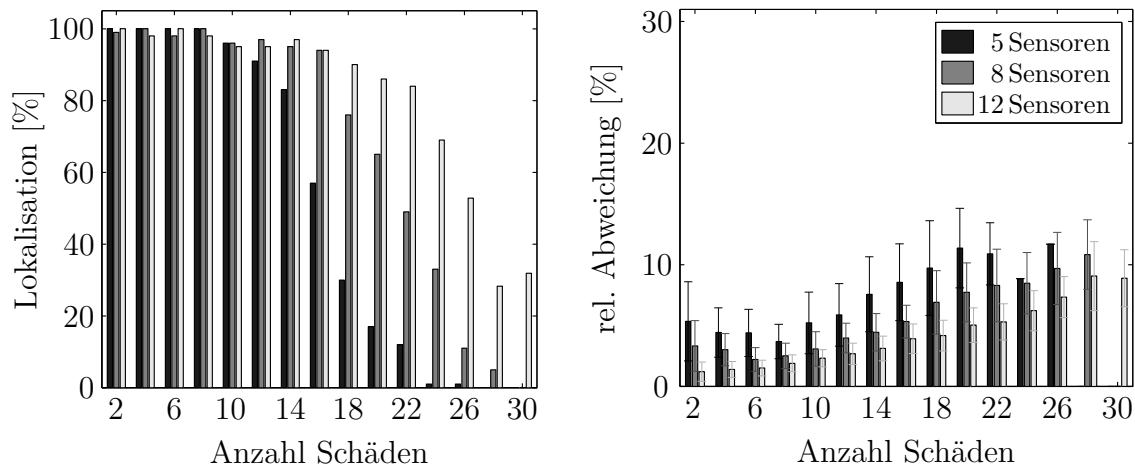


Abbildung 5.21: Einfluss der Sensoranzahl und der Anzahl an Schäden auf die Lokalisation (links) und auf die Rekonstruktion des Schadensausmaßes (rechts)

deutig bekannt sind und daher gewissen Unsicherheiten unterworfen sind. Hierzu zählt häufig z.B. der globale Elastizitätsmodul, die Massendichte oder die korrekte Definition der Randbedingungen.

Um mögliche Modellfehler zu kompensieren, können mit Unsicherheiten behaftete Modellparameter ebenfalls in den Rekonstruktionsprozess integriert werden. So passt der EKF-Algorithmus die unbekannt Modellparameter an die Messdaten an. Zu diesem Zweck muss der Schadensparametervektor Θ um die Modellparameter Θ_i^m , $i = 1, 2, \dots, n_e$, erweitert werden:

$$\tilde{\Theta} = \left[\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_{n_p}, \Theta_1^m, \dots, \Theta_{n_e}^m \right] \quad (5.61)$$

Der erweiterte Zustandsvektor $\tilde{\Theta} \in \mathbb{R}^{n_p+n_e}$ enthält für die ersten n_p Werte die Schadensparameter wie sie bereits zuvor definiert wurden. Die letzten n_e Einträge beschreiben nun die globalen Modellparameter.

Abb. 5.22 zeigt ein Schadensrekonstruktionsergebnis unter Verwendung eines inkorrekten Strukturmodells. Das im Rekonstruktionsprozess verwendete Modell unterscheidet sich von demjenigen, mit dem die Messdaten erstellt werden, nicht nur hinsichtlich des Strukturschadens, sondern auch hinsichtlich des globalen Elastizitätsmoduls und der globalen Massendichte. Die Abweichung des Rekonstruktionsmodells beträgt 7% für die Massendichte und 10% für den Elastizitätsmodul.

Trotz der inkorrekten Modellbeschreibung, können die geschädigten Strukturelemente identifiziert werden. Dies wird im linken Teil der Abb. 5.22 deutlich. Die geschädigten Ele-

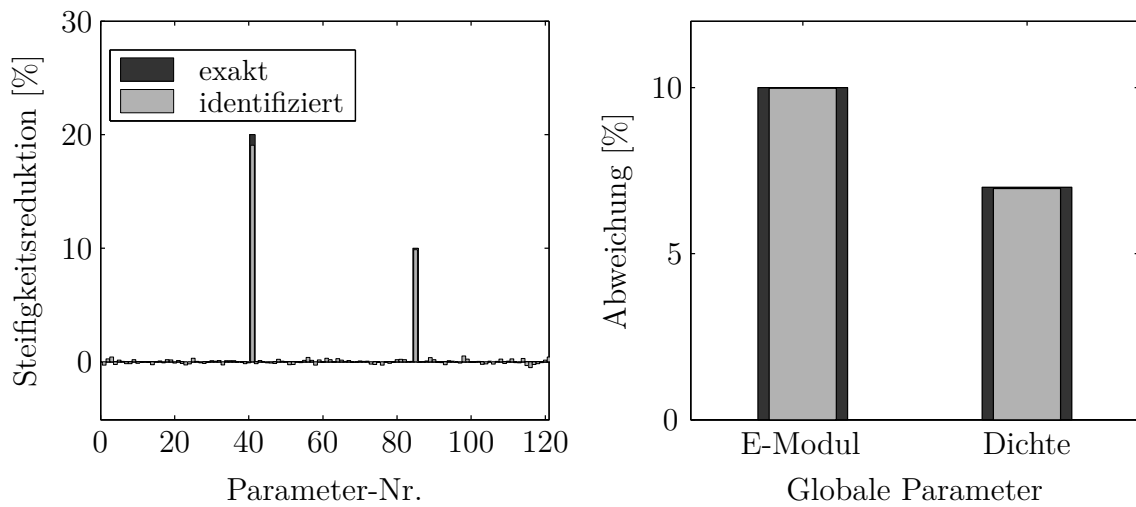


Abbildung 5.22: Schadensidentifikation unter Verwendung eines inkorrekten Strukturmodells; Links: Rekonstruktion der Schadensparameter; Rechts: Identifikation der unbekanntenen Modellparameter (E-Modul und Dichte)

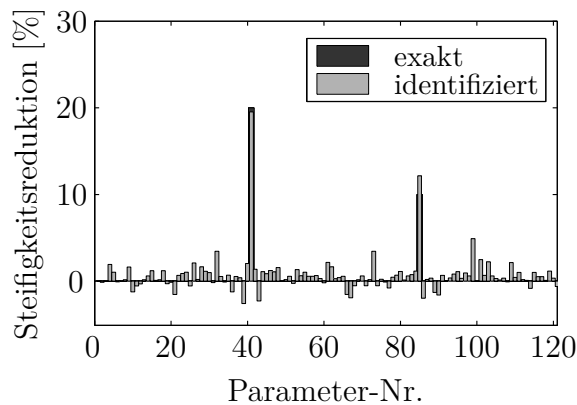


Abbildung 5.23: Schadensidentifikation unter Verwendung eines inkorrekten Strukturmodells ohne Fehlerkompensation

mente Nr. 41 und 85 werden korrekt lokalisiert und auch das Schadensausmaß wird richtig rekonstruiert. Der rechte Teil zeigt, dass nicht nur das Schadensbild detektiert werden kann, sondern darüber hinaus auch die unbekanntenen Modellparameter korrekt angepasst werden. Abb. 5.23 veranschaulicht, dass das Rekonstruktionsergebnis ohne Modellfehlerkompensation verrauschter ist und die geschädigten Elemente nicht so klar herausgestellt werden können. Der zeitliche Rekonstruktionsverlauf der globalen Parameter ist in Abb. 5.24 gezeigt. Ausgehend von den Anfangsbedingungen $\tilde{\Theta}_0 = \mathbf{0}$ konvergieren die rekonstruierten Werte im Verlauf der Zeit hin zu den tatsächlichen Modellparametern.

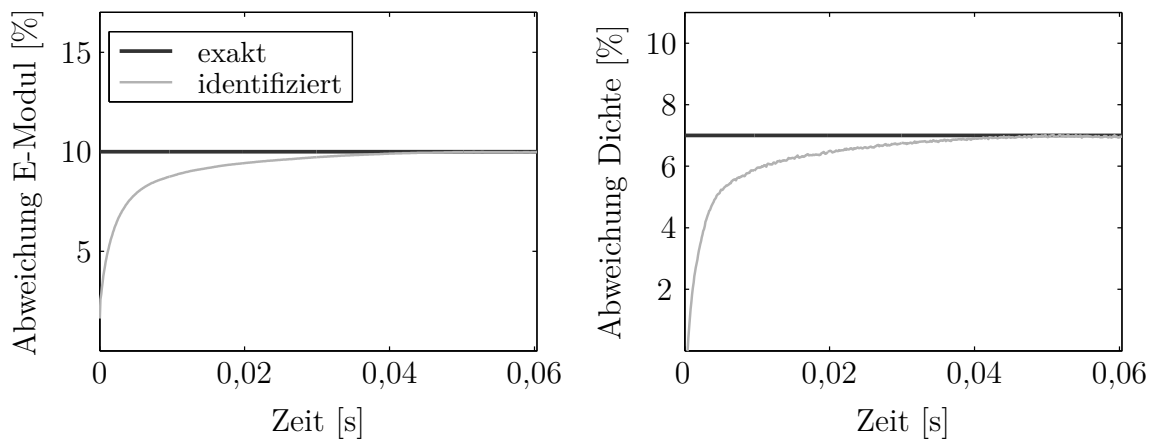


Abbildung 5.24: Rekonstruktionsverlauf der globalen Modellparameter; Links: Identifikation des E-Moduls; Rechts: Identifikation der Dichte

5.3.6 Experimentelle Validierung

Zur Validierung kann der experimentelle Versuchsstand aus Abschnitt 4.8 verwendet werden (siehe Abb. 4.27). Die quadratische Aluminiumplatte wird erneut durch einen Impulshammer zum Schwingen angeregt. Der Filteralgorithmus benötigt hier das gemessene Anregungssignal als Eingangsgröße. Die Strukturantwort wird an sieben Positionen senkrecht zur Plattenebene mit Hilfe von Beschleunigungssensoren bestimmt. Die Sensorpositionen für die freie Platte sind durch die EIM berechnet worden und in Abb. 5.25 gekennzeichnet. Die Abtastrate beträgt 2 kHz. Die Messdaten werden anschließend mit einem analogen 500 Hz Tiefpassfilter gefiltert.

Zwei Magnete mit einem Gewicht von je 0,12 kg werden an verschiedenen Knotenpositionen der Platte beidseitig angebracht. So kann ein Schaden in Form einer Massenzunahme von insgesamt 0,24 kg im Experiment simuliert werden. Bei einem Gesamtgewicht der Platte von 5,4 kg entspricht dies einer punktuellen Massenzunahme von ca. 4,44%.

Der Schadensparameter $\Theta \in \mathbb{R}^{n_p}$ wird dementsprechend so definiert, dass der Parameter Θ_i eine Zusatzmasse am FE-Knotenpunkt i beschreiben kann. Legt man das selbe FE-Modell wie zuvor zugrunde, gilt: $n_p = 144$. Zur Kompensation von Modellfehlern wird der Zustandsvektor um einen Parameter Θ_1^m erweitert, welcher die Abweichung des globalen E-Moduls beschreibt. So kann dieser Parameter für das Plattenmodell auch zur Kompensation von Temperatureinflüssen genutzt werden. Die Dimension des erweiterten Zustandsvektors $\tilde{\Theta} \in \mathbb{R}^{n_p+n_e}$ ist mit $n_p + n_e = 145$ deutlich größer als die Anzahl an Messensoren, $n_r = 7$.

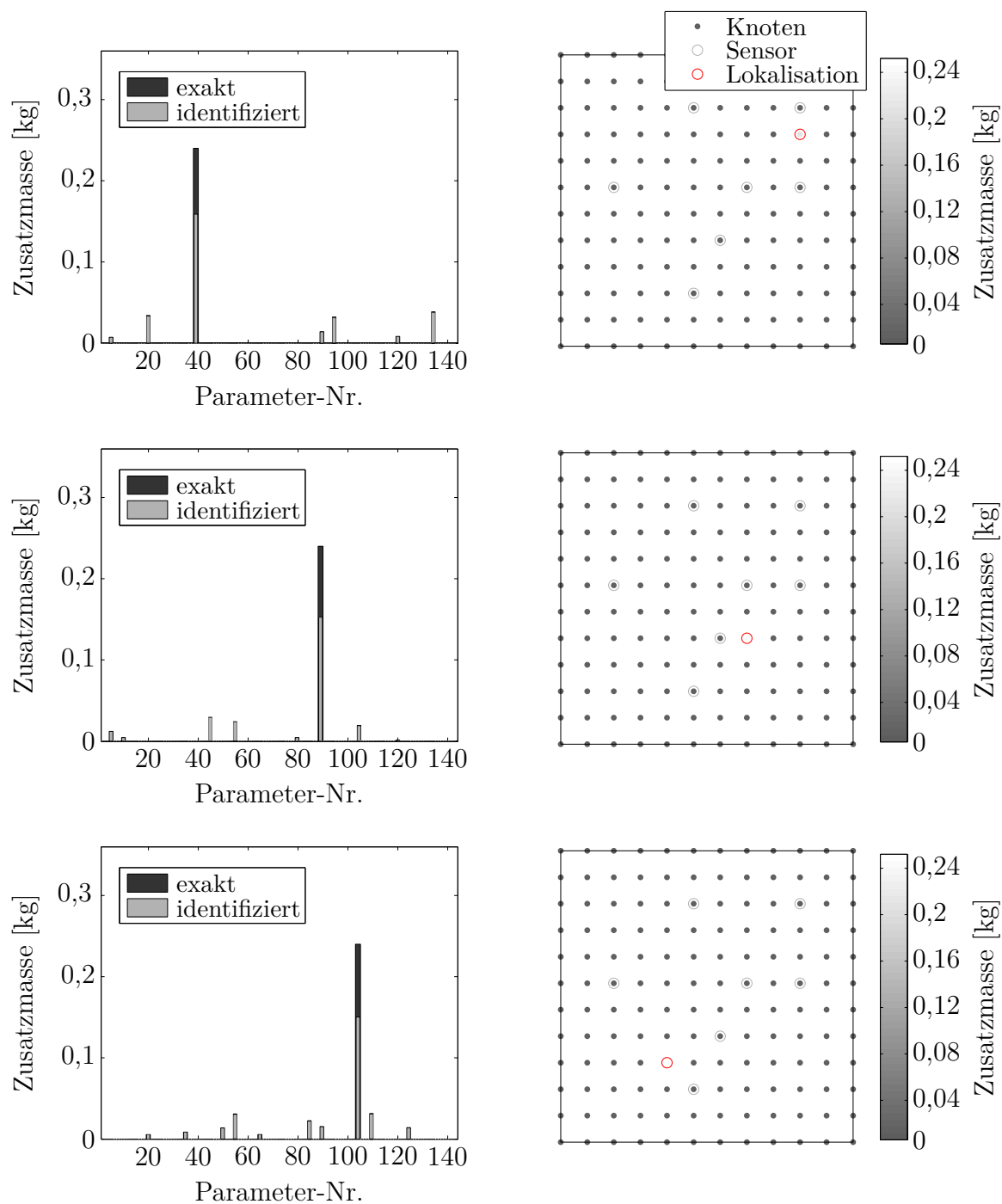


Abbildung 5.25: Experimentelle Rekonstruktionsergebnisse zur Detektion einer Zusatzmasse von 0,24 kg an drei unterschiedlichen Plattenpositionen; Links: Identifizierter und exakter Parametervektor; Rechts: Rekonstruierter Ort der Massenänderung

Abb. 5.25 zeigt exemplarisch drei Rekonstruktionsergebnisse. Links sind der rekonstruierte und der tatsächliche Schadensparametervektor gegenübergestellt. Im rechten Teil ist das identifizierte Schadensmuster zu sehen. Es hat sich gezeigt, dass eine starke

Betonung der L_1 -minimierenden Beobachtung notwendig ist, um aussagekräftige experimentelle Ergebnisse zu erhalten. Daher wird die Kovarianz $R_k^{L_1}$ deutlich kleiner gewählt als die Kovarianz $\tilde{\mathbf{R}}_k$ zur Beschreibung des Messrauschens. Die starke Betonung der L_1 -Minimierung stabilisiert das EKF, führt aber auch zu einer deutlichen Unterschätzung der Zusatzmasse. Im Mittel liegt die Abweichung der rekonstruierten Masse bei 37,2% mit einer Standardabweichung von 5,58%. Dennoch kann im Sinne von Rytter die Stufe 2) der Schadensidentifikation erreicht und der simulierte Schaden in allen drei Fällen korrekt lokalisiert werden. Der Parameter zur Beschreibung des globalen E-Moduls rekonstruiert eine Modellabweichung von im Schnitt 0,25%.

In Simulation und Experiment hat sich gezeigt, dass durch die zusätzliche fiktive L_1 -minimierende Beobachtung der Rekonstruktionsprozess deutlich verbessert wird. Die Lokalisation des Schadens ist für die durchgeführten Untersuchungen stets zuverlässig möglich. In der Simulation konnte darüber hinaus auch der Betrag des Schadens innerhalb gewisser Toleranzen gut wiedergegeben werden. Die Abweichungen im Experiment sind durch Modellfehler zu erklären, welche nicht im Parametervektor berücksichtigt werden konnten.

Die benötigte Anzahl an Sensoren ist im Vergleich zur frequenzbasierten Schadensidentifikation deutlich geringer, da keine modalen Schwingungsformen räumlich aufgelöst werden müssen. Neben unbekanntem Modellparametern kann dieser Ansatz auch dazu verwendet werden, Schäden unter sich ändernden EOCs zu rekonstruieren. Dazu müssen die EOC-sensitiven Parameter ebenfalls in den Zustandsvektor $\tilde{\Theta}$ integriert werden. Dass die externe Kraft komplett nach Ort und zeitlichem Verlauf bekannt sein muss, kann als Nachteil der Identifikationsmethode im Zeitbereich angeführt werden. Zur Erinnerung: Die gezeigte frequenzbasierte Schadensidentifikation benötigte lediglich die stochastischen Anregungseigenschaften zur Systemidentifikation.

Kapitel 6

Simultane Identifikation mechanischer Lasten und Strukturschäden

In den Kapiteln 4 und 5 wurden die Probleme der Lastrekonstruktion und der Schadensidentifikation getrennt voneinander betrachtet. Die dort entwickelten neuartigen Verfahren rekonstruieren Belastungen und Strukturschäden separat voneinander. Für eine solche getrennte Problembetrachtung wird angenommen, dass jeweils eine der beiden Größen bekannt ist. Zur Kraftrekonstruktion wird beispielsweise angenommen, dass eine nahezu ideale mechanische Modellbeschreibung vorliegt. Solch eine Modellbeschreibung muss daher auch dynamische Eigenschaftsänderung, aufgrund von potentiellen Schäden, mit berücksichtigen.

Auf der anderen Seite wird zur Schadensidentifikation in Abschnitt 5.3 die Kenntnis des externen Kraftverlaufs und der Anregungsposition vorausgesetzt. Auch andere Schadensidentifikationsverfahren, welche z.B. auf Systemidentifikationsalgorithmen beruhen, setzen eine gewisse Charakteristik der Anregung voraus. Meist wird eine breitbandige, weiße Strukturanregung benötigt. Zu diesen Detektionsverfahren zählt z.B. die in Abschnitt 5.2 beschriebene Schadensidentifikation im Frequenzbereich.

In der Praxis tritt aber häufig der Fall auf, dass keine perfekte Modellbeschreibung vorhanden ist und darüber hinaus gleichzeitig auch die Strukturanregung unbekannt ist oder nicht direkt gemessen werden kann. Die Annahme, dass das Anregungssignal weißes Rauschen ist, trifft oftmals ebenfalls nicht zu. Werden hier nun inverse Lastüberwachungssysteme eingesetzt, kann sich z.B. das Systemverhalten durch nicht berücksichtigte

bzw. nicht quantifizierbare Einflüsse oder Strukturschäden ändern und von der zugrundeliegenden Modellbeschreibung abweichen. Diese Abweichungen von den tatsächlichen Systemeigenschaften können wiederum zu Fehlern der ermittelten Belastungen führen. Falls daher unbekannte Belastungen und strukturelle Schäden gemeinsam vorliegen, sind die damit verbundenen Identifizierungsprobleme inhärent miteinander gekoppelt. Es ist im Allgemeinen nicht möglich, diese Probleme unabhängig voneinander zu lösen [Zhang *et al.*, 2012b]. Aus diesen Gründen erscheint eine kombinierte Betrachtung sinnvoll.

Wie in Abschnitt 4.1 und 5.1 beschrieben, wurden allerdings in den letzten Jahrzehnten intensive Forschungen zu beiden Problem getrennt durchgeführt und daher sind Ansätze einer separaten Rekonstruktion vorherrschend. Forschungsarbeiten und Algorithmen zur gleichzeitigen und kombinierten Rekonstruktion von Strukturschäden und externen Lasten sind hingegen nur vereinzelt vorhanden. Im Folgenden wird ein Überblick der bisher existierenden Verfahren gegeben.

6.1 Überblick

Aufgrund der sehr unterschiedlichen Natur beider zu rekonstruierender Größen wird häufig ein zweistufiges Iterationsverfahren vorgeschlagen. Die Anregungen und die Schadensparameter werden in jeder Iteration getrennt aktualisiert, sodass der Optimierungsprozess in einer alternierenden Weise abläuft, siehe z.B. [Chen & Li, 2004] oder [Jayalakshmi & Rao, 2017]. Eine kombinierte Rekonstruktionsmethode, die auf der Sensitivität von Strukturantworten basiert, wird in [Lu & Law, 2007] vorgeschlagen. Die unbekannt Lasten werden hier in Form einer Summe verschiedener sinusförmiger Anregungsterme dargestellt. Zhang *et al.* stellen in [Zhang *et al.*, 2011] eine Methode zur gleichzeitigen Identifizierung von Strukturschäden und Fußpunkterregungen vor. Die Anregung wird mit einer endlichen Reihe von Tschebyscheff-Polynomen modelliert. Die zugehörigen Amplituden werden zusammen mit den Steifigkeitsänderungen als Optimierungsvariablen geschätzt. Ein völlig anderer Ansatz zur gleichzeitigen Rekonstruktion wird in [Zhang *et al.*, 2010] bzw. [Zhang *et al.*, 2012b] verwendet. Hier wird die Virtual Distortion Methode verwendet, um einen Schaden als zusätzliche Pseudolast zu beschreiben. So können bekannte Lastidentifikationsalgorithmen zur kombinierten Rekonstruktion genutzt werden.

Obwohl die meisten der beschriebenen Methoden eine Schätzung der Kraft- und Systemparameter liefern können, benötigen alle Verfahren eine Vielzahl an Sensoren. So generieren die beschriebenen Methoden eher schlechtere Rekonstruktionsergebnisse, falls

nicht Messdaten für alle Modellfreiheitsgrade verfügbar sind. Eine solche Instrumentierung ist aber für reale Anwendungen meist nicht möglich.

Um eine signifikante Reduktion der benötigten Sensoranzahl ermöglichen zu können, werden im Folgenden neue Rekonstruktionsansätze entwickelt. Hierzu werden erneut die charakteristischen Eigenschaften der unbekanntenen Größen verwendet. Die Vorteile der zuvor entwickelten Identifikationsverfahren können zusammengeführt werden, um einen L_1 -minimierenden Algorithmus für eine kombinierte Last- und Schadensidentifikation zu entwerfen. Ausgangspunkt für eine solche simultane Rekonstruktion ist hier die Virtual Distortion Methode.

6.2 Virtual Distortion Methode

Die virtuelle Verzerrungsmethode (VDM, engl. *Virtual Distortion Method*) wurde ursprünglich als Werkzeug zur schnellen und wiederholten Simulation von statischen und dynamischen Strukturantworten entwickelt [Akgün *et al.*, 2001; Kołakowski *et al.*, 2008]. Die VDM ermöglicht beispielsweise die Berechnung der Systemantwort einer geschädigten Struktur, indem das Modell der intakten Struktur und eine zusätzliche Pseudolast verwendet werden (vgl. Gl. (6.1), (6.2) und (6.3)). Eine solche Pseudolast bezeichnet man auch als *Virtual Distortion*. Die Strukturantwort des geschädigten Systems wird nun als eine lineare Kombination zweier Systemantworten des ungeschädigten Zustands ausgedrückt. Dies ist zum einen die Strukturantwort aufgrund der tatsächlichen externen Last und zum anderen die Strukturantwort aufgrund einer bestimmten zusätzlichen Pseudobelastung.

Zur Anwendung der VDM muss das intakte System als lineare Struktur definiert werden. Allerdings können potentielle Nichtlinearitäten ebenfalls mittels einer geeigneten Pseudolast modelliert werden. So ist es beispielsweise möglich, auch atmende Risse von Rotoren [Söffker *et al.*, 1993] oder Materialnachgiebigkeiten darzustellen [Kołakowski *et al.*, 2008].

Falls die Strukturmechanik durch ein FE-Modell beschrieben werden, können Schäden modelliert werden, indem solche Pseudolasten lediglich an den Freiheitsgraden des geschädigten Elements aufgebracht werden. Dieses Vorgehen ist gerechtfertigt, da schadensinduzierte Modifikationen eines Elements nur durch die jeweiligen inneren Knotenkräfte auf die benachbarten Elemente übertragen werden können [Zhang *et al.*, 2012b]. Somit

kann die Strukturantwort des geschädigten Systems nur mit Hilfe des ursprünglichen ungeschädigten Strukturmodells und einer bestimmten lokalen Pseudolast beschrieben werden.

Beschreibt man erneut die schadensinduzierte Systemänderung als eine Abweichung der Masse $\Delta\mathbf{M}$, der Dämpfung $\Delta\mathbf{C}$ und der Steifigkeit $\Delta\mathbf{K}$ vom ungeschädigten Referenzmodell, gilt für die zeitdiskrete Bewegungsdifferentialgleichung:

$$(\mathbf{M}_{\text{ref}} + \Delta\mathbf{M}_k) \ddot{\mathbf{x}}_k + (\mathbf{C}_{\text{ref}} + \Delta\mathbf{C}_k) \dot{\mathbf{x}}_k + (\mathbf{K}_{\text{ref}} + \Delta\mathbf{K}_k) \mathbf{x}_k = \mathbf{f}_k \quad (6.1)$$

Die Systemmatrizen des ungeschädigten Referenzmodells werden wieder durch den Index *ref* gekennzeichnet. Die VDM besagt nun, dass die Strukturschwingungen \mathbf{x}_k des geschädigten Systems mittels des Referenzmodells und gewissen massenbezogenen, dämpfungsbezogenen bzw. steifigkeitsbezogenen Pseudolasten $\mathbf{f}_k^{\Delta\mathbf{M}}$, $\mathbf{f}_k^{\Delta\mathbf{C}}$ und $\mathbf{f}_k^{\Delta\mathbf{K}}$ beschrieben werden können:

$$\mathbf{M}_{\text{ref}}\ddot{\mathbf{x}}_k + \mathbf{C}_{\text{ref}}\dot{\mathbf{x}}_k + \mathbf{K}_{\text{ref}}\mathbf{x}_k = \mathbf{f}_k + \mathbf{f}_k^{\Delta\mathbf{M}} + \mathbf{f}_k^{\Delta\mathbf{C}} + \mathbf{f}_k^{\Delta\mathbf{K}} \quad (6.2)$$

Vergleicht man Gl. (6.1) mit Gl. (6.2) muss daher gelten:

$$\mathbf{f}_k^{\Delta\mathbf{M}} = -\Delta\mathbf{M}_k\ddot{\mathbf{x}}_k \quad , \quad \mathbf{f}_k^{\Delta\mathbf{C}} = -\Delta\mathbf{C}_k\dot{\mathbf{x}}_k \quad \text{und} \quad \mathbf{f}_k^{\Delta\mathbf{K}} = -\Delta\mathbf{K}_k\mathbf{x}_k \quad (6.3)$$

Die Terme $\Delta\mathbf{M}_k\ddot{\mathbf{x}}_k$, $\Delta\mathbf{C}_k\dot{\mathbf{x}}_k$ und $\Delta\mathbf{K}_k\mathbf{x}_k$ aus Gl. (6.1), welche den Schäden zuzuordnen sind, werden in Gl. (6.2) auf die rechte Seite der Strukturanregung verschoben. Durch diese einfache Umformung können für das kombinierte Rekonstruktionsproblem alle unbekanntes Größen als Systemanregungen ausgedrückt werden.

Bisherige Kraftrekonstruktionsansätze zur kombinierten Identifikation der externen Last und der Pseudolast versagen allerdings an dieser Stelle, falls die Anzahl der Messsensoren nicht mindestens so groß ist wie die Anzahl an Modellfreiheitsgraden [Zhang *et al.*, 2012b]. Ist die Anzahl der Sensoren geringer, ergeben sich Schwierigkeiten, da das resultierende inverse Problem unterbestimmt ist. Darüber hinaus wird aus Gl. (6.2) deutlich, dass sich die Pseudolasten und die äußere Kraft additiv überlagern. Eine Trennung beider Einflussgrößen ist daher schwierig durchzuführen, insbesondere wenn der Ort der Anregungskraft unbekannt ist [Zhang *et al.*, 2010].

6.2.1 Charakteristische Eigenschaften der Pseudolast

Wie schon in Kapitel 4 gezeigt, können nun die Eigenschaften der Lasten genutzt werden, um das unterbestimmte inverse Problem mittels dünnbesetzter Lösungsstrategien sehr

effizient lösen zu können. So kann eine Identifikation beider Größen mit einer deutlich reduzierten Anzahl an Sensoren ermöglicht werden. Zum besseren Verständnis der charakteristischen Eigenschaften der Pseudolasten sind diese in Abb. 6.1 exemplarisch gezeigt. Hier wird die bereits zuvor verwendete Aluminiumplatte aus Abschnitt 4.5 durch eine Impulslast (Abb. 6.1 links) angeregt. Im Vergleich zum Referenzmodell ist die Struktur durch eine Zusatzmasse von 0,24 kg belastet (vgl. Abschnitt 5.3.6) und darüber hinaus ist ein Element um 30% der ursprünglichen Steifigkeit reduziert. Die Pseudolasten für dieses Schadensmuster sind im rechten bzw. mittleren Plot der Abb. 6.1 gezeigt. Wie schon zuvor sollen im Weiteren lediglich Massen- und Steifigkeitsänderungen, $\Delta\mathbf{M}$ und $\Delta\mathbf{K}$, berücksichtigt werden. Das Vorgehen ist allerdings analog für eine Änderung des Dämpfungsverhaltens $\Delta\mathbf{C}$ erweiterbar.

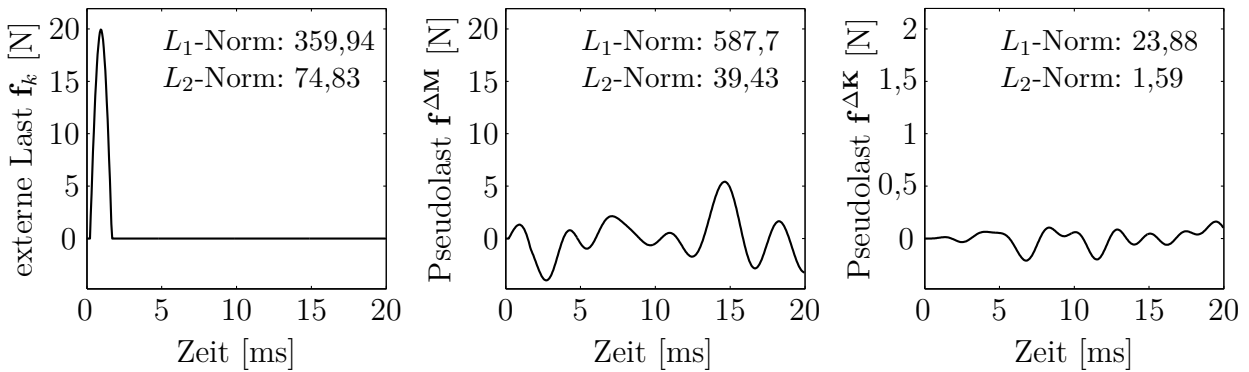


Abbildung 6.1: Vergleich der externen mechanischen Lasteinleitung (links) und der resultierenden Pseudolasten für eine Zusatzmasse von 0,24 kg (Mitte) bzw. einer Elementsteifigkeitsreduktion von 30% (rechts)

Wie zuvor beschrieben, greifen die Pseudolasten räumlich nur lokal am geschädigten Element an. Geht man nun erneut von der plausiblen Annahme aus, dass ein Schaden nur eine lokale Systemänderung hervorruft, ist die Pseudolast im Bezug zur Gesamtstruktur räumlich sehr konzentriert. Die Vektoren zur Beschreibung der Pseudolasten sind damit in dieser Hinsicht dünnbesetzt.

Aus Gl. (6.3) wird deutlich, dass der zeitliche Verlauf der Pseudolasten von dem Verlauf der Strukturodynamiken \mathbf{x}_k bzw. $\ddot{\mathbf{x}}_k$ abhängig ist. Somit wird die Pseudolast direkt durch die tatsächliche Strukturanregung beeinflusst. An dieser Stelle wird nochmals die Kopplung zwischen tatsächlicher externer Anregung und Pseudolast bzw. Struktur Schaden ersichtlich. Darüber hinaus ist für das in Abb. 6.1 gezeigte Schadensmuster die Pseudolast $\mathbf{f}_k^{\Delta\mathbf{K}}$ betragsmäßig deutlich geringer als die massenbezogene Pseudolast $\mathbf{f}_k^{\Delta\mathbf{M}}$.

Der Betrag der Pseudolasten ist natürlich vom jeweiligen Schadensausmaß abhängig (vgl. Gl. (6.3)). Dennoch hat sich in den durchgeführten Simulationen gezeigt, dass für realitätsnahe Werte der Massensteigerung und der Steifigkeitsreduktion, die steifigkeitsbezogene Pseudolast $\mathbf{f}_k^{\Delta\mathbf{K}}$ signifikant geringer ist.

Im Folgenden werden zwei Rekonstruktionsstrategien entwickelt. Die Anwendbarkeit der jeweiligen Algorithmen richtet sich nach der Größe des Strukturschadens bzw. der Modellabweichung. Ein Schaden wird in diesem Zusammenhang als *klein* definiert, falls die zugehörige Pseudolast gegenüber der externen Anregung vernachlässigt werden kann. Der Einfluss der Pseudolast auf den Messausgang ist somit äußerst gering. Zur Beurteilung sollte hier neben der L_2 -Norm vor allem die L_1 -Norm der Kräfte herangezogen werden (vgl. Abb. 6.1). Diese ist bei der Verwendung von L_1 -minimierenden Lösungsstrategien die entscheidende Größe. Für kleinere Schäden gilt daher hier:

$$\|\mathbf{F}_P\|_1 \ll \|\mathbf{F}_E\|_1 \quad (6.4)$$

Die Vektoren der Pseudolast $\|\mathbf{F}_P\|_1$ und der externen Last $\|\mathbf{F}_E\|_1$, welche den gesamten zeitlichen Kraftverlauf beschreiben, sind dabei definiert als

$$\mathbf{F}_E = \left[\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{n_k} \right] \quad \text{und} \quad \mathbf{F}_P = \left[\mathbf{f}_0^P, \mathbf{f}_1^P, \dots, \mathbf{f}_{n_k}^P \right], \quad (6.5)$$

mit der Pseudolast $\mathbf{f}_k^P = \mathbf{f}_k^{\Delta\mathbf{M}} + \mathbf{f}_k^{\Delta\mathbf{K}}$ für eine Massen- und Steifigkeitsmodifikation.

6.3 Lastidentifikation für geschädigte Strukturen

Im Falle von kleineren Strukturschäden, können externe Belastungen und Schadensparameter nacheinander in einem zweistufigen Verfahren identifiziert werden. Da die Modellabweichung gering ist, kann im ersten Schritt des Identifikationsverfahrens die externe Last mit Hilfe der Modellbeschreibung des ungeschädigten Systems lokalisiert und gleichzeitig der Kraftverlauf rekonstruiert werden. Im zweiten Schritt werden die identifizierten Kräfte zur modellgestützten Schadensdetektion verwendet. Zur Bestimmung des Schadensparameters Θ wird der in Abschnitt 5.3 beschriebene Rekonstruktionsalgorithmus im Zeitbereich eingesetzt. Die Pseudobelastungen werden hier unter der Annahme von kleinen Schäden also nicht berücksichtigt. In Abb. 6.2 ist der Ablauf dieser Rekonstruktionsstrategie gezeigt. Das im ersten Schritt zu lösende Minimierungsproblem zur Rekonstruktion der externen Kräfte lautet:

$$\hat{\mathbf{A}}_E = \arg \min_{\mathbf{A}_E \in \mathbb{R}^N} \left\{ \left\| \mathbf{Y} - \tilde{\mathbf{H}}_{\text{ref}} \mathbf{A}_E \right\|_2^2 + \lambda_1 \|\mathbf{A}_E\|_1 \right\} \quad (6.6)$$

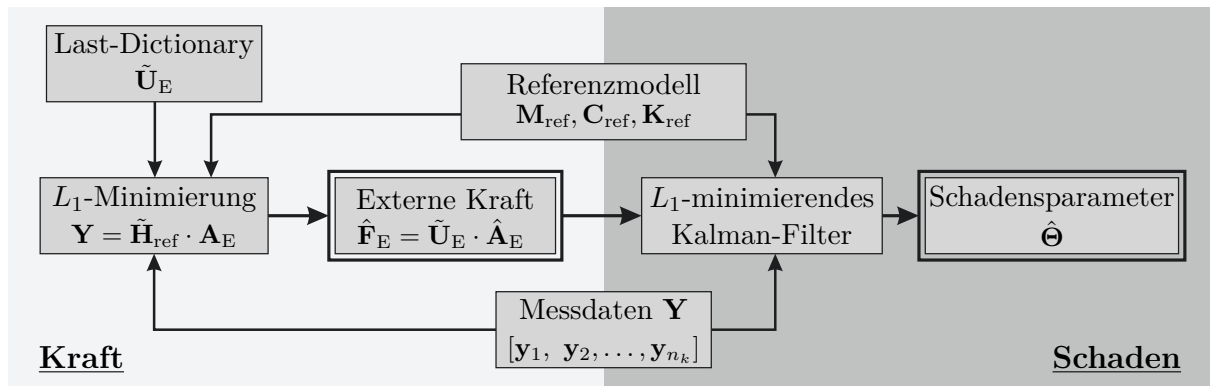


Abbildung 6.2: Rekonstruktionsstrategie für eine kombinierte Kraft- und Schadensidentifikation bei geringfügigen Strukturschäden

Die Matrix $\tilde{\mathbf{H}}_{\text{ref}}$ ist aus der Transfermatrix \mathbf{H}_{ref} für das ungeschädigte Referenzsystem und der Dictionary-Matrix $\tilde{\mathbf{U}}_{\text{E}}$ der externen Lasten zusammengesetzt (vgl. Gl. (4.4) und Gln. (4.18)-(4.21)):

$$\tilde{\mathbf{H}}_{\text{ref}} = \mathbf{H}_{\text{ref}} \cdot \tilde{\mathbf{U}}_{\text{E}} \quad (6.7)$$

Der Vektor $\hat{\mathbf{A}}_{\text{E}}$ gibt die identifizierten Spitzenwerte der jeweiligen Lasten im Dictionary an, sodass für die Rekonstruktion der externen Kräfte \mathbf{F}_{E} gilt:

$$\hat{\mathbf{F}}_{\text{E}} = \tilde{\mathbf{U}}_{\text{E}} \cdot \hat{\mathbf{A}}_{\text{E}}, \quad (6.8)$$

Dass eine Kraftrekonstruktion mittels dünnbesetzter Lösungsstrategien möglich ist, falls die zugrundeliegende Systembeschreibung globale Modellfehler aufweist, konnte bereits in Abschnitt 4.4.1 gezeigt werden. Wie schadensinduzierte lokale Modellfehler das Rekonstruktionsergebnis der Kraftidentifikation beeinflussen, wird im Folgenden genauer untersucht. Dazu werden Simulationsstudien an der schon mehrfach verwendeten allseitig eingespannten Plattenstruktur durchgeführt (vgl. Abb. 4.17). Für eine nachträgliche Schadensidentifikation mit Hilfe des L_1 -minimierenden Kalman-Filters ist es wichtig, dass der rekonstruierte Kraftverlauf ausreichend genau den tatsächlichen Verlauf wiedergibt.

Abb. 6.3 stellt ein Rekonstruktionsergebnis für die zweistufige Kraft- und Schadensidentifikation dar. In diesem Fall wird die Platte durch einen Impuls angeregt. Zur Kraftrekonstruktion wurde ein entsprechendes Impulslast-Dictionary $\tilde{\mathbf{U}}_{\text{E}}$ verwendet. Allerdings können durch die Verwendung von entsprechenden Last-Dictionaries auch andere Belastungsarten rekonstruiert werden. Der simulierte Strukturschaden ist durch eine lokale Steifigkeitsreduktion zweier Elemente um 27% bzw. um 40% modelliert. Der linke Teil

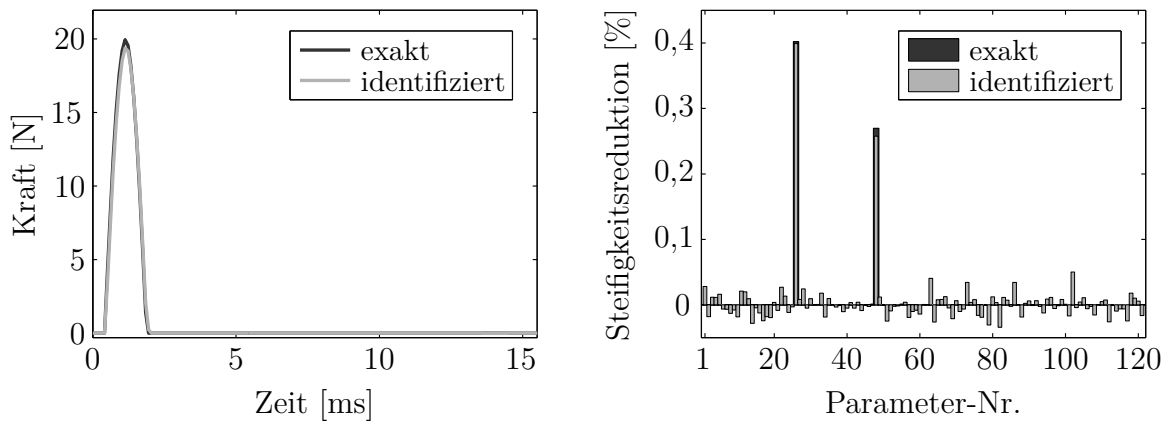


Abbildung 6.3: Rekonstruktionsergebnis der zweistufigen Identifikation; Links: Rekonstruktion des Kraftverlaufs; Rechts: Identifizierter Schadensparametervektor

von Abb. 6.3 zeigt die Kraftrekonstruktion unter Verwendung von acht Beschleunigungssensoren. Die Identifikation des Kraftverlaufs zeigt eine sehr gute Übereinstimmung auf, sodass die Elementsteifigkeitsreduktion im zweiten Schritt zuverlässig detektiert werden kann (siehe Abb. 6.3 rechts).

Die Rekonstruktionseigenschaften für eine steigende Anzahl an Elementsteifigkeitsreduktionen werden mittels einer Monte-Carlo Simulation analysiert. Die Abbildungen 6.4 und 6.5 zeigen die Ergebnisse der Last- bzw. Schadensidentifikation. Die Darstellung und Art der Auswertung ist identisch mit der aus Kapitel 5 Abb. 5.21. Die Steifigkeitsreduktion für die Monte-Carlo Simulation entspricht einer normalverteilten Zufallsgröße mit einem Mittelwert von 30% und einer Standardabweichung von 5%. Abb. 6.4 gibt im linken Teil den Anteil der korrekt lokalisierten Impulsanregungen an. Die Position der Anregung konnte in jedem Fall korrekt bestimmt werden. Die gemittelten relativen Abweichungen für die Rekonstruktion des Impulsspitzenwertes sind im rechten Teil zu sehen. Die Fehler des identifizierten Kraftverlaufes nehmen mit größeren Modellabweichungen zu. Durch die Verwendung von mehr Sensoren können diese Fehler allerdings reduziert werden.

Vergleicht man die Ergebnisse der Kraftrekonstruktion mit der Schadenslokalisierung aus Abb. 6.5 links wird deutlich, dass Fehler der Kraftrekonstruktion zu Abweichungen der Schadensidentifikation führen. Sind die Modellabweichungen zu groß, reicht die Qualität des rekonstruierten Kraftverlaufs nicht mehr aus, um die Schadensparameter zu bestimmen. Die Pseudobelastung kann in diesen Fällen nicht mehr vernachlässigt werden. Es sei allerdings erwähnt, dass eine Lokalisation der Krafteinleitung auch für einen

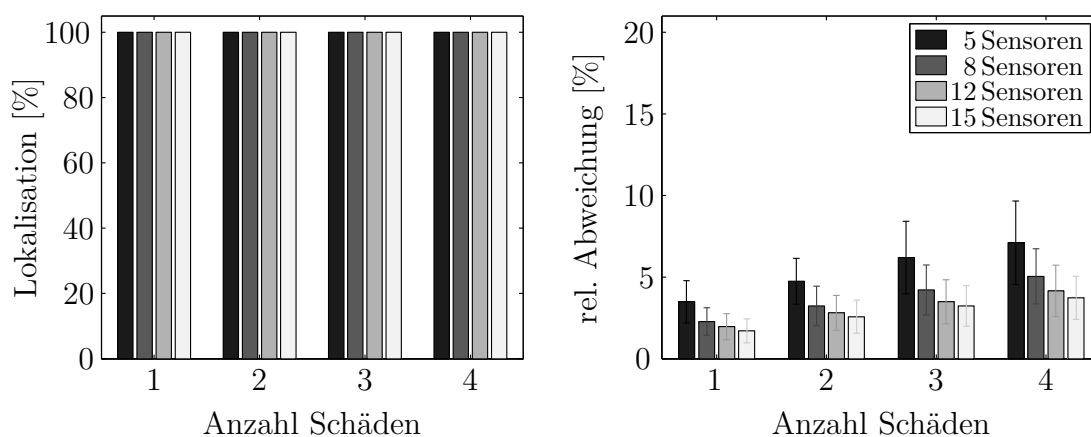


Abbildung 6.4: Kraftrekonstruktion für Monte-Carlo Simulation: Links: Lokalisation der Anregungsposition; Rechts: Mittlere Abweichung der Impulshöhe

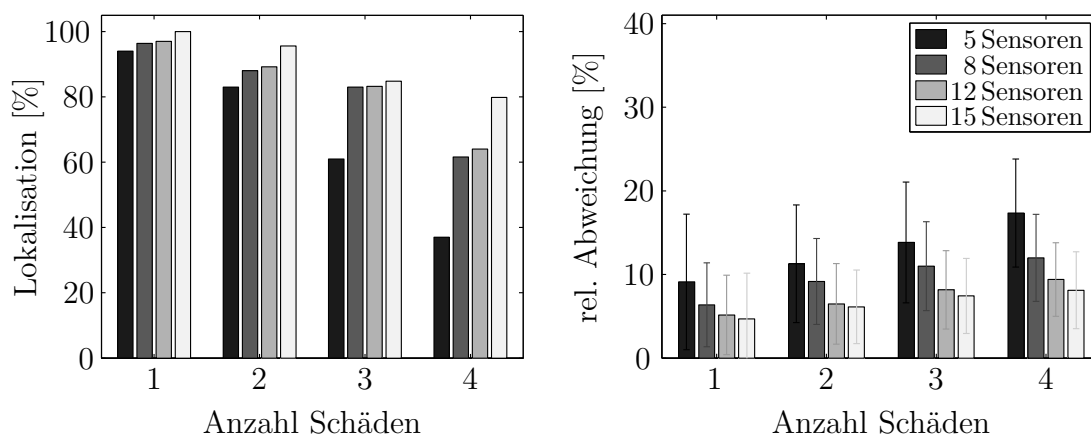


Abbildung 6.5: Schadensdetektion für Monte-Carlo Simulation: Links: Vollständig korrekte Lokalisation; Rechts: Mittlere Abweichung der Schadensgröße

großen Schadensfall möglich ist. Unter der Annahme von kleinen Schäden konnten gute Ergebnisse erzielt werden, falls die Steifigkeit von ein bis zwei Elementen reduziert wurde.

6.4 Gleichzeitige Schadens- und Lastidentifikation

Für größere Schäden bzw. Modellabweichungen können die Pseudolasten nicht mehr vernachlässigt werden. Hier ist es notwendig, diese in den Kraftrekonstruktionsprozess zu integrieren und direkt mit den externen Belastungen zu identifizieren. Zu diesem Zweck wird neben dem Dictionary $\tilde{\mathbf{U}}_E$ für die externe Struktur-anregung, ebenfalls ein Pseudolast-Dictionary $\tilde{\mathbf{U}}_P$ erzeugt. Die dazu notwendigen Eigenschaften der Pseudolasten wurden bereits in Abschnitt 6.2 dargelegt. Aus Gl. (6.3) geht hervor, dass der zeitliche Ver-

lauf der Pseudolast durch die Strukturodynamik des geschädigten Systems bestimmt ist. Durch den Zusammenhang zwischen externer Anregung und Strukturantwort, kann das Pseudolast-Dictionary in Abhängigkeit der tatsächlichen Belastungscharakteristik gebildet werden.

Eine harmonische Anregung beispielsweise führt zu einem harmonischen Schwingungsverhalten und daher zu einer Pseudobelastung mit eben diesem Frequenzinhalt. Bei einer Impulsanregung wird die Struktur wiederum sehr breitbandig angeregt. Die Systemantwort wird somit von den Eigenfrequenzen bzw. Eigenkreisfrequenzen des Systems dominiert. Die Eigenkreisfrequenzen des geschädigten Systems ω_i^{dam} unterscheiden sich jedoch von denen des Referenzsystems ω_i^{ref} :

$$\omega_i^{\text{dam}} = \omega_i^{\text{ref}} + \Delta\omega_i \quad (6.9)$$

Insbesondere für niedrigere Eigenfrequenzen ist die Frequenzverschiebung $\Delta\omega_i$ allerdings relativ gering. Die geschädigten Eigenkreisfrequenzen ω_i^{dam} befinden sich also innerhalb eines engen Frequenzbandes um die Referenzeigenkreisfrequenzen ω_i^{ref} . Analog zu der Identifikation harmonischer Lasten in Abschnitt 4.6, enthält daher das Pseudolast-Dictionary $\tilde{\mathbf{U}}_P$ für externe Impulsanregungen, harmonische Kraftverläufe mit Frequenzen in diesem Bandbreitenbereich. Durch Multiplikation mit einem geeigneten Amplitudenvektor \mathbf{A}_P ergibt sich so die Pseudolast \mathbf{F}_P :

$$\mathbf{F}_P = \tilde{\mathbf{U}}_P \cdot \mathbf{A}_P \quad (6.10)$$

Das zu lösende Gleichungssystem zur gleichzeitigen Bestimmung von externen Kräften und Pseudolasten wird damit zu

$$\mathbf{Y} = \mathbf{H}_{\text{ref}} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{U}}_E & \tilde{\mathbf{U}}_P \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{A}_E^T & \mathbf{A}_P^T \end{bmatrix}^T, \quad (6.11)$$

bzw. mit $\tilde{\mathbf{H}}_{\text{ref}} = \mathbf{H}_{\text{ref}} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{U}}_E & \tilde{\mathbf{U}}_P \end{bmatrix}$ und $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_E^T & \mathbf{A}_P^T \end{bmatrix}^T$ verkürzt zu:

$$\mathbf{Y} = \tilde{\mathbf{H}}_{\text{ref}} \cdot \mathbf{A} \quad (6.12)$$

Aufgrund der Annahmen bei der Herleitung und der Eigenschaften der Dictionaries kann man auch hier von einem dünnbesetzten Lösungsvektor \mathbf{A} ausgehen, so dass folgendes L_1 -Minimierungsproblem gelöst werden muss:

$$\hat{\mathbf{A}} = \arg \min_{\mathbf{A} \in \mathbb{R}^N} \left\{ \left\| \mathbf{Y} - \tilde{\mathbf{H}}_{\text{ref}} \mathbf{A} \right\|_2^2 + \lambda_1 \|\mathbf{A}\|_1 \right\} \quad (6.13)$$

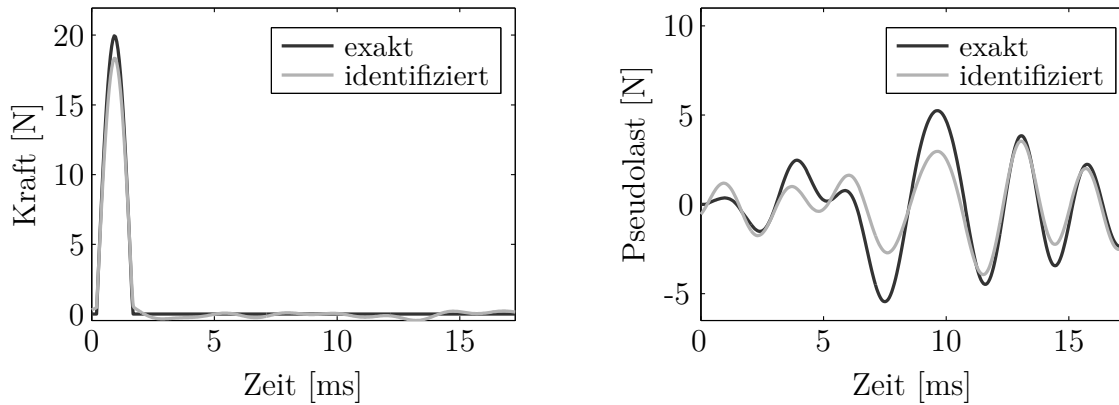


Abbildung 6.6: Ergebnis der gleichzeitigen Identifikation; Links: Rekonstruktion des Kraftverlaufs; Rechts: Pseudolast bei einer punktuellen Zusatzmasse von 0,24 kg

Abb. 6.6 zeigt ein simuliertes Rekonstruktionsergebnis für eine gleichzeitige Identifikation der externen Kraft und der Pseudolast. Für diese Simulation wird der Strukturschaden durch eine punktuelle Zusatzmasse von 0,24 kg modelliert. Abb. 6.6 verdeutlicht, dass der Verlauf der externen Kraft gut rekonstruiert werden kann. Die Pseudolast ist korrekt lokalisiert, allerdings sind Abweichungen des identifizierten und des exakten Verlaufes zu erkennen.

Grund hierfür ist u.a., dass das Dictionary keine Dämpfungseigenschaften abbildet. Der Verlauf der rekonstruierten Pseudolast ist somit stets gewissen Abweichungen im Vergleich zum realen Systemverhalten unterworfen. Allerdings kann allein aufgrund des Verlaufs der Pseudolasten auch nicht direkt auf die Systemänderung $\Delta\mathbf{M}$ bzw. $\Delta\mathbf{K}$ geschlossen werden. Dazu ist die Kenntnis der Strukturschwingung x_k^i an der jeweiligen geschädigten Position i notwendig. Wird diese nicht direkt gemessen, müssen z.B. Zustandsbeobachter wie das Kalman-Filter eingesetzt werden. Da Beobachter eine mehr oder weniger ideale Systembeschreibung benötigen, liefern diese für das geschädigte System nicht zwangsläufig brauchbare Ergebnisse.

Daher wird zur kombinierten Last- und Schadensidentifikation an dieser Stelle lediglich die Information über die Anregungsposition der Pseudolast weiter verwendet. Zur Schadenslokalisierung wird analog zu Gl. (4.37) der Support des Vektors \mathbf{A}_P ausgewertet:

$$\mathcal{S} = \{i : A_i^P > \eta_S\} \quad (6.14)$$

Liegt das Vektorelement A_i^P oberhalb eines Schwellenwertes η_S , gilt das zugeordnete Strukturelement als geschädigt. Ist also in diesem ersten Schritt der Schadensort lokalisiert worden, kann die Dimension des Schadensparametervektors Θ deutlich reduziert

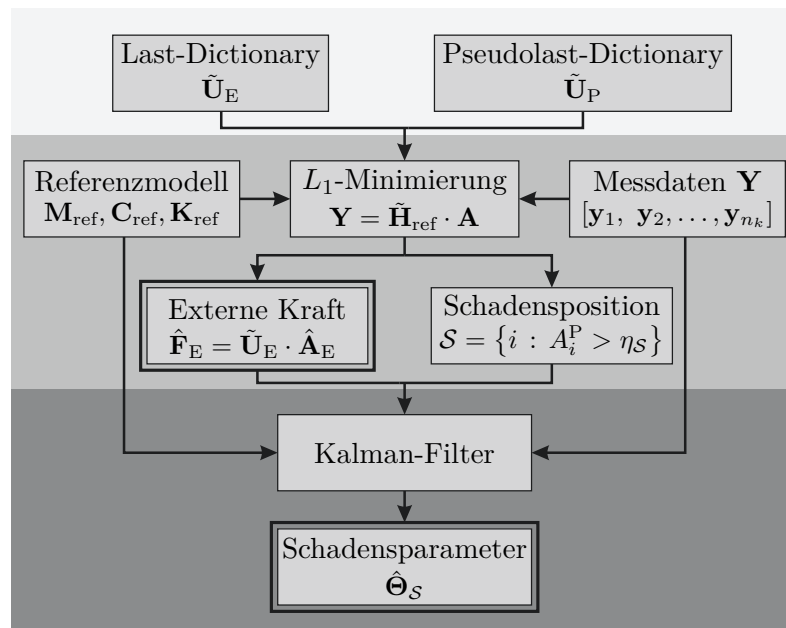


Abbildung 6.7: Rekonstruktionsstrategie für eine kombinierte Kraft- und Schadensidentifikation bei größeren Strukturschäden bzw. Modellabweichungen

werden und nur noch diejenigen Parameter Θ^i betrachtet werden, welche den zuvor lokalisierten Schadensort i beschreiben. Da darüber hinaus der externe Kraftverlauf ermittelt wurde, kann der nun reduzierte Schadensparametervektor Θ_S im nächsten Schritt erneut mittels Extended Kalman-Filter bestimmt werden. Abb. 6.7 zeigt die Rekonstruktionsstrategie für eine kombinierte Identifikation von größeren Strukturschäden und externen Lasten.

Der so ermittelte Schadensparameter und die identifizierte externe Kraft sind in Abb. 6.8 dargestellt. Mit Hilfe des Extended Kalman-Filter konvergiert der Parameter

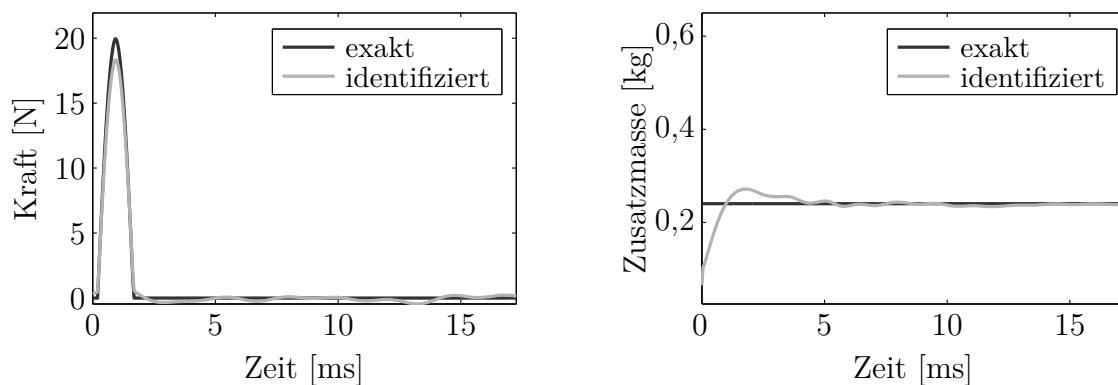


Abbildung 6.8: Rekonstruktionsergebnis für eine Zusatzmasse von 0,24 kg; Links: Rekonstruktion des Kraftverlaufs; Rechts: Verlauf des Schadensparameters

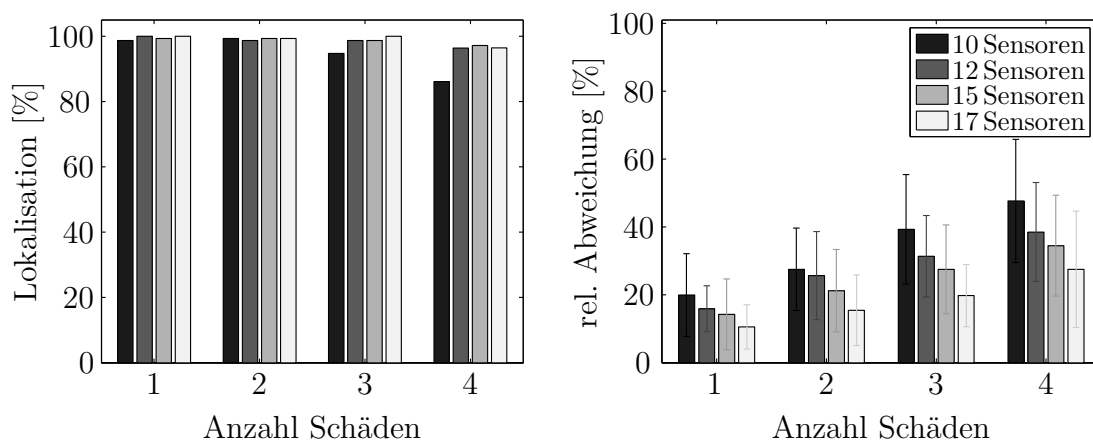


Abbildung 6.9: Kraftrekonstruktionsergebnisse der Monte-Carlo Simulation für Systeme mit Zusatzmasse; Links: Lokalisation der Anregungsposition; Rechts: Mittlere Abweichung der Maximalwertschätzung

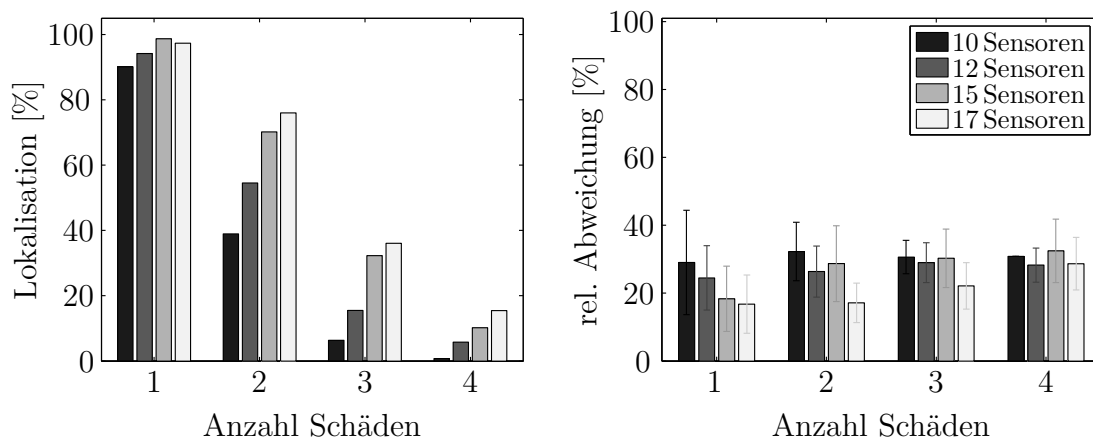


Abbildung 6.10: Schadensdetektionsergebnisse der Monte-Carlo Simulation für Systeme mit Zusatzmasse; Links: Vollständig korrekte Lokalisation; Rechts: Mittlere Abweichung der Schadensgröße

schon nach kurzer Zeit gegen den tatsächlichen Wert der Zusatzmasse. Die Ergebnisse der Monte-Carlo Simulation für größere Strukturschäden sind in Abb. 6.9 und Abb. 6.10 gezeigt. Der Ort der Anregung und der Zusatzmasse sind für jeden Simulationsdurchlauf zufällig und gleichverteilt an verschiedenen Plattenpositionen definiert. Die Zusatzmasse ist eine normalverteilte Zufallsvariable mit einem Mittelwert von 0,25 kg und einer Standardabweichung von 0,07 kg. Der Wert der Zusatzmasse wurde nach unten auf ein Minimum von 0,05 kg beschränkt.

Es wird deutlich, dass die Anregung unabhängig von der Anzahl an Schäden und Sensoren sehr zuverlässig lokalisiert werden kann. Durch eine steigende Anzahl an Sensoren

reduziert sich jedoch der Rekonstruktionsfehler des Kraftverlaufs. Im rechten Teil von Abb. 6.10 sind die gemittelten relativen Abweichungen der Schadensidentifikation dargestellt. Falls der Schaden vorher korrekt lokalisiert werden konnte, sind die Abweichungen bei gleicher Sensorenanzahl nahezu identisch. Für eine einzelne Zusatzmasse ist die Schadenslokalisierung sehr zuverlässig. Hier liegt die Detektionsquote bei über 90%. Steigt die Anzahl an Zusatzmassen, nimmt die Zuverlässigkeit allerdings schnell ab. Für mehrere Zusatzmassen, steigt auch die Anzahl an Pseudobelastungen. Der Spitzenwertvektor \mathbf{A} ist somit zunehmend weniger dünnbesetzt. Dies führt zu den dargestellten schlechteren Rekonstruktionsergebnissen. Aus diesem Grund musste auch die Anzahl an Beschleunigungssensoren im Vergleich zum Identifikationsverfahren aus Abschnitt 6.3 leicht erhöht werden.

6.5 Experimentelle Validierung

Das hergeleitete Verfahren zur simultanen Identifikation mechanischer Lasten und Strukturschäden wird im Folgenden mit Hilfe der schon mehrfach verwendeten Plattenstruktur experimentell validiert (siehe Versuchsaufbau in Abschnitt 4.8). Zur Validierung können dieselben Messdaten herangezogen werden, welche schon in Abschnitt 5.3.6 genutzt wurden. Dort konnte die Zusatzmasse von 0,24 kg an verschiedenen Plattenpositionen mit Hilfe von Beschleunigungs- und Anregungsmessdaten identifiziert werden. Allerdings sollen nun ausschließlich die Messdaten der sieben Beschleunigungssensoren zur Rekonstruktion verwendet werden. Die Kraftmessungen mittels Impulshammer werden später lediglich als Referenzwerte betrachtet.

Wie in den Simulationsstudien gezeigt werden konnte, eignet sich zur kombinierten Identifikation solcher massenbezogener Systemänderungen die Rekonstruktionsstrategie nach Abschnitt 6.4 bzw. Abb. 6.7. Drei exemplarische Rekonstruktionsergebnisse für unterschiedliche Positionen der Zusatzmasse sind in Abb. 6.11 gezeigt. In allen dargestellten Fällen konnte die Impulsanregung und die Zusatzmasse korrekt lokalisiert werden. Die identifizierten Kraftverläufe weichen allerdings teilweise von den exakten Verläufen ab. Die Abweichungen werden besonders für die Spitzenwerte der Impulslasten sichtbar und führen im Schritt der Schadensquantifizierung zu Identifikationsfehlern von im Mittel 50%.

Auch wenn die Quantifizierung der Zusatzmasse für die gezeigte experimentelle Untersuchung daher nicht möglich war, können durch die entwickelte Rekonstruktionsstrategie

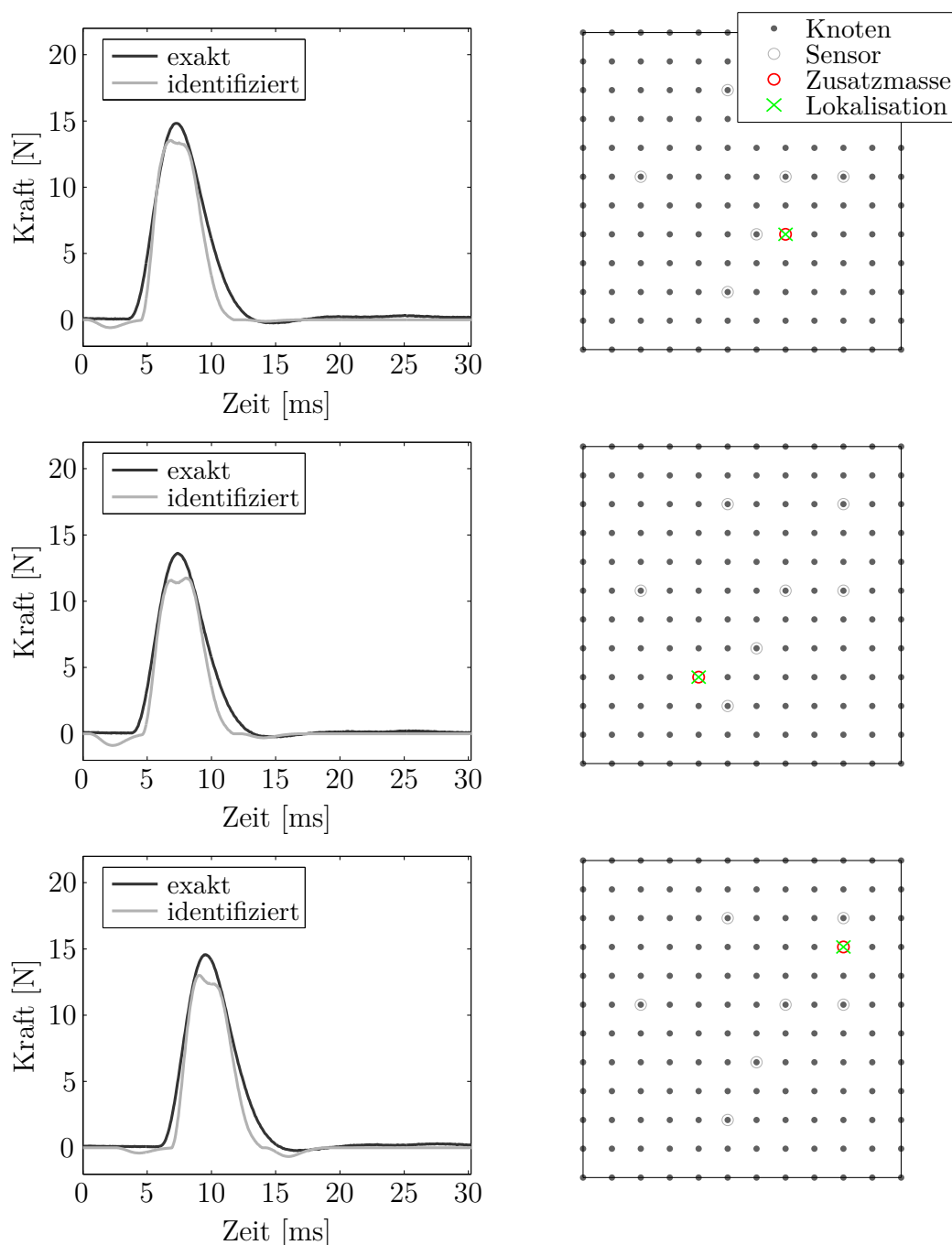


Abbildung 6.11: Drei experimentelle Ergebnisse zur simultanen Rekonstruktion einer Zusatzmasse von 0,24kg und einer Impulsanregung; Links: Identifizierter Kraftverlauf; Rechts: Lokalisation der Zusatzmasse

simultan die externen Lasten identifiziert werden und zusätzlich die zweite Stufe nach Rytter der Schadenslokalisierung erreicht werden. Die Ergebnisse der Monte-Carlo Simulation legen nahe, dass mehr als die hier verfügbaren sieben Beschleunigungssensoren appliziert werden müssen, um eine verbesserte Rekonstruktionsqualität des Kraftverlaufs zu

erhalten. Selbst bei der Verwendung von 15 oder 17 Beschleunigungsaufnehmern, liegt die Sensoranzahl deutlich unterhalb der Anzahl der hier definierten Freiheitsgrade. Darüber hinaus sind durch das verwendete vereinfachte Pseudolast-Dictionary $\tilde{\mathbf{U}}_P$ dem Rekonstruktionsalgorithmus gewisse Grenzen gesetzt. Eine Verbesserung des Dictionary durch beispielsweise die Integration von Dämpfungseigenschaften, trägt neben einer erhöhten Sensoranzahl ebenfalls zur Steigerung der Rekonstruktionsqualität bei.

Kapitel 7

Zusammenfassung und Ausblick

Strukturüberwachungssysteme können mit Hilfe einer permanent installierten Messsensorik kontinuierlich gewisse Strukturinformationen bereit stellen. So ist es nicht nur möglich Anlagen und Strukturen zustandsabhängig zu warten und zu reparieren, sondern diese auch im optimalen Betriebspunkt zu betreiben und Erkenntnisse für zukünftige Bauweisen zu gewinnen. Allerdings ist für eine aussagekräftige und stabile Überwachung in der Regel ein flächendeckendes Sensornetzwerk erforderlich. Diese Arbeit hatte sich zum Ziel gesetzt, das benötigte Sensornetzwerk deutlich zu reduzieren. Dazu wurden Überwachungsstrategien und Lösungsansätze entwickelt, welche in der Lage sind, aus einer reduzierten Menge an Messdaten den maximal möglichen Informationsgewinn zu erzielen.

Probleme bei der Überwachung entstehen zumeist aufgrund der Tatsache, dass die Überwachungsgröße nicht direkt gemessen werden kann. Oftmals ist lediglich eine Wirkung messbar, welche durch die interessierende Überwachungsgröße beeinflusst wird. In diesen Fällen muss invers aus der gemessenen Wirkung die unbekannte Ursache bestimmt werden. Um die, im Sinne von Ockhams Sparsamkeitsprinzip, einfachste Lösung zu finden, wurden in dieser Arbeit dünnbesetzte Lösungsstrategien verwendet. Mit Hilfe von L_1 -Minimierungsverfahren können solche Lösungsansätze sehr effizient für unterbestimmte inverse Probleme implementiert werden. Der Schwerpunkt der Forschung lag dabei auf der Entwicklung von Überwachungsstrategien hinsichtlich der Lastidentifikation, der Schadenserkenkung und der kombinierten Schadens- und Lastidentifikation.

Die Grundlagen der mechanischen Modellbildung und der Lösung inverser Probleme wurden in den Kapiteln 2 und 3 dargelegt. Aufbauend auf diesen Grundlagen und den speziellen L_1 -Minimierungsalgorithmen, konnten in den weiterführenden Kapiteln die

neuartigen Überwachungsverfahren entwickelt werden.

In Kapitel 4 wurden dünnbesetzte Lösungsverfahren zur Rekonstruktion externer Belastungen vorgestellt. Zu Beginn dieses Kapitels konnte gezeigt werden, dass abhängig von der Belastungsart unterschiedliche Anforderungen an das Überwachungssystem gestellt werden. Ist neben dem Kraftverlauf auch die Anregungsposition unbekannt, wird die Überwachungsaufgabe deutlich komplexer. Falls hier die Anzahl an Messsensoren geringer ist als die Anzahl an potentiellen Kraftangriffspunkten, versagen herkömmliche schwingungsbasierte Rekonstruktionsansätze, da die unterbestimmte Problemstellung im Allgemeinen keine eindeutige Rekonstruktion zulässt. Unter Berücksichtigung der charakteristischen Anregungseigenschaften konnten allerdings in dieser Arbeit Identifikationsverfahren entwickelt werden, welche in der Lage sind auch in diesen Fällen die externen Lasten zu bestimmen. Mittels Strategien für dünnbesetzte Lösungen ist es möglich, die Anregungsposition und den Kraftverlauf durch eine direkte Entfaltung im Zeitbereich zu berechnen. Die dabei auftretenden sehr großen und stark unterbestimmten Gleichungssysteme können durch L_1 -minimierende Algorithmen sehr zielgerichtet gelöst werden.

Intensive Untersuchungen wurden speziell zum Problem der Impulslastrekonstruktion durchgeführt, da Impulslasten für die strukturelle Integrität oftmals besonders kritisch sind. Hier spielt neben der Höhe der Impulsbelastung auch der Ort der Anregung eine entscheidende Rolle. Die Eigenschaften von Impulsbelastungen lassen dünnbesetzte Lösungsverfahren unmittelbar zu. Die Simulationsstudien machen deutlich, dass eine stabile Rekonstruktion selbst bei verrauschten Messdaten mit sehr wenigen Sensoren realisiert werden kann. Besonders die Lokalisation zeigt sich robust gegenüber Messrauschen und Modellfehlern.

Die Verwendung von sogenannten *Last-Dictionaries* erlaubt es spezielle Vorkenntnisse über die externe Kraft in den Rekonstruktionsprozess zu integrieren. Durch solche Vorkenntnisse kann der Lösungsraum weiter eingeschränkt werden und die Rekonstruktionsqualität wird verbessert. Geeignete Dictionaries ermöglichen es außerdem, andere Kraftarten oder eine Kombination von verschiedenen Belastungstypen zu identifizieren. Harmonische Lasten können beispielsweise im Frequenzbereich als dünnbesetzte Vektoren dargestellt werden. Das entsprechende Dictionary muss also aus Spalten der inversen Fourier-Transformationsmatrix zusammengesetzt werden. Auch hier konnten begleitende Simulationsbeispiele die Funktionsfähigkeit der Identifikationsstrategie zeigen.

Im Experiment wurden die entwickelten Verfahren validiert. Mit Hilfe von nur vier Be-

schleunigungssensoren war hier eine Impulsdetektion an einer Plattenstruktur zuverlässig möglich. Alle Ergebnisse machen deutlich, dass die Lokalisationsqualität und -stabilität schon bei einer geringen Anzahl an Sensoren sehr hoch sind. Die Rekonstruktion des Impulsverlaufs ist allerdings durch Modellfehler oder Messrauschen gewissen Abweichungen unterworfen. Im Experiment hat sich gezeigt, dass durch L_1 -minimierende Verfahren der Spitzenwert zwar oftmals unterschätzt wird, jedoch das Messrauschen besser unterdrückt werden kann. Da in vielen Fällen der Spitzenwert der Impulslast eine kritische Größe darstellt, kann bzw. sollte dieser in einem zweiten Schritt bei dann bekannter Anregungsposition mit anderen Rekonstruktionsverfahren (z.B. *Tikhonov*-Regularisierung) erneut geschätzt werden. Zukünftig könnte dem vorgestellten Lastidentifikationsverfahren noch eine *a posteriori* Prüfung hinzugefügt werden, die erkennt, ob das Ausgangsproblem tatsächlich dünnbesetzt war oder gegebenenfalls das Dictionary noch erweitert werden muss.

Kapitel 5 widmete sich dann dem Themenfeld der schwingungsbasierten Schadensdetektion. Schadenserkenkung gehört zu den wichtigsten Aufgaben eines Überwachungssystems und ist dem Feld des Structural Health Monitorings (SHM) zuzuordnen. Schwingungsbasierte SHM-Verfahren überwachen in der Regel die gesamte Struktur. Zur Schadensidentifizierung verwenden diese Verfahren globale Schwingungsgrößen. Um die zuverlässige Detektierbarkeit auch kleinerer Schäden zu ermöglichen, musste bislang ein dichteres Sensornetzwerk installiert werden. In Kapitel 5 wurden, vor dem Hintergrund die benötigte Sensoranzahl zu minimieren, Identifikationsverfahren im Frequenzbereich und im Zeitbereich entwickelt und analysiert.

Die Schadensdetektion im Frequenzbereich nutzt hier beispielhaft die inverse Eigensensitivitätsmethode. Mit Hilfe eines FE-Referenzmodells bestimmt dieses Verfahren die Ursache für gemessene modale Residuen. Die Sensitivitätsanalyse bringt mittels festgelegter Schadensparameter lokale Steifigkeitsänderungen mit den modalen Residuen in Verbindung. Zur autarken Überwachung müssen die Modaldaten während des Betriebs automatisch bestimmt werden können. Daher wurde eine operationelle Modalanalyse, basierend auf der *Stochastic Subspace Identification* (SSI), implementiert. Das Stabilitätsdiagramm konnte dann durch ein hierarchisches Clustering-Verfahren automatisch ausgewertet werden.

Die Lösung des inversen Eigensensitivitätsproblems ist oft schwierig, da bei großen Modellen eine Vielzahl an potenziellen Schadensparametern existiert. Die charakteristischen Schädigungseigenschaften machen es aber nun erneut möglich, Lösungsstrategien

für dünnbesetzte Problemstellungen anzuwenden. Üblicherweise führen Schäden wie z.B. Risse lediglich zu einer lokalen Steifigkeitsänderung. Der Großteil der Struktursteifigkeit bleibt unverändert. Zur Beschreibung ist daher ein sehr dünnbesetzter Parametervektor erforderlich. Durch die Verwendung von L_1 -minimierenden Algorithmen sind aufwendige Vorselektionsmethoden nicht mehr zwangsläufig erforderlich.

Im Vergleich zu herkömmlichen Lösungsmethoden verhindern L_1 -Minimierungsverfahren, dass viele geringfügige Parameteränderungen rekonstruiert werden. Stattdessen werden nur einige wenige dominante Strukturänderungen identifiziert. So kann der Schaden deutlich präziser lokalisiert werden. Die Monte-Carlo-Simulationen haben gezeigt, dass gerade bei einer Mehrzahl von Strukturschäden dünnbesetzte Lösungsverfahren deutlich häufiger das korrekte Schadensmuster detektieren können als die Referenzalgorithmen. Im Experiment konnten die numerischen Ergebnisse bestätigt werden.

Auch wenn die Lösungsqualität durch L_1 -Minimierungsverfahren gesteigert werden konnte, ist dennoch eine Reduktion des benötigten Sensornetzwerks nicht möglich. Die operationelle Identifikation der Schwingungsmoden erfordert unabhängig vom später verwendeten Lösungsansatz eine feste Anzahl an Sensoren. Besonders zur Auflösung höherer Schwingungsmoden muss das Sensornetz sehr dicht sein. Allerdings sind lediglich diese höheren Moden von kleineren Strukturschäden beeinflusst. Werden also nicht genügend Moden identifiziert, sind möglicherweise die betrachteten niederen modalen Residuen nicht sensitiv gegenüber gewissen Schadensparametern.

Schadensidentifikationsverfahren im Zeitbereich haben den Vorteil, dass im Vorfeld keine modalen Schwingungsformen berechnet werden müssen. In Abschnitt 5.3 wurde daher ein Parameterschätzverfahren im Zeitbereich, basierend auf dem Extended Kalman-Filter hergeleitet. Mathematisch wird das inverse Problem in Form einer nichtlinearen Zustandsraumdarstellung beschrieben. Der Zustandsvektor ist dabei ebenfalls durch festgelegte Schadensparameter für lokale Steifigkeitsänderungen definiert. Der Identifikationsprozess wird durch eine zusätzliche fiktive L_1 -minimierende Beobachtung stabilisiert. So ist es möglich mit einer deutlich geringeren Anzahl an Messsensoren den Schadensparametervektor zu rekonstruieren.

Modellgestützte Verfahren im Zeitbereich benötigen in der Regel sehr gute und akkurate Strukturmodelle. Um auch bei fehlerhaften Modellen gute Ergebnisse erzielen zu können, wurde die Kalman-Filter-Identifikationsmethode zusätzlich erweitert. Der Parametervektor wurde um globale Modellparameter ergänzt, so können Modellfehler durch

den Rekonstruktionsprozess ausgeglichen werden.

Die numerischen Simulationen haben gezeigt, dass durch die zusätzliche L_1 -minimierende Beobachtung die Schadensidentifikation und -lokalisierung deutlich verbessert werden. Auch für mehrere Schäden ist eine zuverlässige Detektion möglich. Eine Monte-Carlo-Simulation zeigt hier den Zusammenhang zwischen Sensoranzahl und der Menge an maximal identifizierbaren Steifigkeitsreduktionen. Ein gewisser Nachteil des Verfahrens ist die momentan hohe Rechenzeit zur Linearisierung und die Tatsache, dass die äußere Kraft nach Verlauf und Anregungsposition bekannt sein muss.

In Kapitel 6 konnten die Ergebnisse aus den vorangegangenen Kapiteln zu einer kombinierten Last- und Schadensdetektion zusammengeführt werden. Zur kombinierten Identifikation werden Systemeigenschaftsänderungen durch Schäden als zusätzliche Pseudobelastungen interpretiert. Dazu kommt die *Virtual Distortion Method* (VDM) zum Einsatz. Abhängig von der Größe und der Art des Schadens konnten zwei Rekonstruktionskonzepte entwickelt werden. Die Lastidentifikation mittels L_1 -Rekonstruktion durch direkte Entfaltung im Zeitbereich ist sehr robust gegenüber kleineren Strukturschäden. Daher ist es möglich, erst die externen Lasten zu berechnen und basierend auf diesen Ergebnissen im Anschluss daran die Schäden mittels Extended Kalman-Filter zu identifizieren. Ist aber das Schadensausmaß größer, kann der Schadensort durch ein geeignetes Dictionary gleichzeitig mit den externen Lasten rekonstruiert werden. Das Schadensausmaß konnte in der Simulation durch den rekonstruierten Kraftverlauf und die lokalisierte Schadensposition im Nachgang detektiert werden. Im Experiment wurde der externe Impulsanregungsverlauf und der Schadensort korrekt rekonstruiert. Allerdings führten nicht berücksichtigte Modellfehler zu großen Abweichungen des identifizierten Schadens.

Aus Sicht des Verfassers sollten daher geeignete messdatenbasierte Modellbildungstechniken und Modell-Updating Verfahren während einer Lernphase im ungeschädigten Zustand die entwickelten Überwachungssysteme unterstützen. So können auch Systemänderungen durch unterschiedliche EOCs in der Lernphase erfasst werden. Abhängig vom Zeitskalenbereich in dem sich die Änderungen der EOCs abspielen, sollten darüber hinaus eventuell zeitvariante Strukturmodelle verwendet werden. Eine ausgedehnte Validierung der hier hergeleiteten Überwachungsverfahren, durch Langzeittests unter realen Betriebsbedingungen, muss dann der nächste Entwicklungsschritt sein.

Die in dieser Arbeit entwickelten L_1 -minimierenden Lösungsstrategien für Strukturüberwachungsaufgaben gehören zu den ersten ihrer Art. Nach Meinung des Verfassers ha-

ben Lösungsverfahren für dünnbesetzte inverse Probleme im Bereich der Überwachung ein enormes Weiterentwicklungspotential. Neben den hier erarbeiteten schwingungsbasierten Verfahren ist es z.B. denkbar, solche Ansätze zur Schadensidentifikation von rotierenden Maschinenteilen oder zur wellenbasierten Detektion gewinnbringend zu adaptieren. Auch bei diesen Anwendungen führen Schäden zu gewissen charakteristischen Eigenschaften, welche sich in den Messdaten widerspiegeln. Diese Eigenschaften können nun ebenfalls dazu genutzt werden, das Ausgangsproblem in ein dünnbesetztes Gleichungssystem zu transformieren.

Literaturverzeichnis

- ADAMS, R. & DOYLE, J. F. (2002). Multiple force identification for complex structures. *Experimental Mechanics* **42**(1), 25–36.
- AKGÜN, M. A., GARCELON, J. H. & HAFTKA, R. T. (2001). Fast exact linear and non-linear structural reanalysis and the sherman–morrison–woodbury formulas. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **50**(7), 1587–1606.
- BALAGEAS, D. (2006). Introduction to structural health monitoring. In: *Structural Health Monitoring*. ISTE Ltd, S. 13–43.
- BARTHORPE, R. J. & WORDEN, K. (2009). Sensor placement optimization. In: *Encyclopedia of Structural Health Monitoring*. Wiley Online Library.
- BASSEVILLE, M., ABDELGHANI, M. & BENVENISTE, A. (2000). Subspace-based fault detection algorithms for vibration monitoring. *Automatica* **36**(1), 101–109.
- BOHLE, K. (2005). *Sensitivitätsbasierte Methoden zur modellgestützten Schadendiagnose mit Modaldaten*. Dissertation, Shaker Verlag, Universität Siegen.
- CANDÈS, E. J. & ROMBERG, J. (2005). L_1 -magic: Recovery of sparse signals via convex programming.
- CANDÈS, E. J. & TAO, T. (2005). Decoding by linear programming. *IEEE Transactions on Information Theory* **51**(12), 4203–4215.
- CANDÈS, E. J. & WAKIN, M. B. (2008). An introduction to compressive sampling. *IEEE Signal Processing Magazine* **25**(2), 21–30.
- CAUBERGHE, B. (2004). *Applied frequency-domain system identification in the field of experimental and operational modal analysis*. Dissertation, Vrije Universiteit Brussel.
- CHAMBOLLE, A. & POCK, T. (2011). A first-order primal-dual algorithm for convex problems with applications to imaging. *Journal of Mathematical Imaging and Vision* **40**(1), 120–145.

- CHANDRASEKAR, J., BERNSTEIN, D. S., BARRERO, O. & DE MOOR, B. (2007). Kalman filtering with constrained output injection. *International Journal of Control* **80**(12), 1863–1879.
- CHANG, C. & SUN, C. (1989). Determining transverse impact force on a composite laminate by signal deconvolution. *Experimental Mechanics* **29**(4), 414–419.
- CHANG, F.-K. (1999). Structural health monitoring 2000. In: *Proceedings of the 2nd Int. Workshop On Structural Health Monitoring*.
- CHEN, J. & LI, J. (2004). Simultaneous identification of structural parameters and input time history from output-only measurements. *Computational Mechanics* **33**(5), 365–374.
- CHEN, S. S., DONOHO, D. L. & SAUNDERS, M. A. (1998). Atomic decomposition by basis pursuit. *SIAM Journal on Scientific Computing* **20**(1), 33–61.
- CHING, J., BECK, J. L. & PORTER, K. A. (2006). Bayesian state and parameter estimation of uncertain dynamical systems. *Probabilistic Engineering Mechanics* **21**(1), 81–96.
- CORIGLIANO, A. & MARIANI, S. (2004). Parameter identification in explicit structural dynamics: performance of the extended kalman filter. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **193**(36), 3807–3835.
- DA SILVA OLIVEIRA, G. M. C. (2016). *Vibration-based structural health monitoring of wind turbines*. Dissertation, Universidade do Porto.
- DENG, S. & HEH, T.-Y. (2006). The study of structural system dynamic problems by recursive estimation method. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology* **30**(3), 195–202.
- DING, Y. & GUO, L. (2016). Structural identification based on incomplete measurements with iterative kalman filter. *Structural Engineering and Mechanics* **59**(6), 1037–1054.
- DOEBLING, S. W., FARRAR, C. R. & PRIME, M. B. (1998). A summary review of vibration-based damage identification methods. *Shock and Vibration Digest* **30**(2), 91–105.
- DONOHO, D. L. & ELAD, M. (2003). Optimally sparse representation in general (non-orthogonal) dictionaries via l1 minimization. *Proceedings of the National Academy of Sciences* **100**(5), 2197–2202.
- DONOHO, D. L. & HUO, X. (2001). Uncertainty principles and ideal atomic decomposition. *IEEE Transactions on Information Theory* **47**(7), 2845–2862.

-
- DOYLE, J. F. (1984). An experimental method for determining the dynamic contact law. *Experimental Mechanics* **24**(1), 10–16.
- DRAPER, N. R. & SMITH, H. (1998). *Applied regression analysis*. John Wiley & Sons.
- DUDA, R. O., HART, P. E. & STORK, D. G. (2012). *Pattern Classification*. John Wiley & Sons.
- EBRAHIMIAN, H., ASTROZA, R. & CONTE, J. P. (2015). Extended kalman filter for material parameter estimation in nonlinear structural finite element models using direct differentiation method. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics* **44**(10), 1495–1522.
- EFRON, B. & TIBSHIRANI, R. J. (1994). *An introduction to the bootstrap*. CRC press.
- EINICKE, G. A. & WHITE, L. B. (1999). Robust extended kalman filtering. *IEEE Transactions on Signal Processing* **47**(9), 2596–2599.
- ELAD, M. (2010). *Sparse and Redundant Representations: From Theory to Applications in Signal and Image Processing*. Springer New York.
- ENGL, H. W., HANKE, M. & NEUBAUER, A. (2000). *Regularization of Inverse Problems*. Mathematics and Its Applications. Springer Netherlands.
- EWINS, D. J. (1984). *Modal testing: theory and practice*, Band 15. Research studies press Letchworth.
- FARRAR, C. R. & WORDEN, K. (2012). *Structural health monitoring: a machine learning perspective*. John Wiley & Sons.
- FLYNN, E. B. & TODD, M. D. (2010). A bayesian approach to optimal sensor placement for structural health monitoring with application to active sensing. *Mechanical Systems and Signal Processing* **24**(4), 891–903.
- FOUCART, S. & RAUHUT, H. (2013). *A Mathematical Introduction to Compressive Sensing*. Springer New York.
- FOX, R. L. & KAPOOR, M. P. (1968). Rates of change of eigenvalues and eigenvectors. *AIAA Journal* **6**(12), 2426–2429.
- FRANKLIN, G. F., POWELL, J. D. & WORKMAN, M. L. (1998). *Digital Control of Dynamic Systems*, Band 3. Addison-wesley Menlo Park.
- FRISWELL, M. I. & MOTTERSHEAD, J. E. (1995). *Finite Element Model Updating in Structural Dynamics*. Berlin Heidelberg: Springer Science & Business Media.
- FRITZEN, C.-P. (2005). Vibration-based structural health monitoring – concepts and applications. In: *Key Engineering Materials*, Band 293. Trans Tech Publ.

- FRITZEN, C.-P. (2006). Vibration-based techniques for structural health monitoring. In: *Structural Health Monitoring*. ISTE Ltd, S. 45–224.
- FRITZEN, C.-P., JENNEWEIN, D. & KIEFER, T. (1998). Damage detection based on model updating methods. *Mechanical Systems and Signal Processing* **12**(1), 163–186.
- FRITZEN, C.-P., KLINKOV, M. & KRAEMER, P. (2013). Vibration-based damage diagnosis and monitoring of external loads. In: *New Trends in Structural Health Monitoring*. Springer Vienna, S. 149–208.
- FUGATE, M. L., SOHN, H. & FARRAR, C. R. (2001). Vibration-based damage detection using statistical process control. *Mechanical Systems and Signal Processing* **15**(4), 707–721.
- GASCH, R., KNOTHE, K. & LIEBICH, R. (2012). *Strukturdynamik*. Springer Berlin Heidelberg.
- GAUL, L. & HURLEBAUS, S. (1998). Identification of the impact location on a plate using wavelets. *Mechanical Systems and Signal Processing* **12**(6), 783–795.
- GAWRONSKI, W. (2004). *Advanced Structural Dynamics and Active Control of Structures*. Springer Science & Business Media.
- GILL, P., WANG, A. & MOLNAR, A. (2011). The in-crowd algorithm for fast basis pursuit denoising. *IEEE Transactions on Signal Processing* **59**(10), 4595–4605.
- GILLIJNS, S. & DE MOOR, B. (2007). Unbiased minimum-variance input and state estimation for linear discrete-time systems with direct feedthrough. *Automatica* **43**(5), 934–937.
- GINSBERG, D., NIU, Y. & FRITZEN, C.-P. (2013). Online wind load reconstruction for a wind energy plant using simulated structural responses. In: *Proceedings of the 6th International Conference on Structural Health Monitoring of Intelligent Infrastructure*.
- GIURGIUTIU, V. (2007). *Structural health monitoring: with piezoelectric wafer active sensors*. Academic Press.
- GOLUB, G. H., HEATH, M. & WAHBA, G. (1979). Generalized cross-validation as a method for choosing a good ridge parameter. *Technometrics* **21**(2), 215–223.
- GÒRAL, G., BYDOŃ, S. & UHL, T. (2002). Intelligent transducers of in-operational loads in construction fatigue monitoring. *Machine Dynamics Problems* **26**(2–3), 73–88.
- GORDON, A. D. (1999). *Classification, 2nd Edition*. Chapman and Hall/CRC.

-
- GRANGER, S. & PEROTIN, L. (1999). An inverse method for the identification of a distributed random excitation acting on a vibrating structure part 1: Theory. *Mechanical Systems and Signal Processing* **13**(1), 53–65.
- GREWAL, M. S. & ANDREWS, A. P. (2014). *Kalman Filtering*. John Wiley & Sons, Inc.
- GROETSCH, C. W. (1984). *The Theory of Tikhonov Regularization for Fredholm Equations*. Boston Pitman Publication.
- HA, Q. P. & TRINH, H. (2004). State and input simultaneous estimation for a class of nonlinear systems. *Automatica* **40**(10), 1779–1785.
- HADAMARD, J. (1923). *Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations*. Yale University Press.
- HANSEN, P. C. (1994). Regularization tools: A matlab package for analysis and solution of discrete ill-posed problems. *Numerical Algorithms* **6**(1), 1–35.
- HANSEN, P. C. (1998). *Rank-Deficient and Discrete Ill-Posed Problems*. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- HASTIE, T., TIBSHIRANI, R. & FRIEDMAN, J. (2009). *The Elements of Statistical Learning: Data Mining, Inference and Prediction*. Springer, 2 ed.
- HWANG, J.-S., KAREEM, A. & KIM, H. (2011). Wind load identification using wind tunnel test data by inverse analysis. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics* **99**(1), 18–26.
- INMAN, D. J. (2001). Smart structures: examples and new problems. In: *Proceedings of 16th Brazilian Congress of Mechanical Engineering*.
- INOUE, H., HARRIGAN, J. J. & REID, S. R. (2001). Review of inverse analysis for indirect measurement of impact force. *Applied Mechanics Reviews* **54**(6), 503–524.
- JACQUELIN, E., BENNANI, A. & HAMELIN, P. (2003). Force reconstruction: analysis and regularization of a deconvolution problem. *Journal of Sound and Vibration* **265**(1), 81–107.
- JANKOWSKI, Ł. (2009). Off-line identification of dynamic loads. *Structural and Multidisciplinary Optimization* **37**(6), 609–623.
- JAYALAKSHMI, V. & RAO, A. R. M. (2017). Simultaneous identification of damage and input dynamic force on the structure for structural health monitoring. *Structural and Multidisciplinary Optimization* **55**(6), 2211–2238.

- JENNEWEIN, D. (1999). Beitrag zur Verfahrensoptimierung bei der modellgestützten Schadensdiagnose an passiven und aktiven elastomechanischen Strukturen. *Fortschrittberichte VDI: Schwingungstechnik* **11**(276).
- JONES, R. T., SIRKIS, J. S. & FRIEBELE, E. J. (1997). Detection of impact location and magnitude for isotropic plates using neural networks. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures* **8**(1), 90–99.
- JUANG, J.-N. (1994). *Applied System Identification*. Prentice-Hall, Inc.
- JULIER, S. J. & UHLMANN, J. K. (2004). Unscented filtering and nonlinear estimation. *Proceedings of the IEEE* **92**(3), 401–422.
- KALMAN, R. E. (1960). A new approach to linear filtering and prediction problems. *Journal of basic Engineering* **82**(1), 35–45.
- KALMAN, R. E. & BUCY, R. S. (1961). New results in linear filtering and prediction theory. *Journal of Basic Engineering* **83**(3), 95–108.
- KAMMER, D. C. (1991). Sensor placement for on-orbit modal identification and correlation of large space structures. *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* **14**(2), 251–259.
- KAMMER, D. C. & TINKER, M. L. (2004). Optimal placement of triaxial accelerometers for modal vibration tests. *Mechanical Systems and Signal Processing* **18**(1), 29–41.
- KIRCHGRABER, U. & STOFFER, D. (2006). *Von gut und schlecht gestellten Problemen*. Bildungsportal der ETH Zürich.
- KIRCHNER, M. (2018). *Joint State/Input Estimation in Structural Dynamics - State/Force Estimation Using Compressive Sensing within a Multistep Approach*. Dissertation, K. U. Leuven.
- KLINKOV, M. (2011). *Identification of Unknown Structural Loads from Dynamic Measurements Using Robust Observers*. Dissertation, Universität Siegen.
- KLINKOV, M. & FRITZEN, C.-P. (2007). An updated comparison of the force reconstruction methods. *Key Engineering Materials* **347**, 461–466.
- KOENEN, J. F. (2016). *Ein Beitrag zur Beherrschung von Unsicherheit in Lastmonitoring-Systemen*. Dissertation, Universität Siegen.
- KOŁAKOWSKI, P., WIKŁO, M. & HOLNICKI-SZULC, J. (2008). The virtual distortion method - a versatile reanalysis tool for structures and systems. *Structural and Multidisciplinary Optimization* **36**(3), 217–234.
- KRAEMER, P. (2011). *Schadensdiagnoseverfahren für die Zustandsüberwachung von Offshore-Windenergieanlagen*. Dissertation, Universität Siegen.

-
- KRENGEL, U. (2005). *Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik*. Vieweg+Teubner Verlag.
- KUTYNIOK, G. (2014). Compressed sensing. *Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* **22**(1), 24–29.
- LAERMANN, K.-H. (1998). Über das inverse Problem der Bestimmung des aktuellen Zustandes von Tragwerken aus Verformungsmessungen. *Technische Mechanik* **18**(1), 25–30.
- LAERMANN, K.-H. (2008). *Inverse problems in experimental structural analysis*. Shaker-Verlag.
- LEI, Y., LIU, C., JIANG, Y. Q. & MAO, Y. K. (2013). Substructure based structural damage detection with limited input and output measurements. *Smart Structures and Systems* **12**(6), 619–640.
- LI, D. S. (2011). *Sensor Placement Methods and Evaluation Criteria in Structural Health Monitoring*. Dissertation, Universität Siegen.
- LI, D. S., LI, H. N. & FRITZEN, C.-P. (2007). The connection between effective independence and modal kinetic energy methods for sensor placement. *Journal of Sound and Vibration* **305**(4–5), 945–955.
- LIU, J.-J., MA, C.-K., KUNG, I.-C. & LIN, D.-C. (2000). Input force estimation of a cantilever plate by using a system identification technique. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **190**(11), 1309–1322.
- LIU, X., ESCAMILLA-AMBROSIO, P. J. & LIEVEN, N. A. J. (2009). Extended kalman filtering for the detection of damage in linear mechanical structures. *Journal of Sound and Vibration* **325**(4), 1023–1046.
- LJUNG, L. (1999). *System Identification: Theory for the User*. Prentice Hall information and system sciences series. Prentice Hall PTR.
- LOFFELD, O. (1990a). *Estimationstheorie I - Grundlagen und stochastische Konzepte*. Oldenbourg-Verlag.
- LOFFELD, O. (1990b). *Estimationstheorie II - Anwendungen - Kalman-Filter*. Oldenbourg-Verlag.
- LOFFELD, O., ESPETER, T. & HEREDIA CONDE, M. (2015). From weighted least squares estimation to sparse CS reconstruction. In: *Proceedings of the 3rd Int. Workshop on Compressed Sensing Theory and its Applications to Radar, Sonar and Remote Sensing*.

- LOFFELD, O., SEEL, A., HEREDIA CONDE, M. & WANG, L. (2016). A nullspace based l1 minimizing kalman filter approach to sparse cs reconstruction. In: *Proceedings of the 11th European Conference on Synthetic Aperture Radar*.
- LOURENS, E.-M. (2012). *Force Identification in Structural Dynamics*. Dissertation, K. U. Leuven.
- LU, Z. R. & LAW, S. S. (2007). Identification of system parameters and input force from output only. *Mechanical Systems and Signal Processing* **21**(5), 2099–2111.
- LUNZE, J. (2012). *Regelungstechnik 1: Systemtheoretische Grundlagen, Analyse und Entwurf einschleifiger Regelungen*. Springer, 9 ed.
- MA, C.-K., CHANG, J.-M. & LIN, D.-C. (2003). Input forces estimation of beam structures by an inverse method. *Journal of Sound and Vibration* **259**(2), 387–407.
- MAES, K., LOURENS, E., VAN NIMMEN, K., REYNDERS, E., DE ROECK, G. & LOMBAERT, G. (2015). Design of sensor networks for instantaneous inversion of modally reduced order models in structural dynamics. *Mechanical Systems and Signal Processing* **52**, 628–644.
- MAGALHÃES, F., CUNHA, A. & CAETANO, E. (2009). Online automatic identification of the modal parameters of a long span arch bridge. *Mechanical Systems and Signal Processing* **23**(2), 316–329.
- MAO, Y. M., GUO, X. L. & ZHAO, Y. (2010). A state space force identification method based on markov parameters precise computation and regularization technique. *Journal of Sound and Vibration* **329**(15), 3008–3019.
- MARANO, G. C., MONTI, G. & QUARANTA, G. (2011). Comparison of different optimum criteria for sensor placement in lattice towers. *The Structural Design of Tall and Special Buildings* **20**(8), 1048–1056.
- MENDELKAMP, G. (2006). *Entwicklung einer intelligenten Struktur - Eine Kombination globaler und lokaler Verfahren zur Schadensdiagnose*. Dissertation, Universität Siegen.
- MONTGOMERY, D. C., PECK, E. A. & VINING, G. G. (2006). *Introduction to linear regression analysis*, Band 4. John Wiley & Sons.
- NATKE, H. G. (1988). *Einführung in Theorie und Praxis der Zeitreihen- und Modalanalyse*. Vieweg+Teubner Verlag.
- NATKE, H. G. (1999). *Modelle und Wirklichkeit*. UNSER Verlag, Hannover.

-
- NATKE, H. G. & CEMPEL, C. (2012). *Model-aided diagnosis of mechanical systems: Fundamentals, detection, localization, assessment*. Springer Science & Business Media.
- NEEDELL, D. & TROPP, J. A. (2009). Cosamp: Iterative signal recovery from incomplete and inaccurate samples. *Applied and Computational Harmonic Analysis* **26**(3), 301–321.
- NELSON, R. B. (1976). Simplified calculation of eigenvector derivatives. *AIAA Journal* **14**(9), 1201–1205.
- NIU, Y. & FRITZEN, C.-P. (2012). Comparison and practical aspects of two approaches for online load reconstruction. In: *Proceedings of the 6th European Workshop on Structural Health Monitoring*.
- NIU, Y., FRITZEN, C.-P., JUNG, H., BUETHE, I., NI, Y.-Q. & WANG, Y.-W. (2015). Online simultaneous reconstruction of wind load and structural responses - theory and application to canton tower. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering* **30**(8), 666–681.
- NIU, Y., KLINKOV, M. & FRITZEN, C.-P. (2010). Online reconstruction of concentrated and continuously distributed force using a robust observer technique. In: *Proceedings of the 5th European Workshop on Structural Health Monitoring*.
- PAN, S., SU, H., WANG, H. & CHU, J. (2011). The study of joint input and state estimation with kalman filtering. *Transactions of the Institute of Measurement and Control* **33**(8), 901–918.
- PAPADOPOULOS, M. & GARCIA, E. (1998). Sensor placement methodologies for dynamic testing. *AIAA Journal* **36**(2), 256–263.
- PAPPA, R. S., JAMES, G. H. & ZIMMERMAN, D. C. (1998). Autonomous modal identification of the space shuttle tail rudder. *Journal of Spacecraft and Rockets* **35**(2), 163–169.
- PARLOO, E., VERBOVEN, P., GUILLAUME, P. & VAN OVERMEIRE, M. (2003). Force identification by means of in-operation modal models. *Journal of Sound and Vibration* **262**(1), 161–173.
- PATI, Y. C., REZAIIFAR, R. & KRISHNAPRASAD, P. S. (1993). Orthogonal matching pursuit: Recursive function approximation with applications to wavelet decomposition. In: *Conference Record of The Twenty-Seventh Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers*.

- PEETERS, B. (2000). *System Identification and Damage Detection in Civil Engineering*. Dissertation, K. U. Leuven.
- PEETERS, B. & DE ROECK, G. (1999). Reference-based stochastic subspace identification for output-only modal analysis. *Mechanical Systems and Signal Processing* **13**(6), 855–878.
- PEETERS, B. & DE ROECK, G. (2001). Stochastic system identification for operational modal analysis: a review. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* **123**(4), 659–667.
- PEROTIN, L. & GRANGER, S. (1999). An inverse method for the identification of a distributed random excitation acting on a vibrating structure part 2: Flow-induced vibration application. *Mechanical Systems and Signal Processing* **13**(1), 67–81.
- PHILLIPS, D. L. (1962). A technique for the numerical solution of certain integral equations of the first kind. *Journal of the Association for Computing Machinery* **9**(1), 84–97.
- RASMUSSEN, M. A. & BRO, R. (2012). A tutorial on the LASSO approach to sparse modeling. *Chemometrics and Intelligent Laboratory Systems* **119**, 21–31.
- REYNDERS, E. (2012). System identification methods for (operational) modal analysis: review and comparison. *Archives of Computational Methods in Engineering* **19**(1), 51–124.
- REYNDERS, E., HOUBRECHTS, J. & DE ROECK, G. (2012). Fully automated (operational) modal analysis. *Mechanical Systems and Signal Processing* **29**, 228–250.
- REZAYAT, A., NASSIRI, V., DE PAUW, B., ERTVELDT, J., VANLANDUIT, S. & GUILLAUME, P. (2016). Identification of dynamic forces using group-sparsity in frequency domain. *Mechanical Systems and Signal Processing* **70–71**, 756–768.
- RYTTER, A. (1993). *Vibrational based inspection of civil engineering structures*. Dissertation, Aalborg University.
- SANCHEZ, J. & BENAROYA, H. (2014). Review of force reconstruction techniques. *Journal of Sound and Vibration* **333**(14), 2999–3018.
- SATO, T. & QI, K. (1998). Adaptive H_∞ filter: its application to structural identification. *Journal of Engineering Mechanics* **124**(11), 1233–1240.
- SCHMIDT, H.-J., TELGKAMP, J. & SCHMIDT-BRANDCKER, B. (2004). Application of structural health monitoring to improve efficiency of aircraft structures. In: *Proceedings of the 2nd Europ. Workshop on Structural Health Monitoring*, 11–18.

-
- SCIONTI, M., LANSLOTS, J., GOETHALS, I., VECCHIO, A., VAN DER AUWERAER, H., PEETERS, B. & DE MOOR, B. (2003). Tools to improve detection of structural changes from in-flight flutter data. In: *Proceedings of the 8th International Conference on Recent Advances in Structural Dynamics*.
- SCIONTI, M. & LANSLOTS, J. P. (2005). Stabilisation diagrams: Pole identification using fuzzy clustering techniques. *Advances in Engineering Software* **36**(11), 768–779.
- SEIBOLD, S. (1995). Ein Beitrag zur modellgestützten Schadendiagnose bei rotierenden Maschinen. *Fortschrittberichte VDI: Schwingungstechnik* **11**(219).
- SÖFFKER, D., BAJKOWSKI, J. & MÜLLER, P. C. (1993). Detection of cracks in turbo-rotors - a new observer based method. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* **115**(3), 518–524.
- SMYTH, A. W., MASRI, S. F., CHASSIAKOS, A. G. & CAUGHEY, T. K. (1999). On-line parametric identification of mdof nonlinear hysteretic systems. *Journal of Engineering Mechanics* **125**(2), 133–142.
- SNIEDER, R. & TRAMPERT, J. (1999). Inverse problems in geophysics. In: *Wavefield Inversion*. Springer, S. 119–190.
- SOHN, H. & FARRAR, C. R. (2001). Damage diagnosis using time series analysis of vibration signals. *Smart Materials and Structures* **10**(3), 446–451.
- STASZEWSKI, W., BOLLER, C. & TOMLINSON, G. R. (2004). *Health monitoring of aerospace structures: smart sensor technologies and signal processing*. John Wiley & Sons.
- STEVENS, K. (1987). Force identification problems - an overview. In: *Proceedings of the Spring Conference on Experimental Mechanics*.
- TIBSHIRANI, R. (1996). Regression shrinkage and selection via the lasso. *Journal of the Royal Statistical Society (Series B)* **58**(1), 267–288.
- TIKHONOV, A. N. (1963). Solution of incorrectly formulated problems and the regularization method. *Soviet Mathematics Doklady* **4**, 1035–1038.
- TIKHONOV, A. N. & ARSENIN, V. I. A. (1977). *Solutions of Ill-Posed Problems*. Scripta Series in Mathematics. Winston.
- TORRES-ARREDONDO, M. A. & FRITZEN, C.-P. (2012). Impact monitoring in smart structures based on gaussian processes. In: *Proceedings of the 4th International Symposium on NDT in Aerospace*.

- TROPP, J. A. & GILBERT, A. C. (2007). Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit. *IEEE Transactions on Information Theory* **53**(12), 4655–4666.
- TRUJILLO, D. M. & BUSBY, H. R. (1997). *Practical inverse analysis in engineering*, Band 7. CRC press.
- UHL, T. (2002). Identification of loads in mechanical structures-helicopter case study. *Computer Assisted Mechanics and Engineering Sciences* **9**(1), 151–160.
- UHL, T. (2007). The inverse identification problem and its technical application. *Archive of Applied Mechanics* **77**(5), 325–337.
- UNGER, T. & DEMPE, S. (2010). *Lineare Optimierung: Modell, Lösung, Anwendung*. Vieweg+Teubner.
- VAN OVERSCHEE, P. & DE MOOR, B. (1993). Subspace algorithms for the stochastic identification problem. *Automatica* **29**(3), 649–660.
- VERBOVEN, P., PARLOO, E., GUILLAUME, P. & VAN OVERMEIRE, M. (2002). Autonomous structural health monitoring - part i: modal parameter estimation and tracking. *Mechanical Systems and Signal Processing* **16**(4), 637–657.
- WAN, E. A. & VAN DER MERWE, R. (2000). The unscented kalman filter for nonlinear estimation. In: *Adaptive Systems for Signal Processing, Communications, and Control Symposium*.
- WANG, M. L., SATPATHI, D. & HEO, G. (1997). Damage detection of a model bridge using modal testing. *Structural Health Monitoring: Current Status and Perspectives*, 589–600.
- WELCH, G. & BISHOP, G. (1995). *An introduction to the Kalman filter*. SIGGRAPH.
- WORDEN, K. & DULIEU-BARTON, J. M. (2004). An overview of intelligent fault detection in systems and structures. *Structural Health Monitoring* **3**(1), 85–98.
- WORDEN, K. & STASZEWSKI, W. J. (2000). Impact location and quantification on a composite panel using neural networks and a genetic algorithm. *Strain* **36**(2), 61–68.
- WU, B. & WANG, T. (2014). Model updating with constrained unscented kalman filter for hybrid testing. *Smart Structures and Systems* **14**(6), 1105–1129.
- YAN, G. & ZHOU, L. (2009). Impact load identification of composite structure using genetic algorithms. *Journal of Sound and Vibration* **319**(3–5), 869–884.

-
- YANG, J. N. & LIN, S. (2005). Identification of parametric variations of structures based on least squares estimation and adaptive tracking technique. *Journal of Engineering Mechanics* **131**(3), 290–298.
- ZHANG, C., HUANG, J.-Z., SONG, G.-Q., DAI, L. & LI, H.-K. (2016). Detection of structural damage via free vibration responses by extended kalman filter with tikhonov regularization scheme. *Structural Monitoring and Maintenance* **3**(2), 115–127.
- ZHANG, E., ANTONI, J. & FEISSEL, P. (2012a). Bayesian force reconstruction with an uncertain model. *Journal of Sound and Vibration* **331**(4), 798–814.
- ZHANG, K., LI, H., DUAN, Z. & LAW, S. S. (2011). A probabilistic damage identification approach for structures with uncertainties under unknown input. *Mechanical Systems and Signal Processing* **25**(4), 1126–1145.
- ZHANG, Q., JANKOWSKI, Ł. & DUAN, Z. (2010). Identification of coexistent load and damage. *Structural and Multidisciplinary Optimization* **41**(2), 243–253.
- ZHANG, Q., JANKOWSKI, Ł. & DUAN, Z. (2012b). Simultaneous identification of excitation time histories and parametrized structural damages. *Mechanical Systems and Signal Processing* **33**, 56–68.
- ZHANG, Y. (2008). On theory of compressive sensing via l_1 -minimization: Simple derivations and extensions. Techn. report, Department of Computational and Applied Mathematics, Rice University.
- ZHU, T., XIAO, S. & YANG, G. (2014). Force identification in time domain based on dynamic programming. *Applied Mathematics and Computation* **235**, 226–234.

Anhang

Analytische Strukturmodellierung eines gelagerten Balkens

Die Strukturschwingungen des Euler-Bernoulli-Balkens können mittels folgender Differentialgleichung formuliert werden:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI_z \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right) + \rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = q(x,t) \quad (\text{A.1})$$

Mit Hilfe des Separationsansatzes für die Balkenverschiebung $w(x,t) = W(x)\zeta(t)$, kann Gl. (A.1) für den homogenen Balken umgeformt werden zu:

$$W^{IV}(x)\zeta(t) + \frac{1}{\alpha^2}W(x)\ddot{\zeta}(t) = \frac{q(x,t)}{EI_z} \quad \text{mit} \quad \alpha^2 = \frac{EI_z}{\rho A} \quad (\text{A.2})$$

Für den unbelasteten Fall bzw. die freie Schwingung $q(x,t) = 0$, splittet sich Gl. (A.2) in zwei charakteristische Gleichungen:

$$\text{a) } W^{IV}(x) - \frac{\omega^2}{\alpha^2}W(x) = 0 \quad \text{und} \quad \text{b) } \ddot{\zeta}(t) + \omega^2\zeta(t) = 0 \quad (\text{A.3})$$

Diese führen auf die Eigenfrequenzen ω_n und die analytischen Eigenformen $W_n(x)$ der n -ten Eigenmode, für $n = 1, 2, \dots$.

$$\omega_n = (n\pi)^2 \sqrt{\frac{EI_z}{\rho AL^4}} \quad \text{und} \quad W_n(x) = C_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad (\text{A.4})$$

Die Eigenfrequenzen und Eigenformen berücksichtigen die Randbedingungen für einen beidseitig gelagerten Balken $W(0) = W''(0) = W(L) = W''(L) = 0$, (vgl. Abb. 4.4). Der modale Skalierungsfaktor C_n wird als $C_n = 1$ gewählt. Die Verschiebung kann nun in modalen Koordinaten $\zeta(t)$ beschrieben werden:

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} W_n(x)\zeta_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\zeta_n(t) \quad (\text{A.5})$$

Die Gleichungen (A.5) und (A.1) dienen als Grundlage zur Herleitung der gewünschten Zustandsraumdarstellung:

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (\text{A.6a})$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{z}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) , \quad (\text{A.6b})$$

Um die Zustandsgleichung (A.6a) zu erhalten, wird Gl. (A.5) in Gl. (A.1) eingesetzt. Durch Verwendung von (A.3a) führt dies auf folgenden Ausdruck:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\ddot{\zeta}_n(t) + \omega_n^2 \zeta_n(t) \right) W_n(x) = \frac{q(x,t)}{\rho A} \quad (\text{A.7})$$

Multiplikation der Gl. (A.7) mit $W_m(x)$, anschließende Integration entlang der Balkenachse L , unter Zuhilfenahme der orthogonalen Eigenschaften $\int_0^L W_n(x) W_m(x) dx = 0$, für $n \neq m$ und Hinzufügen der proportionalen modalen Dämpfung $2\xi_n \omega_n \dot{\zeta}_n(t)$ ergibt:

$$\ddot{\zeta}_n(t) + 2\xi_n \omega_n \dot{\zeta}_n(t) + \omega_n^2 \zeta_n(t) = \frac{2}{\rho A L} \int_0^L q(x,t) W_n(x) dx \quad (\text{A.8})$$

Die Zustandsgleichung (A.6a) kann für eine endliche Anzahl an Moden $n = 1, 2, \dots, n_m$ geschrieben werden als:

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\zeta}} \\ \ddot{\boldsymbol{\zeta}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\boldsymbol{\Omega}^2 & -2\mathbf{Z}\boldsymbol{\Omega} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\zeta}(t) \\ \dot{\boldsymbol{\zeta}}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \left(\frac{2}{\rho A L} \left[\int_0^L U_i(x) W_n(x) dx \right] \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_{n_f}(t) \end{bmatrix} \quad (\text{A.9})$$

In Gl. (A.9) ist die äußere Anregung in n_f Kräfte aufgeteilt worden und zusätzlich in einen räumlichen und örtlichen Anteil: $q(x,t) = \sum_{i=1}^{n_f} q_i(x,t) = \sum_{i=1}^{n_f} U_i(x) u_i(t)$. Für konzentrierte Lasten kann der räumliche Anteil $U_i(x)$ mittels der Dirac-Funktion $\delta(\cdot)$ ausgedrückt werden:

$$U_i(x) = \delta(x - a_i) \quad (\text{A.10})$$

Hier gibt a_i die Anregungsposition an und $i = 1, 2, \dots, n_f$ die Anzahl der konzentrierten Einzellasten. Darüber hinaus sind $\boldsymbol{\Omega}$ und \mathbf{Z} Diagonalmatrizen der Eigenfrequenzen und der modalen Dämpfungen. Die jeweiligen Terme aus Gl. (A.9) können nun den entsprechenden Vektoren und Matrizen der Zustandsgleichung (A.6a) zugeordnet werden.

Die Ausgangsgleichung (A.6b) für die Messung von Beschleunigungen kann konstruiert werden, indem Gl. (A.8) nach der modalen Beschleunigung der n -ten Mode umgestellt

wird

$$\ddot{\zeta}_n(t) = -\omega_n^2 \zeta_n(t) - 2\xi_n \omega_n \dot{\zeta}_n + \sum_{i=1}^{n_f} \underbrace{\frac{2}{\rho AL} \left(\int_0^L \delta(x - a_i) W_n(x) dx \right)}_{=p_{in}} u_i(t) \quad (\text{A.11})$$

und mit Hilfe der Gl. (A.5) als zweite zeitliche Ableitung $\ddot{w}(x, t) = \sum_{n=1}^{n_m} W_n(x) \ddot{\zeta}_n(t)$, erhält man für n_r Beschleunigungsmessungen:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \ddot{w}_1(x_1, t) \\ \vdots \\ \ddot{w}_r(x_{n_r}, t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\omega_1^2 W_1(x_1) & \cdots & -\omega_{n_m}^2 W_{n_m}(x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -\omega_1^2 W_1(x_{n_r}) & \cdots & -\omega_{n_m}^2 W_{n_m}(x_{n_r}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \zeta_1(t) \\ \vdots \\ \zeta_{n_m}(t) \end{bmatrix} + \\ &\begin{bmatrix} -2\xi_1 \omega_1 W_1(x_1) & \cdots & -2\xi_{n_m} \omega_{n_m} W_{n_m}(x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -2\xi_1 \omega_1 W_1(x_{n_r}) & \cdots & -2\xi_{n_m} \omega_{n_m} W_{n_m}(x_{n_r}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\zeta}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{\zeta}_{n_m}(t) \end{bmatrix} + \\ &\begin{bmatrix} \sum_{n=1}^{n_m} p_{1n} W_n(x_1) & \cdots & \sum_{n=1}^{n_m} p_{n_f n} W_n(x_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{n=1}^{n_m} p_{1n} W_n(x_{n_r}) & \cdots & \sum_{n=1}^{n_m} p_{n_f n} W_n(x_{n_r}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_{n_f}(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

x_i repräsentiert die i -te Sensorposition entlang der Balkenachse. Die ersten zwei Elemente der rechten Seite von Gl. (A.12) können zu der Messmatrix \mathbf{C} aus Gl. (A.6b) zusammengesetzt werden. Der letzte Term der Gl. (A.12) entspricht der Durchgriffsmatrix \mathbf{D} .

Wenn die Anregungsposition unbekannt ist, müssen diverse Krafteinleitungspunkte a_i definiert werden (siehe z.B. rote Punkte in Abb. 4.4), um eine geeignete Eingangsmatrix \mathbf{B} und Durchgriffsmatrix \mathbf{D} für das analytische Balkenmodell zu bestimmen. Mit Hilfe der Gl. (2.46) können nun die Markov-Parameter aus den hier hergeleiteten Zustandsraummatrizen bestimmt werden.