

***B*-Zerfälle aus QCD Summenregeln**

DISSERTATION

zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften

vorgelegt von

Dipl.-Phys. Martin Melcher

geboren am 6.8.1979 in Haan

eingereicht beim Fachbereich Physik
der Universität Siegen

SIEGEN,
März 2006

Gutachter der Dissertation: Prof. Dr. Thomas Mannel
Prof. Dr. Hans D. Dahmen

Datum der Disputation: 26. April 2006

Internetpublikation der
Universität Siegen: [urn:nbn:de:hbz:467-2122](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:hbz:467-2122)

Abstract

In the Standard Model of elementary particle physics, the asymmetry between matter and antimatter, called CP -violation, is explained by a complex phase in the CKM -matrix which governs the coupling of the quarks to the W boson mediating the weak interaction. In order to test this theoretical framework and to determine its fundamental parameters, the CKM matrix elements, weak decays of hadrons have to be investigated. One interesting class of such decays are those of B mesons to two light pseudoscalars (π, K). They are sensitive to the weak CP -violating phases α and γ of the CKM matrix. The theoretical treatment required to extract them from the measured data is however very difficult, as the bound states of quarks cannot be described by perturbation theory. In the literature, the limits $m_b \rightarrow \infty$ (heavy beauty quark) and $m_s \rightarrow 0$ (light strange quark) are often used in the calculation of physical observables. With the help of QCD two-point and light-cone sum rules, corrections to this limits can be calculated.

In $B \rightarrow \pi\pi$ decays, for example, one observes a discrepancy between the theoretical description in the $m_b \rightarrow \infty$ limit and the measured quantities. In this work, the contributions from the annihilation mechanism have been calculated using light-cone sum rules, in addition to several already known $1/m_b$ -corrections. They were found to be too small to reconcile theory and experiment, however. The same method was also applied to perturbative corrections to the dominant emission diagrams. The latter ones have already been calculated in other methods and the results are consistent with each other. At the same time, the new result includes a new $1/m_b$ -suppressed strong phase and does not depend on the poorly known distribution amplitude of the B meson.

In $B_{(s)} \rightarrow \pi K$ and KK -decays, the effects of the strange quark mass were calculated. To this end, nonperturbative, process-independent quantities related to the light-cone distribution amplitudes have been computed in two-point sum rules. Using this values, it was found that the $m_s \rightarrow 0$ limit is not a very good approximation for the decay amplitudes, and that QCD sum rules successfully describe the amplitudes without relying on this limit.

Zusammenfassung

Das Standardmodell der Elementarteilchenphysik erklärt die CP -Verletzung genannte Materie-Antimaterie-Asymmetrie durch eine komplexe Phase in der Kopplung der Quarks an das W -Boson, die durch die CKM -Matrix beschrieben wird. Um diesen Ansatz zu überprüfen und seine fundamentalen Parameter, die Einträge der CKM -Matrix, zu bestimmen, müssen schwache Zerfallsprozesse von Hadronen untersucht werden. Wichtige Einblicke bieten zum Beispiel B -Meson-Zerfälle in zwei leichte Pseudoskalare (π, K). Über sie können die CKM -Winkel α und γ bestimmt werden. Allerdings wird die theoretische Behandlung der Zerfälle dadurch erschwert, dass gebundene Quarkzustände nicht mit der Störungstheorie beschrieben werden können. In der Literatur behilft man sich oft mit Berechnungen im Limes $m_b \rightarrow \infty$ (schweres Beauty-Quark) und $m_s \rightarrow 0$ (leichtes Strange-Quark). In QCD Summenregeln können die Korrekturen zu dieser Näherung berechnet werden.

In $B \rightarrow \pi\pi$ -Zerfällen zum Beispiel ist die theoretische Vorhersage im Grenzfall $m_b \rightarrow \infty$ inkonsistent mit den Messdaten. In der vorliegenden Arbeit wurden zusätzlich zu bereits bekannten $1/m_b$ -Korrekturen die Annihilations-Beiträge zu diesen Zerfällen mit Lichtkegel-Summenregeln berechnet. Sie sind allerdings zu klein, um die Diskrepanz zwischen Theorie und Experiment aufzuheben. Mit der gleichen Methode wurden auch perturbative Korrekturen zu Emissionsdiagrammen neu berechnet. Das Ergebnis ist vergleichbar mit dem anderer Methoden, schließt aber eine neue $1/m_b$ -unterdrückte starke Phase ein und hängt nicht von der B -Meson-Verteilungsamplitude ab, die noch nicht gut bekannt ist.

Darüberhinaus wurden die Effekte der Strange-Quark-Masse in $B_{(s)} \rightarrow \pi K$ - und KK -Zerfällen berechnet. Dazu wurden prozessunabhängige Größen, die Lichtkegel-Verteilungsamplituden beschreiben, in Zweipunkt-Summenregeln berechnet. Es stellte sich heraus, dass der Grenzwert $m_s \rightarrow 0$ keine besonders gute Näherung ist, die QCD Summenregeln aber bei endlichem m_s eine gute Beschreibung liefern.

Physica particularum minimarum

Physica particularum minimarum est pars physicae quae materiae constituentia et earum interactiones relativitatis specialies praeceptis describit. Etiam physica magnarum energiarum appellatur, quoniam experimenta multa in particularum acceleratris, quibus particulas fere usque ad velocitatem luminis accelerant ideoque particulae energiam permagnam obtinet, saepe fiunt.

Particulae primariae omnes in **doctrina usitata** accurate describuntur. Notum est, exempli gratia, proton particulam primariam non esse sed ex quarcis constitutum. Doctrina usitata solum particulas primarias directe describit, quae in duabus classibus distribuuntur

- Particulae quae interactiones transmittunt:
VIII gluona quibus vim fortem transmittitur, III bosona vectorialia quibus vim imbecillum transmittitur, I photon quod vim electromagneticam transmittit
- Particulae (leptona et quarcia) quae materiam instituunt.

Praeterea firmiter creditur boson higgsianum esse, quamvis eum nondum investum sit. Doctrina usitata boson higgsianum theoretice maxime requirit, quia particulae primariae sine ipso massam non haberent. In summa, LXI particulae in doctrina usitata exstant, ut facile videtur: VI leptona, VI antileptona, XIIIX=VI x III quarcia, XIIIX antiquarcia (unumquodque quarcium III colores dissimiles habere potest), VIII gluona, III bosona vectorialia, I photon, I boson higgsianum.

Omnes particulae aut bosona aut fermiones sunt, haec cognitio a turbini pendet; si particulae turbo est numerum integrum constat illam boson esse, si turbo autem esse semi-integrum tunc particula fermion est. Secundum doctrinam usitatam fermiones sunt omnia quarcia leptonaque (turbo=I/II) dum boson higgsianum (turbo=0) et omnes, quae interactiones transmittunt, particulae (turbo=I) bosona sunt.

Particulae doctrinae usitatae tribus viribus inter se agunt. Manifestum autem est doctrinam usitatam vim gravitatis non describere, sed hoc non effectivum est problema propter imbecillitatem gravitatis vis. Omnia ergo experimenta in particularum acceleratris usque ad hodie facta nunquam attractionem gravitatis inter particulas detexerunt, ideoque gravitatis effectus neglegi optime possunt.

E Vicipaedia, <http://la.wikipedia.org>

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Das Standardmodell	3
1.1.1	Geeichte Quantenfeldtheorie	3
1.1.2	Teilcheninhalt und Symmetriegruppe	4
1.1.3	Higgsfeld und spontane Symmetriebrechung	7
1.1.4	Quarkmischung und CKM -Matrix	10
1.1.5	Neutrinomassen und der Seesaw-Mechanismus	14
1.1.6	Quantenchromodynamik	15
1.1.7	Renormierung und laufende Kopplung in der QCD	17
1.2	Offene Fragen	20
1.3	Aufgabenstellung	22
1.3.1	Das CKM -Unitaritäts-Dreieck	22
1.3.2	$B \rightarrow PP$ -Zerfälle	24
2	Grundlagen und Phänomenologie	27
2.1	Operatorproduktentwicklung	28
2.1.1	Effektiver Hamiltonoperator	28
2.1.2	Strahlungskorrekturen und Renormierung	32
2.1.3	\mathcal{H}_{eff} für $B \rightarrow \pi\pi$	37
2.2	Phänomenologie	39
2.2.1	Isospin-Symmetrie	39
2.2.2	Naive Faktorisierung	41
2.2.3	QCD Faktorisierung	43
2.2.4	Theorie und Daten	45
2.2.5	Nichtfaktorisierbare Beiträge und Zerlegung der Zerfallsamplituden	47
2.2.6	Zerlegung nach CKM -Phasen	52
2.2.7	CP -Asymmetrien	53
3	$B \rightarrow \pi\pi$ in Lichtkegel-Summenregeln	57
3.1	Methode	58
3.1.1	Korrelationsfunktion	58
3.1.2	Twist-Entwicklung	59

3.1.3	Summenregel	62
3.1.4	Diagramme	70
3.2	Emission	73
3.2.1	Berechnung der Diagramme	74
3.2.2	Heavy Quark Limit und QCD Faktorisierung	82
3.2.3	Diskussion	84
3.3	Annihilation	85
3.3.1	Berechnung der harten Diagramme für \tilde{O}_2^u	86
3.3.2	Berechnung der weichen Diagramme für \tilde{O}_2^u	92
3.3.3	Faktorisierbarer Beitrag von O_6	96
3.3.4	Heavy Quark Limit und QCD Faktorisierung	98
3.3.5	Diskussion	99
3.4	Auswertung	100
3.4.1	Parameterwahl	100
3.4.2	Numerische Resultate	102
3.4.3	Diskussion	105
4	Kaon versus Pion: $SU(3)_{fl}$-Verletzung	107
4.1	Asymmetrie der Zweiteilchen-Verteilungsamplitude: a_1^K	109
4.1.1	Definition und Verwendung	109
4.1.2	Lokale Operatoren und Renormierung	110
4.1.3	Zweipunkt-Summenregel	113
4.1.4	Operatorproduktentwicklung und Kondensate	115
4.1.5	Berechnung der Diagramme	117
4.1.6	Numerische Auswertung	123
4.1.7	Beitrag von K_1	126
4.1.8	Vergleichsrechnung mit $f_{K\pi}$	129
4.1.9	Diskussion	130
4.2	Normierung der Dreiteilchen-Verteilungsamplitude: δ_K	131
4.2.1	Zweipunkt-Summenregel und Diagramme	132
4.2.2	Resultat	133
4.3	$SU(3)_{fl}$ in $B \rightarrow PP$	134
4.3.1	Amplituden in naiver Faktorisierung	134
4.3.2	Nichtfaktorisierte Anteile	136
4.3.3	$SU(3)_{fl}$ -Relationen	138
4.3.4	Fazit	139
5	Zusammenfassung und Ausblick	141

A Vergleich mit Notationen in QCD Faktorisierung	143
B Komplexe Analysis	145
B.1 Analytische Fortsetzung	145
B.2 Produktregel	146
B.3 Formelsammlung: Imaginärteile	147
C Imaginärteil der C_0-Funktionen	151
C.1 C_0 mit einem massiven Propagator	151
C.2 C_0 mit zwei massiven Propagatoren	152
Literaturverzeichnis	155

Kapitel 1

Einleitung

Warum, so mag man fragen, ist es lohnenswert, dass sich Tausende von Physikern weltweit Gedanken über den Grundaufbau der Materie, die Entstehung des Universums und die Struktur der Naturkräfte machen, dass Teleskope, Observatorien und kilometerlange Teilchenbeschleuniger mit modernster Technologie errichtet werden, wenn doch am Ende außer reinem Wissen nichts Greifbares zu erwarten ist? Warum, um die Frage fortzusetzen, werden Sonden zu anderen Planeten geschickt, die Tiefen der Meere durchforscht und Überreste längst vergangener Arten und Kulturen untersucht?

Die Neugierde, von der Evolution einst als pure Notwendigkeit entdeckt, ohne die der Mensch nie das Verständnis seiner Umwelt erlangt hätte, das nötig ist, um sie nach seinen Bedürfnissen zu gestalten, ist von der Zivilisation längst zum Prinzip erhoben worden. In der Tat sind die größten Entdeckungen der Naturwissenschaft nur gerade deswegen zustande gekommen, weil der Wissensdurst, und eben *nicht* die Verwendbarkeit die treibende Kraft war. Und doch konnte eine Vielzahl der so entdeckten Phänomene in den Dienst der Menschheit gestellt werden.

Was aber, wenn nicht die Entwicklung einer neuen, hilfreichen Technologie, ist als naturwissenschaftlicher Fortschritt zu bezeichnen? Der zentrale Begriff ist die *Vereinheitlichung*. Das Gefühl des tieferen Verständnisses stellt sich immer dann ein, wenn sich eine Anzahl zunächst völlig verschiedenartig erscheinender Beobachtungen auf ein einziges, einfaches Grundprinzip zurückführen lässt – allen voran sei die Newtonsche Erkenntnis, dass ein und dasselbe Gesetz sowohl die Planetenbahnen als auch die Erdbeschleunigung erklärt, als Beispiel genannt. Und je allgemeiner und einfacher das Grundprinzip ist, desto größer ist sein Anwendungsbereich, und desto mehr lassen sich daraus Vorhersagen von bis dato unbeobachteten Phänomenen ableiten.

Diese Vereinheitlichung ist inzwischen so weit vorangetrieben worden, dass eine Theorie, die aus einem erstaunlich kleinen Satz von Symmetrieprinzipien hergeleitet werden kann, praktisch alle Vorgänge, angefangen von der Bindung der elementaren Bausteine zu Atomen und deren dynamische Eigenschaften, Elektrizität, Magnetismus und Strahlung, bis zu der Leuchtkraft der Sonne, erklären kann. Sie ist dabei so allgemein, dass sie sogar Einblicke in die Vorgänge der ersten Sekunden des Universums oder auf weit entfernten Objekten im Weltall gibt, die sich prinzipiell der direkten Untersuchung entziehen. Wann immer sich aber ein grundlegendes Erklärungsmodell aufgrund seiner Eleganz und überprüften Präzision

allgemein durchsetzt, spricht man von einem *Standardmodell*.

Dieses Standardmodell der Elementarteilchenphysik gehört zu den am besten experimentell überprüften Theorien, und einige seiner Voraussagen – zum Beispiel das magnetische Moment des Elektrons – sind die am genauesten bekannten und nachgemessenen Zahlenwerte der Physik überhaupt. Und doch ist es unvollkommen. Zum einen ist noch keine Beschreibung der Gravitation gefunden worden, die die Prinzipien Einsteins allgemeiner Relativitätstheorie mit denen der Quantenfeldtheorie, die die elementaren Teilchen und Wechselwirkungen beschreibt, vereint. Auch die Entstehung der Materie selbst gibt Rätsel auf, denn in der Theorie hätte bei dem anfänglichen Wechselspiel zwischen Strahlung, Materie und Antimaterie viel weniger davon übrig bleiben dürfen.

Darüberhinaus sind es aber auch und vielmehr die konzeptionellen Gründe, die uns dazu anhalten, die Reise zu den elementarsten Prinzipien der Natur weiter fortzusetzen. Eine Vielzahl von Größen, zum Beispiel die Massen der Materieteilchen, gehen als reiner Messwert in die Theorie ein, und für die vielen Größenordnungen Unterschied zwischen den leichtesten und den schwersten Teilchen gibt es keine Begründung. Einige Naturkonstanten scheinen wiederum so präzise aufeinander abgestimmt zu sein, dass es schwer fällt, an einen Zufall zu glauben. Dies und weiteres lässt darauf hoffen, dass es eine noch fundamentalere Theorie gibt, die die unterschiedlichen Aspekte der bestehenden vereinheitlicht – und dabei auch die Gravitation einschließt.

Und es mangelt nicht an Kandidaten für eine solche fundamentalere Theorie. Die Ansätze laufen von der Einbeziehung neuer Symmetrien (z.B. Supersymmetrie) bis zu zusätzlichen Raumzeitdimensionen oder neuen Strukturen der Raumzeit an sich. Für die Beantwortung der Frage, ob das Standardmodell wirklich fehlerhaft ist, und, wenn ja, wodurch es ersetzt werden muss, sind zweierlei Dinge notwendig: Neue Theorien sagen in der Regel die Existenz von Teilchen voraus, die so schwer sind, dass sie bisher nicht beobachtet werden konnten. Der erste Weg besteht darin, mit groß angelegten Teilchenbeschleunigern so viel Energie auf einem Punkt zu konzentrieren, dass diese Teilchen erzeugt und direkt beobachtet werden können. Der *Large Hadron Collider* (LHC), der derzeit am CERN in Genf gebaut wird, stößt in diese Richtung.

Unabhängig davon können zweitens Präzisionsmessungen die Vorhersagen des Standardmodells selbst nachprüfen. Im Mittelpunkt steht dabei die Bestimmung der fundamentalen Naturkonstanten und die Frage, ob sich für sie Zahlenwerte finden lassen, die mit allen experimentellen Beobachtungen in Einklang sind. Dazu werden gezielt Experimente aufgebaut, mit denen sich jeweils eine Teilmenge davon bestimmen lässt.

Die *B-Fabriken* BaBar und Belle, die seit einigen Jahren ihren Betrieb aufgenommen haben, gehören zu dieser Klasse. Es handelt sich um Teilchenbeschleuniger, bei denen die Energie der aufeinanderprallenden Teilchen genau so bemessen ist, dass ganz bestimmte Teilchen, sogenannte „*B*-Mesonen“, erzeugt werden. Diese zerfallen nach kurzer Zeit und die Zerfallsprodukte werden in großen Teilchendetektoren nachgewiesen und vermessen. Die Naturkonstanten, die bei diesen Zerfällen eine Rolle spielen, sind dieselben, die auch die Unterschiede zwischen Materie und Antimaterie beschreiben, und die es nach derzeitigem Verständnis überhaupt ermöglichen, dass nach dem Urknall von dem einen mehr als von

dem anderem übrig blieb.

Der Schluss von den Messdaten auf die Naturkonstanten und umgekehrt ist allerdings alles andere als einfach. Zu beschreiben, wie die Kräfte der Natur in den beobachteten Prozessen zusammenwirken, ist Aufgabe der Theorie. Bedurfte es für die Entwicklung des Standardmodells selbst einiger bahnbrechender Ideen genialer Köpfe, so gleicht dieser Teil eher einem weltumspannendem Puzzle, zu dem die vorliegende Arbeit einige Teile hinzuzufügen versucht.

Es geht dabei um eine bestimmte Klasse von Zerfällen der B -Mesonen. Die Abhängigkeit dieser Zerfälle von bestimmten Naturkonstanten, den CKM -Winkeln α und γ , um sie beim Namen zu nennen, und ihre potenzielle Sensitivität auf bisher unbekannte Teilchen und Wechselwirkungen, macht sie ebenso interessant wie die Tatsache, dass die Messwerte und die gängige theoretische Beschreibung momentan nicht ganz zueinander zu passen scheinen. In dieser Arbeit konnten einige Unzulänglichkeiten dieser Beschreibung durch die Anwendung speziell entwickelter Rechenmethoden aufgehoben werden.

1.1 Das Standardmodell

1.1.1 Geeichte Quantenfeldtheorie

Das Standardmodell der Elementarteilchenphysik ist eine geeichte Quantenfeldtheorie. Um diesen Begriff zu erklären beginnen wir bei der **Feldtheorie**. Prominentestes Beispiel dafür sind sicherlich die Maxwell'schen Gleichungen, die die Wechselwirkung von elektrischen und magnetischen Feldern beschreiben. Jedem Punkt im Raum wird eine Feldstärke zugeordnet, die die Bewegung von geladenen Teilchen beeinflusst, sodass man die Feldstärke mit relativ einfachen Mitteln direkt messen kann. Die durch diese Gleichungen beschriebenen Wechselwirkungen der Felder miteinander und mit der Materie sind *lokal*: Wie sich die Felder an einem Punkt x in naher Zukunft verhalten werden, hängt nur vom Zustand einer kleinen Umgebung um diesen Punkt ab. Änderungen der Feldstärke übertragen sich also nicht sofort auf entfernte Punkte, sondern propagieren mit der Lichtgeschwindigkeit.

Auch die Quantenmechanik kann man als Feldtheorie betrachten, wird doch hier der Bewegungszustand von Teilchen nicht mehr durch Ort und Geschwindigkeit, sondern durch eine Wellenfunktion beschrieben, die ihrerseits jedem Punkt im Raum eine Art Feldstärke zuweist. Deren Interpretation ist aber eine andere: Ihr Betrag ist ein Maß für die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Teilchens. Und während die elektromagnetischen Felder beliebig stark und schwach werden können, so beschreibt die Quantenmechanik immer genau *ein* Teilchen (bzw. eine feste Anzahl), was sich in der festgelegten Normierung der Wellenfunktion zeigt.

Diese völlig unterschiedlich erscheinenden Spielarten von Feldtheorien werden in der **Quantenfeldtheorie** zusammengeführt. Dabei wird einerseits dem elektromagnetischen Feld eine Wahrscheinlichkeitsaussage hinzugefügt: Es sind nicht mehr beliebige Feldstärken zugelassen, sondern nur noch bestimmte Energiepakete, die Photonen genannten Feldquanten, und in dem Fall, dass es nur ein solches Feldquant gibt, wird die Feldstärke zum Maß seiner Auf-

enthaltswahrscheinlichkeit. Andererseits wird die Quantenmechanik so erweitert, dass auch Zustände mit variabler Teilchenzahl zugelassen werden. Sie lassen sich ganz ähnlich wie die Photonen als Feldquanten – Energiepakete – von Materiefeldern beschreiben. Insbesondere schließt die Quantenfeldtheorie auch die Erzeugung und Vernichtung von Feldquanten, also Materieteilchen und Photonen ein, bei der nach der Formel $E = mc^2$ Energie und Materie ineinander verwandelt werden. Die spezielle Relativitätstheorie, aus der diese berühmte Formel stammt, wurde in der Konstruktion der Theorie nicht nur berücksichtigt, sondern ist einer ihrer Grundpfeiler; die klassische Quantenmechanik stand dagegen im direkten Widerspruch zur speziellen Relativität.

Die Quantenfeldtheorie gibt also den Rahmen vor, in dem Teilchen- und Kraftfelder grundsätzlich beschrieben werden müssen. Völlig offen lässt sie aber, welche Teilchen und Kräfte es überhaupt gibt und wie die Wechselwirkungen aussehen. Dies wird durch die **Eichtheorie** bestimmt. Dabei startet man mit einer Theorie, die nur Materie beschreibt, aber keine Kräfte zwischen Materieteilchen. Dann wird eine Klasse von Symmetrietransformationen ausgewählt, die mathematisch durch eine Gruppe (die sogenannte Eichgruppe) beschrieben wird. Für das Elektronfeld zum Beispiel, das eine Phase und einen Betrag hat, kann gefordert werden, dass die Phase beliebig wählbar sei, denn nur der Betrag hat mit der Aufenthaltswahrscheinlichkeit eine direkte physikalische Bedeutung. Die Gruppe der Phasentransformationen heißt $U(1)$. Unter einer Phasen- bzw. $U(1)$ -Transformation auf das Elektronfeld soll sich die physikalische Situation also nicht ändern. Dabei wird zugelassen, dass die Phasentransformation an jedem Raumpunkt eine andere ist: Die Eichsymmetrie gilt *lokal*. Setzt man die Phasentransformation aber in die grundlegenden Gleichungen ein, dann sieht man, dass sich die physikalische Situation sehr wohl ändert, zum Beispiel beeinflusst sie den Impuls der Elektronen. Um diese Änderung zu kompensieren, wird ein neues Feld eingeführt, das *Eichfeld*. Eine Transformation des Elektronenfeldes geht dann mit einer zugehörigen Transformation des Eichfeldes einher, sodass sich die Änderungen gerade gegeneinander aufheben. Das Eichfeld selbst vermittelt jetzt Wechselwirkungen zwischen Materieteilchen und hat eigene Feldquanten, die Eichbosonen. Im Beispiel der $U(1)$ -Symmetrie ist es das elektromagnetische Feld und sein Eichboson das Photon.

Allein aus der Forderung einer lokalen $U(1)$ -Symmetrie kann also nicht nur die Existenz des elektromagnetischen Feldes gefolgert werden, sondern auch seine Feldgleichungen und die Wechselwirkung mit der Materie lassen sich herleiten.

1.1.2 Teilcheninhalt und Symmetriegruppe

Eine Eichtheorie wird also durch den Teilcheninhalt, die Wahl der Symmetriegruppe und das Transformationsverhalten der Teilchen- und Eichfelder vollständig definiert. Für das Standardmodell kommt aber noch eine weitere Komponente hinzu: Die spontane Symmetriebrechung. Die einzelnen Zutaten werden im Folgenden aufgelistet. Da eine vollständige Konstruktion der Theorie viele Bücher füllt (z.B. [1, 2]), kann auf die Struktur der Quantenfeldtheorie selbst hier nicht eingegangen werden.

Teilcheninhalt

Alle Materieteilchen im Standardmodell tragen den Spin $1/2$, sind demnach Fermionen, und werden durch vierkomponentige *Spinoren* beschrieben. Die vier Einträge entsprechen – grob gesagt – der Beschreibung von Teilchen und Antiteilchen mit jeweils zwei möglichen Spineinstellungen. Die vollständige Liste der elementaren Materieteilchen ist:

Familie	Fermion-Sorten							
	Leptonen				Quarks			
1.	e	Elektron	ν_e	e -Neutrino	u	up	d	down
2.	μ	Myon	ν_μ	μ -Neutrino	s	strange	c	charm
3.	τ	Tauon	ν_τ	τ -Neutrino	t	top	b	beauty

Zu jedem Teilchen kommt ein Antiteilchen dazu. Es gibt drei Familien von Teilchen, und der einzige Unterschied zwischen den Familien besteht in den Teilchenmassen, ansonsten sind die Eigenschaften von Familie zu Familie gleich. Teilchen aus der zweiten und dritten Familie können damit in Teilchen der ersten Familie zerfallen, und die uns bekannte Materie besteht nur aus Teilchen der ersten Familie: Up- und Down-Quarks bilden die Protonen und Neutronen der Atomkerne, die von Elektronen umgeben sind. Das Neutrino tritt zum Beispiel bei radioaktiven Kernzerfällen auf.

Elektroschwache Eichgruppe

Es hat sich herausgestellt, dass die in solchen Kernzerfällen auftretende schwache Wechselwirkung von der Ausrichtung des Teilchenspins zur Bewegungsrichtung – der Händigkeit – abhängt. Die Spinoren werden daher jetzt in rechtshändige und linkshändige Komponenten unterteilt:

$$\psi_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\psi, \quad \psi_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\psi, \quad \psi = e, \nu_e, u, d, \dots$$

Bis vor einigen Jahren ging man davon aus, dass Neutrinos masselos sind und nur die linkshändige Komponente vorkommt. Aufgrund neuerer Experimente besteht aber inzwischen kein Zweifel mehr daran, dass die Neutrinomassen zwar sehr klein, aber nicht Null sind. Massive Teilchen haben grundsätzlich sowohl links- als auch rechtshändige Komponenten, weswegen nun auch die rechtshändige Komponente von ν eingeführt werden muss.

Die Eichgruppe der elektroschwachen Wechselwirkung ist

$$U(1)_Y \otimes SU(2)_I.$$

Die $U(1)_Y$ -Gruppe hat nur einen Generator Y (*Hyperladung*), und die zugehörige Transformation ist für alle Fermionen

$$\psi \rightarrow e^{-i\frac{Y}{2}\theta_Y} \psi.$$

Die $SU(2)_I$ -Gruppe hat dagegen drei Generatoren $\tau^{1,2,3}$ (*schwacher Isospin*), und an der Transformation nehmen nur die linkshändigen Komponenten teil, wobei Quarks und Lepto-

nen als Dubletts geschrieben werden:

$$\begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix} \rightarrow \exp\left(-i \sum_{a=1}^3 \frac{\tau^a}{2} \theta_I^a\right) \times \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix} \rightarrow \exp\left(-i \sum_{a=1}^3 \frac{\tau^a}{2} \theta_I^a\right) \times \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}.$$

In dieser Schreibweise sind τ^a die 2×2 Pauli-Matrizen und das gleiche gilt auch für die Fermionen der zweiten und dritten Familie. Die rechtshändigen Komponenten dagegen transformieren sich nicht unter $SU(2)_I$:

$$e_R \rightarrow e_R, \quad \nu_R \rightarrow \nu_R, \quad u_R \rightarrow u_R, \quad d_R \rightarrow d_R.$$

Die Teilchen lassen sich nun durch ihre Eigenwerte zu den Operatoren Y und $I_W^3 = \frac{\tau^3}{2}$ charakterisieren:

	e_L	ν_L	e_R	ν_R	u_L	d_L	u_R	d_R
Y	-1	-1	-2	0	1/3	1/3	4/3	-2/3
I_W^3	-1/2	+1/2	0	0	+1/2	-1/2	0	0

Um zu gewährleisten, dass die Physik symmetrisch unter einer *lokalen* $U(1)_Y \otimes SU(2)_I$ -Transformation bleibt, wird die eichkovariante Ableitung

$$D_\mu = \partial_\mu - ig_2 \frac{\tau^a}{2} W_\mu^a + ig_1 \frac{Y}{2} B_\mu$$

eingeführt, mit der die Lagrangedichte für die Fermionfelder

$$\mathcal{L}_F = \sum_{j=1}^3 \left(\bar{L}_L^j i \not{D} L_L^j + \bar{Q}_L^j i \not{D} Q_L^j + \bar{e}_R^j i \not{D} e_R^j + \bar{\nu}_R^j i \not{D} \nu_R^j + \bar{u}_R^j i \not{D} u_R^j + \bar{d}_R^j i \not{D} d_R^j \right)$$

ist. Dabei ist j der Familienindex und die Leptonen- und Quarkfelder wurden zu den Vektoren

$$L_L^{1,2,3} = \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_{\mu L} \\ \mu_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_{\tau L} \\ \tau_L \end{pmatrix}, \quad e_R^{1,2,3} = e_R, \mu_R, \tau_R, \quad \nu_R^{1,2,3} = \nu_{eR}, \nu_{\mu R}, \nu_{\tau R},$$

$$Q_L^{1,2,3} = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_L \\ s_L \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t_L \\ b_L \end{pmatrix}, \quad u_R^{1,2,3} = u_R, c_R, b_R, \quad d_R^{1,2,3} = d_R, s_R, t_R$$

gruppiert. Mit der Schreibweise wird explizit ausgedrückt, dass die rechtshändigen Komponenten nicht an der $SU(2)_I$ -Eichsymmetrie teilnehmen und damit auch nicht an die drei zugehörigen vektoriellen Eichfelder $W_\mu^{1,2,3}$ koppeln. Die rechtshändigen Neutrino-Komponenten ν_R koppeln außerdem auch nicht an das Eichfeld B_μ der $U(1)_Y$ -Symmetrie, da ihre Hyperladung 0 ist. Durch ihr Transformationsverhalten

$$B_\mu \rightarrow B_\mu + \frac{1}{g_1} \partial_\mu \theta_Y$$

$$W_\mu^a \rightarrow W_\mu^a + \frac{1}{g_2} \partial_\mu \theta_I^a + \varepsilon^{abc} W_\mu^b \theta_I^c$$

kompensieren die Eichfelder die Transformation der Fermionfelder. g_1 und g_2 sind die Kopplungskonstanten für diese Eichfelder, und ihr kinetischer Term zur Lagrangedichte ergibt sich aus den Feldstärketensoren

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^B &= \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \\ F_{\mu\nu}^{W^a} &= \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + g_2 \varepsilon^{abc} W_\mu^b W_\nu^c \end{aligned}$$

zu

$$\mathcal{L}_{B,W} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^B F^{B\mu\nu} - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^{W^a} F^{W^a\mu\nu}.$$

Die Summe $\mathcal{L}_{EW} = \mathcal{L}_F + \mathcal{L}_{B,W}$ ist jetzt insgesamt symmetrisch unter lokalen $U(1)_Y \otimes SU(2)_I$ -Transformationen (bis auf totale Ableitungen). Diese Lagrangedichte beschreibt ein wechselwirkendes System aus Fermionen und 1+3 Eichbosonen, die alle masselos sind. Ein masseloses Eichboson hat dabei nur zwei Freiheitsgrade, die zwei transversalen, also auf der Bewegungsrichtung senkrecht stehenden Polarisierungen entsprechen.

1.1.3 Higgsfeld und spontane Symmetriebrechung

Der experimentelle Befund ist allerdings anders, und sowohl die Fermionen als auch die schwachen Eichbosonen sind massiv. Lediglich das Photon ist auch in der realen Welt masselos. Der Widerspruch ließe sich zwar durch Addition von Massentermen zu der Lagrangedichte beheben, aber dies würde die Eichsymmetrie zerstören. Stattdessen wird davon ausgegangen, dass die gemessenen Massen das Resultat einer spontanen Symmetriebrechung sind. Dazu wird das *Higgsfeld* als Dublett

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi^+ \\ \Phi^0 \end{pmatrix}$$

von zwei komplexen Skalarfeldern eingeführt. Seine Komponenten haben die Hyperladung $Y_\Phi = \frac{1}{2}$ und den schwachen Isospin $I_W^3 = \pm \frac{1}{3}$ und nehmen entsprechend an den Symmetrietransformationen teil. Dadurch tritt im kinetischen Term wieder die kovariante Ableitung auf,

$$\mathcal{L}_{H,kin} = (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi),$$

sodass automatisch auch die Kopplungen an die Eichbosonen festliegen.

Mit diesem zusätzlichen Feld ist eine neue Art von Wechselwirkungstermen in der Lagrangedichte erlaubt, die symmetrisch unter $U(1)_Y \otimes SU(2)_I$ sind: Die *Yukawa-Kopplungen*

$$\mathcal{L}_{Yuk} = - \sum_{i,j=1}^3 \left(\bar{L}_L^i G_e^{ij} e_R^j \Phi + \bar{L}_L^i G_\nu^{ij} \nu_R^j \Phi^c + \bar{Q}_L^i G_u^{ij} u_R^j \Phi + \bar{Q}_L^i G_d^{ij} d_R^j \Phi^c + \text{h.k.} \right).$$

Die G^{ij} sind die Yukawa-Kopplungsmatrizen, h.k. steht für die hermitesch konjugierten Terme. Es wurde weiter ausgenutzt, dass mit $\Phi^c = i\tau^2 \Phi^*$ aus Φ ein Isospin-Antidublett konstruiert werden kann. Dieser Isomorphismus von $SU(2)$ und $\overline{SU(2)}$ ist der Grund, warum im Standardmodell keine separaten Higgsdubletts für die Kopplung an die rechtshändigen $I_W^3 = +\frac{1}{2}$ und $I_W^3 = -\frac{1}{2}$ -Komponenten eingeführt werden müssen.

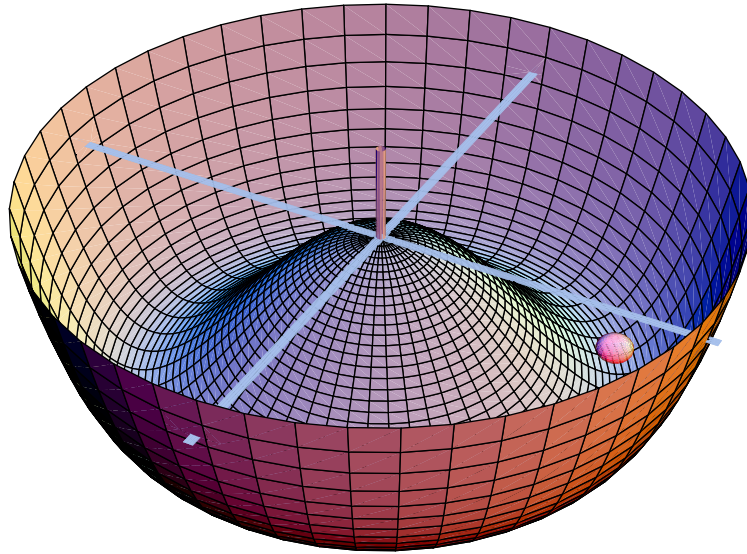


Abbildung 1.1: Potenzial für ein Higgs-Dublett. Die waagerechten Achsen sind die Beträge der beiden Komponenten. Die spontane Symmetriebrechung kann man sich durch das mechanische Analogon vorstellen, dass eine Kugel in der Mitte losgelassen wird und in einer beliebigen Richtung in das Minimum rollt.

Higbspotenzial und Vakuumerwartungswert

Die Eichsymmetrie erlaubt weiterhin, ein *Higbspotenzial* $-V(\Phi^\dagger\Phi)$ zur Lagrangedichte zu addieren. Dieses wird zu

$$V(\Phi^\dagger\Phi) = \frac{\lambda}{2} (\Phi^\dagger\Phi)^2 - \mu^2\Phi^\dagger\Phi$$

gewählt, was in erster Linie als Taylor-Entwicklung eines noch allgemeineren, aber unbekanntes Potenzials zu verstehen ist. Wenn die beiden Parameter λ und μ^2 positiv sind, liegt das Minimum des Potenzials nicht bei $\Phi = 0$. Da das Vakuum aber der Zustand niedrigster Energie ist, nimmt das Higgsfeld einen von Null verschiedenen Wert Φ_0 an, der das Potenzial minimiert (Abbildung 1.1):

$$|\langle 0|\Phi_0|0\rangle|^2 = \frac{\mu^2}{\lambda} \equiv \frac{v^2}{2}.$$

Durch eine $SU(2)_I$ -Transformation kann das Higgs-Dublett im Vakuum immer auf die Form

$$\Phi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

gebracht werden. Mit diesem Vakuumerwartungswert ist die $U(1)_Y \otimes SU(2)_I$ -Symmetrie aber nun gebrochen. Durch Anwendung der Symmetriegeneratoren Y und $I_W^{1,2,3} = \frac{\tau^{1,2,3}}{2}$ auf Φ_0

lässt sich leicht zeigen, dass keiner von ihnen das Feld zum verschwinden bringt: Die Symmetrie ist also in jeder der Basisrichtungen gebrochen. Es gibt aber eine Linearkombination von Generatoren, die einer erhaltenen Symmetrie entspricht: Die *elektrische Ladung*

$$Q = I_W^3 + \frac{Y}{2}, \quad Q\Phi_0 = 0.$$

Damit bleibt das System insgesamt symmetrisch unter einer lokalen $U(1)_Q$ -Transformation $e^{i\alpha Q}$. Diese $U(1)_Q$ -Untergruppe der elektroschwachen Symmetriegruppe ist die Eichsymmetrie der Elektrodynamik. Aus der obigen *Klein-Nijshina-Formel* ergeben sich auch die elektrischen Ladungen der Fermionen aus den in der Tabelle auf Seite 6 angegebenen Quantenzahlen.

Anregungen des Higgsfeldes werden berücksichtigt, indem jetzt um dessen Vakuumerwartungswert entwickelt wird:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \frac{1}{\sqrt{2}} [v + \eta + i\chi] \end{pmatrix}.$$

Dabei ist ϕ^+ ein komplexes Skalar und η und χ sind reelle Skalarfelder. Sie sind die Goldstone-Bosonen der spontanen Symmetriebrechung. Allerdings lassen sich sowohl ϕ^+ (und damit auch sein komplex konjugiertes ϕ^-) als auch χ durch eine Eichtransformation absorbieren. In dieser *unitären Eichung* ist also

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} [v + \eta] \end{pmatrix},$$

und η ist der einzige physikalische Freiheitsgrad. Mit $Q\Phi = 0$ ist er elektrisch neutral.

Fermion- und Boson-Massen

Obige Entwicklung wird in die Langrangedichte eingesetzt. Zuerst beobachtet man in dem Higgs-Teil $\mathcal{L}_{Higgs} = (D_\mu \Phi)^\dagger (D^\mu \Phi) - V(\Phi^\dagger \Phi)$, dass das Feld η die Masse $M_H = \sqrt{2}\mu$ bekommt: Dies ist das skalare *Higgs-Boson*. Als nächstes erhält man aus den Yukawa-Wechselwirkungen \mathcal{L}_{Yuk} mit $\Phi \rightarrow \Phi_0$ Fermion-Massenterme, die proportional zum Vakuumerwartungswert v des Higgs-Feldes sind:

$$\mathcal{L}_{Yuk} \rightarrow \mathcal{L}_M = -\frac{v}{\sqrt{2}} \sum_{i,j=1}^3 (\bar{e}_L^i G_e^{ij} e_R^j + \bar{\nu}_L^i G_\nu^{ij} \nu_R^j + \bar{u}_L^i G_u^{ij} u_R^j + \bar{d}_L^i G_d^{ij} d_R^j + \text{h.k.}) + \dots$$

Die Terme proportional zu η , die hier nicht ausgeschrieben wurden, sind die Kopplungen der Fermionen an das Higgsboson.

Für die elektroschwachen Eichbosonen muss jetzt noch eine geeignete Basis gefunden werden. Eine Zerlegung nach Ladungs-Eigenzuständen liefert zwei geladene Felder mit $Q = \pm 1$:

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (W_\mu^1 \mp iW_\mu^2)$$

und die Felder W_μ^3 und B_μ sind elektrisch neutral. Da das Higgsfeld über die kovariante Ableitung D_μ an die Eichbosonen koppelt, erhält man mit dem Vakuumerwartungswert auch für diese Massenterme:

$$\mathcal{L}_{M_{B,W}} = \frac{1}{4}v^2 g_2^2 W_\mu^- W^{+\mu} + \frac{1}{8}v^2 (g_2 W_\mu^3 + g_1 B_\mu)(g_2 W^{3\mu} + g_1 B^\mu) + \text{h.k.}$$

Daraus können direkt die Massen der geladenen Felder W^\pm abgelesen werden:

$$M_W = \frac{g_2}{2}v.$$

Die neutralen Felder dagegen sind keine Masseneigenzustände. Diese erhält man aus W^3 und B durch Diagonalisierung der in $\mathcal{L}_{M_{B,W}}$ auftretenden Massenmatrix

$$M_{B,W}^2 = \frac{1}{4}v^2 \begin{pmatrix} g_1^2 & g_1 g_2 \\ g_1 g_2 & g_2^2 \end{pmatrix},$$

die zu den Eigenzuständen

$$\begin{pmatrix} A_\mu \\ Z_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_W & -\sin \theta_W \\ \sin \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_\mu \\ W_\mu^3 \end{pmatrix}$$

führt. θ_W ist dabei der *Weinberg-Winkel*, der über

$$\cos \theta_W = \frac{g_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}, \quad \sin \theta_W = \frac{g_1}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}}$$

definiert ist. Die Masseneigenwerte sind jetzt $M_Z = \frac{M_W}{\cos \theta_W}$ für das Z -Feld und Null für das A -Feld.

Als Ergebnis der spontanen Symmetriebrechung gibt es also drei massive Vektor-Eichbosonen W^\pm und Z , ein masseloses A , das das bekannte Photon ist, und ein massives Skalares η , das Higgs-Boson. Schließlich haben Elektron, Myon und Tauon sowie Quarks und Neutrinos Massen erhalten.

Die massiven Vektorbosonen haben im Vergleich zu den masselosen einen zusätzlichen Freiheitsgrad, der der longitudinalen Polarisierung entspricht. In W^\pm und Z sind also drei neue Freiheitsgrade aufgetreten. Diese sind aber nichts anderes als die weggeichteten Goldstone-Felder ϕ^\pm und χ aus der spontanen Symmetriebrechung. Daher kommt auch das Bild, die Eichbosonen würden die Goldstone-Bosonen „aufessen“ und dadurch massiv werden.

1.1.4 Quarkmischung und *CKM*-Matrix

An dieser Stelle können die Massen- und Wechselwirkungsterme der Quarks etwas genauer unter die Lupe genommen werden. Das Down-Quark-Feld und die entsprechenden der anderen beiden Familie (Strange und Beauty) erhalten jetzt einen Strich', um sie von den

noch zu bestimmenden Massen-Eigenzuständen zu unterscheiden. Der Quark-Massenterm der Lagrangedichte ist:

$$\mathcal{L}_{\text{Quark-Masse}} = - \sum_{i,j=1}^3 \left(\bar{u}_L^i M_u^{ij} u_R^j + \bar{d}'_L^i M_d^{ij} d'^j_R + \text{h.k.} \right), \quad M_{u,d}^{ij} = \frac{v}{\sqrt{2}} G_{u,d}^{ij}.$$

Die (unbekannten) Massenmatrizen $M_{u,d}$ müssen diagonalisiert werden. Allerdings wurde bislang offen gelassen, welche physikalischen Zustände u, d', s', b', c und t sind, und es gibt die Freiheit, die Basis (getrennt für die Quarks vom Up-Typ u, c, t und vom Down-Typ d', s', b') beliebig zu wählen. Auf diese Weise kann *per Definition* festgelegt werden, dass u, c, t bzw. d', s', b' die Masseneigenzustände sind – aber nicht beide Gruppen gleichzeitig, denn die Kopplung des W -Bosons an die Quarkfelder stellt eine Verbindung zwischen beiden her, wie wenig später gezeigt wird. Die übliche Konvention ist es, u, c, t als Masseneigenzustände zu definieren, sodass $M_u^{ij} = m_u^i \delta^{ij}$, und die Matrix M_d^{ij} wird mittels einer unitären Transformationsmatrix – getrennt für rechts- und linkshändige Komponenten – diagonalisiert,

$$d'^i_L = \sum_k U_L^{ik} d^k_L, \quad d'^i_R = \sum_k U_R^{ik} d^k_R,$$

sodass der Massenterm diagonal wird:

$$\sum_{i,j=1}^3 \bar{d}'_L^i M_d^{ij} d'^j_R = \sum_{i,j=1}^3 \bar{d}'_L^i \underbrace{\left(\sum_{k,l=1}^3 U_L^{\dagger ik} M_d^{kl} U_R^{lj} \right)}_{\delta^{ij} m_d^i} d'^j_R.$$

Mit dem Massenterm wird auch die der Masse proportionale Kopplung an das Higgs-Boson diagonal. Die Kopplungen an die Vektor-Bosonen, die in der kovarianten Ableitung D_μ auftreten, bedürfen dagegen einer gesonderten Betrachtung. In der ursprünglichen Quark-Basis ist diese Kopplung, geschrieben in den physikalischen Eichbosonfeldern W^\pm, Z und A :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Quark-WW}} &= -2g_2 \sin \theta_W \sum_{i=1}^3 \left(Q_u \bar{u}_i \gamma^\mu u_i + Q_d \bar{d}'_i \gamma^\mu d'_i \right) A_\mu \\ &\quad + \frac{g_2}{\cos \theta_W} \sum_{i=1}^3 \left(I_{W,u}^3 \bar{u}_L^i \gamma^\mu u_L^i + I_{W,d}^3 \bar{d}'_L^i \gamma^\mu d'^i_L \right. \\ &\quad \quad \left. - \sin^2 \theta_W \left(Q_u \bar{u}^i \gamma^\mu u^i + Q_d \bar{d}'^i \gamma^\mu d'^i \right) \right) Z_\mu \\ &\quad + \frac{g_2}{\sqrt{2}} \sum_{i=1}^3 \left(\bar{u}_L^i \gamma^\mu d'^i_L W_\mu^+ + \bar{d}'_L^i \gamma^\mu u_L^i W_\mu^- \right). \end{aligned}$$

Darin sind $Q_{u,d}$ die elektrischen Ladungen und $I_{W,u,d}^3$ die Isospin-3-Komponenten der Quarks, wie sie sich aus der Tabelle auf Seite 6 ergeben: $I_{W,u,d}^3 = \pm \frac{1}{2}$, $Q_u = \frac{2}{3}$ und $Q_d = -\frac{1}{3}$. Nach

dem Basiswechsel zu d^i statt d'^i bleiben die Kopplungen an A und Z diagonal: Diese Wechselwirkungen können also nicht die Quark-Sorte (Flavour) ändern. Anders die Kopplung der W^\pm : In diesen Termen macht sich der Basiswechsel bemerkbar, und es tritt die **Cabibbo-Kobayashi-Maskawa-Matrix** auf, die in der hiesigen Konvention, nach der die Up-Typ-Quarks nach definition Masseneigenzustände sind, identisch mit der Transformationsmatrix U_L ist:

$$V_{CKM}^{ij} = U_L^{ik}$$

(in dem allgemeineren Fall, dass auch die Down-Quarks transformiert werden, ist dies eine Kombination der Up- und Down-Transformationsmatrizen: $V_{CKM} = U_L^u U_L^{d\dagger}$). Diese Matrix ist eine neue, unitäre 3×3 -Matrix.

CKM-Matrix und CP-Verletzung

In den Kopplungen an das W treten jetzt die Terme $\bar{u}^i V_{CKM}^{ij} d^j$ und $\bar{d}^i V_{CKM}^{\dagger ij} u^j$ auf. Zwei Beobachtungen lassen sich davon ableiten: Über die Kopplung an das W -Feld können sich Quarksorten verschiedener Familien ineinander umwandeln, wobei der Übergang immer zwischen einem Up-Typ und Down-Typ-Quark stattfindet. Und diese Übergänge sind unterschiedlich für Quark und Antiquarks, denn V_{CKM} ist eine komplexe Matrix! Letzteres bedeutet, dass sich Materie und Antimaterie grundsätzlich unterschiedlich verhalten können – dieses Phänomen heißt *CP-Verletzung*. Die *C*-Transformation ist die Ladungskonjugation und führt Teilchen in Antiteilchen über. Schon in der Tatsache, dass die schwachen Eichbosonen Z, W nur an linkshändige Komponenten der Teilchen koppeln, sieht man, dass dies keine Symmetrietransformation ist. Denn dies bedeutet automatisch, dass von den Antiteilchen nur die rechtshändigen Komponenten beitragen, wie aus dem Ausschreiben der hermiteschen Konjugation der Wechselwirkungsterme folgt. Die *P*-Transformation (Parität) entspricht einer Raumspiegelung, sodass aus rechtshändigen Komponenten linkshändige werden und umgekehrt. Die Kombination *CP* der beiden Transformationen ist also so gesehen eine Symmetrietransformation, und die *CKM*-Matrix ist die einzige bekannte Quelle für die Verletzung dieser Symmetrie.

Die Einträge der *CKM*-Matrix sind fundamentale Parameter der Theorie und können nur experimentell bestimmt werden. Allerdings ist ihre Definition nicht eindeutig, denn es gibt noch eine gewisse Freiheit, die Phasen der Quarkfelder umzudefinieren. Sieht man von dieser Freiheit ab, bleiben vier physikalische Parameter übrig, die drei Mischungswinkel und eine komplexe Phase sind. Und die komplexe Phase ist es, die für die *CP*-Verletzung notwendige und hinreichende Bedingung ist. Für die Komponenten der *CKM*-Matrix,

$$V_{CKM} = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix},$$

hat sich die *Wolfenstein-Parametrisierung* als nützlich erwiesen. Es handelt sich um eine rein phänomenologische Entwicklung, die die beobachtete Tatsache ausnutzt, dass die Einträge

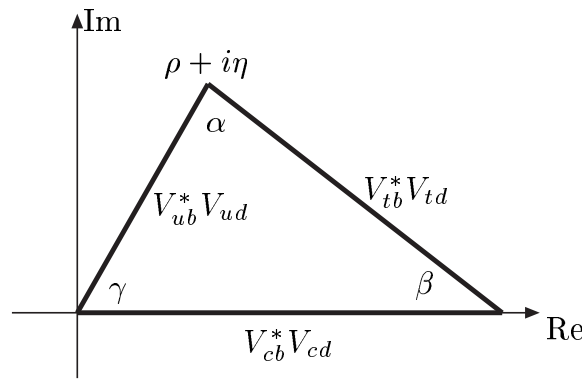


Abbildung 1.2: Das Unitaritätsdreieck

umso kleiner sind, je weiter sie von der Hauptdiagonalen entfernt sind:

$$V_{CKM} = \begin{pmatrix} 1 - \lambda^2/2 & \lambda & \lambda^3 A(\rho - i\eta) \\ -\lambda & 1 - \lambda^2/2 & \lambda^2 A \\ \lambda^3 A(1 - \rho - i\eta) & -\lambda^2 A & 1 \end{pmatrix} + O(\lambda^4) \quad \lambda \approx 0,22. \quad (1.1)$$

Physikalisch bedeutet dies, dass Übergänge zwischen *ähnlichen* Quarksorten wahrscheinlicher sind. Die Wolfenstein-Parametrisierung ist konform mit der üblichen Konvention, in der nur V_{ub} und V_{td} eine komplexe Phase haben.

Die Unitarität der CKM -Matrix drückt sich in je sechs Normierungs- und Orthogonalitätsgleichungen für die Zeilen und Spalten aus. Von den Orthogonalitätsgleichungen ist besonders eine interessant, da bei ihr alle Summanden von gleicher Größenordnung in dem Wolfenstein-Parameter λ sind:

$$V_{cb}^* V_{cd} + V_{tb}^* V_{td} + V_{ub}^* V_{ud} = 0.$$

Diese verschwindende Summe dreier komplexer Zahlen lässt sich als Dreieck in der komplexen Ebene darstellen. Abbildung 1.2 zeigt dieses *Unitaritätsdreieck* mit den CKM -Winkeln $\gamma = -\arg(V_{ub})$, $\beta = \pi - \arg(V_{td})$ und $\alpha = \pi - \beta - \gamma$.

GIM-Mechanismus

Übergänge zwischen verschiedenen Quarkflavours gehen immer mit einer Ladungsänderung einher, da sie nur über die Kopplung an die geladenen W^\pm -Ströme, nicht aber an die neutralen Z und A -Ströme geschehen, wie oben gezeigt wurde. Dies gilt allerdings nur auf der Ebene der klassischen Feldtheorie. Auf Quantenebene sind auch Prozesse möglich, bei denen das W als virtuelles Teilchen emittiert und gleich wieder absorbiert wird, sodass effektiv ein Flavour-Übergang ohne Ladungsänderung passiert. Betrachten wir als Beispiel den elektrisch neutralen Übergang $t \rightarrow c$, der nur über solche Quanteneffekte möglich ist. Er kann auf drei Wegen passieren: $t \rightarrow b \rightarrow c$, $t \rightarrow s \rightarrow c$ und $t \rightarrow d \rightarrow c$. Vernachlässigt man die Masse

der zwischenzeitlich auftretenden b , s , und d -Quarks, unterscheiden sich die Prozesse nur durch die auftretenden CKM -Matrixelemente, sodass der $t \rightarrow c$ -Übergang proportional zu der Summe $V_{tb}V_{cb}^* + V_{ts}V_{cs}^* + V_{td}V_{cd}^*$ ist. Diese ist aber wegen der Unitarität der CKM -Matrix exakt Null.

Flavour-Übergänge ohne Ladungsänderung – sogenannte *Flavour-ändernde neutrale Ströme* sind also auf klassischer Ebene (Tree-Ebene in der Störungstheorie) verboten und in Quantenkorrekturen auf Einschleifen-Ebene klein, da sie nur durch die Unterschiede der Quarkmassen beitragen. Diese Unterdrückung nennt man *GIM-Mechanismus* (nach Glashow, Iliopoulos und Maiani).

1.1.5 Neutrinomassen und der Seesaw-Mechanismus

Genau wie bei den Quarks müssen auch die Lepton-Massenmatrizen diagonalisiert werden. Es liegt nahe, Elektron, Myon und Tauon als Masseneigenzustände zu definieren und die Rotation auf dem Neutrino-Sektor durchzuführen. An die Stelle der CKM -Matrix tritt hier die MNS -Matrix, die Mischungen zwischen den Neutrino-Flavours zulässt.

Dabei gibt es aber einen qualitativen Unterschied zur Quarkmischung, was die experimentelle Beobachtung angeht. In Teilchendetektoren an Beschleunigeranlagen werden stets Masseneigenzustände von Quarks beobachtet, das heißt, aus den Messwerten lässt sich rekonstruieren, ob das Zerfallsprodukt ein d , s oder b -Quark (in dieser Basis) enthielt. Die Tatsache, dass die Quarks in schwachen Zerfällen als Flavour-Eigenzustände (d' , s' , b') erzeugt werden, zeigt sich hier als effektive Kopplung zwischen Quarks unterschiedlicher Familien. Anders bei Neutrinos: Diese werden sowohl als Flavour-Eigenzustände erzeugt, als auch als solche nachgewiesen. Für die Propagation dazwischen sind aber die Masseneigenzustände die richtige Basis. Im Flavour-Raum macht sich dies durch Neutrino-Oszillationen bemerkbar, und z.B. ein Elektron-Neutrino kann sich ohne weitere Wechselwirkung mit anderen Teilchen oder Feldern in ein μ - oder τ -Neutrino verwandeln.

Die Neutrinomassen sind extrem klein – so klein, dass es bisher nicht mehr als obere Schranken gibt. Allein die Beobachtung von Neutrinooszillationen in den letzten Jahren zeigt, dass sie nicht Null sein können. Damit stellt sich die Frage, ob es dafür einen Grund gibt. Als wahrscheinliche Erklärung gilt der *Seesaw*- (Wippen-) Mechanismus. Dieser lässt sich grob und schematisch (ohne Berücksichtigung der Familien- und Isospinstruktur) so darstellen:

Der Neutrino-Massenterm, wie er von der elektroschwachen Symmetriebrechung erzeugt wird, koppelt rechtshändige und linkshändige Neutrिनokomponenten aneinander: $\mathcal{L}_{m_\nu} = -m_\nu(\bar{\nu}_L\nu_R + \bar{\nu}_R\nu_L)$. Diese Art von Term heißt auch *Dirac-Massenterm*. Da er die $U(1)_Y \otimes SU(2)_I$ -Symmetrie verletzt, konnte er nicht „von Hand“ hinzugefügt werden. Er hat denselben Ursprung wie die Massenterme der anderen Leptonen und Quarks und deswegen sollte man erwarten, dass die Neutrinos auch ähnliche Massen haben.

Eine andere Art Massenterm verletzt aber nicht die Eichsymmetrie, und kann daher ohne Weiteres hinzugefügt werden: Die *Majorana-Masse* $M_\nu(\nu_R\nu_R + \bar{\nu}_L\bar{\nu}_L)$ (wobei eine zwischen den Spinoren stehende Kombination von γ -Matrizen nicht ausgeschrieben wurde). Solch

ein Massenterm ist nur für das rechtshändige Neutrino und das linkshändige Antineutrino möglich, da sie weder Ladung noch Hyperladung tragen. Das Besondere an ihm ist, dass er Übergänge zwischen Neutrinos und Antineutrinos erlaubt – die Leptonenzahl ist dabei nicht, wie in allen anderen Prozessen des Standardmodells, erhalten. Die Masse M_ν ist nicht ein Resultat der elektroschwachen Symmetriebrechung und kann deswegen deutlich größer sein als die übrigen Massen, zum Beispiel von der Größenordnung einer großen vereinheitlichenden Skala M_{GUT} .

Zusammen lassen sich Dirac- und Majorana-Massenterm in der Matrixschreibweise

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \nu_L \\ \bar{\nu}_R \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 0 & m_\nu \\ m_\nu & M_\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L \\ \bar{\nu}_R \end{pmatrix} + \text{h.k.}$$

angeben. Das Diagonalisieren dieser Matrix liefert einen sehr kleinen Eigenwert $\sim \frac{m_\nu^2}{M_\nu}$. Die schwere Majorana-Masse M_ν macht also die Dirac-Masse noch leichter, was die Analogie zur Wippe erklärt.

1.1.6 Quantenchromodynamik

Zu der elektroschwachen kommt im Standardmodell noch die starke Wechselwirkung hinzu, die zum Beispiel für die Bindung der Quarks zu Nukleonen und der Nukleonen zu Atomkernen verantwortlich ist. An der starken Wechselwirkung, die durch die Quantenchromodynamik (QCD) beschrieben wird, nehmen nur die Quarks teil.

Die QCD ist ebenso wie die elektroschwache Theorie eine Eichtheorie. Die Eichbosonen, die Gluonen, koppeln aber nicht an das Higgsfeld und bleiben daher masselos. Die Eichgruppe der QCD ist die

$$SU(3).$$

Jedes Quark trägt eine von drei „Farbladungen“. Das heißt, die bisher einkomponentig geschriebenen Quarkfelder sind in Wirklichkeit Farbtupletts:

$$q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}, \quad q = u, d, s, c, b, t.$$

Die $SU(3)$ -Gruppe hat 8 Generatoren t^a , $a = 1 \dots 8$, entsprechend wird eine Eichtransformation durch 8 Parameter definiert:

$$q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} \rightarrow \exp \left(\sum_{a=1}^8 -i\chi^a t^a \right) \times \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}.$$

In der kovarianten Ableitung treten dabei 8 *Gluon-Felder* auf:

$$D_\mu = \partial_\mu - ig_s t^a A_\mu^a.$$

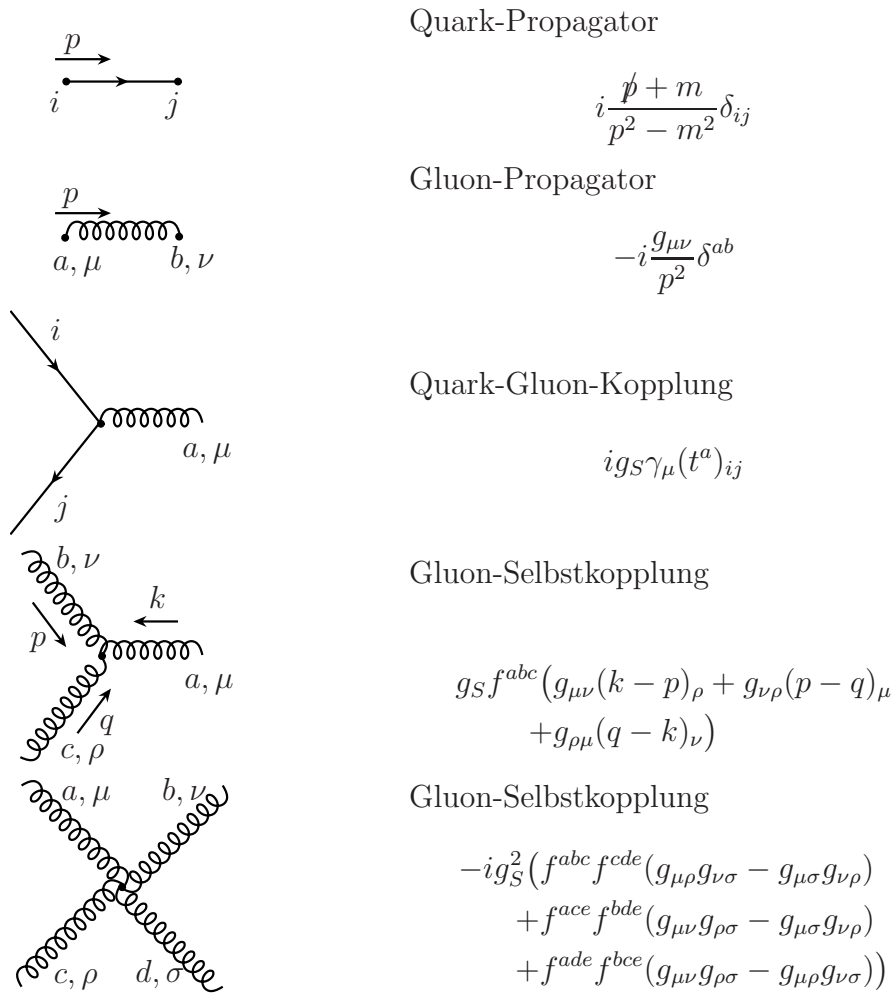


Abbildung 1.3: Feynman-Regeln der QCD (in Feynman-Eichung). $i, j = 1 \dots 3$ sind Quark-Farbindizes, $a, b, c, d = 1 \dots 8$ Gluon-(Gruppengeneratoren-)Indizes und μ, ν, ρ, σ Lorentz-Indizes. Geistfelder, die je nach Eichung in Diagrammen mit Gluon-Schleifen berücksichtigt werden müssen, sind nicht gezeigt.

g_S ist die Kopplungsstärke der starken Wechselwirkung. Der Feldstärke-Tensor der Gluonen ist definiert als

$$G_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g_S f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c,$$

ähnlich wie der der $SU(2)_I$ -Eichbosonen. f^{abc} sind dabei die Strukturkonstanten der $SU(3)$ -Gruppe.

Der in A quadratische Term ist ein Resultat der Tatsache, dass die $SU(3)$ -Gruppe nichtkommutativ ist, in der Quandenelektrodynamik als $U(1)$ -Eichtheorie kommt er nicht vor. Er ist aber notwendig, um den Feldstärketensor eichinvariant zu machen und ergibt sich z.B. aus einer verallgemeinerten Definition als Kommutator zweier kovarianter Ableitungen, $G_{\mu\nu}^a t^a \sim [D_\mu, D_\nu]$, in der auch die Antisymmetrie in den Lorentz-Indizes offensichtlich wird.

Im kinetischen Term in der Lagrangedichte,

$$\mathcal{L}_{Gluon,Kin} = -\frac{1}{4}G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu},$$

entstehen dadurch Kopplungsterme mit drei und mit vier Gluonfeldern. Diese *Gluon-Selbstwechselwirkungen* verdeutlichen, dass das Gluonfeld selbst eine Farbladung trägt, wogegen das Photon elektrisch neutral ist und nicht mit sich selbst wechselwirkt. (Im Übrigen haben auch die elektroschwachen Eichbosonen Z, W^\pm aufgrund der Nichtkommutativität der $SU(2)_I$ -Gruppe diese Selbstwechselwirkungen).

1.1.7 Renormierung und laufende Kopplung in der QCD

Die Gleichungen, die sich in der Quantenfeldtheorie aus der Lagrangedichte \mathcal{L} ergeben, sind nichtlinear und können analytisch nicht gelöst werden. Die Standardmethode, mit der Näherungen berechnet werden, ist die *Störungstheorie* (dank immer leistungsfähigerer Großrechner gibt es inzwischen mit der Gitter-QCD, in der Pfadintegrale numerisch gelöst werden, eine Alternative, die aber ein eigenes Thema für sich ist). Physikalische Größen wie Übergangsamplituden werden in der Störungstheorie als Reihenentwicklung in der Kopplung g_S berechnet. Diese tritt in der Regel quadratisch auf, sodass die über $\alpha_S = \frac{g_S^2}{4\pi}$ definierte Kopplungskonstante der eigentliche Entwicklungsparameter ist. In der Störungstheorie werden Übergangsamplituden dann durch Feynman-Diagramme beschrieben. Die Feynman-Regeln, nach der diese Diagramme berechnet werden, lassen sich direkt aus der Lagrangedichte herleiten und sind für die QCD in Abbildung 1.3 gezeigt.

In führender Ordnung der Störungstheorie sind Übergangsamplituden meistens sehr einfach zu berechnen. Sie ergeben sich aus Feynman-Diagrammen, in denen die Impulse aller vorkommenden Quarks und Gluonen durch Anfangs- und Endzustand festgelegt sind (entsprechend der einfachen Struktur der Diagramme wird diese führende Ordnung als *Tree-Level* bezeichnet). In Quantenkorrekturen – Schleifendiagrammen – dagegen treten Integrale über interne Quark- und Gluonimpulse auf. Diese sind aber häufig divergent. Um diese Divergenzen zu behandeln, muss als erstes ein konsistentes Schema gefunden werden, in dem divergente von endlichen Anteilen getrennt werden. Das am häufigsten benutzte ist die dimensionale Regularisierung. Dabei werden die Prozess in $D = 4 + 2\epsilon$ Raum-Zeit-Dimensionen berechnet. Für den Fall, dass das Schleifenintegral im Grenzwert großer Impulse divergent ist (*Ultraviolett-Divergenz*) muss ϵ negativ gewählt werden, liegt die Divergenz bei kleinen Schleifenimpulsen (*Infrarot-Divergenz*), ist ϵ positiv. Das Resultat, das zunächst nur für ganzzahliges ϵ definiert ist, wird dann zu einer analytischen Funktion fortgesetzt, sodass der Grenzübergang $\epsilon \rightarrow 0$ möglich ist. In diesem Grenzübergang zeigen sich die Divergenzen dann als Pole in $1/\epsilon$.

Jetzt werden die grundlegenden physikalischen Parameter *renormiert*. Sie werden dabei als Produkt von endlichem Anteil und Renormierungsfaktor geschrieben, z.B. $g_S = Z_g \hat{g}_S$. $Z_g = 1 + \delta Z_g$ wird nun so gewählt, dass sich der Beitrag von δZ_g gegen den divergenten Anteil von Schleifendiagrammen weghebt (siehe Abbildung 1.4). Da physikalisch nur die Summe

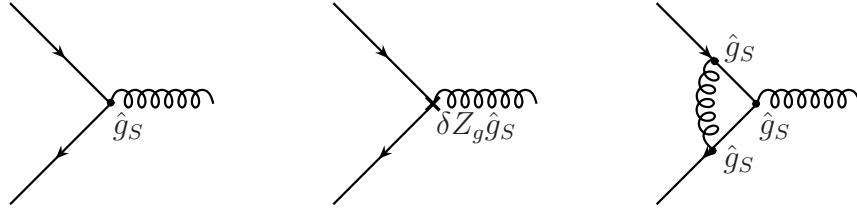


Abbildung 1.4: Diagramme zur Renormierung der Kopplungskonstanten. Die ersten beiden Diagramme sind die Tree-Level-Diagramme, aufgeteilt nach endlichen und divergenten Anteilen der Kopplungskonstanten. Der divergente Anteil wird so gewählt, dass er die Divergenz der Schleifendiagramme kürzt. Von den relevanten Schleifendiagrammen ist nur ein Beispiel gezeigt.

von Tree-Level- und Schleifenbeiträgen relevant ist, tritt in den Vorhersagen dann nur noch die renormierte Größe \hat{g}_S auf. Die Aufteilung in endlichen und divergenten Anteil ist aber noch nicht eindeutig, und es muss eine Vereinbarung getroffen werden, welche Anteile δZ_g enthält. Die einfachste aller Möglichkeiten ist das minimale Subtraktionsschema (*MS*), in dem $\delta Z_g \sim 1/\epsilon$ gesetzt wird. Allerdings tritt der $1/\epsilon$ -Pol in dimensionaler Regularisierung immer in einer ganz spezifischen Kombination mit endlichen Konstanten auf, nämlich

$$\Delta_{\text{div}} = -\frac{1}{\epsilon} + \log(4\pi) - \gamma_E.$$

Darin ist γ_E die Euler'sche Konstante $\gamma_E = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} - \log n \right)$. Die Rechnung lässt sich also etwas vereinfachen, wenn man $\delta Z_g \sim \Delta_{\text{div}}$ vereinbart (und analog für die anderen Parameter). Dieses Schema ist das modifizierte minimale Subtraktionsschema (\overline{MS}), das inzwischen allgemein üblich ist.

Bei der Berechnung divergenter Diagramme in dimensionaler Regularisierung tritt unweigerlich ein neuer unphysikalischer Parameter auf, die Renormierungsskala μ . Die Abhängigkeit von der Renormierungsskala ist dabei logarithmisch $\sim \log \frac{\mu^2}{p^2}$, und p^2 ist eine im betrachteten Prozess auftretende Impulsübertrags- oder Massenskala. Diese Logarithmen bzw. Potenzen davon treten in allen Ordnungen der Störungstheorie auf. Damit die Konvergenz der Störungstheorie aber nicht durch solche Logarithmen zerstört wird, wählt man für μ die Größenordnung einer für den Prozess typischen Skala. Praktisch wird aber immer nur bis zu einer endlichen Ordnung entwickelt, in dieser Arbeit zum Beispiel nur bis zur nächstführenden. Die so erhaltenen Resultate hängen also von der Renormierungsskala noch ab. Dies schlägt sich auch auf die renormierten Naturkonstanten nieder:

$$g_S = Z_g(\mu) \cdot \hat{g}_S(\mu).$$

Die linke Seite, die „nackte Kopplung“ hängt hier nicht von μ ab, und ebensowenig darf es

die rechte, woraus die Renormierungsgruppengleichung

$$\mu \left(\frac{d\hat{g}_S}{d\mu} \right) + \hat{g}_S \underbrace{\left[\frac{1}{Z_g(\mu)} \mu \left(\frac{dZ_g}{d\mu} \right) \right]}_{-\beta(\mu)} = 0$$

folgt. Die hier definierte β -Funktion gibt die Abhängigkeit der renormierten, also in physikalischen Amplituden auftretenden Kopplungskonstanten von der Renormierungsskala als Maß für einen prozesstypischen Impulsübertrag an. In der Störungstheorie ergibt sie sich selbst durch Schleifendiagramme als Reihenentwicklung in der renormierten Kopplung:

$$\beta(\mu) = -\beta_0 \frac{\hat{g}_S(\mu)^2}{(4\pi)^2} - \beta_1 \left(\frac{\hat{g}_S(\mu)^2}{(4\pi)^2} \right) - \dots$$

Wir wollen uns mit dem Einschleifenergebnis

$$\beta_0 = \frac{11}{3}N_c - \frac{2}{3}n_f$$

begnügen und höhere Ordnungen vernachlässigen. N_c ist die Zahl der Farbladungen und in der QCD 3, und n_f die Zahl der Quark-Flavours, deren Masse kleiner als die Renormierungsskala μ ist. Für die Wahl $m_b < \mu < m_t$, wie sie bei den Zerfällen von B -Mesonen häufig angebracht ist, ist zum Beispiel $n_f = 5$. Eingesetzt in die Renormierungsgruppengleichung erhält man damit eine Differentialgleichung, die relativ einfach zu lösen ist. Geschrieben für die starke Kopplungskonstante α_S ist Lösung

$$\alpha_S(\mu) = \frac{\hat{g}_S(\mu)^2}{4\pi} = \frac{\alpha_S(\mu_0)}{1 + \frac{\alpha_S(\mu_0)}{4\pi} \beta_0 \log \frac{\mu^2}{\mu_0^2}}. \quad (1.2)$$

Dabei ist μ_0 eine Referenzskala (mit $n_f(\mu) = n_f(\mu_0)$), zum Beispiel diejenige, bei der α_S experimentell gemessen wird. Mit $\beta_0 > 0$, einem Spezifikum der QCD, ergibt sich daraus

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \alpha_S(\mu) = 0.$$

Im Limes großen Impulsübertrags verschwindet also die Kopplungskonstante und die Quarks und Gluonen verhalten sich wie freie Teilchen. Die theoretische Entdeckung dieser *asymptotischen Freiheit* wurde mit dem Physik-Nobelpreis 2004 gewürdigt.

Andererseits bedeutet dies aber auch, dass bei kleinen Skalen die Kopplungskonstante immer größer wird und bei $\mu = \Lambda_{QCD} \sim 300$ MeV sogar divergiert, legt man obige Gleichung zu Grunde. Wenn sie aber nicht deutlich kleiner als 1 ist, gilt die Störungstheorie von vorn herein nicht. Ein weiterer Effekt ist, dass reelle Quarks nie als freie Teilchen beobachtbar sind, sondern nur in farbneutralen gebundenen Zuständen, den Hadronen, auftreten. Die Kraft zwischen zwei Quarks nimmt nämlich nicht, wie bei der Elektrodynamik, mit zunehmendem Abstand ab. Stattdessen steigt die Energie der Feldkonfiguration mit dem Abstand so stark

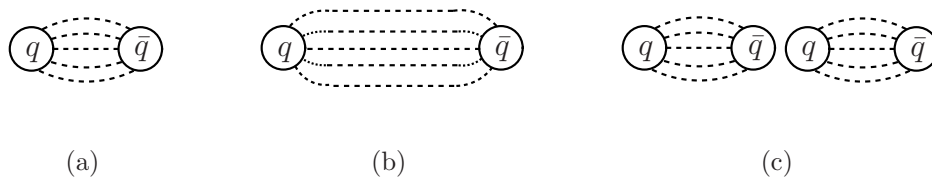


Abbildung 1.5: Quark-Antiquark-Paar mit den Feldlinien der starken Wechselwirkung (schematisch). Die Energie des Feldes steigt mit dem Abstand so stark an (b), dass es energetisch günstiger wird, ein neues Quark-Antiquark-Paar zu erzeugen (c).

an, dass es irgendwann energetisch günstiger ist, ein neues Quark-Antiquark-Paar zu erzeugen (siehe Abbildung 1.5). Objekte, die man in großem Abstand voneinander beobachten kann (groß im Vergleich z.B. zum Proton-Radius), sind daher notwendigerweise farbneutral. Alles, was in Teilchendetektoren gemessen werden kann, sind also Bindungszustände aus Quarks und/oder Antiquarks (diese Tatsache nennt man *Confinement*). Die Energieskala für die Bindung ist Λ_{QCD} , und anstatt der Störungstheorie müssen andere Methoden gefunden werden, um die Bindungseffekte angemessen zu beschreiben.

1.2 Offene Fragen

Das Standardmodell als Kombination der elektroschwachen Theorie und der Quantenchromodynamik stimmt hervorragend mit den experimentellen Beobachtungen überein. Von den Gründen, warum man trotzdem weiter nach einer fundamentaleren Theorie sucht, seien hier nur exemplarisch einige genannt:

Zahl der Parameter

Das Standardmodell enthält als freie Parameter die Kopplungskonstanten der starken und schwachen Wechselwirkungen, den Weinberg-Winkel, Higgs-Vakuumerwartungswert und -Masse auf dem elektroschwachen Sektor, die Massen der zwölf Fermionen sowie die Einträge der *CKM*- und *MNS*-Matrizen. Alle diese Parameter können nur experimentell ermittelt werden. Insbesondere bei den Fermionmassen weisen die Resultate eine große Bandbreite auf. Lässt man die Neutrinomassen mit Hinweis auf den Seesaw-Mechanismus beiseite, dann unterscheiden sich die Massen des leichtesten Fermions (Elektron) und des schwersten (Top-Quark) um einen Faktor von ca. 400.000, obwohl die Massenterme mit der spontanen Symmetriebrechung denselben Ursprung haben. Wünschenswert wäre es, eine Theorie zu finden, die die gemessenen Massen sowie die übrigen Parameter auf weniger und grundlegendere Naturkonstanten zurückführt, und eine natürliche Erklärung für die gemessenen Größenordnungsunterschiede liefert.

Vereinheitlichung

Die Elektroschwache und die starke Wechselwirkung haben zwar beide eine ganz ähnliche Beschreibung in der Quantenfeldtheorie, scheinen aber ansonsten keine Verbindung zu haben. Die Gravitation wehrt sich zudem heftigst gegen eine Beschreibung als Quantenfeldtheorie überhaupt. Die Hoffnung ist aber, eine Theorie zu finden, in der alle diese Wechselwirkungen verschiedene Aspekte einer einzigen vereinheitlichten Wechselwirkung sind. Die Skala, auf der diese Vereinheitlichung passiert, könnte zum Beispiel die Planck-Skala $M_{Pl} \sim 10^{19}$ GeV sein, die sich aus der Gravitationskonstante ergibt. Man würde erwarten, dass alle Kopplungskonstanten dann den gleichen Wert annehmen. Extrapoliert man aber die gemessenen Werte der elektrischen, schwachen und starken Kopplungskonstanten mit der Renormierungsgruppengleichung zu hohen Skalen, dann gibt es keinen gemeinsamen Schnittpunkt, sondern die Kurven verfehlen sich knapp.

Feineinstellung

Auf ein weiteres Problem stößt man in der Renormierung der Massenterme. Während die dimensionale Regularisierung vor allem praktisch ist, kann man sich auf den Standpunkt stellen, die Impulsintegrale sollten bei einem bestimmten Maximalimpuls Λ abgeschnitten werden, da bei größeren Impulsen das Standardmodell durch eine andere (vereinheitlichende) Theorie ersetzt werden muss. Eine natürliche Wahl für Λ wäre dann $\Lambda \sim M_{Pl}$.

Berechnet man die Strahlungskorrekturen zu den Fermionmassen, dann erhält man daraus einen zum Logarithmus von Λ proportionalen Korrekturterm, der auch bei $\Lambda \sim M_{Pl}$ nur wenige Prozent der „nackten“ Masse ausmacht. Anders bei der Higgsmasse: Hier liefert die Strahlungskorrektur einen zu Λ proportionalen Anteil. Die Higgsmasse selbst wird aber aufgrund experimenteller Befunde bei $M_H \sim 100 \dots 200$ GeV erwartet. Um auf diesen Wert zu kommen, müssten sich die Strahlungskorrekturen und die nackte Masse auf 17 (siebzehn) Nachkommastellen genau aufheben.

CP-Verletzung

Man geht davon aus, dass am Anfang des Universums Materie und Antimaterie in gleichen Teilen vorhanden waren und in ständiger Wechselwirkung mit den Strahlungsfeldern standen, also paarweise annihiliert und neu erzeugt wurden. Astronomische Beobachtungen zeigen aber, dass zumindest in dem Teil des Universums, dessen Licht die Zeit hatte, die Erde zu erreichen, keine Antimaterie mehr vorhanden ist. Die einzige Quelle für eine Materie-Antimaterie-Asymmetrie im Standardmodell ist die *CKM*-Matrix (doch auch über *CP*-Verletzung auf dem Leptonensektor wird spekuliert). Es sind Mechanismen bekannt, wie damit ein Überschuss an Materie entstehen kann.

Allerdings kann man aus Intensität und Temperatur der kosmischen Hintergrundstrahlung auch schließen, wie groß der Materieüberschuss im Vergleich zur Gesamtmasse sein musste, und er ist im Vergleich zu den theoretischen Modellen deutlich zu groß.

1.3 Aufgabenstellung

1.3.1 Das CKM -Unitaritäts-Dreieck

Die Beobachtungen, die zur Einführung der Quark-Mischungsmatrix V_{CKM} in die Formulierung der Theorie geführt haben, waren indes keine kosmologischen, sondern wurden an Teilchenbeschleunigern gemacht. Bereits 1964 wurde entdeckt, dass sich bei Zerfällen von neutralen Kaonen – gebundenen Zuständen aus einem Strange- und einem Anti-Down-Quark bzw. umgekehrt – das Kaon und das Antikaon leicht unterschiedlich verhalten. In der weniger fernen Vergangenheit wurde die CP -Verletzung auch in gebundenen Quark-Antiquark-Zuständen mit Beauty-Quarks, den B -Mesonen, nachgewiesen. Alle bisherigen Beobachtungen sind im Einklang mit der Erklärung durch die CKM -Matrix. Deren Einträge dagegen sind noch nicht sehr präzise bekannt. Während sich die Beträge der Matrixelemente durch direkte Messungen von Zerfallsraten der entsprechenden Quarkübergänge bestimmen lassen (was wegen des Confinements der Quarks zu Hadronen auch weniger einfach ist als es klingt), bedürfen die CP -verletzenden Phasen β und γ eines gesonderten Aufwandes. Hier kommt das Unitaritätsdreieck ins Spiel, dessen innere Winkel identisch mit diesen Phasen sind. Eine genaue Bestimmung dieser Phasen mit mehreren unabhängigen Methoden liefert Aufschluss darüber, ob die CP -Verletzung im Standardmodell eine treffende theoretische Beschreibung ist.

Wenn unabhängige Messungen der Seitenlängen und Winkel sich nicht zu einem damit konsistenten Dreieck zusammenfügen ließen, dann kämen mehrere Möglichkeiten in Betracht: Zum Beispiel könnte es CP -Verletzende Effekte jenseits des Standardmodells geben. Oder die CKM -Matrix ist nicht unitär, weil sie in Wirklichkeit nur Teil einer größeren, unitären Matrix ist, die mehr als drei Familien von Quarks beschreibt. Schließlich könnten in den zur Messung verwendeten Prozessen neue Wechselwirkungen aufgetreten sein, die den Zusammenhang von Messgrößen und CKM -Parametern verändern.

Bisher jedoch ergibt sich für das CKM -Dreieck ein konsistentes Bild, das in Abbildung 1.6 gezeigt ist. Die in diesen globalen Fit [3] eingehenden Messgrößen sind:

- Der Betrag $|V_{ud}|$ aus der Lebensdauer/Zerfallsrate von Kern- β -Zerfällen, freien Neutronen und geladenen Pionen.
- Der Betrag $|V_{us}|$ aus dem Zerfall von Kaonen
- $|V_{cd}|$ und $|V_{cs}|$ aus den Produktionsraten von Charm-Hadronen bei tief inelastischer Streuung von Neutrinos und Antineutrinos an Nukleonen, und aus deren Zerfallsraten
- $|V_{cb}|$ aus den Zerfallsraten von B -Mesonen mit einem Charm-Quark im Endzustand
- $|V_{ub}|$ aus den Zerfallsraten von B -Mesonen mit leichten Quarks im Endzustand
- Der die CP -Verletzung in der $K^0 - \bar{K}^0$ -Mischung beschreibende Parameter ε_K

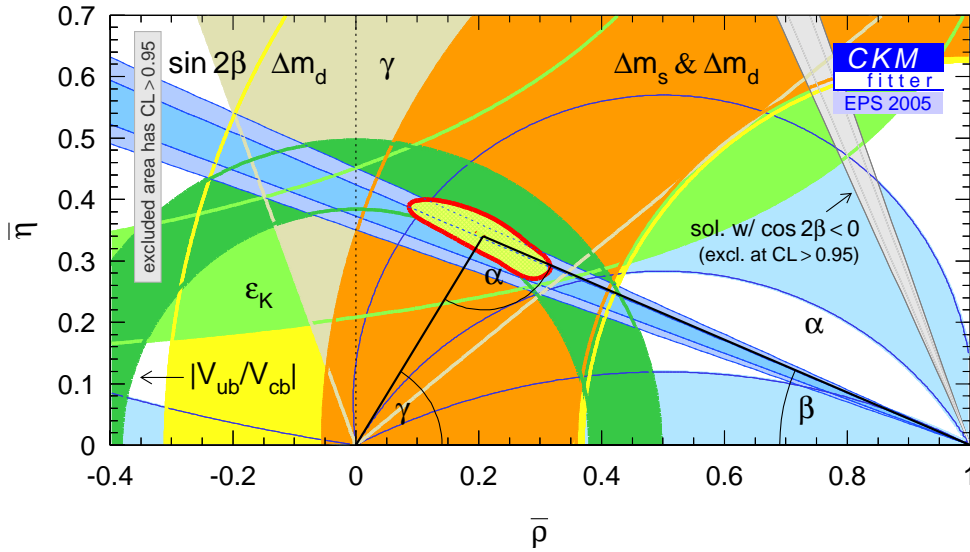


Abbildung 1.6: Globaler Fit für das *CKM*-Dreieck, bei dem die untere Seitenlänge im Vergleich zu Abb. 1.2 auf 1 skaliert wurde.

- Die zu $|V_{tb}V_{td}^*|^2$ proportionale Massendifferenz Δm_d der Eigenzustände in der $B^0 - \bar{B}^0$ -Mischung
- Die zu $|V_{ts}V_{tb}^*|^2$ proportionale Massendifferenz Δm_s der Eigenzustände in der $B_s - \bar{B}_s$ -Mischung
- $\sin 2\beta$ aus der *CP*-Asymmetrie im Zerfall $B \rightarrow J/\psi K_S^0$
- $\sin 2\alpha$ aus der *CP*-Asymmetrie in $B \rightarrow \rho\rho$ -Zerfällen.

Die *B*-Zerfälle sind hier eine besonders reiche Informationsquelle. Die Messungen werden zwischen inklusiven und exklusiven unterschieden. Bei den inklusiven Messungen wird über alle Endzustände summiert, die eine bestimmte Quarksorte beinhalten. Theoretisch wird die Behandlung dadurch sehr viel einfacher, da hier die Details der Quarkbindung zu Hadronen im Endzustand eine untergeordnete Rolle spielen. Dafür ist die Messung aller möglichen Endzustände eines Zerfalls experimentell eine große Herausforderung. Umgekehrt ist es bei den exklusiven Zerfällen, wo nur ein ganz bestimmter Endzustand betrachtet wird: Experimentell kann nach diesen Zerfallsprodukten direkt gesucht werden, während die theoretische Beschreibung sehr viel schwieriger ist.

Um das reiche Potenzial dieser *B*-Mesonen auszuschöpfen, wurden mit BaBar und Belle eigens dafür ausgerichtete *B-Fabriken* errichtet. Dabei werden Elektronen und Positronen kollidiert, und zwar bei der Schwerpunktsenergie, die der Masse des $b - \bar{b}$ -Bindungszustandes $\Upsilon(4S)$ entspricht. Diese so in großer Zahl produzierten $\Upsilon(4S)$ -Mesonen zerfallen in $B^0 - \bar{B}^0$ - oder $B^+ - B^-$ -Paare, deren Zerfälle schließlich die gesuchten Informationen liefern. Die *B-Fabriken* sind asymmetrisch aufgebaut: Einer der Teilchenstrahlen hat eine deutlich größere

Energie als der andere. Die B -Mesonen werden daher nicht in Ruhe erzeugt, sondern bewegen sich mit relativistischer Geschwindigkeit vom Wechselwirkungspunkt fort. Durch die Zeitdilatation werden so auch die sehr schnellen Oszillationen des B -Systems beobachtbar, und die Messung von Zerfallsraten in Abhängigkeit von der Flugstrecke ermöglicht die Bestimmung zeitabhängiger CP -Asymmetrien.

1.3.2 $B \rightarrow PP$ -Zerfälle

Setzt man alle oben aufgelisteten Messungen zusammen, von denen ein Großteil aus den B -Fabriken stammt, dann sind insbesondere die Winkel α und γ noch mit großen Unsicherheiten behaftet. Hier können exklusive Zweikörper- B -Zerfälle in Pionen und Kaonen (leichte Pseudoskalare $P = \pi, K$) wertvolle Informationen liefern. Über Pinguin-Diagramme tragen in diesen Zerfallsprozessen aber mehrere CKM -Phasen bei, die interferieren. Um sie aus den Messdaten zu extrahieren, ist daher eine genaue Kenntnis der Bindungseffekte und QCD-Strahlungskorrekturen nötig. Bei gebundenen Zuständen bricht aber die Störungsreihe der QCD zusammen, und man muss Methoden außerhalb der Störungstheorie finden, um diese Effekte angemessen zu berücksichtigen. Mehrere Ansätze sind dazu gemacht worden, die entweder versuchen, nichtstörungstheoretische Effekte durch prozessunabhängige Parameter auszudrücken, oder den gesamten Prozess durch einen phänomenologischen Parametersatz zu beschreiben, dessen Werte aus Fits zu Daten entnommen werden können. Zu ersteren zählt zum Beispiel die QCD Faktorisierung, die Vorhersagen in führender Ordnung einer Reihenentwicklung in $1/m_b$ macht. Die Resultate dieser Methode stehen allerdings derzeit im Widerspruch zu experimentellen Messungen, und die Frage, ob die höheren Ordnungen in $1/m_b$ dafür verantwortlich sind, kann mit der Methode selbst nicht beantwortet werden.

Die Lichtkegel-Summenregeln dagegen ermöglichen es, auch $1/m_b$ -unterdrückte Beiträge zu berechnen, ohne dabei neue Parameter einzuführen, die aus Fits an Daten oder anderen Methoden bestimmt werden müssen. Zu den $B \rightarrow \pi\pi$ -Zerfällen wurden damit bereits einige dieser Beiträge berechnet, andere konnten aus technischen Gründen noch nicht berücksichtigt werden. Durch eine Modifikation der ursprünglich vorgeschlagenen Methode können die fehlenden Teile aber noch hinzugefügt werden. Dies bildet den ersten Teil der Dissertation.

Die Pionen bestehen aus Up- und Down-Quarks, deren Massen im Vergleich zu Λ_{QCD} vernachlässigbar gering sind. Die Masse des Strange-Quarks, das in den Kaonen auftritt, ist dagegen von gleicher Größenordnung wie Λ_{QCD} . Für die Präzisionsmessungen, die zur Überprüfung des CKM -Mechanismus notwendig sind, kann sie nicht mehr vernachlässigt werden. Und doch wird dies in der Literatur häufig getan, weil einfach keine Informationen über die Unterschiede in der Dynamik von Pionen und Kaonen vorliegen. Gerade wenn man versucht, die Komponenten der Zerfallsamplituden nur aus Fits an Daten zu bestimmen, ist man darauf angewiesen, Beiträge in $B \rightarrow \pi\pi$ und $B \rightarrow K\pi$ gleichzusetzen, um die Zahl der freien Parameter zu reduzieren.

Berechnet man die Zerfallsamplituden direkt in Lichtkegel-Summenregeln, dann kann die Strange-Quark-Masse leicht systematisch berücksichtigt werden, dies macht allenfalls die Rechnung etwas komplizierter. Aber auch prozessunabhängige Parameter, die die Zu-

sammensetzung des Kaons beschreiben, lassen sich mit QCD Zweipunkt-Summenregeln in Abhängigkeit von der Strange-Quark-Masse berechnen. Die Berechnung diese m_s -Effekte bildet den zweiten Teil der Dissertation.

Aufbau der Arbeit

Im folgenden zweiten Kapitel werden zunächst die theoretischen Grundlagen vorgestellt. Im ersten Teil dieses Kapitels wird die gängige Methode der Operatorproduktentwicklung vorgestellt, mit der störungstheoretisch berechenbare Effekte von den nichtstörungstheoretischen Beiträgen getrennt werden können. Der zweite Teil stellt die $B \rightarrow \pi\pi$ -Zerfälle und die zugehörigen Observablen im Einzelnen vor.

Das dritte Kapitel widmet sich der Berechnung der in Lichtkegel-Summenregeln bisher fehlenden Beiträge zu den $B \rightarrow \pi\pi$ -Zerfallsamplituden. Dazu wird zuerst die Methode selbst vorgestellt, dann werden die neuen Beiträge, nämlich harte Emissions- und Annihilationsdiagramme berechnet, und im letzten Schritt werden diese Berechnungen zusammen mit den schon bekannten Beiträgen zu den physikalischen Observablen zusammengesetzt, die mit den Messdaten verglichen werden.

Im vierten Kapitel werden die Effekte der Strange-Quark-Masse m_s auf Zerfallsamplituden mit Kaonen statt Pionen im Endzustand berechnet. Im ersten Schritt wird dazu mit QCD Zweipunkt-Summenregeln die Kaon-Lichtkegel-Verteilungsamplitude berechnet, die Auskunft über die Aufteilung des Kaon-Impulses auf die einzelnen Quarks liefert. Beim Kaon ist diese Aufteilung im Gegensatz zu der im Pion asymmetrisch. Im zweiten Teil des Kapitels werden die Beiträge der Quark-Antiquark-Gluon-Konfiguration zum Kaon, in Form der Normierungskonstante einer entsprechenden Verteilungsamplitude, ebenfalls mit QCD Zweipunkt-Summenregeln berechnet. Im dritten Teil werden die Effekte der so gefundenen Unterschiede zwischen Kaon und Pion zusammen mit weiteren, bekannten m_s -Beiträgen auf die unterschiedlichen Zerfallsamplituden untersucht.

Publikationen

Die Berechnung der Annihilationsdiagramme in Lichtkegel-Summenregeln wurde zusammen mit den in den Abschnitten 2.2.4 und 3.4 vorgestellten phänomenologischen Betrachtungen in [4] veröffentlicht. Die Resultate für die Emissionsdiagramme sind noch nicht veröffentlicht und in dieser Publikation auch noch nicht berücksichtigt.

Die Berechnung der Kaon-Verteilungsamplitude wurde in [5] publiziert; die Betrachtung der m_s -Effekte in den B -Zerfallsamplituden zusammen mit der Normierung der Quark-Antiquark-Gluon-Verteilungsamplitude in [6]. Bei diesem in Abschnitt 4.3 vorgestellten Teil geht auch ein Resultat aus der Diplomarbeit [7] ein, was an entsprechender Stelle gekennzeichnet ist.

An einigen Stellen erschien es mir sinnvoll, Resultate aus den Publikationen zu erwähnen oder zu verwenden, die ich nicht selbst und unabhängig berechnet habe. Diese Stellen sind

durch eine Zitierung gekennzeichnet, an den übrigen Stellen wurde auf eine Zitierung der Publikationen verzichtet.

Kapitel 2

Grundlagen und Phänomenologie

B -Mesonen zerfallen, weil das enthaltene b -Quark unter Aussendung eines virtuellen W -Bosons in ein leichteres Quark übergehen kann. Das W -Boson selbst koppelt sowohl an Quarks als auch an Leptonen. Für den Endzustand gibt es daher drei Möglichkeiten: Beim rein leptonen Zerfall annihilieren alle Quarks und als Zerfallsprodukte bleiben nur Leptonpaare $l\bar{\nu}_l$ übrig. Zerfällt das W in ein Leptonpaar, während die übrigen Quarks zu neuen Hadronen gebunden werden, heißt der Zerfall semileptonisch. Die Zerfälle in $\pi\pi$, $K\pi$ und KK gehören zu den nichtleptonischen Zerfällen, in denen nur Hadronen auftreten und die Kopplung des W an Leptonen keine Rolle spielt – zumindest in führender Ordnung der elektroschwachen Kopplungskonstanten.

Die Virtualität des ausgetauschten W 's ist sehr groß, denn es ist ca. 20mal schwerer als das b -Quark. Seine Reichweite und Lebensdauer ist daher extrem kurz, wie allein aus der Energie-Zeit-Unschärferelation $\Delta E \cdot \Delta t \lesssim 1$ (in natürlichen Einheiten: $\hbar = 1$) hervorgeht. Kurz insbesondere im Vergleich zu der räumlichen Ausdehnung eines Hadrons, die von der Größenordnung $1/\Lambda_{QCD}$ ist, wobei Λ_{QCD} nur etwa ein Dreihunderdstel von M_W ausmacht. Das legt die Vorstellung nahe, dass der W -Austausch selbst nur an einem Punkt stattfindet und das zerfallende B -Meson nur den Nettoeffekt, nämlich die Wechselwirkung zwischen Quarks an diesem einen Punkt, spürt. Umgekehrt spielt die Struktur der Hadronen für den W -Austausch selbst keine Rolle.

Die Trennung dieser beiden Bereiche, der W -Austausch einerseits und die Struktur der Hadronen andererseits, findet in der Operatorproduktentwicklung, die im ersten Abschnitt vorgestellt wird, eine systematische Beschreibung. Der Grenzfall, dass die Wechselwirkung an einem Punkt stattfindet, ist darin die Konsequenz einer Reihenentwicklung in $1/M_W$. Die Größen, mit denen in dieser Methode die Zerfallsprozesse beschrieben werden, lassen sich in drei Klassen unterteilen:

CKM-Matrixelemente. Sie sind die fundamentalen Naturkonstanten, deren Bestimmung das Ziel der Untersuchung der B -Zerfälle ist, und treten als Kopplung zwischen W und Quarks auf.

Wilson-Koeffizienten (Physik bei kurzen Abständen). Diese Größen beschreiben die Physik bei der elektroschwachen Skala $\mu \sim M_W$. Hier kann die Störungstheorie verwendet werden, sodass auch Strahlungskorrekturen und damit die Effekte der QCD bei kurzen Abständen berücksichtigt werden können.

Hadronische Matrixelemente (Physik bei großen Abständen). Sie beschreiben, wie das B -Meson in leichtere Hadronen zerfällt, wobei es den W -Austausch nur als punktförmigen Prozess, an dem vier Quarks beteiligt sind, wahrnimmt. Bei der hadronischen Skala Λ_{QCD} , die ein Maß für die Virtualitäten der zu Hadronen gebundenen Quarks ist, verliert die Störungstheorie ihre Gültigkeit, was diesen Teil zum schwierigsten macht.

Im zweiten Teil des Kapitels wird eine erste grobe Näherung für diese hadronischen Matrixelemente, die „naive Faktorisierung“, vorgestellt und mit der Datenlage verglichen. Anschließend werden Beiträge, die über diese Näherung hinausgehen, nach Diagrammtypen klassifiziert und die dazugehörigen Notationen eingeführt. Dabei werden auch die üblichen Zerlegungen nach Isospin-Komponenten und CKM -Phasen vorgestellt. Und natürlich darf die Betrachtung der CP -Asymmetrien nicht fehlen.

Während die Operatorproduktentwicklung allgemein gehalten ist, werden in diesem zweiten Teil ausschließlich die Zerfälle $B \rightarrow \pi\pi$ behandelt. Zerfälle, in denen das Strange-Quark eine Rolle spielt, also mit Kaonen im Endzustand oder B_s im Anfangszustand, sind das Thema von Kapitel 4.

2.1 Operatorproduktentwicklung

In der hier verwendeten Operatorproduktentwicklung wird die große Masse des W -Bosons benutzt, um es als physikalischen Freiheitsgrad zu eliminieren. Dadurch wird die eingangs erwähnte Trennung von der Dynamik bei großen Skalen und der bei kleinen Skalen erreicht. Erstere ist dann durch Rechnungen in der Störungstheorie relativ leicht zugänglich. Die Methode an sich findet auch in vielen anderen Bereichen Anwendung, so zum Beispiel in der Heavy Quark Effective Theory (Entwicklung in der inversen b -Quark-Masse) oder in QCD Summenregeln (siehe Abschnitt 4.1.4).

In den betrachteten Prozessen ist das W weder Teil des Anfangszustandes noch des Endzustandes. In der Störungstheorie bedeutet das, dass in den zugehörigen Diagrammen mindestens zwei Quark-Antiquark- W -Vertizes vorkommen müssen, oder, formaler ausgedrückt, in den Greensfunktionen braucht man mindestens zwei Einsetzungen des Wechselwirkungsterms. Sie enthalten also das Produkt von zwei Operatoren an verschiedenen Orten. Dieses Produkt wird nun, entsprechend dem Bild von einem punktförmigen Prozess, in eine Reihe von lokalen Operatoren entwickelt. Es handelt sich also um eine *Operator-Produkt-Entwicklung*.

2.1.1 Effektiver Hamiltonoperator

Im Folgenden wird ein Prozess mit vier externen Quarklinien in führender Ordnung der Störungstheorie betrachtet. Die Flavours werden dabei so gewählt, dass der Prozess auf Tree-Ebene nur durch Austausch eines W passieren kann, nicht aber durch Z -, Gluon- oder Photon-Austausch, z.B. $b \rightarrow \bar{c}ud$ (Abb. 2.1a). Das Produkt von Wechselwirkungstermen, die

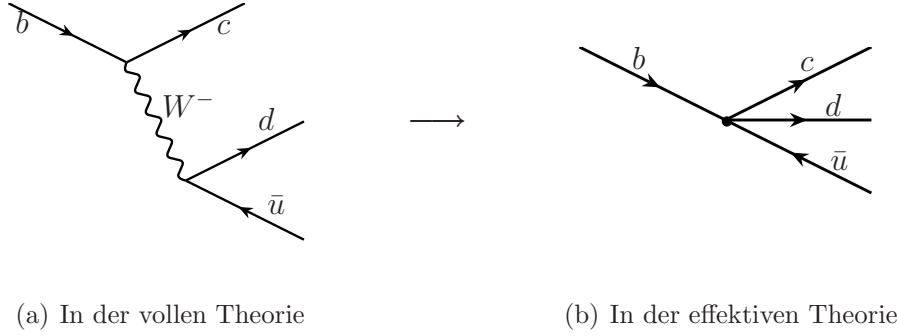


Abbildung 2.1: Der Prozess $b \rightarrow c\bar{u}d$ auf Tree-Ebene

man für die Greensfunktion benötigt, ist hier

$$\int d^4x T \left\{ \left(\frac{-i g_W}{2\sqrt{2}} W_\mu^- J^{\mu+}(x) \right) \left(\frac{-i g_W}{2\sqrt{2}} W_\nu^+ J^{\nu-}(0) \right) \right\} \quad (2.1)$$

($g_W = 2g_2$ ist die schwache Kopplung und T das zeitgeordnete Produkt). Der Quark-Strom, an den das W koppelt ist dabei der linkshändige Vektorstrom

$$J^{\mu+} = \sum_{U=u,c,t} \sum_{D=d,s,b} V_{UD} (\bar{U}D)_{V-A}, \quad (\bar{U}D)_{V-A} \equiv \bar{U} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) D,$$

in dem die CKM -Matrixelemente V_{UD} vorkommen, und $J^{\nu-}$ ist der hermitesch konjugierte Strom. In führender Ordnung der Störungstheorie kann das W -Feld nun nach Anwendung des Wick-Theorems kontrahiert werden, wodurch der W -Propagator

$$iS_{\mu\nu}^W(x,0) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{iqx} \frac{-i(g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu / M_W^2)}{q^2 - M_W^2}$$

auftritt (hier in unitärer Eichung). Da alle im Prozess auftretenden Skalen wesentlich unter der W -Masse M_W liegen, kann man dies annähern durch

$$iS^W(x,0) \approx \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{iqx} \frac{i g_{\mu\nu}}{M_W^2} = \frac{i g_{\mu\nu}}{M_W^2} \delta^4(x). \quad (2.2)$$

Mit dieser Näherung wird (2.1) zu einem einzigen lokalen Operator

$$-iO = -i \frac{G_F}{\sqrt{2}} J^{\mu+} J_\mu^-,$$

wobei die Fermi-Konstante $G_F/\sqrt{2} = g_W^2/8M_W^2$ auftritt. Das W kommt jetzt als Freiheitsgrad nicht mehr vor. In dieser Betrachtungsweise wurde das W -Feld *auskontrahiert*. Stattdessen wird der Prozess durch ein Feynman-Diagramm mit einer lokalen Vierquark-Wechselwirkung beschrieben (Abb. 2.1b).

Pfadintegralformalismus

Formaler lässt sich diese Näherung im Pfadintegralformalismus beschreiben. Sie liefert identische Resultate, hat aber große Vorteile bei der Berücksichtigung von Strahlungskorrekturen. Die zentrale Größe, aus der sich die Greensfunktionen berechnen lassen, ist hier das *erzeugende Funktional*

$$\begin{aligned}
 Z [J_f, J_{QCD}, J_{QED}, J_W] \\
 = \int [d\psi_f][d\psi_{QCD}][d\psi_{QED}][d\psi_W] \exp \left[i \int d^4x \left(\mathcal{L}(\psi_k, \partial_\mu \psi_k) + \sum_k J_k \psi_k \right) \right]. \quad (2.3)
 \end{aligned}$$

Die Integration geht über alle Feldkonfigurationen, ψ_f steht dabei für die Fermionfelder, ψ_{QCD} für die Gluon-, ψ_{QED} für die Photon- und ψ_W für die W -Felder. Die J_k sind die zugehörigen Quellströme. Dabei wurden Z und Higgs von vorn herein weggelassen, da sie in diesem Fall nicht im Anfangs- oder Endzustand vorkommen und Strahlungskorrekturen mit Z - und Higgs-Loops so stark unterdrückt sind, dass sie im Folgenden vernachlässigt werden. Die für unseren Fall relevanten Terme der Lagrangedichte sind

$$\mathcal{L} = \frac{g_W}{2\sqrt{2}} J_\mu^+(x) W^{\mu-}(x) + \text{h.k.} - \frac{1}{2} W_\mu^+ D^{\mu\nu} W_\nu^- + \mathcal{L}_{\text{Rest}}.$$

Dabei ist $W_\mu^+ D^{\mu\nu} W_\nu^-$ die Bilinearform in den W -Feldern, die den kinetischen Term und den Massenterm beinhaltet: $D_{\mu\nu} = \left(2g_{\mu\nu} \overleftarrow{\partial}_\alpha \overrightarrow{\partial}^\alpha - \overleftarrow{\partial}_\nu \overrightarrow{\partial}_\mu - \overleftarrow{\partial}_\mu \overrightarrow{\partial}_\nu \right) - 2m_W^2 g_{\mu\nu}$. Uns interessieren nur Prozesse, bei denen die äußeren Impulse klein im Vergleich zu M_W sind. Damit sind Diagramme mit äußeren W -Linien ausgeschlossen und in (2.3) kann der Quellterm $J_W \psi_W$ gestrichen werden. Der von W abhängende Teil der Exponentialfunktion kann dann als Faktor herausgezogen werden:

$$\begin{aligned}
 Z [J_l, J_{QCD}, J_{QED}] &= \int \prod_{k \neq W} [d\psi_k] \exp \left[i \int d^4x \left(\mathcal{L}_{\text{Rest}} + \sum_{k \neq W} J_k \psi_k \right) \right] \\
 &\times \left\{ \int [dW] \exp \left[i \int d^4x \left(\frac{g_W}{2\sqrt{2}} J_\mu^+(x) W^{\mu-}(x) + \text{h.k.} - \frac{1}{2} W_\mu^+ D^{\mu\nu} W_\nu^- \right) \right] \right\}. \quad (2.4)
 \end{aligned}$$

Mit der Definition

$$D_{\mu\nu}(x-y) = \delta^4(x-y) (g_{\mu\nu}(\partial^2 + M_W^2) - \partial_\mu \partial_\nu)$$

und nach partieller Integration, wobei eine totale Ableitung verworfen wird, kann man den Teil in geschweiften Klammern auch äquivalent schreiben als

$$Z_W = \int [dW] \exp \left[i \int d^4x \left(\frac{g_W}{2\sqrt{2}} J_\mu^+(x) W^{\mu-}(x) + \text{h.k.} + \int d^4y W_\mu^+(x) D^{\mu\nu}(x-y) W_\nu^+(y) \right) \right].$$

Das Integral über die W -Feldkonfigurationen $[dW] = [dW^+][dW^-]$ ist ein Gauss-Integral und kann analytisch durchgeführt werden, das Ergebnis ist bis auf eine globale Normierung:

$$Z_W \sim \exp \left[\int d^4x \frac{i g_W^2}{2 \cdot 8} J^{\mu+}(x) D_{\mu\nu}^{-1} J^{\nu-}(x) \right].$$

Setzt man dies in (2.4) ein, dann sieht man, dass man das gleiche erzeugende Funktional erhält, wenn man in der Lagrangedichte die Wechselwirkungsterme des W ersetzt zu

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \frac{g_W^2}{8} J^{\mu+}(x) D_{\mu\nu}^{-1} J^{\nu-}(x) + \mathcal{L}_{\text{Rest}}. \quad (2.5)$$

Das dabei auftretende Inverse des Operators $D_{\mu\nu}$ ist nichtlokal, zur einfacheren Behandlung wird wieder die Koordinatenschreibweise eingeführt:

$$\int d^4x J^{\mu+}(x) D_{\mu\nu}^{-1} J^{\nu-}(x) = \int d^4x d^4y J^{\mu+}(x) S_{\mu\nu}(x-y) J^{\nu-}(y).$$

$S_{\mu\nu}$ ist darin die Lösung der Gleichung

$$\int d^4y D^{\mu\nu}(x-y) S_{\nu\lambda}(y-z) = g^\mu{}_\lambda \delta^4(x-z)$$

und ist nichts anderes als der Feynman-Propagator in unitärer Eichung:

$$S_{\mu\nu}(x-y) = \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{-iq(x-y)} \frac{-(g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu / M_W^2)}{q^2 - M_W^2}.$$

Um aus (2.5) wieder eine lokale Lagrangedichte zu machen, wird jetzt die Entwicklung in $1/M_W^2$ durchgeführt. In führender Ordnung ist dann $D_{\mu\nu}(x-y) = \delta^4(x-y) g_{\mu\nu} M_W^2$, woraus sich ganz genau wie in (2.2) der inverse Operator $D_{\mu\nu}^{-1}$ ergibt, der durch

$$S_{\mu\nu}(x-y) = \frac{g_{\mu\nu}}{M_W^2} \delta^4(x-y)$$

dargestellt wird. In (2.5) erhält man damit wieder eine lokale, effektive Lagrangedichte, die sich auch als effektiver Hamiltonoperator schreiben lässt:

$$\mathcal{H}_{\text{eff}} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} (J_\mu^+ J^{\mu-} + \text{h.k.}). \quad (2.6)$$

In diesem Formalismus wurde das W -Feld also *ausintegriert*. Benutzt man nun diesen effektiven Hamiltonoperator in der Störungstheorie, dann erhält man für die Feynman-Diagramme genau die gleichen Ergebnisse, wie wenn man mit dem vollen Hamiltonoperator arbeitet und das W -Feld wie anfangs gezeigt auskontrahiert.

2.1.2 Strahlungskorrekturen und Renormierung

Operatorproduktentwicklung im Allgemeinen

Bis jetzt wurde nur die führende Ordnung in der Störungstheorie und in der $1/M_W$ -Entwicklung berücksichtigt. Die Form des effektiven Hamiltonoperators (2.6) ist dann relativ einfach. Unter Berücksichtigung höherer Ordnungen wird diese Situation etwas komplizierter, und (2.6) wird durch eine Reihe von Operatoren ersetzt:

$$\mathcal{H}_{\text{eff}} = \sum_i c_i O_i.$$

Die Koeffizienten c_i heißen *Wilson-Koeffizienten* und beinhalten die Informationen über die Physik bei kurzen Distanzen, also hier über das ausintegrierte W -Feld und Strahlungskorrekturen, während in den Operatoren O_i nur noch Freiheitsgrade auftreten, die bei niedrigen Energien relevant sind. Die O_i können dabei nach Massendimensionen sortiert werden: Der führende Operator (2.6), $O_1 = J_\mu J^\mu$, hat die Massendimension 6 und der Wilson-Koeffizient $c_1 = \frac{G_F}{\sqrt{2}}$ die Dimension -2. Operatoren mit höheren Massendimensionen haben entsprechend Koeffizienten mit höheren inversen Massendimensionen. Die einzige zur Verfügung stehende Skala für letztere ist dabei die elektroschwache Skala. Werden die Matrixelemente der Operatoren berechnet, tritt dagegen eine niedrige Skala auf, z.B. $\Lambda \sim m_b$ in Prozessen mit dem b -Quark. Operatoren mit Dimension > 6 sind also durch die Koeffizienten mit Λ/M_W unterdrückt und können getrost vernachlässigt werden. Doch auch in Dimension 6 gibt es mit Strahlungskorrekturen neue Operatoren.

$b \rightarrow c\bar{u}d$: Ein neuer Operator

Als Beispiel wird weiter der Prozess $b \rightarrow c\bar{u}d$ betrachtet. Die Prozedur ist die gleiche wie bei dem für die Zerfälle $B \rightarrow \pi\pi$ relevanten Prozess $b \rightarrow u\bar{u}d$. Allerdings vereinfacht sich die Situation dadurch, dass es bei $b \rightarrow c\bar{u}d$ keine QCD-Pinguin-Diagramme gibt und lediglich ein neuer Operator auftritt.

Das Produkt der Ströme $J_\mu^+ J^{\mu-}$ wird im Folgenden ausgeschrieben und nur der in diesem Prozess relevante Term (nämlich der mit den richtigen Quark-Flavours) wird berücksichtigt, sodass

$$\mathcal{H}_{\text{eff}} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} V_{cb} V_{ud}^* c_1 O_1^c, \quad O_1^c = (\bar{c}_i b_i)_{V-A} (\bar{d}_j u_j)_{V-A}.$$

In dieser Schreibweise ist der Koeffizient c_1 dimensionslos und in der bisher betrachteten führenden Ordnung ist $c_1 = 1$. Da im Folgenden die Effekte der Starken Wechselwirkung betrachtet werden, sind die Farbindizes i und $j = 1 \dots N_C = 3$ ausgeschrieben. Dass auf $O(\alpha_S)$ -Ebene ein neuer Operator eingeführt werden muss, lässt sich zunächst anschaulich verstehen: Während in O_1 das b und das c -Quark die gleiche Farbe haben, können sie nach Austausch eines Gluons mit einem anderen Quark auch unterschiedliche Farbe haben. Im

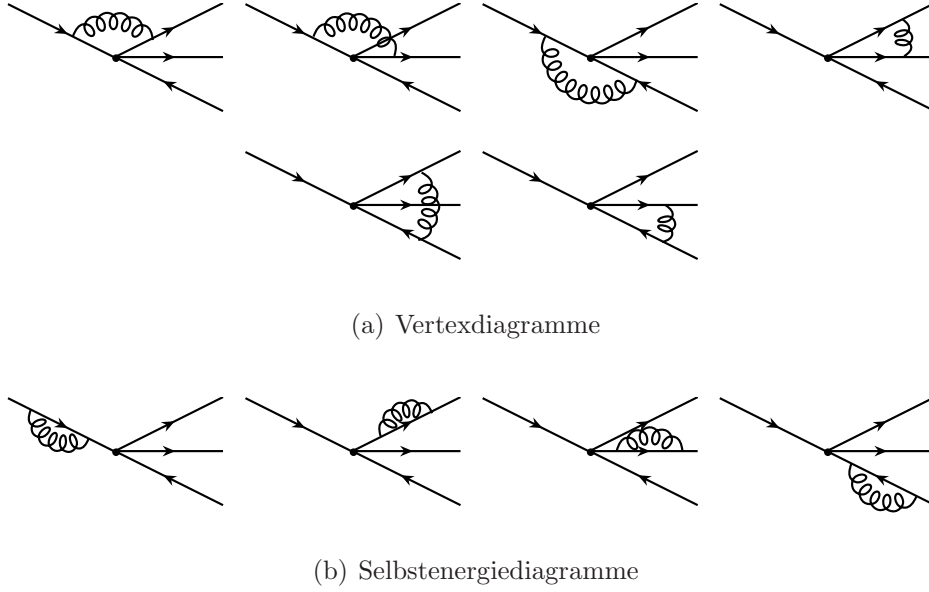


Abbildung 2.2: $O(\alpha_S)$ -Korrekturen zum Prozess $b \rightarrow c\bar{u}d$ in der effektiven Theorie

effektiven Hamiltonoperator tritt jetzt also der neue Operator O_2^c auf:

$$\mathcal{H}_{\text{eff}} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} V_{cb} V_{ud}^* (c_1 O_1^c + c_2 O_2^c), \quad O_2^c = (\bar{c}_i b_j)_{V-A} (\bar{d}_j u_i)_{V-A}.$$

Die perturbative Bestimmung der Koeffizienten c_1 und c_2 wird im übernächsten Abschnitt gezeigt. Vorangestellt sei zunächst eine Betrachtung der

Divergenzen und Renormierung in der effektiven Theorie

Wie oben bemerkt, ist der durch den ursprünglichen Operator O_1^c vermittelte Prozess Farbdiagonal:

$$\langle b_i | O_1^c | c_j \bar{u}_k d_l \rangle_{\text{Tree}} = A \cdot \delta_{ij} \delta_{kl}$$

und A wird darin als Farbstruktur-unabhängige reduzierte Amplitude definiert. In erster Ordnung Störungstheorie müssen zuerst die Vertex-Diagramme Abb 2.2a berechnet werden. Dabei treten Ultraviolett-Divergenzen auf, die in $D \neq 4$ Dimensionen regularisiert werden können. Von dem Ergebnis ist für die Renormierung nur der divergente Teil interessant, der in dimensionaler Regularisierung grundsätzlich mit dem Logarithmus der Renormierungsskala zusammen auftritt:

$$\begin{aligned} & \langle b_i | O_1^c | c_j \bar{u}_k d_l \rangle_{\text{Vertex}} \\ &= A \cdot \frac{\alpha_S}{4\pi} \left[\frac{11}{3} \left(\Delta_{\text{div}} + \log \frac{\mu^2}{M_W^2} \right) \delta_{ij} \delta_{kl} - 3 \left(\Delta_{\text{div}} + \log \frac{\mu^2}{M_W^2} \right) \delta_{il} \delta_{jk} + \dots \right]. \end{aligned}$$

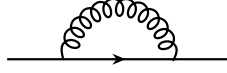


Abbildung 2.3: Diagramm zur Wellenfunktionsrenormierung für Quarklinien. Der divergente Anteil des Diagramms ist $\delta Z_\psi = -\frac{\alpha_S}{4\pi} \Delta_{\text{div}}$.

Die Punkte stehen für endliche, μ -unabhängige Terme. Weiter müssen die vier Selbstenergie-Diagramme Abb. 2.2b berücksichtigt werden. Sie müssen aber nicht getrennt ausgerechnet werden, sondern sind einfach Produkte aus den Diagrammen zur Wellenfunktionsrenormierung (Abb. 2.3), und dem Tree-Level-Matrixelement:

$$\langle b_i | O_1^c | c_j \bar{u}_k d_l \rangle_{\text{Selbst}} = A \cdot \delta_{ij} \delta_{kl} (4 \delta Z_\psi),$$

wobei der Vorfaktor 4 der Anzahl der externen Beine entspricht. Schließlich muss noch die Wellenfunktionsrenormierung selbst durchgeführt werden. Die Divergenz des Diagrammes Abb. 2.3, die es in der Renormierung zu absorbieren gilt, muss dabei zu gleichen Teilen in den Spinor des Anfangs- und Endzustandes aufgeteilt werden, wudurch sich die Vorschrift $\psi = (1 + \frac{1}{2} \delta Z_\psi) \hat{\psi}$ ergibt. Daraus erhält man einen weiteren Beitrag

$$\langle b_i | O_1^c | c_j \bar{u}_k d_l \rangle_{Z_\psi} = -4 A \cdot \delta_{ij} \delta_{kl} \frac{1}{2} \delta Z_\psi.$$

In der Summe ist also

$$\begin{aligned} \langle b_i | O_1^c | c_j \bar{u}_k d_l \rangle_{O(\alpha_S)} &= A \cdot \frac{\alpha_S}{4\pi} \left[\frac{11}{3} (\Delta_{\text{div}} + \log(\mu^2)) \delta_{ij} \delta_{kl} - 3 (\Delta_{\text{div}} + \log(\mu^2)) \delta_{il} \delta_{jk} \right] \\ &\quad + A \cdot 4 \delta_{ij} \delta_{kl} \frac{1}{2} \delta Z_\psi + \dots \quad (2.7) \\ &= A \cdot \frac{\alpha_S}{4\pi} \left[(\Delta_{\text{div}} + \log(\mu^2)) \delta_{ij} \delta_{kl} - 3 (\Delta_{\text{div}} + \log(\mu^2)) \delta_{il} \delta_{jk} + \dots \right], \end{aligned}$$

wobei der Vorfaktor 4 in der zweiten Zeile wieder allgemein der Anzahl der äußeren Beine entspricht und $\delta Z_\psi = -\frac{\alpha_S}{4\pi} \Delta_{\text{div}}$.

Es zeigt sich, dass auch nach der Wellenfunktions-Renormierung noch ein divergenter Beitrag übrig geblieben ist, der eine zusätzliche Operatorrenormierung notwendig macht. Die Tatsache, dass der Vorfaktor von Δ_{div} nicht proportional zum Tree-Level-Beitrag ist, sondern einen weiteren Term $\sim \delta_{il} \delta_{jk}$ enthält, ist der formale Grund, warum der Operator O_2^c eingeführt werden muss, dessen Tree-Level-Matrixelement

$$\langle b_i | O_2^c | c_j \bar{u}_k d_l \rangle_{\text{Tree}} = A \cdot \delta_{il} \delta_{jk}$$

ist. Auch für die Matrixelemente dieses Operators müssen nun die Strahlungskorrekturen berechnet werden. Dabei ergeben sich außer den zu $\langle b_i | O_1^c | c_j \bar{u}_k d_l \rangle_{\text{Tree}}$ und $\langle b_i | O_2^c | c_j \bar{u}_k d_l \rangle_{\text{Tree}}$ proportionalen keine weiteren divergenten Beiträge. Für die Konstruktion einer in erster

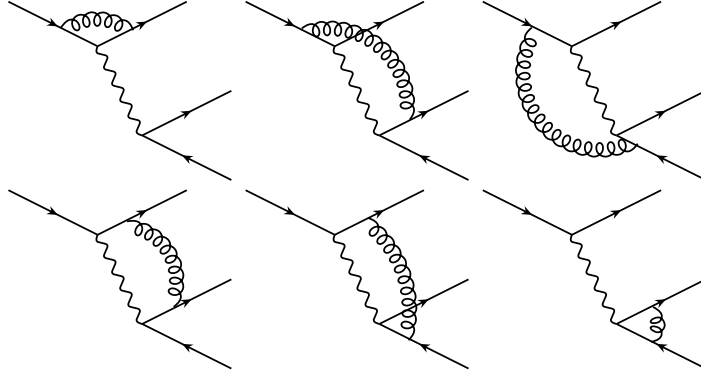


Abbildung 2.4: $O(\alpha_S)$ -Korrekturen in der vollen Theorie

Ordnung Störungstheorie endlichen effektiven Theorie müssen also keine weiteren Operatoren eingeführt werden. Die divergenten Beiträge lassen sich nun schreiben zu

$$\begin{aligned} \langle b_i | O_1^c | c_j \bar{u}_k d_l \rangle_{div} &= \frac{\alpha_S}{4\pi} \left[\langle b_i | O_1^c | c_j \bar{u}_k d_l \rangle_{\text{Tree}} - 3 \langle b_i | O_2^c | c_j \bar{u}_k d_l \rangle_{\text{Tree}} \right] \left(\Delta_{div} + \log \frac{\mu^2}{M_W^2} \right) \\ \langle b_i | O_2^c | c_j \bar{u}_k d_l \rangle_{div} &= \frac{\alpha_S}{4\pi} \left[-3 \langle b_i | O_1^c | c_j \bar{u}_k d_l \rangle_{\text{Tree}} + \langle b_i | O_2^c | c_j \bar{u}_k d_l \rangle_{\text{Tree}} \right] \left(\Delta_{div} + \log \frac{\mu^2}{M_W^2} \right). \end{aligned}$$

Aus diesem Gleichungssystem lässt sich nun ablesen, dass mit der Ersetzung

$$O_i^c = Z_{ij}^O \hat{O}_j \quad \text{mit} \quad Z_{ij}^O = \delta_{ij} + \frac{\alpha_S}{4\pi} \Delta_{div} \Gamma_{ij}, \quad \Gamma_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

die Matrixelemente der renormierten Operatoren \hat{O}_i^c in erster Ordnung α_S endlich sind. Dabei wurde die \overline{MS} -Vorschrift angewendet, in der genau die Terme proportional zu Δ_{div} in die Renormierungsfaktoren absorbiert werden. Die Matrix Γ_{ij} ist die Matrix der *anormalen Dimensionen*. Da Δ_{div} und $\log(\mu^2)$ immer den gleichen Koeffizienten haben, beschreibt diese Matrix auch die Renormierungsskalenabhängigkeit der Operatoren. Bevor diese betrachtet wird, werden zunächst die Koeffizienten c_i berechnet:

Anschlussrechnung für die Wilson-Koeffizienten

Mit Gleichung (2.7) können wir die Diagramme in der effektiven Theorie als Funktion der Wilson-Koeffizienten c_1 und c_2 schreiben:

$$\langle b_i | \mathcal{H}_{\text{eff}} | c_j \bar{u}_k d_l \rangle = \frac{G_F}{\sqrt{2}} V_{cb} V_{ud}^* \left[c_1 \langle b_i | \hat{O}_1^c | c_j \bar{u}_k d_l \rangle + c_2 \langle b_i | \hat{O}_2^c | c_j \bar{u}_k d_l \rangle \right]. \quad (2.9)$$

Die Matrixelemente $\langle b_i | \hat{O}_1^c | c_j \bar{u}_k d_l \rangle$ werden dabei wie oben auf Einschleifen-Ebene berechnet, wobei diesmal die endlichen Terme relevant sind, während nach der oben gezeigten Renormierung keine Divergenz mehr auftritt.

Zum Vergleich müssen auch die Diagramme in der vollen Theorie berechnet werden (Abb. 2.4). Das Resultat ist nach Wellenfunktionsrenormierung ebenfalls endlich. Es wird mit (2.9) gleichgesetzt. Dabei müssen die Koeffizienten der zwei auftretenden Farbstrukturen $\delta_{ij}\delta_{kl}$ und $\delta_{il}\delta_{jk}$ einzeln identisch sein. Man erhält also zwei Gleichungen, aus denen die Koeffizienten c_1 und c_2 bestimmt werden können, und an dieser Stelle sei lediglich das Resultat zitiert [8]:

$$\begin{aligned} c_1(\mu) &= 1 - \frac{\alpha_S}{4\pi} \ln \left(\frac{\mu^2}{M_W^2} \right) \\ c_2(\mu) &= 3 \frac{\alpha_S}{4\pi} \ln \left(\frac{\mu^2}{M_W^2} \right). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Skalenabhängigkeit und Resummation der Logarithmen

Die Kopplungskonstante α_S tritt zusammen mit dem Logarithmus $\log \frac{\mu^2}{M_W^2}$ auf. Die Störungsreihe wird also zu einer Reihenentwicklung in dem Parameter $\alpha_S \log \frac{\mu^2}{M_W^2}$. So lange μ von der Größenordnung der W -Masse ist, ist dies kein Problem. Bei der Berechnung der hadronischen Matrixelemente müssen aber auch Strahlungskorrekturen bei einer niedrigen Skala $\mu \sim m_b$ berücksichtigt werden. Dort übernimmt die Kombination $\alpha_S \log \frac{\mu^2}{m_b^2}$ dann die Rolle des Entwicklungsparameters. Offensichtlich gibt es keine Skala μ , bei der beide Logarithmen gleichzeitig klein sind.

Das Problem kann mit Hilfe der Renormierungsgruppengleichung gelöst werden, indem bei der niedrigen Skala $\mu \sim m_b$ die großen Logarithmen $\log \frac{\mu^2}{M_W^2}$ resummiert werden. Auf diese Weise ist sichergestellt, dass die Störungsreihe konvergent bleibt. Man macht sich dabei zu Nutze, dass physikalische Matrixelemente nicht von der Skala μ abhängen dürfen. Angewendet auf (2.9) bedeutet dies ausgeschrieben:

$$\frac{d}{d \log \mu} \left(\sum_{i=1,2} c_i \langle O_i \rangle \right) = 0. \quad (2.11)$$

Die μ -Abhängigkeit der Matrixelemente kann jetzt von (2.8) abgelesen werden, denn wie bereits bemerkt sind die Koeffizienten von $\log(\mu^2)$ und Δ_{div} identisch und im \overline{MS} -Schema hängen die anomalen Dimensionen Γ_{ij} nicht von der Renormierungsskala ab. Beim Einsetzen in Gleichung (2.11) wird nur die führende (erste) Ordnung der Kopplungskonstanten α_S berücksichtigt, sodass die Tree-Level-Matrixelemente eingesetzt werden können, wenn der Vorfaktor schon von der Ordnung $O(\alpha_S)$ ist:

$$\sum_{i,j} c_i \left(2 \frac{\alpha_S}{4\pi} \Gamma_{ij} \langle O_j \rangle_{\text{Tree}} \right) + \sum_i \frac{dc_i}{d \log \mu} \langle O_i \rangle_{\text{Tree}} = 0.$$

Da die Tree-Level-Matrixelemente unterschiedliche Farbstrukturen haben, gilt diese Gleichung separat für die Koeffizienten von $\langle O_1 \rangle_{\text{Tree}}$ und $\langle O_2 \rangle_{\text{Tree}}$:

$$\frac{dc_i}{d \log \mu} = -2 \frac{\alpha_S}{4\pi} c_j \Gamma_{ji} = -2 \frac{\alpha_S}{4\pi} \Gamma_{ij}^T c_j, \quad i = 1, 2. \quad (2.12)$$

Die Kopplung α_S hängt dabei mit (1.2) ebenfalls von der Renormierungsskala ab:

$$\frac{d\alpha_S}{d\log\mu} = -2\beta_0 \frac{\alpha_S^2}{4\pi}, \quad \beta_0 = 11 - \frac{2}{3}n_f,$$

was bei der Lösung der Differenzialgleichung (2.12) zu berücksichtigen ist. n_f ist die Anzahl der aktiven Flavours mit Masse $m \leq \mu$ und in unserem Fall ist $m_b < \mu < M_W < m_t$ sodass $n_f = 5$.

Die Differenzialgleichung wird am einfachsten durch Diagonalisieren der Matrix Γ^T gelöst. Die diagonale Basis ist $c_{\pm} = 1/2(c_1 \pm c_2)$, und nach Separation der Variablen erhält man aus (2.12) [8]:

$$\begin{aligned} \frac{c_{\pm}(\mu)}{c_{\pm}(M_W)} &= \left(\frac{\alpha_S(M_W)}{\alpha_S(\mu)} \right)^{\gamma_{\pm}/2\beta_0} \\ \gamma_{\pm} &= 6 \left(\pm 1 - \frac{1}{3} \right) \end{aligned}$$

Diese Evolution entspricht der Resummation aller Terme $\left(\alpha_S \log \frac{\mu^2}{M_W^2} \right)^n$, $n = 0 \dots \infty$. Wird die Anschlussrechnung bei der Skala $\mu = M_W$ auf Tree-Ebene durchgeführt, erhält man damit die Wilson-Koeffizienten bei der niedrigen Skala $\mu \sim m_b$ in „führender logarithmischer Ordnung“ (LLO=leading log order). Um auf die nächsthöhere Ordnung zu kommen, müssen die anomalen Dimensionen auf Zweischleifen-Ebene berechnet und die Anschlussrechnung auf Einschleifen-Ebene durchgeführt werden. Im Ergebnis erhält man die Summe aller Terme $\alpha_S \cdot \left(\alpha_S \log \frac{\mu^2}{M_W^2} \right)^n$. Diese nächstführende logarithmische Ordnung (NLO=next-to leading log order) ist mittlerweile vollständig bekannt.

2.1.3 \mathcal{H}_{eff} für $B \rightarrow \pi\pi$

In den $B \rightarrow \pi\pi$ -Zerfällen müssen auf Quark-Ebene anstelle von $b \rightarrow c\bar{u}d$ Prozesse betrachtet werden, die nur leichte Quarks (u, d) im Endzustand haben. Das Bild wird allerdings nur vollständig, wenn auch schwerere Quark-Antiquark-Paare zugelassen werden, denn diese können später (d.h. auf langen Distanzen) wieder zu leichten Quarks annihilieren. Die Situation wird jetzt dadurch komplizierter, dass z.B. im Prozess $b \rightarrow u\bar{u}d$ auch QCD Pinguin-Diagramme wie in Abb. 2.5a erlaubt sind. Dadurch tritt eine ganze Reihe neuer Operatoren auf, die sich in Flavour- Farb- und Dirac-Struktur unterscheiden. Elektroschwache Loop-Diagramme, die zusätzliche elektroschwache Pinguin-Operatoren erzeugen, können für die Zwecke dieser Arbeit vernachlässigt werden.

Der vollständige effektive Hamiltonoperator für $B \rightarrow \pi\pi$ -Zerfälle lautet damit [9, 10, 8]

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\text{eff}} &= \frac{G_F}{\sqrt{2}} \left\{ \lambda_u (c_1 O_1^u + c_2 O_2^u) + \lambda_c (c_1 O_1^c + c_2 O_2^c) \right. \\ &\quad \left. + (\lambda_u + \lambda_c) \left[\sum_{i=3}^6 \sum_{q=u,d,s,c,b} c_i O_i^q + c_{8g} O_{8g} \right] \right\} + h.k. \quad . \quad (2.13) \end{aligned}$$

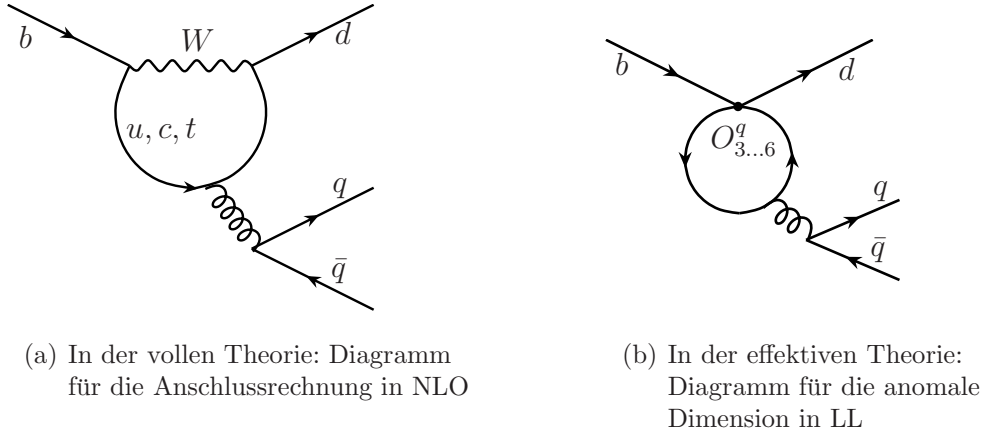


Abbildung 2.5: QCD Pinguin-Diagramme, die zu \mathcal{H}_{eff} für $B \rightarrow \pi\pi$ beitragen

Die Operatoren sind unter Ausschreibung der Farbindices i und j die Vierquark-Operatoren

$$\begin{aligned}
 O_1^q &= (\bar{q}_i b_i)_{V-A} (\bar{d}_j q_j)_{V-A} & O_2^q &= (\bar{q}_i b_j)_{V-A} (\bar{d}_j q_i)_{V-A} & (\text{Strom-Strom}) \\
 O_3^q &= (\bar{d}_i b_i)_{V-A} (\bar{q}_j q_j)_{V-A} & O_4^q &= (\bar{d}_i b_j)_{V-A} (\bar{q}_j q_i)_{V-A} & (\text{QCD Pinguine}) \\
 O_5^q &= (\bar{d}_i b_i)_{V-A} (\bar{q}_j q_j)_{V+A} & O_6^q &= (\bar{d}_i b_j)_{V-A} (\bar{q}_j q_i)_{V+A}
 \end{aligned}$$

sowie der gluonische Pinguin

$$O_{8g} = -\frac{g_s}{8\pi^2} m_b \bar{d} \sigma_{\mu\nu} (1 + \gamma_5) G^{\mu\nu} b.$$

Der Hut, der renormierte Operatoren kennzeichnet, wird jetzt und im Weiteren nicht mehr ausgeschrieben. $\lambda_p = V_{pb} V_{pd}^*$ ($p = u, c, t$) sind schließlich die CKM -Faktoren und es wurde die Unitarität der CKM -Matrix ausgenutzt, indem $\lambda_t = -(\lambda_u + \lambda_c)$ gesetzt wurde. In der Wolfenstein-Parametrisierung (1.1) sind λ_u , λ_c und λ_t alle von der gleichen Größenordnung λ^3 .

Um das Skalenverhalten der Wilson-Koeffizienten zu bestimmen, müssen neben den Vertex-Diagrammen, die analog zu Abbildung 2.2a sind, auch Pinguin-Diagramme wie in Abbildung 2.5b berücksichtigt werden. Für die Anschlussrechnung (in nächstführender logarithmischer Ordnung) müssen sie mit der Berechnung in der vollen Theorie – einschließlich Vertex- und QCD Pinguin-Diagrammen – gleichgesetzt werden. Dabei können im Vergleich zu der elektroschwachen Skala alle Quarkmassen bis auf die des Top-Quarks vernachlässigt werden, sodass man als Resultat Funktionen von m_t/M_W erhält, wie sie z.B. in [11, 12, 13, 14] berechnet wurden. Diese Funktionen ändern sich, wenn Physik jenseits des Standardmodells betrachtet wird, deren neue Teilchen in den Loop-Diagrammen beitragen. Die Physik bei niedrigen Energien, die für die Matrixelemente der effektiven Operatoren relevant ist, wird dagegen nicht beeinflusst.

Die Wilson-Koeffizienten hängen von dem Renormierungsschema ab, in dieser Arbeit wird das gängige \overline{MS} -Schema verwendet. In den Kopplungen des W an die Quarks tritt weiter-

μ	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_{8g}^{eff}
2,4 GeV	1,124	-0,272	0,020	-0,047	0,010	-0,060	-0,166
4,8 GeV	1,073	-0,174	0,013	-0,034	0,009	-0,038	-0,149
9,6 GeV	1,039	-0,100	0,008	-0,024	0,006	-0,025	-0,135

Tabelle 2.1: Wilson-Koeffizienten in NLO im \overline{MS} -Renormierungsschema mit NDR bei verschiedenen Renormierungsskalen μ .

hin die Matrix γ_5 auf, die in dimensionaler Regularisierung besondere Beachtung benötigt. Auf Ein-Loop-Genauigkeit kann jedoch konsistent das Schema der „Naiven dimensional Regularisierung“ (NDR) verwendet werden [15], in dem γ_5 auch in $D \neq 4$ mit den übrigen Gamma-Matrizen antikommutiert. Auch von dieser Wahl hängen die Wilson-Koeffizienten ab. Ihre Werte sind in der Störungstheorie bereits eine Ordnung genauer als hier vorgestellt, d.h. auf Zwei-Schleifen-Ebene, bekannt. In dem gewählten Schema können sie z.B. [16] entnommen werden und sind in Tabelle (2.1) für verschiedene Wahlen der Renormierungsskala gelistet. Die Abhängigkeit von der Skala muss (ebenso wie die Schemenabhängigkeit) von den Matrixelementen der effektiven Operatoren kompensiert werden. Daher ist es aufschlussreich, später die Zerfallsamplituden bei verschiedenen Wahlen für die Renormierungsskala auszurechnen und zu überprüfen, ob die Abhängigkeit tatsächlich schwach ist. Ist das nicht der Fall, deutet dies auf große Beiträge von höheren Ordnungen in der Störungstheorie hin.

2.2 Phänomenologie

Mit dem effektiven Hamiltonoperator (2.13) ist die Dynamik bei kurzen Distanzen also bekannt und wir können uns dem schwierigen Teil zuwenden, nämlich den hadronischen Matrixelementen von \mathcal{H}_{eff} . Dazu wird zuerst gezeigt, wie man mit der Isospin-Symmetrie eine Relation zwischen den Zerfallsamplituden herleiten kann, sodass nur noch zwei statt drei Amplituden berechnet werden müssen.

2.2.1 Isospin-Symmetrie

Die Kopplung von Gluonen und Quarks ist vom Quarkflavour unabhängig. Insbesondere verhalten sich Up- und Down-Quark gleich, wenn man ihre Massen vernachlässigt (es ist sogar ausreichend, die Massendifferenz zu vernachlässigen). Daher kann man sie in einem Isospin-Dublett zusammenfassen, und

$$[\mathcal{H}_I^{QCD}, \vec{I}] = 0, \quad (2.14)$$

wenn \vec{I} der Generator des Isospins ist. Diese Symmetrie gilt natürlich auch für stark gebundene Zustände. Die Pionen bilden das zugehörige Isospin-Triplett:

$$\begin{aligned} |\pi^+\rangle &= |u\bar{d}\rangle &= |i = 1, i_z = 1\rangle \\ |\pi^0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|d\bar{d}\rangle - |u\bar{u}\rangle) &= |1, 0\rangle \\ |\pi^-\rangle &= -|d\bar{u}\rangle &= |1, -1\rangle . \end{aligned} \quad (2.15)$$

Die Vorzeichen ergeben sich durch die Konvention, dass sich u und d wie ein Isodublett und \bar{d} und $-\bar{u}$ wie ein Antidublett transformieren.

Ein Zwei-Pion-Endzustand lässt sich folglich in seine Gesamtisospin-Komponenten $|I, I_z\rangle$ zerlegen. Dabei muss beachtet werden, dass sein Gesamtdrehimpuls J wie der des B -Mesons 0 sein muss. Auch die Pionen einzeln haben $J = 0$, sodass der Zustand symmetrisch unter Vertauschung der Pionen sein muss:

$$|\pi_1\pi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\pi_1\pi_2\rangle + |\pi_2\pi_1\rangle) .$$

Dadurch verschwindet die $I = 1$ -Komponente und durch Einsetzen der Clebsch-Gordan-Koeffizienten erhält man

$$\begin{aligned} |\pi^+\pi^-\rangle &= \sqrt{\frac{1}{3}}|2, 0\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|0, 0\rangle \\ |\pi^0\pi^0\rangle &= \sqrt{\frac{2}{3}}|2, 0\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}}|0, 0\rangle \\ |\pi^-\pi^0\rangle &= |2, -1\rangle . \end{aligned}$$

$|\bar{B}^0\rangle$ und $|B^-\rangle$ bilden ein Isodublett. Nach dem Wigner-Eckart-Theorem hängen die Matrixelemente $\langle 1/2; \pm 1/2 | \mathcal{H}_{\text{eff}} | 1; -1 \dots 1 \rangle$ mit (2.14) nicht von der Komponente I_z ab, sodass sich die Übergangsamplituden durch die reduzierten Isospin-Amplituden $\mathcal{A}_0 \sim \langle 1/2 | \mathcal{H}_{\text{eff}} | 0 \rangle$ und $\mathcal{A}_2 \sim \langle 1/2 | \mathcal{H}_{\text{eff}} | 2 \rangle$ ausdrücken lassen:

$$\begin{aligned} \langle \pi^+\pi^- | \mathcal{H}_{\text{eff}} | \bar{B}^0 \rangle &= \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_0 \\ \langle \pi^0\pi^0 | \mathcal{H}_{\text{eff}} | \bar{B}^0 \rangle &= 2\mathcal{A}_2 - \mathcal{A}_0 \\ \langle \pi^-\pi^0 | \mathcal{H}_{\text{eff}} | B^- \rangle &= \frac{3}{\sqrt{2}}\mathcal{A}_2 . \end{aligned} \quad (2.16)$$

Daraus lässt sich direkt die bekannte Isospin-Relation der Zerfallsamplituden ablesen [17]:

$$\mathcal{A}(\bar{B}^0 \rightarrow \pi^+\pi^-) + \mathcal{A}(\bar{B}^0 \rightarrow \pi^0\pi^0) = \sqrt{2}\mathcal{A}(B^- \rightarrow \pi^-\pi^0) . \quad (2.17)$$

Den effektiven Hamiltonoperator (2.13) kann man nun ebenfalls nach den Isospin-Komponenten zerlegen, die zu den Amplituden \mathcal{A}_0 bzw. \mathcal{A}_2 beitragen. Während die Operatoren O_1^u und O_2^u sowohl $\Delta I = 1/2$ als auch $\Delta I = 3/2$ -Komponenten haben, haben die Pinguin-Operatoren $O_{3\dots 6, 8g}$ $\Delta I = 1/2$ und tragen nur zu \mathcal{A}_0 bei.

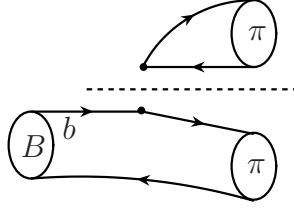


Abbildung 2.6: Naive Faktorisierung: Unterteilung von $B \rightarrow \pi\pi$ in zwei Teilprozesse

2.2.2 Naive Faktorisierung

Um eine Näherung für die hadronischen Matrixelemente zu erhalten, wird der Prozess $B \rightarrow \pi\pi$ jetzt wie in Abbildung 2.6 gezeigt in zwei Teilprozesse zerlegt: Erstens bildet ein leichtes Quark-Antiquark-Paar aus dem schwachen b -Zerfall ein Pion, das aus dem Wechselwirkungspunkt „emittiert“ wird. Währenddessen nimmt zweitens das übrige leichte Quark aus dem Zerfall den Platz des b -Quarks ein und bildet mit dem Spectator-Quark, das nicht am schwachen Prozess beteiligt ist, das zweite Pion: Dieser Teil ist also ein $B \rightarrow \pi$ -Übergang.

Die Pionen sind sehr leicht, sodass jedes Pion im Ruhesystem des B die Energie $m_B/2$ trägt. Gluonen mit niedriger Virtualität ($|q^2| \sim \Lambda_{QCD}^2$) sehen diese energetischen Pion-Zustände als insgesamt farbneutral und koppeln daher nicht [18]. Die Effekte von hochvirtuellen ($|q^2| \gg \Lambda_{QCD}^2$) Gluonen sind dagegen mit α_S unterdrückt. Die „naive Faktorisierung“ genannte Näherung besteht jetzt also darin, jede Wechselwirkung zwischen den beiden Teilprozessen (z.B. Austausch von Gluonen, Quark-Schleifen) zu vernachlässigen [19]. Im Folgenden werden dazu alle Pinguin-Operatoren $O_{3\dots 6,8g}$ vernachlässigt, da die Wilson-Koeffizienten vergleichsweise klein sind. Für die Vierquark-Operatoren $O_{3\dots 6}$ zumindest erhält man aber auch in naiver Faktorisierung Ausdrücke. Da der Endzustand kein Charm enthält, tragen damit unter den Strom-Strom-Operatoren nur O_1^u und O_2^u bei. Deren Matrixelemente werden in zwei unabhängige Matrixelemente, die den Teilprozessen entsprechen, faktorisiert. Für das Matrixelement von O_1^u in $\bar{B}^0 \rightarrow \pi^+\pi^-$ bedeutet dies z.B.:

$$\langle \pi^+\pi^- | O_1^u | \bar{B}^0 \rangle_{fakt} = \langle \pi^- | (\bar{d}u)_{V-A} | 0 \rangle \langle \pi^+ | (\bar{u}b)_{V-A} | B^- \rangle. \quad (2.18)$$

Den Operator O_2^u kann man durch die Identität $(t^a)_{ij}(t^a)_{kl} = \frac{1}{2}(\delta_{il}\delta_{kj} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl})$ für die Farbmatriizen als Kombination von Farbsinglett- und Farboktettströmen schreiben:

$$O_2^u = \frac{1}{3}O_1^u + 2\tilde{O}_1^u, \quad \tilde{O}_1^u = (\bar{u}t^ab)_{V-A}(\bar{d}t^au)_{V-A}. \quad (2.19)$$

t^a sind die $SU(3)$ -Generatoren mit $\text{Tr}(t^at^b) = \frac{1}{2}\delta^{ab}$ und die gleiche Formel gilt auch mit $u \rightarrow c$, was erst später gebraucht wird. In der Faktorisierung (2.18) verschwinden die Matrixelemente der Farboktettströme, denn die Hadronen sind farbneutral. Die Matrixelemente der Farbsinglettströme dagegen sind die Pion-Zerfallskonstante

$$\langle \pi^+(q) | \bar{u}\gamma_\mu\gamma_5 d | 0 \rangle = -if_\pi q_\mu, \quad (2.20)$$

und der $B \rightarrow \pi$ -Formfaktor $f_{B\pi}^0$, der über

$$\langle \pi(p) | \bar{u} \gamma_\mu b | B(p+q) \rangle = 2p_\mu f_{B\pi}^+(q^2) + q_\mu (f_{B\pi}^+(q^2) + f_{B\pi}^-(q^2)) \quad (2.21)$$

und

$$f_{B\pi}^0(q^2) = \left(1 - \frac{q^2}{m_B^2 - m_\pi^2} \right) f_{B\pi}^+(q^2) + \frac{q^2}{m_B^2 - m_\pi^2} (f_{B\pi}^+(q^2) + f_{B\pi}^-(q^2))$$

definiert ist. In (2.18) eingesetzt erhält man damit die faktorisierte Zerfallsamplitude

$$\mathcal{A}_{\pi\pi} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \langle \pi^+ \pi^- | O_1^u | \bar{B}^0 \rangle_{\text{fakt}} = i \frac{G_F}{\sqrt{2}} (m_B^2 - m_\pi^2) f_{B\pi}^0(m_\pi^2) f_\pi.$$

Während f_π experimentell zu $f_\pi = 131$ MeV gemessen wurde [20], ist die Bestimmung von $f_{B\pi}^0$ deutlich schwieriger. Die Extraktion aus semileptonischen Zerfallraten in $B \rightarrow \pi l \bar{\nu}$ setzt eine genaue Kenntnis von $|V_{ub}|$ voraus. In Gitter-QCD ist die Bestimmung wegen des großen Impulses des Pions ebenfalls schwierig. Die zuverlässigste Vorhersage in diesem kinematischen Bereich liefern die Lichtkegel-Summenregeln [21]. Die Pion-Masse, die im chiralen Limes $m_u, m_d \rightarrow 0$ verschwindet, wird von jetzt an vernachlässigt, sodass der Impulsübertrag $q^2 = 0$ gesetzt wird. An dieser Stelle ist $f_{B\pi}^-(0) = 0$ und $f_{B\pi}^+(0) = f_{B\pi}^0(0) \equiv f_{B\pi}(0)$, für dessen Wert

$$f_{B\pi} = 0.26 \pm 0.05$$

aus [22] eingesetzt wird. Dabei wurde anstelle der quadratischen Fehleraddition, die am Ende von Kapitel 3 durchgehend verwendet wird, eine konservativere Fehlerabschätzung gewählt¹.

Der chirale Limes $m_u = m_d = m_\pi = 0$ wird für die gesamte weitere Rechnung verwendet. Dabei ist anzumerken, dass ein Vorfaktor $\mu_\pi = m_\pi^2 / (m_u + m_d)$ auftritt, wenn die Matrixelemente der vorerst vernachlässigten Pinguin-Operatoren $O_{5,6}$ mittels der QCD Bewegungsgleichungen auf die von $O_{1,2}$ zurückgeführt werden (in naiver Faktorisierung). Wichtig ist, dass μ_π im chiralen Limes endlich bleibt und daher so berücksichtigt wird, wie es ist.

Analog zu (2.18) lassen sich auch die übrigen Zerfallsamplituden darstellen. In $B^- \rightarrow \pi^- \pi^0$ gibt es zwei Arten, die Quarks aus dem b -Zerfall zu den Mesonen zu gruppieren: Das Spectator-Quark kann entweder im π^0 oder im π^- gebunden werden. Im ersten Fall ist der Prozess identisch zu $\bar{B}^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$ bis auf Austausch des Spectator-Quarks, wodurch sich mit (2.15) ein Vorfaktor $\langle \pi^0 | \bar{u} u \rangle \langle \pi^- | d \bar{u} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$ aus dem Flavour-Raum ergibt:

$$\langle \pi^- \pi^0 | O_1^u | B^- \rangle_{\text{fakt}, I} = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle \pi^+ \pi^- | O_1^u | \bar{B}^0 \rangle_{\text{fakt}}$$

Im zweiten Fall wird am elektroschwachen Vertex die Rolle von u - und d -Quarks vertauscht, wodurch in (2.18) der Operator O_1^u zu O_2^u in seiner Fierz-transformierten Form

$$O_2^u = (\bar{u} u)_{V-A} (\bar{d} b)_{V-A}$$

¹Die Unsicherheit aus der Pion-Verteilungsamplitude wurde linear zu den übrigen Unsicherheiten addiert. Siehe Abschnitt 3.4.2 ab Seite 102.

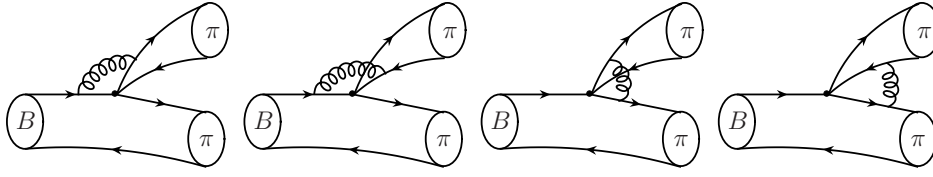
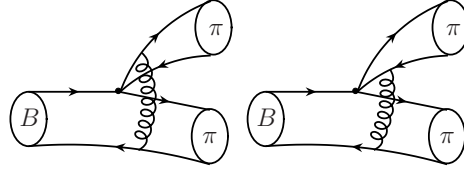

 (a) Vertex-Diagramme (Term T^I in (2.23))

 (b) Harte Spectator-Diagramme (Term T^{II} in (2.23))

Abbildung 2.7: Emissions-Diagramme im QCD Faktorisierng

wird. Diesmal ist es also O_1^u , der durch eine Fierz-Transformation auf die Form von O_2^u gebracht werden muss:

$$O_1^u = (\bar{u}_i u_j)_{V-A} (\bar{d}_j b_i)_{V-A} = \frac{1}{3} O_2^u + 2\tilde{O}_2^u, \quad \tilde{O}_2^u = (\bar{u} t^a u)_{V-A} (\bar{d} t^a b)_{V-A} \quad (2.22)$$

Nach der Faktorisierung, die sich in diesem Fall

$$\langle \pi^- \pi^0 | O_2^u | B^- \rangle_{fakt, II} = \langle \pi^0 | (\bar{u} u)_{V-A} | 0 \rangle \langle \pi^- | (\bar{d} b)_{V-A} | B^- \rangle$$

liest, verschwinden dann wieder die Farboktettströme in \tilde{O}_2^u . Die Zerfallsamplitude für $\bar{B}^0 \rightarrow \pi^0 \pi^0$ ergibt sich dann mit der Isospin-Relation (2.17) aus den anderen beiden. Die Ausdrücke für die Zerfallsamplituden in naiver Faktorisierung sind schließlich:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\bar{B}^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-) &= \lambda_u \left(c_1(\mu) + \frac{1}{3} c_2(\mu) \right) \mathcal{A}_{\pi\pi} \\ \mathcal{A}(B^- \rightarrow \pi^- \pi^0) &= \lambda_u \frac{4}{3\sqrt{2}} \left(c_1(\mu) + c_2(\mu) \right) \mathcal{A}_{\pi\pi} \\ \mathcal{A}(\bar{B}^0 \rightarrow \pi^0 \pi^0) &= \lambda_u \left(\frac{1}{3} c_1(\mu) + c_2(\mu) \right) \mathcal{A}_{\pi\pi}. \end{aligned}$$

2.2.3 QCD Faktorisierung

Die Grenzen der naiven Faktorisierung erkennt man durch Betrachten des Skalenverhaltens der Gleichung (2.18): Der Operator auf der linken Seite wurde renormiert und das Matrixelement hängt von der Renormierungsskala μ ab. Diese Abhängigkeit wird durch die der

Wilson-Koeffizienten kompensiert. Auf der rechten Seite stehen Matrixelemente von renormierungsinvarianten Vektor- bzw. Axialvektorströmen. Die Skalenabhängigkeit der Wilson-Koeffizienten überträgt sich also direkt auf die Vorhersagen der naiven Faktorisierung.

Um dieses Problem zu beheben, wurde die QCD Faktorisierung [23, 24, 25] entwickelt. Dabei wird die Forderung, dass zwischen den beiden Teilprozessen in Abbildung (2.6) keine Wechselwirkung stattfindet, fallen gelassen (die Methode macht auch Aussagen über Diagramme, bei denen nicht wie in der Abbildung gezeigt ein Pion aus dem Wechselwirkungspunkt emittiert wird, die folgende Diskussion sei aber auf die Diagramme vom Typ Emission beschränkt). Die Effekte „weicher“, das heißt wenig virtueller Gluonen verschwinden aber wegen der bereits erwähnten Farbneutralität energetischer Pionen im Limes $m_b \rightarrow \infty$ und werden weiter vernachlässigt, sodass man in QCD Faktorisierung den führenden Term einer Reihenentwicklung in Λ_{QCD}/m_b erhält. Für die „harten“ (hochvirtuellen) Gluonen gilt dagegen die Störungstheorie. In nächstführender Ordnung bestehen die Korrekturen also aus den perturbativen Diagrammen in Abbildung 2.7. Genau diese Diagramme kompensieren dabei die Skalenabhängigkeit der Wilson-Koeffizienten in nächstführender Ordnung $O(\alpha_S)$.

Die Matrixelemente lassen sich dann schreiben als:

$$\langle \pi^+ \pi^- | O_1^u | \overline{B^0} \rangle = f_{B\pi}(0) \int_0^1 du T^I(u) \varphi_\pi(u) + \int_0^1 d\xi du dv T^{II}(\xi, u, v) \Phi_B(\xi) \varphi_\pi(v) \varphi_\pi(u). \quad (2.23)$$

Der erste Summand entspricht den Vertexdiagrammen Abb. 2.7a. Dabei werden den beiden Quarks, die das emittierte Pion bilden, die Impulse $u q$ bzw. $(1-u) q$ zugewiesen; die Verteilungsfunktion $\varphi_\pi(u)$ ist ein Maß für die Wahrscheinlichkeit, solch eine Impulsconfiguration mit gegebenem u im Pion zu finden (sie ist identisch zu der Verteilungsfunktion, die später in den Lichtkegel-Summenregeln verwendet wird). Setzt man weiter voraus, dass sich auch die an der Wechselwirkung beteiligten Quarks im $B \rightarrow \pi$ -Übergang wie freie Quarks mit On-Shell-Impulsen bewegen (was im Limes $m_b \rightarrow \infty$ erfüllt ist), kann man letzteren auf den $B \rightarrow \pi$ -Formfaktor $f_{B\pi}$ zurückführen.

Der zweite Summand in (2.23) entspricht den Diagrammen in Abb. 2.7b mit harter Spectator-Wechselwirkung. Auch bei der Berechnung dieser Diagramme werden alle externen Quarkimpulse On-Shell gesetzt; dabei tritt auch die Funktion $\varphi_B(\xi)$ auf, die die Impulsconfiguration im B -Meson beschreibt.

Zu bemerken ist, dass Diagramme mit Gluonaustausch *innerhalb* der Teilprozesse nicht hinzugenommen werden dürfen, denn diese sind bereits in den nichtperturbativen Größen f_π und $f_{B\pi}$ enthalten.

2.2.4 Theorie und Daten

Die Verzweigungsraten der $B \rightarrow \pi\pi$ -Zerfälle wurden zu

$$\begin{aligned}\text{Br}(B^+ \rightarrow \pi^+\pi^0) &= (5,5 \pm 0,6) \times 10^{-6} \\ \text{Br}(B^0 \rightarrow \pi^+\pi^-) &= (5,0 \pm 0,4) \times 10^{-6} \\ \text{Br}(B^0 \rightarrow \pi^0\pi^0) &= (1,45 \pm 0,29) \times 10^{-6}\end{aligned}\tag{2.24}$$

gemessen [26]². Dies wird im Folgenden den Vorhersagen der naiven Faktorisierung gegenübergestellt. Die Berücksichtigung der Korrekturen z.B. aus der QCD Faktorisierung ändert das Bild nicht qualitativ (was von vorn herein nicht selbstverständlich ist, sondern sich aus der expliziten Rechnung ergibt), macht sie aber unübersichtlicher und wird daher für den Moment weggelassen.

Um aus den Zerfallsamplituden die Zerfallsbreite zu erhalten, muss noch die Zweikörper-Phasenraumintegration durchgeführt werden, die bei Vernachlässigung der Pion-Masse sehr einfach ist, und im Ruhesystem des B -Mesons (cm) gilt:

$$\begin{aligned}\Gamma_{\pi\pi} &= \frac{1}{2m_B} |\mathcal{A}(B \rightarrow \pi\pi)|^2 \int \frac{d\Omega_{cm}}{4\pi} \frac{1}{8\pi} \left(\frac{2|\vec{p}_\pi|}{E_{cm}} \right), \\ E_{cm} &= m_B, \quad |\vec{p}_\pi| = \frac{m_B}{2} \\ &= \frac{1}{16\pi m_B} |\mathcal{A}(B \rightarrow \pi\pi)|^2.\end{aligned}$$

Nach Multiplikation mit der B -Lebensdauer erhält man das Verzweigungsverhältnis

$$\text{Br}(B \rightarrow \pi\pi) = \frac{\Gamma_{\pi\pi}}{\Gamma_{tot}} = \Gamma_{\pi\pi} \cdot \tau_B.$$

Bei dem Verzweigungsverhältnis für $\bar{B}^0 \rightarrow \pi^0\pi^0$ kommt noch ein kombinatorischer Faktor $1/2$ hinzu, da der Endzustand zwei identische Teilchen enthält.

Als erstes kann man durch Umstellen der Isospin-Zerlegung (2.16) das Verhältnis der Isospin-Amplituden \mathcal{A}_0 und \mathcal{A}_2 bestimmen:

$$\frac{|\mathcal{A}_0|}{|\mathcal{A}_2|} = \sqrt{3 \left[\frac{\text{Br}(\bar{B}^0 \rightarrow \pi^0\pi^0) + \text{Br}(\bar{B}^0 \rightarrow \pi^+\pi^-)}{\text{Br}(B^- \rightarrow \pi^-\pi^0)} \right] \frac{\tau_{B^-}}{\tau_{B^0}} - 2},$$

und mit $\tau_{B^-}/\tau_{B^0} = 1,075 \pm 0,009$ [26], ist das Resultat

$$\frac{|\mathcal{A}_0|}{|\mathcal{A}_2|} = 1,33 \pm 0,31.\tag{2.25}$$

²Während die Amplituden in dieser Arbeit für B^- und \bar{B}^0 geschrieben werden, sind alle Verzweigungsverhältnisse wie allgemein üblich CP -gemittelt.

Dabei wurden direkt die CP -gemittelten Werte (2.24) verwendet, die CP -Asymmetrien der Zerfälle also vernachlässigt. In diesem Verhältnis kürzen sich die hadronischen Matrixelemente heraus, wenn man die naive Faktorisierung zu Grunde legt, und es bleibt einzig ein Verhältnis von Wilson-Koeffizienten übrig:

$$\frac{\mathcal{A}_0}{\mathcal{A}_2} = \frac{5}{4} \left(\frac{c_1(\mu) - c_2(\mu)/5}{c_1(\mu) + c_2(\mu)} \right).$$

Da Effekte der starken Wechselwirkung bei den Matrixelementen vernachlässigt wurden, werden auch die Wilson-Koeffizienten hier nur in führender logarithmischer Ordnung eingesetzt. Um die Skalenabhängigkeit abzuschätzen, wird das Verhältnis bei $\mu = m_b/2$ und $\mu = m_b$ sowie, zu illustrativen Zwecken, bei $\mu = M_W$ ausgewertet. Mit

$$\begin{array}{llll} c_1(\mu = m_b/2) & = 1,169 & c_2(\mu = m_b/2) & = -0,361 \\ c_1(\mu = m_b) & = 1,108 & c_2(\mu = m_b) & = -0,249 \\ c_1(\mu = m_W) & = 1 & c_2(\mu = m_W) & = 0 \end{array}$$

ist dann

$$\frac{\mathcal{A}_0}{\mathcal{A}_2} = \begin{cases} 1,92, & \mu = m_b/2 \\ 1,68, & \mu = m_b \\ 1,25, & \mu = M_W. \end{cases}$$

Mit dem Messwert (2.25) ist dies nur bei $\mu \sim M_W$ konsistent, für solch eine Wahl von μ gibt es aber keine physikalische Motivation.

Ob die Abweichung in \mathcal{A}_0 oder \mathcal{A}_2 oder beiden liegt, kann anhand der Verzweungsverhältnisse untersucht werden. Für die Amplitude \mathcal{A}_2 genügt die Betrachtung von $B^+ \rightarrow \pi^+\pi^0$: In diesem Zerfall trägt \mathcal{A}_0 nicht bei. Zur Auswertung wird noch das CKM -Matrixelement $|V_{ub}| = (4,22 \pm 0,11 \pm 0,24) \times 10^{-3}$ [26] benötigt, wobei statistischer und systematischer Fehler quadratisch addiert werden, und das Resultat ist

$$BR(B^+ \rightarrow \pi^+\pi^0)_{fact} = \begin{cases} (5.7_{-2.0}^{+2.4} \pm 0.7) \times 10^{-6}, & \mu = m_b/2 \\ (6.4_{-2.3}^{+2.7} \pm 0.8) \times 10^{-6}, & \mu = m_b \\ (8.7_{-3.0}^{+3.7} \pm 1.1) \times 10^{-6}, & \mu = M_W. \end{cases}$$

Der erste Fehler ist der des Formfaktors, der zweite der von $|V_{ub}|$. Bei der physikalisch sinnvollen Skala $\mu \sim m_b/2 \dots m_b$ stimmt dies zufriedenstellend mit dem experimentellen Messwert überein.

Anstatt den Formfaktor $f_{B\pi}(0)$ aus Lichtkegel-Summenregeln zu bestimmen, kann man ihn auch aus dem semileptonischen Prozess $B^0 \rightarrow \pi^- l^+ \nu_l$ bestimmen. Allerdings tritt hier nur $f_{B\pi}$ bei positivem Impulsübertrag q^2 auf, aus dem aber über die Parametrisierung [27]

$$f_{B\pi}(q^2) = f_{B\pi}(0) N_{B\pi}(q^2), \quad N_{B\pi} = \frac{1}{(1 - q^2/m_{B^*}^2)(1 - \alpha_{B\pi} q^2/m_{B^*}^2)}$$

der Wert bei $q^2 = 0$ extrapoliert werden kann. Aus einem Fit an die Daten wurde $\alpha_{B\pi} = 0,61 \pm 0,09$ bestimmt. Im Quotient der Verzweigungsverhältnisse kürzt sich $f_{B\pi}(0)$ dann heraus, ebenso wie $|V_{ub}|$:

$$\frac{\text{Br}(B^+ \rightarrow \pi^+\pi^0)}{\text{Br}(B^0 \rightarrow \pi^-l^+\nu_l)} = \frac{2\pi^2|V_{ud}|^2 (c_1(\mu) + c_2(\mu))^2 f_\pi^2 m_B^3}{3 \int_0^{(m_B - m_\pi)^2} dq^2 (E_\pi^2 - m_\pi^2)^{3/2} |N_{B\pi}(q^2)|^2} \left(\frac{\tau_{B^+}}{\tau_{B^0}} \right),$$

Mit $\text{Br}(B^0 \rightarrow \pi^-l^+\nu_l) = (1,36 \pm 0,11) \times 10^{-4}$ erhält man schließlich

$$\text{Br}(B^+ \rightarrow \pi^+\pi^0)_{fact} = \begin{cases} (3,6 \pm 0,3 \pm 0,4) \times 10^{-6}, \mu = m_b/2 \\ (4,1 \pm 0,3 \pm 0,5) \times 10^{-6}, \mu = m_b \\ (5,6 \pm 0,5 \pm 0,6) \times 10^{-6}, \mu = M_W \end{cases}$$

Auch dies stimmt im Rahmen der Ungenauigkeiten in zufriedenstellender Genauigkeit mit den gemessenen Raten überein. Der Zerfall $B^+ \rightarrow \pi^0\pi^+$ und damit der Betrag $|\mathcal{A}_2|$ wird also offenbar durch die naive Faktorisierung gut beschrieben.

Bei den Zerfällen des B^0 ist die Situation aber eine andere. In naiver Faktorisierung ist:

$$\begin{aligned} \text{Br}(B^0 \rightarrow \pi^+\pi^-) (\mu = m_b/2; mb; m_W) &= (10,1; 9,6; 9,1) \times 10^{-6} \\ \text{Br}(B^0 \rightarrow \pi^0\pi^0) (\mu = m_b/2; mb; m_W) &= (0,006; 0,06; 0,5) \times 10^{-6}, \end{aligned}$$

was deutlich von den Messdaten abweicht, und zwar mit unterschiedlichem Vorzeichen. Auch bei der Skala $\mu \sim m_W$ ist die Übereinstimmung nicht wesentlich besser. erinnert man sich daran, dass \mathcal{A}_0 in den beiden Zerfallsamplituden mit unterschiedlichem Vorzeichen beiträgt, so sieht man, dass in dieser Isospin-Amplitude offenbar ein großer Beitrag fehlt, um die Daten zu erklären.

2.2.5 Nichtfaktorisierte Beiträge und Zerlegung der Zerfallsamplituden

Die naive Faktorisierung hat angenommen, dass eines der Pionen direkt aus dem elektroschwachen Vertex emittiert wird. Dies ist zwar in der Tat der dominante Prozess, es sind aber auch andere Mechanismen möglich. Um diese zu klassifizieren, wird jetzt unterstellt, dass die Mesonen im Anfangs- und Endzustand als Quark-Antiquark-Paare beschrieben werden, die sich als Quarklinien durch den Prozess verfolgen lassen. In der QCD Faktorisierung trifft dies offensichtlich zu, ebenso aber in Lichtkegel-Summenregeln. Die vier möglichen Diagrammklassen sind in Abbildung 2.8 aufgelistet. Die Einteilung geschieht dabei unabhängig von der Kopplung an (perturbative oder nichtperturbative) Gluonen; sie richtet sich nur nach dem Quarkfluss. Je nach Methode tragen einige Diagrammtypen überhaupt erst bei, wenn zusätzlich Gluonen ausgetauscht werden. In [28] wurde gezeigt, dass diese Aufteilung

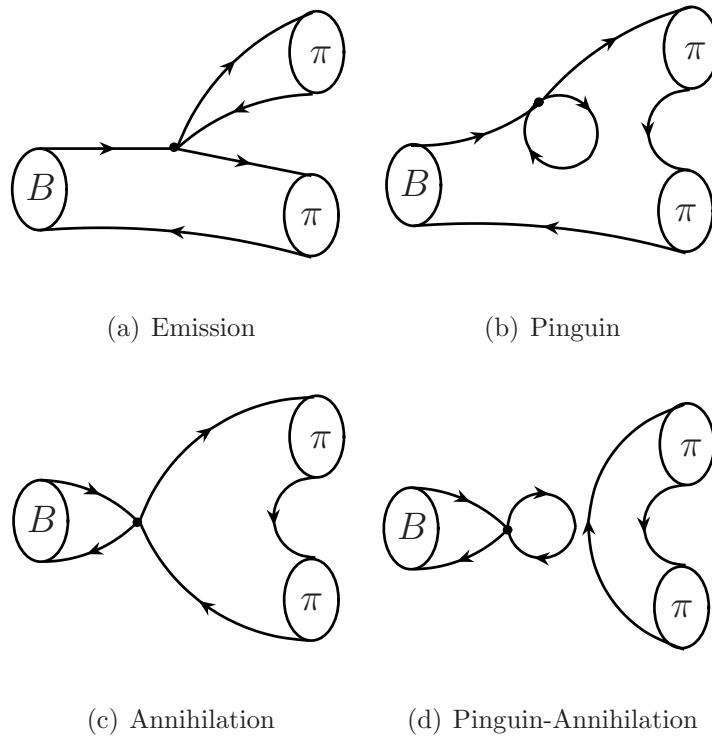


Abbildung 2.8: Diagrammtypen in $B \rightarrow \pi\pi$

nach Diagrammen auf eine Renormierungsschemen- und Skalen-unabhängige Weise gemacht werden kann.

Bezeichnet man den Beitrag der Diagramme vom Typ D , bei denen als elektroschwacher Vertex der Operator O_i eingesetzt wird, zur $B \rightarrow \pi\pi$ -Zerfallsamplitude mit $\langle \pi\pi | O_i | B \rangle_D$, dann kann die gesamte Zerfallsamplitude als Doppelsumme über die Operatoren und Diagrammtypen geschrieben werden:

$$\mathcal{A}(B \rightarrow \pi\pi) = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \sum_i \sum_D c_i \lambda_i \langle \pi\pi | O_i | B \rangle_D$$

(Es gibt also auch Emissions-Diagramme mit Pinguin-Operatoren und Pinguin-Diagramme mit Strom-Strom-Operatoren!).

Ein-Gluon-Näherung

In der naiven Faktorisierungsformel (2.18) wurde der Austausch von Gluonen zwischen den Teilprozessen vernachlässigt. Ab jetzt werden allgemein auch alle Prozesse betrachtet, bei denen ein Gluon ausgetauscht wird, Prozesse mit zwei und mehr Gluonen werden weiter vernachlässigt. Wie die Gluonen beschrieben werden, wird dabei offen gelassen, und der Beweis, dass der Mehr-Gluon-Austausch hinreichend stark unterdrückt ist, muss in der jeweils

verwendeten Rechenmethode noch erbracht werden. In QCD Faktorisierung zum Beispiel bringt jedes zusätzliche Gluon einen Faktor $\alpha_S(m_b)$.

In dieser Ein-Gluon-Näherung ist die Zerlegung (2.19) der Vierquark-Operatoren nach Farbsinglett und -Oktett weiter hilfreich. Die Matrixelemente der Singlett-Ströme mit Ein-Gluon-Austausch verschwinden nämlich. Andererseits verschwinden die Matrixelemente der Oktettströme in naiver Faktorisierung (ohne Gluon-Austausch):

$$\begin{aligned} \langle \pi^+ \pi^- | c_1 O_1^u + c_2 O_2^u | \bar{B}^0 \rangle_E &= \langle \pi^+ \pi^- | \left(c_1 + \frac{c_2}{3} \right) O_1^u + 2 c_2 \tilde{O}_2^u | \bar{B}^0 \rangle \\ &= \left(c_1 + \frac{c_2}{3} \right) \underbrace{\langle \pi^+ \pi^- | O_1^u | \bar{B}^0 \rangle_{E,0-Gluon}}_{\mathcal{A}_{\pi\pi}} + 2c_2 \langle \pi^+ \pi^- | \tilde{O}_1^u | \bar{B}^0 \rangle_{E,1-Gluon}. \end{aligned}$$

Für die Korrektur durch Ein-Gluon-Austausch wird der Parameter

$$r_E = \frac{\langle \pi^+ \pi^- | \tilde{O}_1^u | \bar{B}^0 \rangle_E}{\langle \pi^+ \pi^- | O_1^u | \bar{B}^0 \rangle_E} \quad (2.26)$$

eingeführt. Insgesamt ist damit der Beitrag der Emissionsdiagramme mit den Strom-Strom-Operatoren zur Zerfallsamplitude

$$\mathcal{A}(\bar{B}^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-)_{\text{Emission}, O_{1,2}^u} = \lambda_u \mathcal{A}_{\pi\pi} \left(c_1 + \frac{1}{3} c_2 + 2c_2 r_E \right).$$

Auch bei den übrigen Diagrammtypen lässt sich immer eine Operatorbasis O, \tilde{O} finden, in der 0-Gluon- und 1-Gluon-Beiträge voneinander getrennt werden.

Zerlegung der Amplituden

Die Amplituden \mathcal{A}_0 und \mathcal{A}_2 werden zunächst nach *CKM*-Phasen zerlegt:

$$\mathcal{A}_0 = \lambda_u A_0^{(u,1,2)} + \lambda_c A_0^{(c,1,2)} + (\lambda_u + \lambda_c) A_0^{\geq 3} \quad (2.27)$$

$$\mathcal{A}_2 = \lambda_u A_2^{(u,1,2)}. \quad (2.28)$$

Die oberen Indizes der A_i geben dabei an, welche Operatoren zu diesem Teil beitragen: $A^{(u,1,2)}$ enthält nur die Operatoren $O_{1,2}^u$, $A^{(c,1,2)}$ den Beitrag von $O_{1,2}^c$ und $A^{\geq 3}$ die Pinguin-Operatoren $O_{3\dots 6,8g}$.

Für die Zerlegung der Amplituden wird der Zerfall $\bar{B}^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$ weiter als Referenz gewählt. Alle Beiträge zu dem Zerfall $B^- \rightarrow \pi^- \pi^0$ haben in diesem Zerfall eine Entsprechung, wenn man u -Quarks gegen d -Quarks austauscht und/oder umgekehrt. Diese Ersetzungen betreffen auch die Operatoren: In naiver Faktorisierung stellte sich zum Beispiel heraus, dass O_1^u und O_2^u ihre Rollen vertauschen. Auf diese Weise lassen sich alle $B \rightarrow \pi\pi$ -Zerfälle durch die Matrixelemente von $\bar{B}^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$ ausdrücken, und im Folgenden werden hierzu nur die Ergebnisse angegeben und die einzelnen Beiträge kurz kommentiert.

Zu der **Isospin-2-Amplitude** tragen nur die Emissions-Diagramme der Strom-Strom-Operatoren bei:

$$A_2^{(u,1,2)} = \left[\frac{4}{9}(c_1 + c_2) + \frac{2}{3}(c_1 + c_2)r_E \right] \mathcal{A}_{\pi\pi}.$$

Im Zerfall $B^- \rightarrow \pi^- \pi^0$, wo $A_2^{(u,1,2)}$ der einzige Beitrag ist, heißt das insbesondere, dass einzig der CKM -Faktor λ_u auftritt. Ohne eine Interferenz von CKM -Faktoren mit unterschiedlicher Phase gibt es hier also auch keine CP -Verletzung.

Zu der **Isospin-0-Amplitude** mit den **Strom-Strom-Operatoren** tragen auch die Pinguin- und die Annihilations-Diagramme bei (die Pinguin-Annihilation wird wie auch in QCD Faktorisierung vernachlässigt, in Lichtkegel-Summenregeln ist dieser Beitrag stark unterdrückt). Wie bei der Emission ist hier eine Zerlegung nach Farbsinglett- und Farboktett-Operatoren angebracht. Im Unterschied zu der Zerlegung (2.18, 2.19) der Emissionsdiagramme für $\bar{B}^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$ ist allerdings dieses Mal die in (2.22) definierte Zerlegung in O_2 und \tilde{O}_2 nötig, um der Struktur der Diagramme gerecht zu werden. Wie sich herausstellt, verschwindet sowohl bei den Pinguin- als auch bei den Annihilations-Diagrammen das Matrixelement des Farbsinglettoperators O_2 , wenn der Austausch von mehr als einem Gluon vernachlässigt wird. Wegen der zusätzlichen Quarkschleife in den Pinguin-Diagrammen tragen hier sowohl O_2^u als auch O_2^c zu der Amplitude bei, wobei letzterer eine andere CKM -Phase trägt. Bei der Annihilation gibt es nur O_2^u .

Analog zu r_E werden für diese Beiträge die Parameter

$$r_{P_Q} = \frac{\langle \pi^+ \pi^- | \tilde{O}_2^Q | \bar{B}^0 \rangle_{P_Q}}{\langle \pi^+ \pi^- | O_1^u | \bar{B}^0 \rangle_E} \quad (Q = u, c), \quad r_A = \frac{\langle \pi^+ \pi^- | \tilde{O}_2^u | \bar{B}^0 \rangle_A}{\langle \pi^+ \pi^- | O_1^u | \bar{B}^0 \rangle_E} \quad (2.29)$$

eingeführt. In den Pinguin-Beiträgen steht der Index Q für den Flavour des im Loop umlaufenden Quarks. Der Beitrag zur Amplitude ist damit:

$$\begin{aligned} A_0^{(u,1,2)} &= \left[\frac{1}{9}(5c_1 - c_2) - \frac{2}{3}(c_1 - 2c_2)r_E + 2c_1(r_{P_u} + r_A) \right] \mathcal{A}_{\pi\pi} \\ A_0^{(c,1,2)} &= 2c_1 r_{P_c} \mathcal{A}_{\pi\pi}. \end{aligned}$$

Die **Operatoren O_3^u und O_4^u** lassen sich durch Fierz-Transformationen auf O_1^u und O_2^u zurückführen, weswegen hier keine neuen Parameter auftreten. Die **Operatoren $O_{3,4}^Q$** mit $Q = d, s, b, c$ tragen nur in Pinguin-Diagrammen bei. Diese Beiträge werden analog zu (2.29) parametrisiert. Unter Vernachlässigung der Masse der leichten Quarks u, d, s wird dabei $r_{P_u} = r_{P_d} = r_{P_s} \equiv r_{P_q}$ gesetzt. Zu Beachten ist, dass die bisher verwendeten Fierz-Transformationen in $D \neq 4$ Dimensionen einen zusätzlichen Term der Ordnung $O(D - 4)$ enthalten, sodass sich die Beiträge der Pinguin-Diagramme um eine Konstante unterscheiden: Die Parameter \bar{r}_{P_q} bezeichnen dann die zu r_{P_q} analogen Parameter für die Operatoren $O_{3,4}$ statt $O_{1,2}$.

Die **Pinguin-Operatoren O_5 und O_6** liefern eine Reihe neuer Beiträge. Der Operator O_6^u lässt sich nach Fierz-Transformation als $O_6^u = -2(\bar{d}(1 + \gamma_5)u)(\bar{u}(1 - \gamma_5)b)$ schreiben,

sodass die beiden Ströme den beiden Teilprozessen in naiver Faktorisierung entsprechen. Das so faktorisierte Matrixelement erhält erhält im Vergleich zu dem der Strom-Strom-Operatoren einen Vorfaktor $\frac{\mu_\pi}{m_b}$. Dieser kommt aus den QCD Bewegungsgleichungen, wenn man die faktorisierten Matrixelemente der (Pseudo-)Skalaren Ströme auf die der (Axial-)Vektorströme zurückführt. Der Operator O_5^u wird mit Fierz-Transformationen wieder auf O_6^u und den zugehörigen Farboktett-Operator \tilde{O}_6^u zurückgeführt, dessen Matrixelement die Ein-Gluon-Korrekturen enthält und durch

$$r_E^6 = \frac{\langle \pi^+ \pi^- | \tilde{O}_6^u | \bar{B}^0 \rangle_E}{\langle \pi^+ \pi^- | O_1^u | \bar{B}^0 \rangle_E}.$$

parametrisiert wird.

Bei den Pinguin-Diagrammen mit $O_{5,6}^q$ ist wieder die Schreibweise $(\bar{d}b)_{V-A}(\bar{q}q)_{V+A}$ relevant. Hier trägt aber von dem zweiten Strom nur der Vektor-Anteil bei, sodass die Pinguin-diagramme von $O_{5,6}$ identisch mit denen von $O_{3,4}$ sind.

In den Annihilations-Diagrammen trägt nur die Flavour-Kombination $O_{5,6}^d$ bei. Diese Operatoren enthalten zwei \bar{d} -Felder, sodass jeweils zwei Kontraktionen möglich sind. In der $S \pm P$ -Kontraktion wird der Operator als $O_6^d = -2(\bar{d}(1 + \gamma_5)d)(\bar{d}(1 - \gamma_5)b)$ geschrieben, wobei der rechte Strom das \bar{B}^0 annihiliert und der linke Strom das $\pi^+ \pi^-$ -Paar erzeugt. Hier gibt es einen faktorisierbaren Annihilations-Beitrag,

$$R_A^6 = \frac{\langle \pi^+ \pi^- | O_6^d | \bar{B}^0 \rangle_A}{\langle \pi^+ \pi^- | O_1^u | \bar{B}^0 \rangle_E}$$

$$\langle \pi^+ \pi^- | O_6^d | \bar{B}^0 \rangle_A = -2 \langle \pi^+ \pi^- | (\bar{d}d)_{S+P} | 0 \rangle \langle 0 | (\bar{d}b)_{S-P} | \bar{B}^0 \rangle.$$

Die Ein-Gluon-Korrekturen dazu sind wie üblich durch das Matrixelement des zugehörigen Farboktettstroms

$$r_A^6 = \frac{\langle \pi^+ \pi^- | \tilde{O}_6^d | \bar{B}^0 \rangle_A}{\langle \pi^+ \pi^- | O_1^u | \bar{B}^0 \rangle_E} \quad (2.30)$$

gegeben. Dabei ist $\tilde{O}_6^d = -2(\bar{d}(1 + \gamma_5)t^a d)(\bar{d}(1 - \gamma_5)t^a b)$ wieder ein Teil des Fierz-Transformierten Operators O_5^d .

In der $V + A$ -Kontraktion, für die man den Operator als $O_5^d = (\bar{d}d)_{V+A}(\bar{d}b)_{V-A}$ schreibt, gibt es dagegen nur einen nichtfaktorisierbaren Annihilationsbeitrag, der Analog zu (2.30) mit $6 \rightarrow 5$ definiert ist.

Schließlich bleibt noch der **Gluonische Pinguin**

$$r_{8g} = \frac{\langle \pi^+ \pi^- | O_{8g} | \bar{B}^0 \rangle_{P_g}}{\langle \pi^+ \pi^- | O_1^u | \bar{B}^0 \rangle_E}.$$

Im NDR-Schema ist der Koeffizient $c_{8g}^{\text{eff}} = c_{8g} - c_5$ (siehe z.B. [25]).

In der **Summe** ist damit

$$\begin{aligned}
 A_0^{(\geq 3)} = & \left[c_4 + \frac{c_3}{3} + 2c_3(r_E + r_{P_q} + r_{P_b} + r_A) + 2c_4(3\bar{r}_{P_q} + \bar{r}_{P_c} + \bar{r}_{P_b} + 2r_A) \right. \\
 & + \frac{2\mu_\pi}{m_b} \left(c_6 + \frac{c_5}{3} \right) + 2c_5 r_E^{(\pi\pi,6)} + 2c_6 \left(3\bar{r}_{P_q} + \bar{r}_{P_c} + \bar{r}_{P_b} + 2r_A^{(\pi\pi,5)} \right) \\
 & \left. + \left(c_6 + \frac{c_5}{3} \right) R_A^6 + 2c_5 r_A^6 + c_{8g}^{eff} r_{8g} \right] \mathcal{A}_{\pi\pi}. \quad (2.31)
 \end{aligned}$$

Ein Vergleich der hier eingeführten Schreibweisen mit den Parametern, wie sie in QCD Faktorisierung eingeführt wurden, findet sich in Anhang A.

2.2.6 Zerlegung nach *CKM*-Phasen

Anstatt die Amplituden theoretisch zu bestimmen, kann man auch versuchen, sie aus den Messdaten zu extrahieren. Dazu hat sich die Parametrisierung durch „Tree“, „Colour-Suppressed Tree“ und „Penguin“-Amplituden durchgesetzt, wobei die Abhängigkeit von der *CKM*-Phase γ explizit herausgestellt wird:

$$\mathcal{A}(\bar{B}^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-) = e^{-i\gamma} T + P, \quad \sqrt{2}\mathcal{A}(B^- \rightarrow \pi^- \pi^0) = e^{-i\gamma} (T + C).$$

Der Vergleich mit der im vorigen Abschnitt eingeführten Schreibweise liefert

$$\begin{aligned}
 T &= |\lambda_u| \left(A_2^{(u,1,2)} + A_0^{(u,1,2)} + A_0^{(\geq 3)} \right) \\
 P &= \lambda_c \left(A_0^{(c,1,2)} + A_0^{(\geq 3)} \right) \\
 C &= |\lambda_u| \left(2A_2^{(u,1,2)} - A_0^{(u,1,2)} - A_0^{(\geq 3)} \right), \quad (2.32)
 \end{aligned}$$

und es ist offensichtlich dass z.B. T und C auch Beiträge von Penguin-Operatoren und -Diagrammen enthalten. Eine übliche Schreibweise für die Zerlegung von T, C und P in eigentliche Diagramme ist

$$\begin{aligned}
 T &= |\lambda_u| [\mathcal{T} - (\mathcal{P}_{t,u} - \mathcal{E})] \\
 C &= |\lambda_u| [\mathcal{C} + (\mathcal{P}_{t,u} - \mathcal{E})] \\
 P &= \lambda_c \mathcal{P}_{t,c}
 \end{aligned}$$

und \mathcal{T}, \mathcal{C} entsprechen dabei den Emissions-, \mathcal{E} den Annihilations (Exchange) und \mathcal{P}_Q den Penguin-Diagrammen mit internem Q -Quark. Historisch gesehen wurden zuerst diese Parameter verwendet und dabei $\mathcal{P}_{t,u}$ und \mathcal{E} , die sich in der Summe $T+C$ aufheben, vernachlässigt. Da diese Zerlegung im Gegensatz zu den Definitionen (2.32) aber nicht renormierungsinvariant ist, wird sie in aktueller Literatur inzwischen nicht mehr verwendet.

Mit der Zerlegung in T, C und P enthält das Problem drei komplexe Parameter und eine CKM -Phase, wobei jedoch eine globale Phase unphysikalisch ist. Es bleiben sechs reelle Parameter. Als Messdaten stehen dem die drei Branching-Ratios und je zwei direkte und Mischung induzierte CP -Asymmetrien gegenüber (die CP -Asymmetrie in $B^- \rightarrow \pi^- \pi^0$ verschwindet, siehe oben). In [29] wurden zum Beispiel zwei Verhältnisse von Branching Ratios und die direkte und Mischung induzierte CP -Asymmetrie in $\bar{B}^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$ verwendet, um die hadronischen Parameter $\frac{C}{T}$ und $\frac{P}{T}$ zu bestimmen, wobei für den CKM -Winkel γ der davon unabhängig bestimmte weltweite Mittelwert eingesetzt wurde. Die Ergebnisse dieses Fits werden am Ende mit den Vorhersagen der Lichtkegel-Summenregeln verglichen.

2.2.7 CP -Asymmetrien

Damit ist klar, dass auch die CP -Asymmetrien der Zerfälle wichtige Observable sind. In diesem Abschnitt werden kurz am Beispiel $B^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$ die nötigen Formeln zur Berechnung der Asymmetrien aus den Amplitudenparametern gegeben.

Die CP -Asymmetrie wird durch die schwache CKM -Phase generiert. Bei CP -Konjugation ändern sich die hadronischen Matrixelemente nicht, wogegen die schwache Phase das Vorzeichen ändert:

$$\mathcal{A}(\bar{B}^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-) = e^{-i\gamma} T + P \quad (2.33)$$

$$\mathcal{A}(B^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-) = e^{+i\gamma} T + P \quad (2.34)$$

Da die insgesamte Phase der Amplitude physikalisch keine Rolle spielt, kann man schlussfolgern, dass das Auftreten einer relativen starken Phase zwischen T und P Voraussetzung für das Auftreten einer CP -Asymmetrie ist.

Direkte CP -Asymmetrie

Die direkte CP -Asymmetrie ist der Unterschied der Zerfallsbreiten zwischen B - und \bar{B}^0 -Zerfall und definiert als

$$a_{\text{dir}}^{CP} = \frac{\Gamma(B^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-) - \Gamma(\bar{B}^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-)}{\Gamma(B^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-) + \Gamma(\bar{B}^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-)}.$$

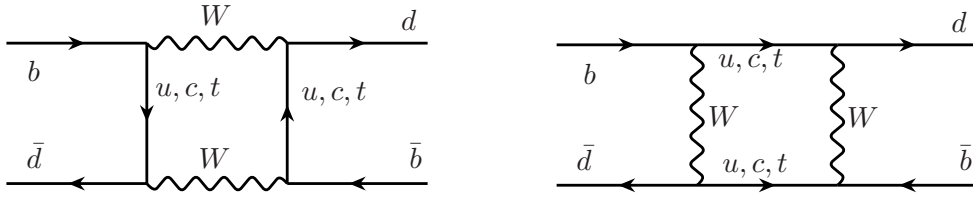
Mit der Definition

$$\xi' = \frac{\mathcal{A}(\bar{B}^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-)}{\mathcal{A}(B^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-)} = e^{-2i\gamma} \frac{1 + \frac{P}{T} e^{i\gamma}}{1 + \frac{P}{T} e^{-i\gamma}}$$

ist

$$a_{\text{dir}}^{CP} = \frac{1 - |\xi'|^2}{1 + |\xi'|^2}.$$

Relevant sind also Betrag und Phase des Verhältnisses P/T , das aus den Definitionen (2.32) entnommen werden kann.


 Abbildung 2.9: Diagramme zur $B^0 - \bar{B}^0$ -Mischung

Mischungsinduzierte CP -Asymmetrie

Die Größe a_{dir}^{CP} kann nicht direkt beobachtet werden, da B^0 und \bar{B}^0 miteinander mischen, sprich oszillieren. Über die Feynman-Diagramme in Abbildung 2.9 kann sich ein \bar{B}^0 in ein B^0 verwandeln und umgekehrt, und von den Kopplungen zwischen Quarks und W kann die schwache Phase des Prozesses zu $\arg(V_{tb}^* V_{td})^2 = 2\beta$ abgelesen werden.

Durch die Mischung sind die Masseneigenzustände nicht identisch mit $|B^0\rangle$ und $|\bar{B}^0\rangle$, sondern Linearkombinationen

$$|B_L\rangle = p|B^0\rangle + q|\bar{B}^0\rangle, \quad |B_H\rangle = p|B^0\rangle - q|\bar{B}^0\rangle$$

mit $q/p = e^{-2i\beta}$.

Wenn der Zustand zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ ein reines $|B^0\rangle$ war, wird er zu einem späteren Zeitpunkt also eine Überlagerung sein,

$$|B(t)\rangle = a(t)|B^0\rangle + b(t)|\bar{B}^0\rangle,$$

und für die Koeffizienten $a(t)$ und $b(t)$ sei hier nur das Ergebnis gegeben, das man aus der Diagonalisierung der Massen- und Übergangsmatrix erhält:

$$a(t) = \frac{1}{2} e^{-\frac{\Gamma}{2}t} e^{-i\bar{M}t} \cdot 2 \cos\left(\frac{\Delta M}{2}t\right)$$

$$b(t) = \frac{1}{2} \frac{p}{q} e^{-\frac{\Gamma}{2}t} e^{-i\bar{M}t} \cdot 2 \sin\left(\frac{\Delta M}{2}t\right),$$

wobei $\bar{M} = 1/2(M_H + M_L)$ und $\Delta M = M_H - M_L$ Mittelwert und Differenz der Masseneigenwerte sind. Für den Fall, dass der Zustand zum Zeitpunkt t_0 ein reines $|\bar{B}^0\rangle$ war, erhält man eine ähnliche Zeitentwicklung.

Die Amplitude für den Prozess, bei dem zum Zeitpunkt t_0 ein $|B^0\rangle$ erzeugt wurde, das dann zum Zeitpunkt t zerfällt, ist damit

$$\mathcal{A}(B^0(t) \rightarrow \pi^+\pi^-) = a(t)\mathcal{A}(B^0 \rightarrow \pi^+\pi^-) + b(t)\mathcal{A}(\bar{B}^0 \rightarrow \pi^+\pi^-).$$

Setzt man nun alle Informationen zusammen, erhält man schließlich den Ausdruck für die zeitabhängige CP -Asymmetrie:

$$\begin{aligned}
 a^{CP}(t) &= \frac{\Gamma(B^0(t) \rightarrow \pi^+\pi^-) - \Gamma(\overline{B}^0(t) \rightarrow \pi^+\pi^-)}{\Gamma(B^0(t) \rightarrow \pi^+\pi^-) + \Gamma(\overline{B}^0(t) \rightarrow \pi^+\pi^-)} \\
 &= a_{\text{dir}}^{CP} \cos\left(\frac{\Delta M}{2}t\right) + a_{\text{mix}}^{CP} \sin\left(\frac{\Delta M}{2}t\right),
 \end{aligned}$$

wobei a_{dir}^{CP} die bereits bekannte direkte CP -Asymmetrie und

$$a_{\text{mix}}^{CP} = \frac{2\text{Im}\xi}{1 + |\xi|^2 \sin(\Delta Mt)}$$

mit

$$\xi = \frac{q}{p} \xi' = e^{-2i(\beta+\gamma)} \frac{1 + \frac{P}{T}e^{i\gamma}}{1 + \frac{P}{T}e^{-i\gamma}}$$

ist.

Benutzt man die Unitarität der CKM -Matrix und ersetzt $\beta + \gamma = \pi - \alpha$ so sieht man, dass hier der Winkel α die Hauptrolle spielt. Daher ist dieser Zerfallskanal einer der Hauptkandidaten für eine unabhängige Bestimmung von α .

Die *Messung* der zeitabhängigen CP -Asymmetrie geschieht in der Regel wie folgt: In einem $\Upsilon(4S)$ -Zerfall wird ein $B^0 - \overline{B}^0$ -Paar in einem verschränkten Zustand erzeugt. Das heißt: Zerfällt das erste B und aus den Zerfallsprodukten lässt sich eindeutig rekonstruieren, dass es ein B^0 war, so wird das andere zu diesem Zeitpunkt auf ein \overline{B}^0 festgelegt. Zu einem späteren Zeitpunkt wird auch dieses zerfallen, mit etwas Glück in ein $\pi^+\pi^-$ -Paar. Im Detektor kann der räumliche Abstand der beiden Zerfallsprozesse und damit auch der Zeitunterschied bestimmt werden. War der Zeitunterschied t und das erste zerfallene B war ein \overline{B}^0 , dann geht der Zerfall auf das Konto $\Gamma(B^0(t) \rightarrow \pi^+\pi^-)$, wurde das erste Meson als B^0 identifiziert, geht er auf das Konto $\Gamma(\overline{B}^0(t) \rightarrow \pi^+\pi^-)$.

Kapitel 3

$B \rightarrow \pi\pi$ in Lichtkegel-Summenregeln

Im vorigen Kapitel wurde gezeigt, wie sich die Zerfallsamplituden für die Zerfälle $B \rightarrow \pi\pi$ in Matrixelemente von lokalen Operatoren zerlegen lassen, und die Matrixelemente wurden weiter nach beitragenden Diagrammen aufgeteilt. Die Berechnung der Matrixelemente an sich ist ungleich schwieriger, denn die hadronischen Zustände lassen sich anders als der elektroschwache Zerfallsprozess selbst mit reiner Störungstheorie nicht beschreiben. Mehrere Ansätze sind entwickelt worden, um das Problem zu lösen; die in Abschnitt 2.2.3 kurz dargestellt QCD Faktorisierung ist nur eine davon. Diese Methode wird wegen ihrer Vorreiterrolle und häufigen Zitierung in dieser Arbeit immer wieder als Referenz verwendet. Während dabei alle Hadronen über Lichtkegel-Verteilungsfunktionen dargestellt werden, geschieht die Beschreibung in Lichtkegel-Summenregeln über interpolierende Quark-Ströme und Quark-Hadron-Dualität, wie im nächsten Abschnitt gezeigt wird. Damit können einige Beiträge berechnet werden, die in QCD Faktorisierung nicht zugänglich sind.

Allen diesen Methoden ist gemeinsam, dass man in führender Ordnung einer Reihenentwicklung in $1/m_b$ und der Kopplung α_S das Resultat der naiven Faktorisierung erhält. Inhalt dieses Kapitels ist folgerichtig die Berechnung der Korrekturterme dazu, die „nicht-faktorisierbare“ Beiträge genannt werden, da sie den Austausch von Gluonen zwischen den beiden Teilprozessen, in die die naive Faktorisierung das Problem zerlegt, beinhalten.

Die Methode der Lichtkegel-Summenregeln [30] wurde in [31] erstmals für die $B \rightarrow \pi\pi$ -Zerfälle adaptiert. Sie basiert auf der Berechnung einer speziellen Korrelationsfunktion, wobei sowohl kurzreichweitige Wechselwirkungen wie in der Störungstheorie als auch der Austausch weicher Gluonen eingeschlossen werden. Insbesondere der zweite Teil ist in Methoden, die auf reine Störungstheorie setzen (wie QCD Faktorisierung) nicht eingeschlossen. Er ist formal mit $\frac{\Lambda_{QCD}}{m_b}$ unterdrückt, aber nicht proportional zur starken Kopplungskonstante.

In [31] wurden in der Klasse der Emissions-Diagramme der faktorisierte und der weiche Gluon-Beitrag berechnet. Später [32, 33] wurden in derselben Methode auch Pinguin-Diagramme berechnet. Sowohl Annihilations-Diagramme als auch α_S -Korrekturen zur Emission konnten mit der gleichen Methode aber bisher nicht berechnet werden. Der Grund ist, dass dafür komplizierte Zwei-Schleifen-Integrale benötigt werden, die mit gegenwärtigen Methoden nicht berechenbar sind. Durch eine in dieser Arbeit erstmals angewendete Modifikation der Methode kann dieses Problem aber umgangen werden. Damit ist eine vollständige und konsistente Berechnung der Zerfallsamplituden mit Lichtkegel-Summen-

regeln möglich. Es können also – zumindest prinzipiell – alle Beiträge berechnet werden, die auch z.B. in QCD Faktorisierung eingeschlossen sind, und darüberhinaus die erwähnten $1/m_b$ -unterdrückten Beiträge. In QCD Faktorisierung sind einige der Beiträge darüberhinaus logarithmisch divergent; anstatt eines berechneten Ergebnisses müssen hier geschätzte neue Parameter eingeführt werden. Wie sich herausstellt, erhält man für einige dieser Beiträge mit Lichtkegel-Summenregeln ein endliches Ergebnis und kann damit auf die Einführung neuer Parameter verzichten.

Die Hoffnung, die hinter dieser Rechnung steht, ist, den im vorigen Kapitel erwähnten fehlenden Beitrag zur Isospin-0-Amplitude zu finden. Die Annihilation ist dabei als reiner Isospin-0-Beitrag ein wichtiger Kandidat und gehört darüberhinaus zu den Beiträgen, für die die QCD Faktorisierung kein endliches Ergebnis liefert. Die Neuberechnung der Emissions-Diagramme mit perturbativem Gluon-Austausch dient dagegen eher dazu, die Gesamtamplitude konsistent mit einer Methode zu beschreiben, anstatt Beiträge aus QCD Faktorisierung und Lichtkegel-Summenregeln zu einem Ergebnis zu addieren.

Im Folgenden wird zunächst die Methode selbst unabhängig von den betrachteten Diagrammen vorgestellt. Anschließend werden die Emissions- und Annihilations-Beiträge getrennt voneinander betrachtet, wobei beide Male ein qualitativer und quantitativer Vergleich mit der QCD Faktorisierung durchgeführt wird.

3.1 Methode

Die Idee der Lichtkegel-Summenregeln ist die folgende: Ein Teil der Hadronen im Anfangs- oder Endzustand wird durch einen Quarkstrom mit gleichem Spin und Flavour-Inhalt sowie variablem, raumartigem Impulsübertrag ersetzt. Dadurch ist sichergestellt, dass die internen Quarklinien hohe Virtualität haben, die Störungstheorie also anwendbar ist. Die analytische Abhängigkeit vom Impulsübertrag wird dann zusammen mit Dispersionsrelationen und Quark-Hadron-Dualität genutzt, um das Resultat für den Fall zu erhalten, dass statt des Quarkstromes ein reelles Hadron beteiligt ist.

3.1.1 Korrelationsfunktion

Die hier vorgestellte Rechnung gilt für das Matrixelement $\langle \pi^+\pi^- | O | \overline{B}^0 \rangle$ eines beliebigen lokalen Operators O . In Abschnitt 2.2.5 ist gezeigt, wie sich die Amplituden der übrigen Isospin-Kombinationen aus diesen Matrixelementen ergeben. Für den Operator O werden später die Vier-Quark-Operatoren O_i^q oder der Gluon-Pinguin-Operator O_{8g} des effektiven Hamiltonoperators (2.13) eingesetzt.

Die Korrelationsfunktion ist definiert als

$$F_\alpha^{(O)}(p, q, k) = - \int d^4x e^{-i(p-q)x} \int d^4y e^{i(p-k)y} \langle 0 | T \left\{ j_{\alpha 5}^{(\pi)}(y) O(0) j_5^{(B)}(x) \right\} | \pi^-(q) \rangle \quad (3.1)$$

(Darstellung in Abbildung 3.1). Sie enthält ein Pion im Anfangszustand, das später mittels analytischer Fortsetzung in den Endzustand wandern wird, sowie die Quarkströme $j_{\alpha 5}^{(\pi)} =$

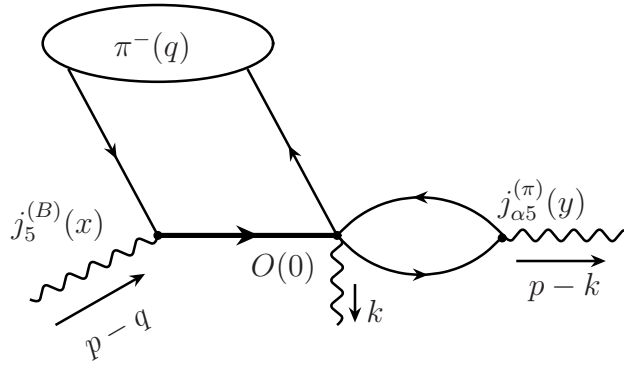


Abbildung 3.1: Korrelationsfunktion (hier das Emissions-Diagramm auf Tree-Level). Die fette Linie zeigt das b -Quark, die gewellten Linien die externen Impulse und das Oval das durch Lichtkegel-Verteilungsfunktionen beschriebene Pion.

$\bar{u}\gamma_\alpha\gamma_5d$ und $j_5^{(B)} = m_b\bar{b}i\gamma_5d$, die das zweite Pion sowie das \bar{B}^0 ersetzen. Als erstes wird der von den äußeren Impulsen p , q und k abhängenden Korrelator in Lorentz-Skalare zerlegt:

$$F_\alpha^{(O)} = (p-k)_\alpha F^{(O)} + q_\alpha \tilde{F}_1^{(O)} + k_\alpha \tilde{F}_2^{(O)} + \epsilon_{\alpha\beta\gamma\rho} q^\beta p^\lambda k^\rho \tilde{F}_3^{(O)}.$$

Nur der erste Term ist von Interesse.

Anschließend wird die Kinematik bestimmt: $q^2 = m_\pi^2 = 0$ ist als einzige Variable festgelegt. Zur Vereinfachung werden auch $p^2 = k^2 = 0$ gesetzt. Übrig sind noch die Variablen $(p-k)^2$ als Impulsübertrag am Pion-Strom, $(p-q)^2$ als derjenige am B -Strom und schließlich $P^2 = (p-k-q)^2$. Diese drei werden weiterhin frei gelassen, aber als negativ (raumartig) und groß gewählt. Die Unabhängigkeit der drei Variablen ist unbedingte Voraussetzung für die Lichtkegel-Summenregeln und auch der Grund, warum der Impuls k eingeführt werden musste, der durch den Vertex O fließt und zunächst unphysikalisch ist. Er wird im Laufe der Rechnung automatisch verschwinden. Die skalare Funktion $F^{(O)}$ ist also eine Funktion dieser drei Variablen:

$$F^{(O)} = F^{(O)}((p-k)^2, (p-q)^2, P^2).$$

Mit der Wahl der Kinematik werden zwei Ziele erreicht: Zum einen sind alle internen Quarklinien hochvirtuell, damit kann die Störungstheorie angewendet werden. Zum anderen kommen die relevanten Beiträge in (3.1) von der Region, in der $x^2 \sim y^2 \sim (x-y)^2 \sim 0$ ist. Dies sind die einzigen Regionen, in denen die Exponentialfunktion nicht so schnell oszilliert, dass sich der Integrand zu Null mittelt [30] (siehe auch [7]).

3.1.2 Twist-Entwicklung

Mit der gewählten Kinematik können die Quarkfelder des Korrelators also unter Anwendung des Wick-Theorems kontrahiert werden. In führender Ordnung der Störungstheorie, also ohne Einsetzung von Wechselwirkungstermen, ist nur eine Kontraktion möglich, nämlich die

des Emissions-Diagrammes Abb. 3.1, und nur der Operator O_1^u trägt bei¹:

$$\begin{aligned}
 F_\alpha^{(O_1^u), Tree}(p, q, k) &= - \int d^4x e^{-i(p-q)x} \int d^4y e^{i(p-k)y} \\
 &\quad \langle 0 | T \left\{ \underbrace{\bar{u}(y) \gamma_\alpha \gamma_5 d(y), \bar{u}(0) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) b(0) \bar{d}(0) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) u(0), m_b \bar{b}(x) i \gamma_5 d(x)} \right\} | \pi^-(q) \rangle \\
 &= \int d^4x d^4y \frac{d^4l_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4l_2}{(2\pi)^4} \frac{d^4l_3}{(2\pi)^4} \exp \left[-i((p-q-l_3)x + (-(p-k) - l_1 + l_2)y) \right] \\
 &\quad \cdot \text{Tr} \left[\frac{i \not{l}_1}{l_1^2} \gamma_\alpha \gamma_5 \frac{i \not{l}_2}{l_2^2} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \right] \langle 0 | : \bar{u}(0) \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \frac{i(m_b + \not{l}_3)}{l_3^2 - m_b^2} m_b i \gamma_5 d(x) : | \pi^-(q) \rangle + \dots \quad (3.2)
 \end{aligned}$$

Übrig bleibt ein Matrixelement eines normalgeordneten Produktes von zwei Quarkfeldern. Die Punkte stehen für Terme mit normalgeordneten Produkten von mehr als zwei Quarkfeldern, wie sie sich aus dem Wick-Theorem ergeben. Am Ende des Abschnitts wird klar, warum diese stark unterdrückt sind.

Da der Anfangszustand nicht das Vakuum ist, sondern ein Pion enthält, verschwinden die normalgeordneten Produkte nicht. Allerdings haben die Quarkfelder lichtartige Abstände, was man sich bei der *Twist*-Entwicklung zu Nutze macht. Dazu wird das Matrixelement der verbleibenden Quarkfelder zunächst in ihrem Abstand x entwickelt²:

$$\langle \pi(p) | : \bar{d}(0) \Gamma u(x) : | 0 \rangle = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} x^{\alpha_1} \dots x^{\alpha_r} \langle \pi(p) | : \bar{d}(0) \Gamma \vec{D}_{\alpha_1} \dots \vec{D}_{\alpha_r} u(0) : | 0 \rangle. \quad (3.3)$$

Dabei ist zu beachten, dass die Reihenentwicklung nicht abgebrochen werden kann, da die einzelnen Komponenten von x nicht klein sind. Um eine Entwicklung in der kleinen Variable x^2 zu erhalten, werden die Terme auf der rechten Seite nach Lorentz-Strukturen sortiert, wobei der einzige zur Verfügung stehende Vektor der Pion-Impuls p ist:

$$\begin{aligned}
 \langle \pi(p) | : \bar{d}(0) \Gamma \vec{D}_{\alpha_1} \dots \vec{D}_{\alpha_r} u(0) : | 0 \rangle &= (-1)^r p_{\alpha_1} \dots p_{\alpha_r} M_r^{(0)} \\
 &\quad + (-1)^r g_{\alpha_1 \alpha_2} p_{\alpha_3} \dots p_{\alpha_r} M_r^{(1)} + \dots \quad (3.4)
 \end{aligned}$$

Terme mit dem metrischen Tensor $g_{\alpha_1 \alpha_2}$ sind nach Einsetzen in (3.3) proportional zu x^2 . Grob gesagt wird also eine Entwicklung in der „Anzahl der $g_{\alpha_1 \alpha_2}$ -Terme“ gemacht, die definiert ist durch den

$$\textit{Twist} = \textit{Dimension} - \textit{Spin}$$

¹Eine zweite mögliche Kontraktion auf Tree-Level ist ein Annihilations-Diagramm, das aber wegen Stromerhaltung verschwindet, siehe Abschnitt 3.3

²Um den Operator im Matrixelement eichinvariant zu machen, muss zwischen den Quark-Feldern eine Wilson-Linie geschrieben werden: $\bar{d}(0) \Gamma [0, x] u(x)$. Daher treten in der Entwicklung nicht normale, sondern kovariante Ableitungen auf. Die Wilson-Linie ist aber an dieser Stelle nicht relevant und wird nicht weiter ausgeschrieben, denn sie kann durch eine geeignete Wahl der Eichung (Hintergrund-Eichung) zum Verschwinden gebracht werden. Näheres dazu in Abschnitt 4.1.5 auf Seite 117.

eines in den Lorentz-Indizes symmetrischen und spurlosen Operators. Ein Blick auf den ersten führenden Term in (3.4) zeigt, dass mit $p^2 = 0$ diese Voraussetzung tatsächlich erfüllt ist.

Das Matrixelement in (3.2) kann jetzt in Anteile mit verschiedenem Twist zerlegt werden, wobei die führenden Anteile

$$\begin{aligned} \langle \pi(p) | : \bar{d}(0) \gamma_\mu \gamma_5 u(x) : | 0 \rangle & \quad \text{Twist 2} \\ \langle \pi(p) | : \bar{d}(0) \gamma_5 u(x) : | 0 \rangle & \quad \text{Twist 3} \\ \langle \pi(p) | : \bar{d}(0) \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 u(x) : | 0 \rangle & \quad \text{Twist 3} \end{aligned} \quad (3.5)$$

sind. Genau genommen ist dabei der Twist für den nichtlokalen Operator nicht definiert; gemeint ist vielmehr der Twist des führenden Terms in der oben gezeigten Entwicklung. Jede höhere Ordnung im Twist ist mit dem Faktor $x^2 \Lambda_{QCD}^2$ verbunden. Wie oben beschrieben, ist dieser Parameter in dem Korrelator (3.1) tatsächlich klein, nämlich von der Ordnung Λ_{QCD}^2/m_b^2 .

An dieser Stelle wird auch klar, warum in (3.2) die Beiträge mit mehr als zwei Quarkfeldern unterdrückt sind: Die zusammengesetzten Operatoren haben höhere Dimension und damit höheren Twist.

Lichtkegel-Verteilungsfunktionen

Die Matrixelemente (3.5) werden durch skalare *Lichtkegel-Verteilungsfunktionen* parametrisiert (weiter unter der Voraussetzung, dass x auf dem Lichtkegel liegt, also x^2 klein ist). Dabei wird die Lorentz- und Translationsinvarianz benutzt; eine Normierung erhält man weiter aus der Betrachtung des Grenzfalles $x = 0$, in dem sich die Matrixelemente durch die Pion-Zerfallskonstante f_π schreiben lassen. Die oben genannten Zweiteilchen-Matrixelemente sind dann in Twist ≤ 3 :

$$\begin{aligned} \langle \pi(p) | : \bar{d}(0) \gamma_\mu \gamma_5 u(x) : | 0 \rangle & = i p_\mu f_\pi \int_0^1 du e^{-i u p x} \varphi_\pi(u) \\ \langle \pi(p) | : \bar{d}(0) \gamma_5 u(x) : | 0 \rangle & = -i f_\pi \mu_\pi \int_0^1 du e^{-i u p x} \varphi_{\pi P}(u) \\ \langle \pi(p) | : \bar{d}(0) \sigma_{\mu\nu} \gamma_5 u(x) : | 0 \rangle & = \frac{i f_\pi \mu_\pi}{6} (p_\mu x_\nu - p_\nu x_\mu) \int_0^1 du e^{-i u p x} \varphi_{\pi\sigma}(u) \\ & \quad (\mu_\pi = m_\pi^2 / (m_u + m_d)) \end{aligned} \quad (3.6)$$

(eine gute Übersicht über die Verteilungsfunktionen findet sich in [34, 35]).

Die führende Lichtkegel-Verteilungsfunktion φ_π (Twist 2) wird üblicherweise in Gegenbauer-Momente zerlegt [36]:

$$\varphi_\pi(u) = 6u(1-u) \left(1 + \sum_{n=2,4,\dots} a_n^\pi C_n^{3/2}(2u-1) \right). \quad (3.7)$$

Die Gegenbauer-Polynome $C_n^{3/2}$ sind orthonormiert, wenn sie mit der Gewichtsfunktion $6u(1-u)$ integriert werden, sodass die Zerlegung eindeutig ist. Wegen der Isospin-Symmetrie muss φ_π symmetrisch unter $u \leftrightarrow 1-u$ sein, sodass grundsätzlich nur die geraden Gegenbauer-Polynome auftreten.

Die Verteilungsfunktion ist nicht renormierungsinvariant, sondern hängt vom Renormierungsschema (hier weiter \overline{MS}) und der Renormierungsskala μ ab. Diese μ -Abhängigkeit ist genau genommen ein Überbleibsel der Lichtkegel-Entwicklung: $\mu^2 \sim 1/x^2$ ist eine Skala für den Abstand der Quarks. Damit hängen auch die *Gegenbauer-Momente* a_n^π von μ ab. Die Zerlegung wurde aber so gewählt, dass sie multiplikativ renormieren. Ihre anomale Dimension wächst dabei stark mit n an, sodass höhere Momente klein werden, wenn die Renormierungsskala groß genug gewählt ist. Außerdem oszillieren die höheren Gegenbauer-Polynome immer schneller um den Mittelwert 0, sodass sie sich ausmitteln, wenn sie mit einer hinreichend weichen Gewichtsfunktion integriert werden. Bei $\mu \sim m_b$ ist es daher ausreichend, die Momente a_2^π und a_4^π zu berücksichtigen und die anderen zu Null zu setzen.

Eine detailliertere Abhandlung über die Berechnung und Renormierung der Twist-2 Verteilungsfunktion wird in Kapitel 4.1 gegeben.

3.1.3 Summenregel

Mittels Störungstheorie und Twist-Entwicklung erhält man also ein Resultat für die Korrelationsfunktion, das eine Konvolution eines harten Kerns und mit Lichtkegel-Verteilungsfunktionen, die die „weiche“ Physik beschreiben, ist. Den Tree-Level-Beitrag in Twist 2 erhält man durch direktes Einsetzen von (3.6) in (3.2):

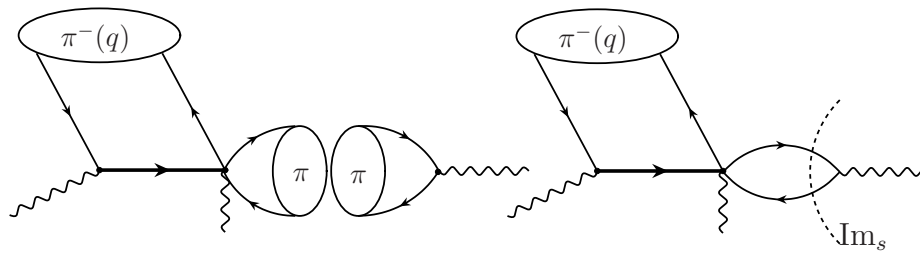
$$\begin{aligned} F^{(O_1^u), Tree, Tw2}((p-k)^2, (p-q)^2, P^2) \\ = -\frac{m_b^2 f_\pi}{4\pi^2} \frac{1}{2} ((p-k)^2 - P^2) \log\left(\frac{-(p-k)^2}{\mu^2}\right) \int_0^1 du \frac{\varphi_\pi(u)}{m_b^2 - (1-u)(p-q)^2}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Hadronische Darstellung

Die gleiche Korrelationsfunktion kann auch durch hadronische Matrixelemente ausgedrückt werden, indem ein kompletter Satz hadronischer Zwischenzustände, also eine

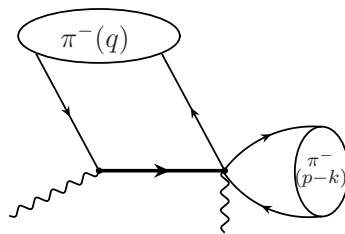
$$\mathbb{1} = \int_0^\infty ds \sum_h \delta(s - m_h^2) \int d^4p \delta(p^2 - m_h^2) \Theta(p^0) |h(p)\rangle \langle h(p)|$$

eingefügt wird. Die s -Integration wurde dabei eingeführt, um die Zustände nach invarianten Massen zu sortieren. Der leichteste Zustand, der in der Korrelationsfunktion beiträgt, ist der Ein-Pion-Zustand. Mit höheren Massen tragen andere Pseudoskalar- und Axialvektormesonen mit gleichem Flavour-Inhalt bei, zudem gibt es ein Kontinuum von Mehrteilchenzuständen. Der Beitrag des Pions kann separat geschrieben werden, sodass die s -Integration

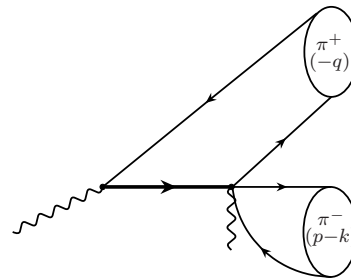


(a) Hadronische Darstellung im π -Kanal (Grundzustandsbeitrag)

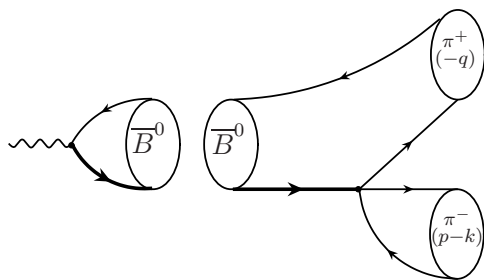
(b) Dispersionsrelation in der Variablen $s = (p - k)^2$: Schnitt durch das Diagramm im π -Kanal



(c) $\Pi_{\pi\pi}^{(O)}$ vor der analytischen Fortsetzung: $P^2 < 0$



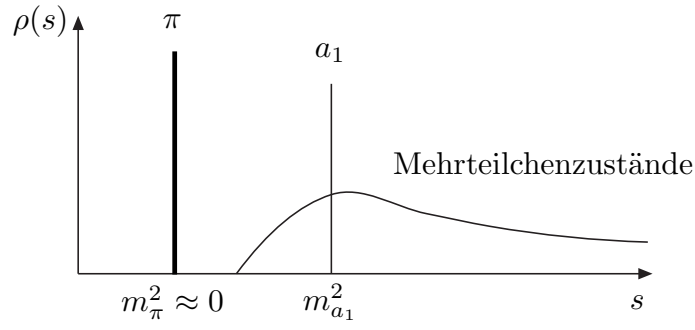
(d) $\Pi_{\pi\pi}^{(O)}$ nach der analytischen Fortsetzung in $P^2 \rightarrow m_B^2$



(e) Hadronische Darstellung im B -Kanal (Grundzustandsbeitrag)

(f) Dispersionsrelation in der Variable $s' = (p - q)^2$: Schnitt durch das Diagramm im B -Kanal

Abbildung 3.2: Die Einzelnen Schritte der Summenregel-Herleitung exemplarisch für das Emissionsdiagramm


Abbildung 3.3: Spektraldichte: Ein- und Mehrteilchen-Zustände

bei der Masse s_h^π des ersten schwereren Zustandes beginnt:

$$\begin{aligned} \mathbb{1} &= \int d^4p \delta(p^2) \Theta(p^0) |\pi^-(p)\rangle \langle \pi^-(p)| + \text{h.k.} \\ &+ \int_{s_h^\pi}^{\infty} ds \sum_h \delta(s - m_h^2) \int d^4p \delta(p^2 - m_h^2) \Theta(p^0) |h(p)\rangle \langle h(p)|. \end{aligned}$$

Dieser Schritt ist in Abbildung 3.2a dargestellt. Eingesetzt in den Korrelator (3.1) erhält man damit:

$$F^{(O),had}((p-k)^2, (p-q)^2, P^2) = \frac{i f_\pi \Pi_{\pi\pi}^{(O,T)}((p-q)^2, P^2)}{-(p-k)^2} + \int_{s_h^\pi}^{\infty} ds \frac{\rho_h^\pi(s, (p-q)^2, P^2)}{s - (p-k)^2}, \quad (3.9)$$

mit dem Pion-nach-Pion-Matrixelement

$$\Pi_{\pi\pi}^{(O)}((p-q)^2, P^2) = i \int d^4x e^{-i(p-q)x} \langle \pi^-(p-k) | T \left\{ O(0) j_5^{(B)}(x) \right\} | \pi^-(q) \rangle. \quad (3.10)$$

Die hadronische Zustandsdichte ρ_h^π enthält jetzt die Matrixelemente mit Zuständen $|h\rangle\langle h|$ höherer invarianter Masse m_h . Die schwereren Einteilchen-Zustände enthält sie in Form von Deltafunktionen in s , während das Kontinuum der Mehrteilchenzustände als eine stetige Kurve überlagert ist (siehe Abb. 3.3). Die Gesamtheit der Zustände mit $s \geq s_h^\pi$ wird im Folgenden als „angeregte Zustände“ bezeichnet.

Dispersionsintegral

Die so dargestellte Korrelationsfunktion hat die Form eines Dispersionsintegrals, und auch die in QCD berechnete Funktion F^{QCD} lässt sich auf so eine Form bringen. Dazu wird die Funktion in der Variablen $(p-k)^2$, die bisher reell und negativ war, analytisch fortgesetzt, und zwar so, dass die resultierende komplexe Funktion einen Schnitt auf der positiven reellen s -Achse hat (siehe Anhang B.1). Mit dem Cauchy-Integralsatz ist dann

$$F^{(O)}((p-k)^2, (p-q)^2, P^2) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C ds \frac{F^{(O)}(s, (p-q)^2, P^2)}{s - (p-k)^2},$$

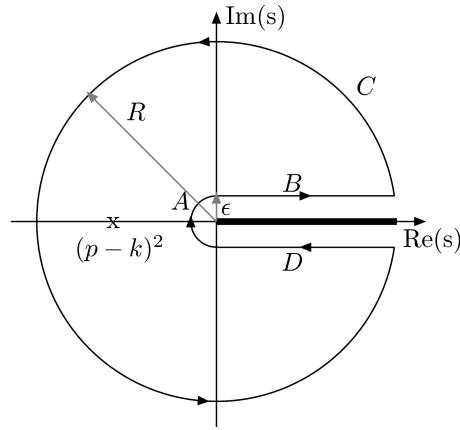


Abbildung 3.4: Integrationsweg in der komplexen Ebene für die Dispersionsrelation

wenn C ein geschlossener Pfad im mathematisch positivem Sinne ist, der $(p-k)^2$ einschließt. Dafür wird der in Abbildung 3.4 gezeigte Weg eingesetzt. Im Limes $\epsilon \rightarrow 0$ verschwindet der Abschnitt A und wegen $\lim_{s \rightarrow \infty} F^{(O)}(s, (p-q)^2, P^2) = 0$ auch der Abschnitt C, sodass

$$F^{(O)}((p-k)^2, (p-q)^2, P^2) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} ds \frac{\text{Im}_s F_{QCD}^{(O,T)}(s, (p-q)^2, P^2)}{s - (p-k)^2}.$$

Der „Imaginärteil“ ist dabei definiert als der Schnitt der Funktion in der komplexen Ebene³:

$$\text{Im}_s f(s) \equiv \text{Disc}_s f(s) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2i} (f(s + i\epsilon) - f(s - i\epsilon))$$

Nach dem optischen Theorem entspricht der Imaginärteil einem Schnitt durch das Diagramm, auf dem alle Teilchen on-shell gehen können. Der Schnitt, der Im_s entspricht, ist in Abbildung 3.2b gezeigt.

Quark-Hadron-Dualität

Das so erhaltene Dispersionsintegral wird jetzt mit der hadronischen Darstellung gleichgesetzt (*globale Quark-Hadron-Dualität*):

$$\frac{i f_{\pi} \Pi_{\pi\pi}^{(O,T)}((p-q)^2, P^2)}{-(p-k)^2} + \int_{s_h^{\pi}}^{\infty} ds \frac{\rho_h^{\pi}(s, (p-q)^2, P^2)}{s - (p-k)^2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} ds \frac{\text{Im}_s F^{(O)}(s, (p-q)^2, P^2)}{s - (p-k)^2}. \quad (3.11)$$

³Mit dem Schwarz'schen Reflexionsprinzip (Anhang B.1) lässt sich zeigen, dass der so definierte Imaginärteil identisch mit dem algebraischen Imaginärteil an der Stelle $s + i\epsilon$ ist, wenn die Funktion auf der negativen reellen Achse reell ist. Diese Voraussetzung ist in diesem Fall, aber in dieser Arbeit nicht allgemein erfüllt, weswegen fortan allein die obige Definition für den Imaginärteil verwendet wird.

In dieser Gleichung tritt als weiterhin unbekannte Größe auf der linken Seite das Integral über die angeregten Zustände auf. Es wird über das Dispersionsintegral in dem *Dualitäts-Intervall* $s_0^\pi < s < \infty$ auf der rechten Seite abgeschätzt:

$$\int_{s_h^\pi}^{\infty} ds \frac{\rho_h^\pi(s, (p-q)^2, P^2)}{s - (p-k)^2} \approx \frac{1}{\pi} \int_{s_0^\pi}^{\infty} ds \frac{\text{Im}_s F^{(O)}(s, (p-q)^2, P^2)}{s - (p-k)^2}.$$

Der Parameter s_0^π ist dabei ein effektiver Schwellenwert, der nicht unbedingt mit s_h^π übereinstimmen muss. Diese Gleichsetzung gilt als *semilokale Quark-Hadron-Dualität*, da die Gleichheit zwar nicht für einen bestimmten positiven Wert von s , aber für das Integral über einen gewissen Bereich gefordert wird. Aus der Erfahrung mit dem *R-Verhältnis* in der QCD, $R = \sigma(e^+e^- \rightarrow \text{Hadronen})/\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)$ weiß man, dass diese Näherung gerechtfertigt ist, wenn der Bereich genügend groß ist. So kann jetzt in (3.11) der unbekannt Teil eliminiert werden und

$$\frac{i f_\pi \Pi_{\pi\pi}^{(O)}((p-q)^2, P^2)}{-(p-k)^2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{s_0^\pi} ds \frac{\text{Im}_s F^{(O)}(s, (p-q)^2, P^2)}{s - (p-k)^2}. \quad (3.12)$$

Borel-Transformation

Um das Ergebnis weniger empfindlich auf den nur abgeschätzten Beitrag angeregter Zustände zu machen, wird auf beiden Seiten noch die Borel-Transformation bezüglich der Variablen $(p-k)^2$ angewendet, die definiert ist als

$$\Pi(M^2) \equiv \mathcal{B}_{M^2} \Pi(q^2) = \lim_{\substack{-q^2, n \rightarrow \infty \\ -q^2/n = M^2}} \frac{(-q^2)^{(n+1)}}{n!} \left(\frac{d}{dq^2} \right)^n \Pi(q^2), \quad (3.13)$$

und für die Anwendung auf (3.12) wird nur der Spezialfall

$$\mathcal{B}_{M^2} \left(\frac{1}{m^2 - q^2} \right)^k = \frac{1}{(k-1)!} \frac{e^{-m^2/M^2}}{M^{2(k-1)}} \quad (k > 0)$$

benötigt. Damit wird erreicht, dass der Beitrag angeregter Zustände exponentiell mit der Masse unterdrückt wird. Dies wird durch die Einführung eines neuen Parameters M^2 erkauft. Von diesem neuen Parameter darf das Ergebnis idealerweise nicht mehr abhängen. Dabei ist der mögliche Wertebereich aber eingegrenzt: Wird M^2 zu groß, greift die exponentielle Unterdrückung der angeregten Zustände nicht mehr. Wird M^2 zu klein, bricht die Twist-Entwicklung zusammen. Die Variation des Ergebnisses innerhalb dieses Borel-Fensters wird als theoretische Unsicherheit gewertet. Der Dualitäts-Schwellenwert, der in der Nähe der Masse des ersten angeregten Zustandes liegen muss, wird durch einen Fit so bestimmt, dass die Abhängigkeit von M^2 innerhalb des Borel-Fensters möglichst klein ist. Damit sind die

Parameter s_0^π und M^2 aus der Summenregel selbst bestimmt und keine neuen, externen Parameter.

Setzt man alles Zusammen, erhält man schließlich eine Summenregel für das hadronische Matrixelement $\Pi_{\pi\pi}^{(O)}$:

$$\Pi_{\pi\pi}^{(O)}((p-q)^2, P^2) = \frac{-i}{\pi f_\pi} \int_0^{s_0^\pi} ds e^{-s/M^2} \text{Im}_s F^{(O)}(s, (p-q)^2, P^2), \quad (3.14)$$

$\Pi_{\pi\pi}^{(O)}$ aus Faktorisierung

In einigen Fällen ist die Berechnung des Korrelators $F^{(O)}$ nicht direkt möglich, zum Beispiel wenn dafür Zwei-Schleifen-Diagramme benötigt werden. Sie sind mit vertretbarem Aufwand technisch nicht berechenbar, denn es treten mit $(p-q)^2$, $(p-k)^2$, P^2 und m_b^2 vier unabhängige Skalen auf, die alle die gleiche Größenordnung haben, sodass auch keine Reihenentwicklung möglich ist. In diesen Fällen kann man alternativ auf die Definition (3.10) des Pion-nach-Pion-Matrixelementes $\Pi_{\pi\pi}^{(O)}$ zurückgehen und dort *beide* Pionen durch Lichtkegel-Verteilungsfunktionen beschreiben, also das Diagramm Abb. 3.2c direkt berechnen: Für das T -Produkt wird die Störungstheorie angewendet, sodass am Ende ein normalgeordnetes Produkt von vier Quarkfeldern übrig bleibt, das faktorisiert wird:

$$\begin{aligned} & \langle \pi^-(p-k) | : \bar{d}_a^\alpha(x_1) u_b^\beta(x_2) \bar{u}_c^\gamma(x_3) d_d^\delta(x_4) : | \pi^-(q) \rangle \\ & \approx \langle \pi^-(p-k) | : \bar{d}_a^\alpha(x_1) u_b^\beta(x_2) : | 0 \rangle \cdot \langle 0 | : \bar{u}_c^\gamma(x_3) d_d^\delta(x_4) | \pi^-(q) \rangle \\ & = \left(\frac{i \delta_{ab}}{12} f_\pi [(\not{p}-\not{k})\gamma_5]^{\beta\alpha} \int_0^1 dv e^{i(p-k)\cdot(vx_1+\bar{v}x_2)} \varphi_\pi(v) \right) \\ & \quad \cdot \left(\frac{-i \delta_{cd}}{12} f_\pi [\not{q}\gamma_5]^{\delta\gamma} \int_0^1 du e^{-iq\cdot(ux_4+\bar{u}x_3)} \varphi_\pi(u) \right), \quad (3.15) \end{aligned}$$

wobei α, β, γ und δ Spinor- und a, b, c, d Farbindizes sind, und $\bar{u} = 1-u, \bar{v} = 1-v$. Dabei wurden nach der Faktorisierung nur die Twist-2-Anteile der Matrixelemente berücksichtigt, was der führenden Ordnung in $1/m_b$ entspricht⁴. Durch die Faktorisierung wird der Austausch von weichen Gluonen, die in der Störungsentwicklung des T -Produkts nicht berücksichtigt werden, zwischen den beiden Pionen vernachlässigt. Da die Pionen hochenergetisch und farbneutral sind, sind die Beiträge der weichen Gluonen aber mit Λ_{QCD}/m_b unterdrückt, wie schon bei der QCD Faktorisierung.

⁴In Lichtkegel-Summenregeln wird im Gegensatz zu anderen Methoden keine grundsätzliche Entwicklung in $1/m_b$ durchgeführt. Mit „führender Ordnung in $1/m_b$ “ ist hier lediglich gemeint, dass Beiträge mit höherem Twist durch Faktoren der Größenordnung Λ_{QCD}/m_b unterdrückt sind.

Die Faktorisierung des Korrelators $\Pi_{\pi\pi}^{(O)}$ ist eine Modifizierung der ursprünglichen Methode, die in den in dieser Arbeit vorgestellten Rechnungen erstmalig angewendet wurde. Auch hier ist das Tree-Level-Resultat leicht zu bestimmen. Das emittierte Pion wird dabei an einem Punkt erzeugt, d.h. in (3.15) ist $x_1 = x_2 = 0$, sodass direkt $\int_0^1 dv \varphi_\pi(v) = 1$ gesetzt werden kann und im Ergebnis nur eine Pion-Verteilungsamplitude auftritt:

$$\Pi_{\pi\pi}^{(O_1^u), Tree} = i f_\pi^2 m_b^2 P^2 \int_0^1 du \frac{1}{2} \frac{\varphi_\pi(u)}{m_b^2 - \bar{u} (p-q)^2}. \quad (3.16)$$

Analytische Fortsetzung

Bisher wurde die Variable P^2 negativ (raumartig) und groß gesetzt. Die gesuchte kinematische Konfiguration ist aber $P^2 = m_B^2$. Um diesen Punkt zu erreichen, wird die Funktion $\Pi_{\pi\pi}^{(O)}(s, (p-q)^2, P^2)$ jetzt in der Variablen P^2 analytisch fortgesetzt. Zur Eindeutigkeit muss dabei wieder vorgegeben werden, dass die gesuchte komplexe Funktion einen Schnitt auf der positiven reellen P^2 -Achse haben soll, und der gesuchte Punkt ist dann $P^2 = m_B^2 + i\epsilon$. Diese Eigenschaften erhält man aus der Tatsache, dass man $\Pi_{\pi\pi}^{(O)}$ grundsätzlich auch als Dispersionsintegral über die hadronischen Zwischenzustände schreiben kann:

$$\Pi_{\pi\pi}^{(O)}((p-q)^2, P^2) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dt \frac{\text{Im}_t \Pi_{\pi\pi}^{(O)}((p-q)^2, t)}{t - P^2}.$$

Darin tritt der Schnitt

$$\text{Im}_t \Pi_{\pi\pi}^{(O)}((p-q)^2, t) = \frac{1}{2i} (\Pi_{\pi\pi}^{(O)}((p-q)^2, t + i\epsilon) - \Pi_{\pi\pi}^{(O)}((p-q)^2, t - i\epsilon))$$

auf, der nach dem Schwarz'schen Reflexionsprinzip gleich dem (algebraischen) Imaginärteil an der Stelle $t + i\epsilon$ ist. Außer um die analytischen Eigenschaften in P^2 abzulesen wird diese Relation aber weiter nicht gebraucht.

Nach der analytischen Fortsetzung wandert das Pion vom Anfangs- in den Endzustand (Abb. 3.2d). War $\Pi_{\pi\pi}^{(O)}((p-q)^2, P^2 < 0)$ bisher reell, so kann das Ergebnis nun generell komplexwertig sein.

Summenregel im B -Kanal

Das Ergebnis hängt immernoch von der Variablen $(p-q)^2$ ab. In dieser Variablen wird jetzt wieder eine Summenregel geschrieben, das Vorgehen ist dabei identisch.

Zuerst wird ein neuer Satz hadronischer Zwischenzustände im T -Produkt des Matrixelements $\Pi_{\pi\pi}^{(O)}$ eingeführt. Der Zustand mit niedrigster Masse, der hier beiträgt, ist der des B -Mesons (Abb. 3.2e) und wird wieder separat geschrieben:

$$\Pi_{\pi\pi}^{(O)}((p-q)^2, m_B^2 + i\epsilon) = \frac{f_B m_B^2 \langle \pi^-(p) \pi^+(-q) | O | B(p-q) \rangle}{m_B^2 - (p-q)^2} + \int_{s_h^B}^\infty ds' \frac{\rho_h^{(B)}(s')}{s' - (p-q)^2}.$$

Endlich tritt hier das gesuchte Matrixelement $\langle \pi^-(p)\pi^+(-q)|O|B(p-q) \rangle$ auf. Andererseits kann wieder eine Dispersionsrelation in der Variablen $s' \equiv (p-q)^2$ geschrieben werden (Abb. 3.2f). Ein drittes Mal muss hier analytisch fortgesetzt werden mit der Forderung, dass die Funktion einen Schnitt auf der positiven reellen s' -Achse habe, und

$$\Pi_{\pi\pi}^{(O)}((p-q)^2, m_B^2 + i\epsilon) = \frac{1}{\pi} \int_{m_b^2}^{\infty} ds' \frac{\text{Im}_{s'} \Pi_{\pi\pi}^{(O)}(s', m_B^2)}{s' - (p-q)^2}.$$

Die beiden Darstellungen werden gleichgesetzt. Mit der Quark-Hadron-Dualität wird das Integral über angeregte Zustände mit B -Quantenzahlen durch den entsprechenden Teil des Dispersionsintegral abgeschätzt, wobei ein neuer Dualitäts-Schwellenwert s_0^B auftritt:

$$\frac{f_B m_B^2 \langle \pi^-(p)\pi^+(-q)|O|B(p-q) \rangle}{m_B^2 - (p-q)^2} = \frac{1}{\pi} \int_{m_b^2}^{s_0^B} ds' \frac{\text{Im}_{s'} \Pi_{\pi\pi}^{(O)}(s', m_B^2)}{s' - (p-q)^2 - i\epsilon}$$

und in der Variablen $(p-q)^2$ wird die Borel-Transformation angewendet, um das Resultat weniger sensitiv auf diese Abschätzung zu machen. Dabei wird ein neuer Borel-Parameter M'^2 eingeführt.

Ergebnis

Die resultierende Gleichung kann nun nach dem gesuchten Matrixelement aufgelöst werden:

$$\langle \pi^-(p)\pi^+(-q)|O|B(p-q) \rangle = \frac{1}{f_B m_B^2 \pi} \int_{m_b^2}^{s_0^B} ds' e^{(m_B^2 - s')/M'^2} \text{Im}_{s'} \Pi_{\pi\pi}^{(O)}(s', m_B^2 + i\epsilon). \quad (3.17)$$

Auf der rechten Seite kann für $\Pi_{\pi\pi}^{(O)}$ entweder das Ergebnis der Summenregel (3.14) eingesetzt werden, das sich aus einer direkten Berechnung der Korrelationsfunktion (3.1) ergibt, oder die Faktorisierung (3.15) benutzt werden.

Mit der ersten der beiden Möglichkeiten ist das Tree-Level-Resultat für die Zerfallsamplitude dann

$$\begin{aligned} \langle \pi^-(p)\pi^+(-q)|O_1^u|B(p-q) \rangle_{Tree} = i m_B^2 & \left(\frac{1}{4\pi^2 f_\pi} \int_0^{s_0^\pi} ds \left(1 - \frac{s}{m_B^2} \right) e^{-s/M'^2} \right) \\ & \cdot \left(\frac{m_b^2 f_\pi}{2 f_B m_B^2} \int_{u_0^B}^1 \frac{du}{u} e^{m_B^2/M'^2 - m_b^2/uM'^2} \varphi_\pi(u) \right) \end{aligned} \quad (3.18)$$

mit $u_0^B = m_b^2/s_0^B$. Der Term in der ersten Klammer ist bis auf den sehr kleinen Term s/m_B^2 identisch zu dem Tree-Level-Resultat der Zweipunkt-Summenregel⁵ für f_π , während in der

⁵QCD Zweipunkt- oder SVZ- Summenregeln [10] sind eine andere Form (historisch die ursprüngliche) von Summenregeln, bei der der Korrelator ein Vakuum-nach-Vakuum-Matrixelement ist. Beispiele von Zweipunkt-Summenregeln werden in Kapitel 4 behandelt.

zweiten Klammer der führende Term der Lichtkegel-Summenregel für $f_{B\pi}(0)$ steht. Damit ist in führender Ordnung das Ergebnis der naiven Faktorisierung reproduziert worden. Wenn die Faktorisierung für $\Pi_{\pi\pi}^{(O)}$ angewendet wird, ist diese Übereinstimmung noch offensichtlicher. Anstatt der ersten Klammer in (3.18) erhält man direkt den Faktor f_π .

Eine Anmerkung noch zur analytischen Fortsetzung in P^2 : In der Regel ist die Kinematik der Diagramme so, dass bei negativem P^2 kein Propagator on-shell gehen kann, so dass $\text{Im}_{s'}\Pi_{\pi\pi}^{(O)}(s' > 0, P^2 < 0)$ reell ist. In diesem Fall erhält man das gleiche Ergebnis, wenn die Dispersionsrelation in s' zuerst geschrieben wird und erst am Ende die analytische Fortsetzung zu $P^2 = m_B^2 + i\epsilon$ durchgeführt wird (für die Diagramme in dieser Arbeit wurde dies explizit überprüft). Die Rechnung wird dadurch übersichtlicher, da sich die analytischen Eigenschaften in s' leichter ablesen lassen, wenn die Funktion zunächst weiter reell ist und erst im letzten Schritt eine wirklich komplexwertige Funktion auftritt. Von dieser Regel gibt es bei den Emissions-Diagrammen eine Ausnahme, auf die an entsprechender Stelle hingewiesen wird.

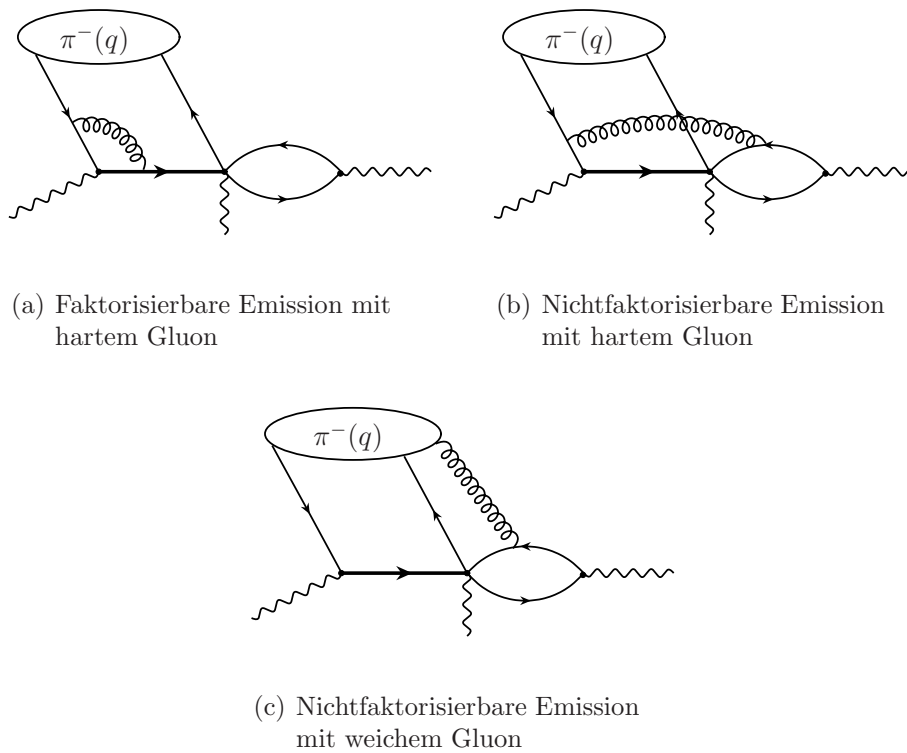
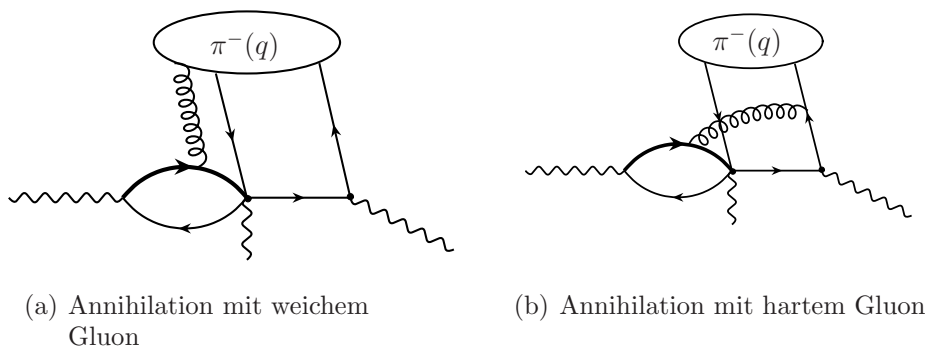
3.1.4 Diagramme

Mit der gezeigten Summenregel wurde also die Berechnung der Matrixelemente $\langle \pi^+\pi^- | O | \overline{B}^0 \rangle$ durch eine Berechnung der Korrelationsfunktion $F^{(O)}$ bzw. $\Pi_{\pi\pi}^{(O)}$ ersetzt. Dabei kommt die Störungstheorie zur Anwendung. Die Diagramme, die dafür zu berechnen sind, können direkt den Diagrammtypen (Abb. 2.8) im $B \rightarrow \pi\pi$ -Zerfall zugeordnet werden. Die Abbildungen 3.5-3.8 zeigen für die unterschiedlichen Diagrammtypen jeweils Beispiele. Entsprechend kann der Beitrag eines bestimmten Diagrammes D zum Matrixelement, $\langle \pi^+\pi^- | O | \overline{B}^0 \rangle_D$, berechnet werden, in dem nur die zugehörigen Kontraktionen der Korrelationsfunktion, $F^{(O),D}$ bzw. $\Pi_{\pi\pi}^{(O),D}$ berücksichtigt werden.

Generell brauchen nur Diagramme betrachtet zu werden, bei denen Gluonen zwischen den verschiedenen Teilen des Zerfalls ausgetauscht werden, das heißt nicht-faktorisierbare Diagramme. Das Diagramm Abb. 3.5a zum Beispiel kann faktorisiert werden in eine α_S -Korrektur zur Lichtkegel-Summenregel für den $B \rightarrow \pi$ -Formfaktor mal den führenden Term der Summenregel für f_π . Setzt man in der naiven Faktorisierung für $f_{B\pi}$ das Ergebnis der Lichtkegel-Summenregel in nächstführender Ordnung ein, ist dieser Term daher bereits berücksichtigt.

Weiter kann man zwei Typen von Diagrammen unterscheiden. Zunächst gibt es solche mit Gluon-Schleifen: Durch die Wahl der Kinematik ist gewährleistet, dass die Virtualität in den Schleifen hoch ist, sodass dies rein perturbative $O(\alpha_S)$ -Korrekturen sind. Zweitens kann ein Quark aber auch ein weiches, also niederenergetisches Gluon emittieren, das dann in einer Lichtkegel-Verteilungsamplitude (d.h. physikalisch in eins der Hadronen) absorbiert wird. Dies ist ein nichtperturbativer Beitrag, der nicht mit α_S , dafür aber mit Λ_{QCD}/m_b unterdrückt ist, denn die hier auftretenden Quark-Antiquark-Gluon-Verteilungsfunktionen haben höheren Twist.

Von den Emissions-Diagrammen wurden der Tree-Level-Term und die Korrekturen durch

Abbildung 3.5: Emissions-Diagramme für die Korrelationsfunktion F Abbildung 3.6: Annihilations-Diagramme für die Korrelationsfunktion F

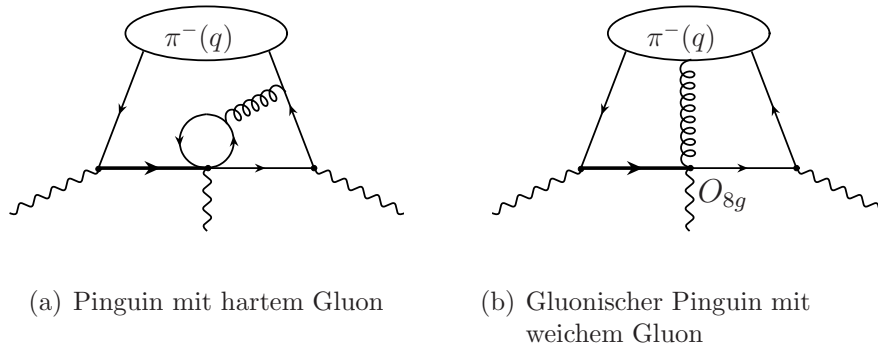


Abbildung 3.7: Pinguin-Diagramme für die Korrelationsfunktion F

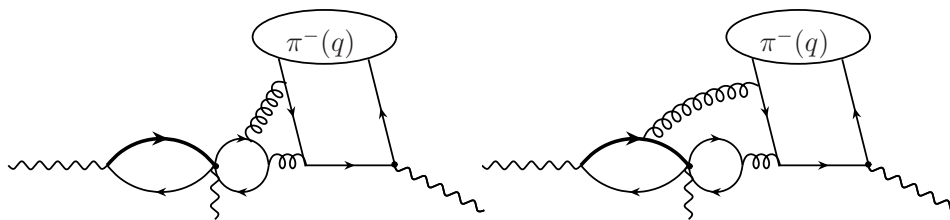


Abbildung 3.8: Pinguin-Annihilationsdiagramme für die Korrelationsfunktion F

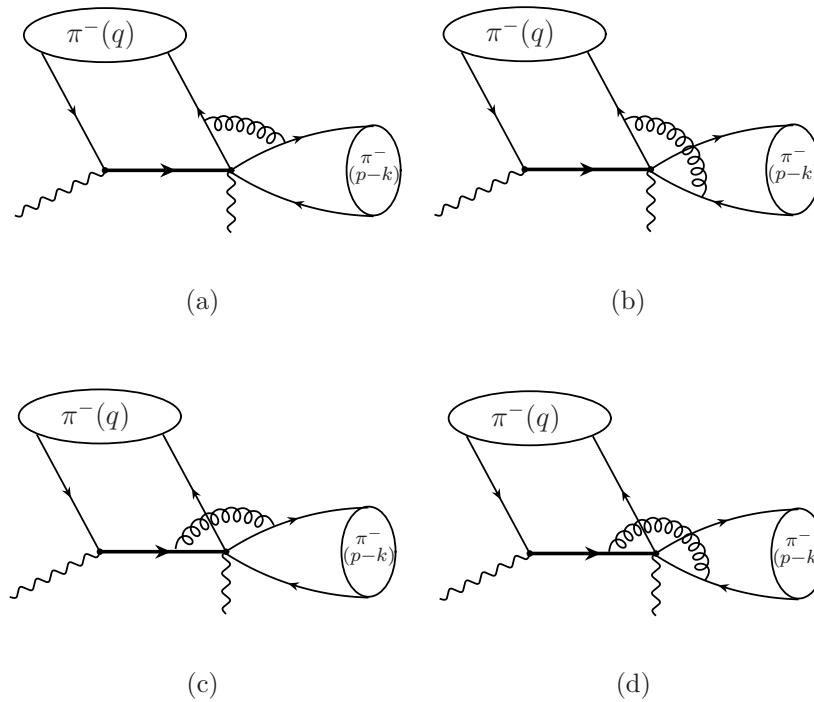


Abbildung 3.9: Emissionsdiagramme für $\Pi_{\pi\pi}^{(\bar{O}_1^u)}$ mit hartem Gluon-Austausch: Vertex-Diagramme

weiche Gluonen (Abb. 3.5c) in [31] berechnet. Die Diagramme mit perturbativer Gluon-Schleife (Abb. 3.5b) sind in der ursprünglichen Methode aber Zweischleifen-Diagramme und damit ein Fall für die Modifikation, in der $\Pi_{\pi\pi}^{(O)}$ in zwei Pion-Verteilungsfunktionen faktorisiert wird. Ihre Berechnung ist Thema des nächsten Abschnitts.

Die Pinguin-Diagramme (Abb. 3.7a) sowohl mit harten als auch mit weichen Gluonen wurden in [33] und der gluonische Pinguin (Abb. 3.7b) in [32] berechnet.

Die Pinguin-Annihilation (Abb. 3.8 zeigt zwei der Diagramme auf führender Ordnung) ist wegen der Mehrschleifen-Struktur auch mit der modifizierten Methode weiter nicht zugreifbar, denn wegen der Farberhaltung müssen mindestens zwei Gluonen ausgetauscht werden. Gerade wegen der Anzahl der Schleifen wird dieser Beitrag aber generell als vernachlässigbar klein erwartet, auch in anderen Methoden wie QCD Faktorisation wird er nicht berücksichtigt. Es bleiben die Annihilations-Diagramme (Abb. 3.6), die im dritten Teil dieses Kapitels behandelt werden.

3.2 Emission

Dieses Kapitel widmet sich der Berechnung des harten Gluon-Austausches in der Emission. Dieser geht zusammen mit den in [31] berechneten weichen Gluon-Korrekturen in den

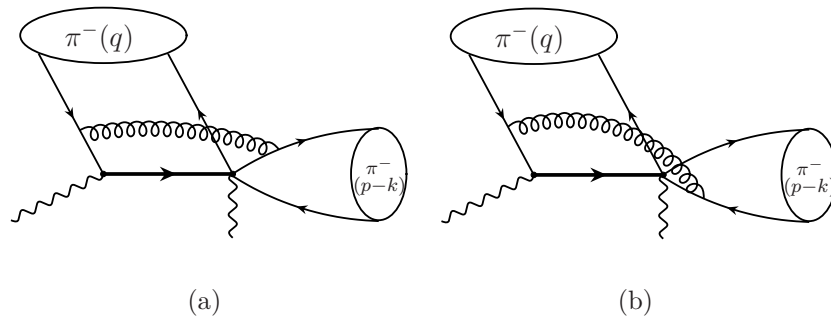


Abbildung 3.10: Emissionsdiagramme für $\Pi_{\pi\pi}^{(\tilde{O}_1^u)}$ mit hartem Gluon-Austausch: Harte Spectator-Diagramme

in (2.26) definierten Korrekturterm r_E ein. Dabei wird nur der Beitrag des Strom-Strom-Operators \tilde{O}_1^u berechnet. Während sich der Beitrag von $O_{3,4}$ durch Fierz-Transformationen und Isospin-Symmetrie auf letzteren zurückführen lässt (was in der Zerlegung (2.31) bereits berücksichtigt wurde), muss für den Beitrag von $O_{5,6}$ (r_E^6 in der Zerlegung) weiter auf die QCD Faktorisierung verwiesen werden. Allerdings sind die Wilson-Koeffizienten c_5 und c_6 sehr klein, sodass dieser Beitrag wenig relevant ist.

Startpunkt ist die Korrelationsfunktion $\Pi_{\pi\pi}^{(\tilde{O}_1^u)}$ mit der Faktorisierung (3.15). Die sechs Diagramme, vier Vertex-Diagramme Abb. 3.9 und zwei harte Spectator-Diagramme Abb. 3.10, sind jetzt Ein-Schleifen-Diagramme. Vertex- und Spectator-Diagramme werden getrennt betrachtet, was später den Vergleich zur QCD Faktorisierung und auch die Renormierung vereinfacht.

Die Diagramme für $\Pi_{\pi\pi}^{(\tilde{O}_1^u)}$ werden also mit der Kinematik $(p-q)^2 < 0$, $P^2 < 0$, $(p-k)^2 = m_\pi^2 = 0$ berechnet. Dann wird das Ergebnis renormiert. Anschließend wird die Dispersionsrelation in der Variablen $s' \equiv (p-q)^2$ geschrieben. Nach der analytischen Fortsetzung in $P^2 \rightarrow m_B^2 + i\epsilon$ kann das Ergebnis schließlich abgelesen werden.

3.2.1 Berechnung der Diagramme

Feynman-Diagramme

Die Einschleifen-Diagramme werden mit Standardmethoden berechnet, in diesem Falle mit Mathematica und dem Paket FeynCalc [37]. Das Resultat vereinfacht sich erheblich, wenn die Diagramme (3.9a und b, c und d sowie 3.10a und b) paarweise addiert werden. Dabei wird die Symmetrie der Pion-Wellenfunktion im Bezug auf das emittierte Pion ausgenutzt. In der Faktorisierungsformel (3.15) heißt dies, dass $v \rightarrow 1-v \equiv \bar{v}$, $\varphi_\pi(v) \rightarrow \varphi_\pi(v)$ gesetzt wird. Durch die paarweise Addition heben sich die Infrarot-Singularitäten der einzelnen Diagramme gegenseitig auf. Dies ist nichts weiter als die Manifestation des Farbtransparenz-Argumentes [18], das auch schon zur Motivation der naiven Faktorisierung herangezogen

wurde: Ein weiches (infrarotes) Gluon löst die Struktur des Pions nicht auf und koppelt effektiv nicht.

Die Summe der Vertexdiagramme lautet damit:

$$\begin{aligned} \Pi_{\pi\pi}^{(\tilde{O}_1^u),Vertex}((p-q)^2, P^2) &= i f_\pi^2 m_b^2 \frac{\alpha_S}{36\pi} \int_0^1 du \int_0^1 dv \varphi_\pi(u) \varphi_\pi(v) \\ &\cdot \left[\frac{1}{\bar{u}v} B_0(\bar{u}(p-q)^2, 0, m_b^2) + \frac{3P^2}{\bar{u}(p-q)^2 - m_b^2} B_0(\bar{u}v P^2, 0, 0) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{3P^2}{\bar{u}(p-q)^2 - m_b^2} - \frac{1}{\bar{u}v} \right) B_0(\bar{u}((p-q)^2 - v P^2), 0, m_b^2) \right] \end{aligned} \quad (3.19)$$

und die der harten Spectator-Diagramme:

$$\begin{aligned} \Pi_{\pi\pi}^{(\tilde{O}_1^u),Spec}((p-q)^2, P^2) &= i f_\pi^2 m_b^2 \frac{\alpha_S}{18\pi} \int_0^1 du \int_0^1 dv \frac{\varphi_\pi(u) \varphi_\pi(v)}{uv(u(p-q)^2 - v P^2)} \\ &\cdot \left[v P^2 B_0((p-q)^2, 0, m_b^2) + (u(p-q)^2 - v P^2) B_0(\bar{u}(p-q)^2, 0, m_b^2) \right. \\ &\quad - uv P^2 B_0(uv P^2, 0, 0) + u(v P^2 - (p-q)^2) B_0(\bar{u}((p-q)^2 - v P^2), 0, m_b^2) \\ &\quad \left. - uv P^2 (m_b^2 - (1+u)(p-q)^2 + 2v P^2) C_0((p-q)^2, uv P^2, \bar{u}((p-q)^2 - v P^2), m_b^2, 0, 0) \right]. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Hier sind B_0 und C_0 die üblichen skalaren Zwei- und Dreipunktfunktionen in dimensionaler Regularisierung:

$$\begin{aligned} B_0(p^2, m_0, m_1) &= \frac{(2\pi\mu)^{4-D}}{i\pi^2} \int d^D q \{ (q^2 - m_0^2 + i\epsilon)([q+p_1]^2 - m_1^2 + i\epsilon) \}^{-1}, \\ C_0(p_1^2, (p_1-p_2)^2, p_2^2, m_0, m_1, m_2) &= \frac{(2\pi\mu)^{4-D}}{i\pi^2} \int d^D q \\ &\cdot \left\{ (q^2 - m_0^2 + i\epsilon)([q+p_1]^2 - m_1^2 + i\epsilon)([q+p_2]^2 - m_2^2 + i\epsilon) \right\}^{-1}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Renormierung

Das Ergebnis für die harten Spectator-Diagramme ist bereits ultraviolett- und infrarot-endlich (die einzelnen B_0 -Funktionen haben zwar UV-Divergenzen, die sich aber in der Summe aufheben, das auftretende C_0 ist UV- und IR-endlich). Die Vertex-Diagramme sind dagegen auch in der Summe UV-divergent. Dies war auch nicht anders zu erwarten, handelt es sich doch genau um die Diagramme, die, wie im Abschnitt 2.1.2 gezeigt, die Renormierung der Vier-Fermion-Operatoren nötig machen. Der divergente Anteil von (3.19) ist mit $B_0(p^2, m_1^2, m_2^2) = (\Delta_{\text{div}} + \text{endliche Terme})$:

$$\Pi_{\pi\pi}^{(\tilde{O}_1^u),Vertex,Div}((p-q)^2, P^2) = \Delta_{\text{div}} \frac{-\alpha_S}{3\pi} \left(i f_\pi^2 m_b^2 P^2 \int_0^1 du \frac{1}{2} \frac{\varphi_\pi(u)}{m_b^2 - \bar{u}(p-q)^2} \right),$$

was genau das $(-\alpha_S/3\pi)$ -Fache des Tree-Level-Beitrags (3.16) ist. Die Operatorrenormierung (2.8), umgeschrieben auf die Operatorbasis (O_1, \tilde{O}_1) statt (O_1, O_2) , absorbiert genau diesen divergenten Term, sodass er im Matrixelement des renormierten Operators $\Pi_{\pi\pi}^{\tilde{O}_1^u}$ zu Null gesetzt wird (der Hut wird im folgenden wieder weggelassen). Insbesondere ist damit gezeigt, dass das Ergebnis in Ordnung α_S^1 das korrekte Skalenverhalten hat, das die Skalenabhängigkeit der Wilson-Koeffizienten $c_1(\mu)$ und $c_2(\mu)$ kompensiert.

Dispersionsrelation

Um die Dispersionsrelation für $\Pi_{\pi\pi}^{\tilde{O}_1^u}$ zu erhalten, wird die Funktion nun in der Variablen $s' \equiv (p - q)^2$ analytisch fortgesetzt. Gesucht ist dann der Imaginärteil (die Diskontinuität) auf der positiven reellen Achse.

Die einzelnen Terme im Resultat sind jeweils das Produkt aus einer gebrochen rationalen Funktion in s' und einer B_0 - oder C_0 -Funktion. Die Produktregel $\text{Im}(ab) = \text{Im} a \cdot \text{Re} b + \text{Re} a \cdot \text{Im} b$ für den Imaginärteil lässt sich wie in Anhang B.2 kurz gezeigt auch auf den als Diskontinuität definierten Imaginärteil verallgemeinern, sodass die Faktoren getrennt betrachtet werden können. An die Stelle des Realteiles tritt dann $\text{Re}_{s'} f(s') = \frac{1}{2}(f(s' + i\epsilon) + f(s' - i\epsilon))$, was, wenn über s integriert wird, der Definition des Hauptwertintegrals entspricht: $\int ds' \text{Re}_{s'} f(s') = \mathcal{P} \int ds' f(s')$.

Zuerst zu den Vertexdiagrammen: Für die hier vorkommenden B_0 -Funktionen lassen sich direkt geschlossene Ausdrücke angeben:

$$\begin{aligned} B_0(s'\bar{u}, 0, m_b^2) &= \Delta_{\text{div}} + 2 - \log \frac{m_b^2}{\mu^2} - \left(1 - \frac{m_b^2}{\bar{u}s'}\right) \log \left(1 - \frac{\bar{u}s'}{m_b^2}\right), \\ B_0(\bar{u}v P^2, 0, 0) &= \Delta_{\text{div}} + 2 - \log \frac{-\bar{u}v P^2}{\mu^2}, \\ B_0(\bar{u}(s' - v P^2), 0, m_b^2) &= \Delta_{\text{div}} + 2 - \log \frac{m_b^2}{\mu^2} + \left(\frac{m_b^2}{\bar{u}(s' - v P^2)} - 1\right) \log \left(1 - \frac{\bar{u}(s' - v P^2)}{m_b^2}\right). \end{aligned}$$

Die zweite B_0 -Funktion hängt nicht von s' ab und trägt daher auch nicht zum Imaginärteil bei. Die Logarithmen sind bereits so geschrieben, dass der Schnitt auf der positiven reellen s' -Achse liegt, die analytische Fortsetzung in s' ist daher trivial und die Formeln können direkt mit positivem s' verwendet werden.

Nach Anwendung der in Anhang B.3 zusammengestellten Methoden und Formeln für den Imaginärteil lautet die Antwort für die Vertexdiagramme:

$$\begin{aligned} \text{Im}_{s'} \Pi_{\pi\pi}^{\tilde{O}_1^u, \text{Vertex}}(s', P^2) &= \frac{if_\pi^2 m_b^2 \alpha_S}{12} \int_0^1 dv \varphi_\pi(v) \left[\varphi_\pi \left(1 - \frac{m_b^2}{s'}\right) V_1(v, s', P^2) \Theta \left(s' - m_b^2\right) \right. \\ &\quad \left. + \int_0^1 du \varphi_\pi(u) \left[V_2(u, v, s', P^2) \Theta \left(s' - \frac{m_b^2}{\bar{u}}\right) + V_3(u, v, s', P^2) \Theta \left(s' - v P^2 - \frac{m_b^2}{\bar{u}}\right) \right] \right], \end{aligned} \tag{3.22}$$

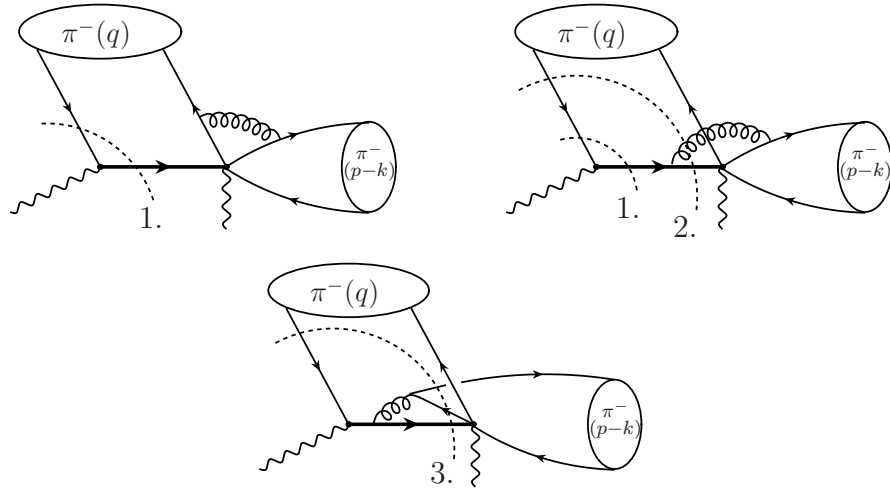


Abbildung 3.11: Schnitte durch die Vertexdiagramme, die dem Imaginärteil $\text{Im}_{s'}$ entsprechen. Entlang dieser Schnitte können alle Propagatoren on-shell gehen, wenn: 1. $s' = m_b^2/\bar{u}$, 2. $s' > m_b^2/\bar{u}$, 3. $s' > m_b^2/\bar{u} + vP^2$.

$$\begin{aligned}
 V_1(v, s', P^2) &= \frac{P^2}{s'} \left(2 \log \frac{m_b^2}{\mu^2} + \log \frac{-v P^2}{s'} - \frac{v P^2}{s' - v P^2} \log \frac{v P^2}{s'} - 6 \right), \\
 V_2(u, v, s', P^2) &= \frac{m_b^2 - \bar{u} s'}{3 \bar{u}^2 v s'}, \\
 V_3(u, v, s', P^2) &= \frac{m_b^4 - 2\bar{u}(s' - 2v P^2)m_b^2 + \bar{u}^2(3v^2 P^4 - 4v s' P^2 + s'^2)}{3 \bar{u}^2 v (m_b^2 - \bar{u} s')(s' - v P^2)}.
 \end{aligned}$$

Die dabei auftretenden Θ -Funktionen können physikalisch interpretiert werden: Ein Feynman-Diagramm hat einen Imaginärteil genau dann, wenn es einen Schnitt durch das Diagramm gibt, sodass alle geschnittenen Linien on-shell gehen können. In diesem Fall muss insbesondere genügend Energie zur Verfügung stehen, damit das b -Quark on-shell gehen kann. Die zugehörigen Schnitte sind in Abbildung 3.11 gezeigt.

Die Behandlung der harten Spectator-Diagramme geht analog, ist aber etwas aufwendiger. Zuerst kann man auf (3.20) wieder die Produktregel anwenden. Dabei trifft man auf den Pol $1/(u s' - v P^2)$, der schon bei negativem $s' = v P^2/u$ zu einem Imaginärteil führt. Dies entspricht aber keiner Kinematik, bei der das b -Quark on-shell gehen kann. Der Imaginärteil dieses Pols wird nach der Produktregel mit dem Realteil der B_0 - und C_0 -Funktionen an dieser Stelle multipliziert, und diese heben sich in der Tat gegenseitig auf: Der unphysikalische Pol trägt also nicht bei. In Integralen, in denen dieser Pol vorkommt, ist der Hauptwert zu nehmen, sodass die Integrale endlich werden.

Die in (3.20) vorkommenden B_0 -Funktionen sind analog zu denen in den Vertex-Diagrammen und die analytische Fortsetzung ist ebenso evident, sodass die Formeln zur Bestimmung des Imaginärteils direkt angewendet werden können. Weitaus komplizierter ist aber

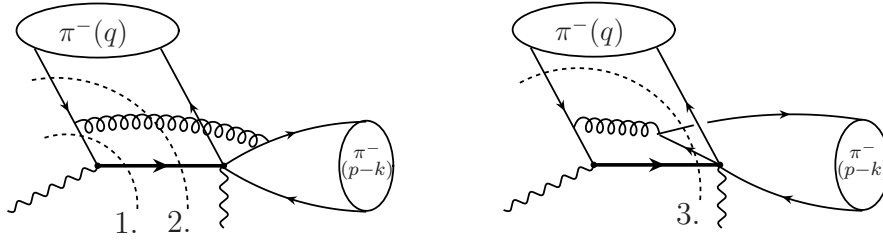


Abbildung 3.12: Schnitte durch die harten Spectatordiagramme, die dem Imaginärteil $\text{Im}_{s'}$ entsprechen: 1. $s' > m_b^2$, 2. $s' > m_b^2/\bar{u}$, 3. $s' > m_b^2/\bar{u} + vP^2$.

die Berechnung des Imaginärteils der C_0 -Funktion. Sie ist in Anhang C gezeigt und hat zum Ergebnis:

$$\begin{aligned} \text{Im}_{s'} C_0(s', uv P^2, \bar{u}(s' - v P^2), m_b^2, 0, 0) &= \frac{\pi}{u s' - v P^2} \log \left(\frac{-v P^2 |m_b^2 - \bar{u} s'|}{u s' (s' - m_b^2 - v P^2)} \right) \Theta(s' - m_b^2) \\ &- \frac{\pi}{u s' - v P^2} \log \left(\frac{-\bar{u} v P^2 (s' - m_b^2 - v P^2)}{u (s' - v P^2) |m_b^2 - \bar{u} s'|} \right) \Theta \left(s' - \frac{m_b^2}{\bar{u}} - v P^2 \right) \end{aligned} \quad (3.23)$$

für $P^2 < 0$. Zusammen ist damit das Resultat für die harten Spectator-Diagramme:

$$\begin{aligned} \text{Im}_{s'} \Pi_{\pi\pi}^{(\tilde{O}_1^v), s' pec}(s', P^2) &= \frac{i f_\pi^2 m_b^2 \alpha_S}{18} \int_0^1 du \int_0^1 dv \varphi_\pi(u) \varphi_\pi(v) \left[S_1(u, v, s', P^2) \Theta(s' - m_b^2) \right. \\ &\left. + S_2(u, v, s', P^2) \Theta \left(s' - \frac{m_b^2}{\bar{u}} \right) + S_3(u, v, s', P^2) \Theta \left(s' - \frac{m_b^2}{\bar{u}} - v P^2 \right) \right] \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$S_1(u, v, s', P^2) = \frac{P^2((1+u)s' - m_b^2 - 2vP^2)}{(u s' - v P^2)^2} \log \left(\frac{-v P^2 |m_b^2 - \bar{u} s'|}{u s' (s' - m_b^2 - v P^2)} \right) + \frac{P^2(s' - m_b^2)}{u s' (u s' - v P^2)}$$

$$S_2(u, v, s', P^2) = \frac{m_b^2 - \bar{u} s'}{\bar{u} u v s'}$$

$$\begin{aligned} S_3(u, v, s', P^2) &= -\frac{P^2((1+u)s' - m_b^2 - 2vP^2)}{(u s' - v P^2)^2} \log \left(\frac{-\bar{u} v P^2 (s' - m_b^2 - v P^2)}{u (s' - v P^2) |m_b^2 - \bar{u} s'|} \right) \\ &+ \frac{m_b^2 - \bar{u} s' + \bar{u} v P^2}{\bar{u} v (u s' - v P^2)} \end{aligned}$$

Die Theta-Funktionen entsprechen wieder den Schnitten durch das Diagramm, wie sie in Abb. 3.12 dargestellt sind. Dabei fällt auf, dass die Kinematik mit $P^2 < 0$ auch schon für $P^2 + m_b^2 < s' < m_b^2$ erlaubt, dass das Diagramm einen Imaginärteil hat.

Die so berechneten Imaginärteile werden nun in die Dispersionsrelation für $\Pi_{\pi\pi}^{(\tilde{O}_1^u)}((p-q)^2, P^2)$ eingesetzt:

$$\Pi_{\pi\pi}^{(\tilde{O}_1^u), Vertex, Spec}((p-q)^2, P^2) = \frac{1}{\pi} \int_{m_b^2 + P^2}^{\infty} ds' \frac{Im_{s'} \Pi_{\pi\pi}^{(\tilde{O}_1^u), Vertex, Spec}(s', P^2)}{s' - (p-q)^2}, \quad (3.25)$$

wobei sich der Hauptwert auf den Pol bei $u s' = v P^2$ bezieht.

Analytische Fortsetzung

Als letzter Schritt steht noch die analytische Fortsetzung in P^2 an. Mit der Vorschrift $P^2 = m_B^2 + i\epsilon$ entsprechen die sich dabei ergebenden Real- und Imaginärteile bezüglich P^2 direkt dem algebraischen Real- und Imaginärteil der Amplitude.

Diesmal ist die analytische Fortsetzung der Ergebnisse (3.22) und (3.24) weniger trivial und man muss eine ganze Reihe von Besonderheiten beachten. Bei den Vertex-Diagrammen fällt auf, dass in (3.22) die Funktion V_1 einen Logarithmus $\log v P^2/s'$ enthält, der den Schnitt auf der *negativen* reellen P^2 -Achse hat. Dieser kommt aus dem Schnitt Abb. 3.13a, der eine kinematische Besonderheit aufweist: Nur bei negativem P^2 können die Quarks in der Schleife gleichzeitig on-shell gehen (der erste Schnitt legt $(p-q)^2 = s' = m_b^2/\bar{u}$ fest, bei $(k-\bar{u}q)^2 = \bar{u}(s' - P^2) > m_b^2$ hat die Schleife einen Imaginärteil). In diesem Falle vertauschen die Imaginärteile in s' und P^2 nicht und beim physikalischen Punkt $P^2 = m_B^2$ trägt dieses Diagramm nicht zum Imaginärteil der Amplitude bei. Anders bei dem Schnitt Abb. 3.13b: Hier kann das leichte Quarkpaar im Loop erst bei $P^2 > 0$ on-shell gehen, sodass dieses Diagramm nach analytischer Fortsetzung zum Imaginärteil der Amplitude beiträgt. Der zu Grunde liegende Prozess, ein Gluon-Austausch zwischen On-Shell-Quarks im Endzustand, heißt auch Endzustands-Wechselwirkung oder „Final State Rescattering“.

Weiter enthalten die Resultate Θ -Funktionen in P^2 , die die Funktionen nicht einmal differenzierbar, geschweige denn analytisch in P^2 erscheinen lassen. Zu beachten ist aber, dass nicht die Imaginärteile einzeln, sondern nur die gesamte Dispersionsrelation (3.25) analytisch sein muss. Um die Analytizität in P^2 evident zu machen, ist es daher zweckmäßig, die Θ -Funktionen in Integrationsgrenzen zu absorbieren. Dabei wird zunächst weiter $P^2 < 0$ gelassen, da die bisherige Rechnung nur unter dieser Voraussetzung Gültigkeit hat:

$$\begin{aligned} I &= \int_{m_b^2 + P^2}^{\infty} ds' \int_0^1 dv \int_0^1 du \Theta\left(s' - \frac{m_b^2}{\bar{u}} - v P^2\right) \\ &= \int_{m_b^2 + P^2}^{m_b^2} ds' \int_{\frac{s' - m_b^2}{P^2}}^1 dv \int_0^{1 - \frac{m_b^2}{s' - v P^2}} du + \int_{m_b^2}^{\infty} ds' \int_0^1 dv \int_0^{1 - \frac{m_b^2}{s' - v P^2}} du. \end{aligned}$$

Der Integrand ist analytisch in s' und P^2 und damit auch seine Stammfunktion. In dieser

Schreibweise kann also $P^2 \rightarrow m_B^2 + i\epsilon$ gesetzt werden:

$$\begin{aligned} I^{P^2 \rightarrow m_B^2} &= \int_{m_b^2}^{m_b^2 + m_B^2} ds' \int_{\frac{s' - m_b^2}{m_B^2}}^1 dv \int_0^{1 - \frac{m_b^2}{s' - v m_B^2}} du + \int_{m_b^2}^{\infty} ds' \int_0^1 dv \int_0^{1 - \frac{m_b^2}{s' - v m_B^2}} du \\ &= \int_{m_b^2}^{\infty} ds' \int_0^{\min(1, (s' - m_b^2)/m_B^2)} dv \int_0^{1 - \frac{m_b^2}{s' - v m_B^2}} du. \end{aligned}$$

Wichtig ist dabei die Feststellung, dass dabei weiter nur der Bereich $0 < u, v < 1$ auftritt.

Für die analytische Fortsetzung des Integranden selbst müssen zuerst die Logarithmen in (3.23) entsprechend der Vorschrift aus Anhang B.3 umgestellt werden. Mit $\log a/b = \log a - \log b$ ($a, b > 0$) und der entsprechenden Regel für das Produkt erhält man Ausdrücke, deren Schnitte in P^2 auf der positiven reellen Achse liegen. Dabei trifft man auf den Term $\log |m_b^2 - \bar{u} s'|$, der in dieser Form der Voraussetzung, dass der Integrand analytisch in s' sei, widerspricht. Er benötigt nochmals eine genauere Betrachtung, aus der sich ergibt, dass er sogar einen Imaginärteil in P^2 hat:

$$\begin{aligned} \int_{\frac{m_b^2}{\bar{u}} + v P^2}^{\infty} ds' \log \left| s' - \frac{m_b^2}{\bar{u}} \right| &= \int_{\frac{m_b^2}{\bar{u}} + v P^2}^{\frac{m_b^2}{\bar{u}}} ds' \log \left(\frac{m_b^2}{\bar{u}} - s' \right) + \int_{\frac{m_b^2}{\bar{u}}}^{\infty} ds' \log \left(s' - \frac{m_b^2}{\bar{u}} \right) \\ &\stackrel{P^2 \rightarrow m_B^2 + i\epsilon}{=} \int_{\frac{m_b^2}{\bar{u}} + v m_B^2}^{\infty} ds' \log \left| s' - \frac{m_b^2}{\bar{u}} \right| + i\pi \int_{\frac{m_b^2}{\bar{u}} + v m_B^2}^{\frac{m_b^2}{\bar{u}}} ds'. \end{aligned}$$

Mit diesen Vorbereitungen kann die Berechnung von Real- und Imaginärteil des Resultates nun wieder mit den Standard-Formeln gemacht werden. Im Ergebnis gibt es auch einen Imaginärteil von den harten Spectator-Diagrammen. Er ist darauf zurückzuführen, dass im geschnittenen Diagramm wie in Abb. 3.13c gezeigt Quarks on-shell gehen können.

Ergebnis

Die so erhaltenen Funktionen $\text{Re}_{P^2} \Pi_{\pi\pi}^{(\tilde{O}_1^u)}(s', P^2 = m_B^2)$ und $\text{Im}_{P^2} \Pi_{\pi\pi}^{(\tilde{O}_1^u)}(s', P^2 = m_B^2)$ können schließlich in die Summenregel (3.17) eingesetzt werden. Zur besseren Übersicht können die Integrationsgrenzen wieder als Θ -Funktionen geschrieben werden und das abschließende

Ergebnis ist:

$$\begin{aligned}
 \langle \pi^+ \pi^- | \tilde{O}_1^u | \bar{B}^0 \rangle_{E,hard} &= \frac{if_\pi^2 m_b^2 \alpha_S}{f_B m_B^2 \pi} \int_{m_b^2}^{s_0^B} ds' e^{(m_B^2 - s')/M'^2} \int_0^1 dv \varphi_\pi(v) \\
 &\cdot \left\{ \varphi_\pi \left(1 - \frac{m_b^2}{s'} \right) [E_1^{\text{Re}}(v, s') + iE_1^{\text{Im}}(v, s')] \right. \\
 &\quad + \int_0^1 du \varphi_\pi(u) \left[E_2^{\text{Re}}(u, v, s') + E_3^{\text{Re}}(u, v, s') \Theta \left(s' - \frac{m_b^2}{\bar{u}} \right) \right. \\
 &\quad \left. \left. + i E_2^{\text{Im}}(u, v, s') + E_4^{\text{Re}}(u, v, s') \Theta \left(s' - \frac{m_b^2}{\bar{u}} - v m_B^2 \right) \right] \right\}, \tag{3.26}
 \end{aligned}$$

$$E_1^{\text{Re}}(v, s') = \frac{m_B^2}{12 s'} \left(-\frac{s' - 2v m_B^2}{s' - v m_B^2} \log \frac{s'}{v m_B^2} + 2 \log \frac{m_b^2}{\mu^2} - 6 \right),$$

$$E_1^{\text{Im}}(v, s') = -\pi \frac{m_B^2}{12 s'},$$

$$\begin{aligned}
 E_2^{\text{Re}}(u, v, s') &= \frac{m_B^2}{18(u s' - v m_B^2)} \left(\frac{s' - m_b^2}{u s'} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{(1+u)s' - m_b^2 - 2v m_B^2}{u s' - v m_B^2} \log \left| \frac{v m_B^2 (m_b^2 - \bar{u} s')}{u s' (s' - m_b^2 - v m_B^2)} \right| \right),
 \end{aligned}$$

$$E_3^{\text{Re}}(u, v, s') = \frac{(3u-2)(m_b^2 - \bar{u} s')}{36 u \bar{u}^2 v s'},$$

$$\begin{aligned}
 E_4^{\text{Re}}(u, v, s') &= \frac{1}{36} \left(\frac{2 m_B^2 (m_b^2 - (1+u)s' + 2v m_B^2)}{(u s' - v m_B^2)^2} \log \left| \frac{\bar{u} v m_B^2 (s' - m_b^2 - v m_B^2)}{u (s' - v m_B^2) (\bar{u} s' - m_b^2)} \right| \right. \\
 &\quad + \frac{m_b^4 - 2\bar{u}(s' - 2v m_B^2)m_b^2 + \bar{u}^2(3v^2 m_B^4 - 4v s' m_B^2) + s'^2}{\bar{u}^2 v (m_b^2 - \bar{u} s') (s' - v m_B^2)} \\
 &\quad \left. + 2 \frac{m_b^2 - \bar{u} s' + \bar{u} v m_B^2}{\bar{u} v (u s' - v m_B^2)} \right),
 \end{aligned}$$

$$E_2^{\text{Im}}(u, v, s') = -\pi \frac{m_B^2 (m_b^2 - (1+u)s' + 2v m_B^2)}{18(u s' - v m_B^2)^2} \left[\Theta \left(s' - \frac{m_b^2}{\bar{u}} \right) - \Theta \left(s' - m_b^2 - v m_B^2 \right) \right].$$

Dabei sind alle auftretenden Integrale konvergent: Faktoren $1/u$, $1/v$ bzw. $1/\bar{u}$ werden durch φ_π , das an den Endpunkten $u, v = 0$ und 1 verschwindet, kompensiert.

3.2.2 Heavy Quark Limit und QCD Faktorisierung

Das Ergebnis für die Vertexdiagramme kann im Limes $m_b \rightarrow \infty$ direkt mit dem Ergebnis aus der QCD Faktorisierung verglichen werden. Das Verhalten der Parameter, wie sie in

den Lichtkegel-Summenregeln auftreten, wurde in [38] in diesem Limes untersucht; die m_b -Abhängigkeiten sind dann gegeben durch

$$m_B = m_b + \bar{\Lambda} \quad s_0^B = m_b^2 + 2 m_b \omega_b \quad M'^2 = 2 m_b \tau, \quad f_B = \frac{\hat{f}_B}{\sqrt{m_b}}$$

und die Parameter $\bar{\Lambda}, \omega_0, \tau$ und \hat{f}_B sind m_b -unabhängig. Bei der Entwicklung des Ergebnisses (3.26) in $1/m_b$ sind darüberhinaus zwei Punkte zu beachten: Erstens sind die Integrationsintervalle m_b -abhängig. Die einfachste Methode, um dies korrekt zu behandeln ist, alle Integrationsvariablen so zu substituieren, dass sie m_b -unabhängig von 0 bis 1 laufen. Die Reihenentwicklung wird dann nur im Integranden durchgeführt. Zum Zweiten tragen in einigen Teilen der Amplitude im Limes $m_b \rightarrow \infty$ nur die Endpunkte $u, v \rightarrow 0$ oder 1 der Verteilungsfunktionen bei; an diesen Endpunkten verschwinden sie aber linear, was einen zusätzlichen Unterdrückungsfaktor bewirkt.

Es ist instruktiv, mit diesem Wissen zuerst das Tree-Level-Resultat (3.18) zu betrachten, wobei die erste Klammer in der modifizierten Methode durch f_π ersetzt wird und die zweite der führende Term der Lichtkegel-Summenregel für $f_{B\pi}(0)$ ist:

$$\langle \pi^+ \pi^- | O_1^u | \bar{B}^0 \rangle_{Tree} = i m_b^2 f_\pi \underbrace{\left(\int_0^1 d\hat{s} e^{\frac{1-\hat{s}\hat{\omega}}{\hat{\tau}}} \frac{2 f_\pi \hat{s} \hat{\omega}^2 \bar{\Lambda}^2}{\hat{f} m_b^{3/2}} \varphi'_\pi(0) \right)}_{\lim_{m_b \rightarrow \infty} f_{B\pi}(0)} \cdot (1 + O(\bar{\Lambda}/m_b)). \quad (3.27)$$

Dabei wurde durch die Ersetzungen $\tau = \hat{\tau} \bar{\Lambda}$, $\omega = \hat{\omega} \bar{\Lambda}$ und $s = m_b^2 + 2 m_b \bar{\Lambda} \hat{\omega} \hat{s}$ erreicht, dass alle Parameter außer $\bar{\Lambda}$ und m_b dimensionslos und von $O(1)$ sind.

Für das Vertexdiagramm gehen wir zunächst zurück zum Imaginärteil der Korrelationsfunktion (3.22). Die Terme V_2 und V_3 , die noch eine u -Integration beinhalten, verschwinden im Limes $m_b \rightarrow \infty$ im Vergleich zu V_1 . Das liegt daran, dass das u -Integrationsintervall in diesen Termen bei $m_b \rightarrow \infty$ verschwindet. Im Beitrag von V_1 lässt sich dann das Tree-Level-Resultat herausfaktorisieren:

$$\langle \pi^+ \pi^- | \tilde{O}_1^u | \bar{B}^0 \rangle_{Vertex} = i m_b^2 f_\pi \left(\lim_{m_b \rightarrow \infty} f_{B\pi}(0) \right) \cdot \frac{\alpha_S}{6\pi} \int_0^1 dv \varphi_\pi(v) \left(4 \log \frac{m_b}{\mu} - 6 + \frac{1-2v}{1-v} \log v - i\pi \right) \cdot (1 + O(\bar{\Lambda}/m_b)).$$

Dies ist genau das Resultat, das auch in QCD Faktorisierung in Twist 2 gewonnen wird (z.B. [25] Gleichung (47))⁶. In erster Ordnung $1/m_b$ ist das Resultat von Lichtkegel-Summenregeln und QCD Faktorisierung für die Vertexdiagramme also identisch. Da in den Lichtkegel-Summenregeln keine grundsätzliche $1/m_b$ -Entwicklung durchgeführt wird, enthalten letztere

⁶Gleichung (47) in [25] enthält noch einen Term, der antisymmetrisch in v (dort x geschrieben) ist. Dieser tritt hier nicht auf, da von vorn herein die Symmetrie von φ_π ausgenutzt wurde.

zusätzlich Effekte von endlichem m_b . Allerdings wurden auch hier $1/m_b$ -unterdrückte Beiträge von höheren Twists vernachlässigt.

Für die harten Spectator-Diagramme kann dieser formale Vergleich nicht durchgeführt werden, da die Beschreibung des B -Mesons in QCD Faktorisierung (Lichtkegel-Verteilungsamplitude) und in Lichtkegel-Summenregeln (interpolierender Quarkstrom und Dualität) grundsätzlich verschieden ist. Den beiden Methoden ist einzig gemeinsam, dass nach Reihenentwicklung in $1/m_b$ die Spectator-Diagramme die gleiche Ordnung wie die Vertex-Diagramme haben. Das Ergebnis aus Lichtkegel-Summenregeln enthält darüberhinaus einen Imaginärteil, der erst in höherer Ordnung $1/m_b$ auftritt und in QCD Faktorisierung nicht enthalten ist.

Während die vollständige numerische Auswertung erst am Ende dieses Kapitels steht, sei hier schonmal ein Vorgriff gestattet: Die Lichtkegel-Summenregeln (3.26) liefern:

$$r_E^{hard,LCSR,Tw2} = \left([-1, 9_{-0,1}^{+0,5}] + i[-3, 6_{-0,4}^{+1,0}] \right) \times 10^{-2},$$

mit dem identischen Satz von Eingabeparametern ist das Twist-2-Ergebnis der QCD Faktorisierung:

$$r_E^{hard,QCDF,Tw2} = \left([-1, 1_{-3,1}^{+3,7}] + i[-4, 7_{-0,3}^{+1,1}] \right) \times 10^{-2}.$$

Beide Resultate sind konsistent miteinander und auch die Zentralwerte sind durchaus vergleichbar. Im Realteil hat das Ergebnis aus QCD Faktorisierung aber eine deutlich größere Unsicherheit, die fast ausschließlich auf die Unkenntnis der B -Meson-Verteilungsamplitude zurückzuführen ist. In der Rechnung tritt deren erstes inverse Moment, $\lambda_b = \int_0^\infty \frac{d\omega}{\omega} \phi_B(\omega)$ auf, für das hier der Schätzwert aus [24] $\lambda_b = 0,35_{-0,15}^{+0,15}$ GeV eingesetzt wurde, der konsistent mit einer kürzlichen Matchingrechnung in Lichtkegel-Summenregeln [39] und dem Ergebnis aus Zweipunkt-Summenregeln [40] ist. Die B -Meson-Verteilungsamplitude tritt in Lichtkegel-Summenregeln dagegen nicht auf.

3.2.3 Diskussion

Das Ergebnis der Lichtkegel-Summenregeln enthält also über den in QCD Faktorisierung angewendeten $m_b \rightarrow \infty$ -Limes hinaus noch Effekte von endlichem m_b . Insbesondere haben die harten Spectator-Diagramme einen mit Λ_{QCD}/m_b unterdrückten Imaginärteil. Bei endlichem m_b müssen aber auch bei der Twist-Entwicklung höhere Ordnungen mitgenommen werden.

In QCD Faktorisierung wurde entsprechend auch der Beitrag der Zweiteilchen-Verteilungsamplitude des Pions in Twist 3 berechnet. Dabei stellt sich heraus, dass das Konvolutionsintegral (2.23) logarithmisch divergiert. Die Twist-3-Verteilungsamplituden verschwinden nämlich nicht an den kinematischen Grenzpunkten, an denen das perturbative Diagramm divergiert. Der divergente Beitrag wird daher üblicherweise durch einen neuen hadronischen Parameter X_H ersetzt, der entweder grob geschätzt oder gefittet werden kann. Das Auftreten dieser Divergenz an sich zeigt aber, dass die Methode in dieser nächstführenden Ordnung ihre Gültigkeit verliert: Es bedeutet nichts anderes, als dass die kinematische Region, in der

das ausgetauschte Gluon weich ist, nicht wie in Twist 2 durch die Verteilungsamplituden unterdrückt ist. In dieser Region ist aber die Störungstheorie grundsätzlich nicht anwendbar.

Um so interessanter wäre natürlich die Antwort der Lichtkegel-Summenregeln in Twist 3. Leider hilft aber hier auch die modifizierte Methode nicht weiter, denn die sich dabei ergebenden Schleifenintegrale haben ebenfalls infrarote und kollineare Divergenzen. Diese lassen sich zwar dimensional regularisieren, aber die Frage ist, worin diese Divergenz absorbiert wird. Einen Anhaltspunkt liefert die Faktorisierungsformel für den Korrelator $\Pi_{\pi\pi}^{(O)}$ (3.15). Diese Formel gilt im führenden Twist, der für das Gesamtobjekt 4 ist. Die Annahme, der nächstführende Beitrag von Twist 5 ließe sich in ein Produkt aus einer Twist-2 und einer Twist-3-Verteilungsamplitude faktorisieren (auf dieser Annahme basiert auch die Rechnung in der QCD Faktorisierung), erweist sich als falsch; vielmehr muss hier eine Zwei-Pion Vierteilchen-Verteilungsfunktion eingeführt werden, in die auch die Divergenzen absorbiert werden können. Dies und deren Bestimmung ist sicher ein interessantes Projekt für die Zukunft. Auch die Frage, ob der Twist-3-Beitrag in der ursprünglichen Methode, in der nur eine Pion-Verteilungsamplitude auftritt, divergent ist, ist interessant. Wenn nicht, ist das Auftreten der Divergenz ein Artefakt der Faktorisierung von $\Pi_{\pi\pi}^{(O)}$.

Dies gilt allerdings nur für den Zweiteilchen-Beitrag. In Twist 3 gibt es bereits einen Beitrag einer Dreiteilchen- (Quark-Antiquark-Gluon)-Verteilungsfunktion. Dieser und der entsprechende Twist-4-Beitrag sind in Lichtkegel-Summenregeln berechnet worden [31], in QCD Faktorisierung sind sie wegen der nichtstörungstheoretischen Natur nicht eingeschlossen.

Man kann also schlussfolgern, dass das neue Twist-2-Resultat für die harten Emissionsdiagramme gegenüber QCD Faktorisierung keine wesentlichen neuen Informationen bereitstellt. In einer Analyse, bei der jedoch alle anderen Beiträge – sowohl andere nichtfaktorierbare Diagramme als auch der in der naiven Faktorisierung auftretende $B \rightarrow \pi$ -Formfaktor – aus Lichtkegel-Summenregeln bestimmt wurden, ist das neue Resultat aus Konsistenzgründen vorzuziehen. Als „handfester“ Vorteil kann lediglich gewertet werden, dass im Gegensatz zur QCD Faktorisierung die B -Meson-Verteilungsamplitude, über die man bisher nur wenige Informationen hat [39, 40] nicht benötigt wird, was sich positiv auf die Unsicherheiten auswirkt.

3.3 Annihilation

Den Annihilationsprozess kann man wie den der Emission als erste Näherung in zwei Teilprozesse faktorisieren (Abb. 3.14): Die Annihilation der Valenzquarks des B -Mesons und die Erzeugung zweier Pionen aus einem Quark-Antiquark-Strom. Durch Fierz-Transformation kann man die Vierquark-Operatoren so als Produkt von zwei Strömen schreiben, dass jeweils ein Strom zu einem Teilprozess gehört:

$$\langle \pi^+ \pi^- | O_2^u | \overline{B}^0 \rangle = \langle \pi^+ \pi^- | (\bar{u}u)_{V-A} | 0 \rangle \langle 0 | (\bar{d}b)_{V-A} | \overline{B}^0 \rangle, \quad O_2^u = (\bar{u}\gamma^\mu(1 - \gamma_5)u)(\bar{d}\gamma_\mu(1 - \gamma_5)b). \quad (3.28)$$

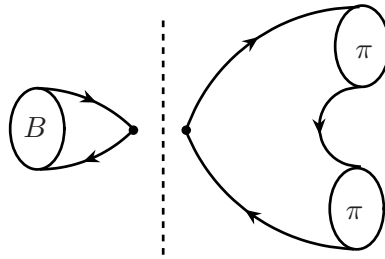


Abbildung 3.14: Faktorisierung des Annihilationsdiagramms

Damit ist diesmal O_2^u ein reiner Farbsinglett-Operator und O_1^u wird entsprechend (2.22) zerlegt: $O_1^u = \frac{1}{3}O_2^u + 2\tilde{O}_2^u$.

In dem faktorisierten Matrixelement ist der rechte Faktor proportional zum Impuls $p_\mu - q_\mu$ des \bar{B}^0 , genau dieser Impuls fließt aber durch den Quarkstrom im linken Faktor, von dem wegen der Paritätserhaltung nur der Vektorstromanteil beiträgt. Dadurch wird $(p_\mu - q_\mu)(\bar{u}u)_{V-A} \rightarrow \partial_\mu \bar{u} \gamma^\mu u$. Der Vektorstrom ist erhalten, sodass das faktorisierte Matrixelement (3.28) insgesamt verschwindet. Die Annihilation trägt also nur bei, wenn zwischen den beiden Teilprozessen mindestens ein Gluon ausgetauscht wird. Die Diagramme mit hartem bzw. weichem Ein-Gluon-Austausch werden in den folgenden Abschnitten 3.3.1 bzw. 3.3.2 behandelt.

Anders ist die Situation bei den Operatoren O_6^d . Da hier nach Fierz-Transformation (pseudo-) skalare Quarkströme auftreten, die nicht erhalten sind, gibt es auch nach Faktorisierung einen Beitrag (ohne Gluonaustausch). Dieser Beitrag wird in 3.3.3 berechnet. Wie schon bei der Emission wird auf die Berechnung nichtfaktorisierbarer Korrekturen mit den Operatoren $O_{5,6}$ verzichtet, da die Wilson-Koeffizienten c_5 und c_6 sehr klein sind.

3.3.1 Berechnung der harten Diagramme für \tilde{O}_2^u

Wenden wir uns also zunächst den Diagrammen zu, bei denen ein hartes Gluon zwischen den Teilprozessen ausgetauscht wird. Diese folgen direkt aus der störungstheoretischen Entwicklung. In den Lichtkegel-Summenregeln müssten dazu für den Korrelator $F^{(O_2^u)}$ Feynman-Diagramme vom Typ wie in Abb. 3.6b (Seite 71) gezeigt berechnet werden. Wie schon bei den Emissionsdiagrammen sind dies Zwei-Schleifen-Diagramme, sodass stattdessen die Faktorisierung für $\Pi_{\pi\pi}^{(O_2^u)}$ angewendet wird. Dazu werden die Diagramme in Abbildung 3.15 berechnet.

Harter Austausch

Von diesen sechs zu berechnenden Feynman-Diagrammen werden zunächst die Diagramme 3.15a, b herangezogen, die „harte Austauschdiagramme“ genannt werden. Der technische Teil der Rechnung ist weitgängig identisch mit der für die harten Emissionsdiagramme, sodass

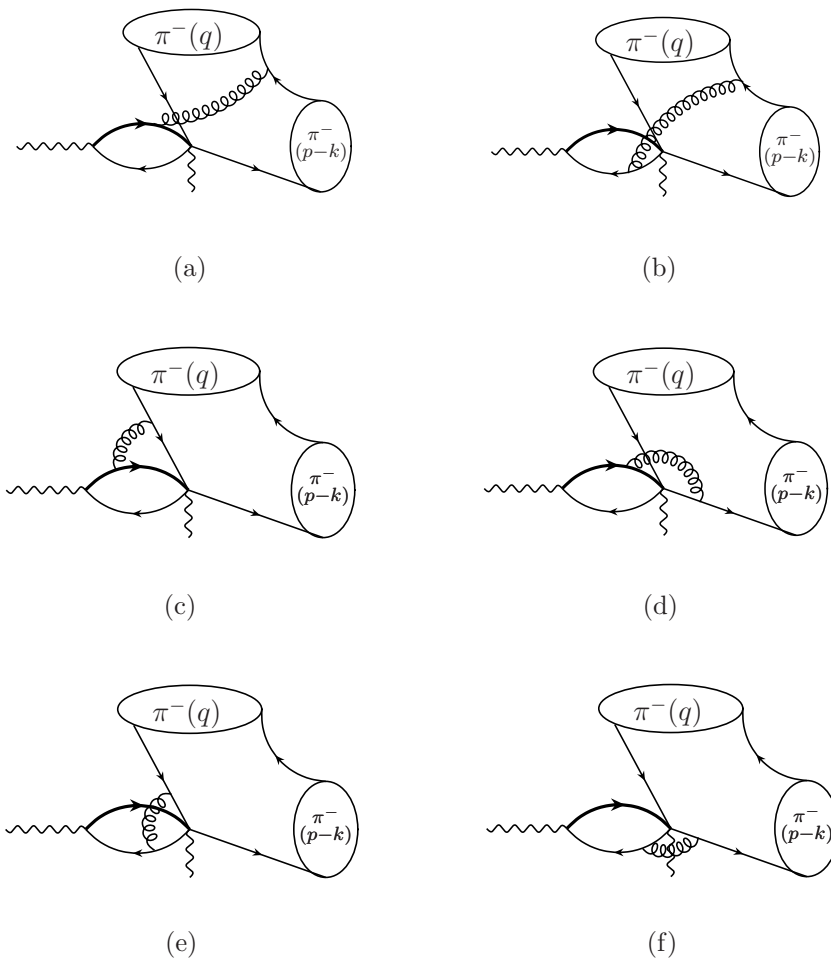


Abbildung 3.15: Annihilationsdiagramme für $\Pi_{\pi\pi}^{(O_2^u)}$: (a),(b): Harte Austauschdiagramme, (c)-(f): Vertexdiagramme

sich eine erneute detaillierte Beschreibung erübrigt. Die Diagramme selbst werden zunächst wieder mit $(p - q)^2 < 0, P^2 < 0$ berechnet und das Resultat lautet

$$\begin{aligned} \Pi_{\pi\pi}^{(\tilde{O}_2^u, A)}((p - q)^2, P^2) &= -i \left(\frac{\alpha_s C_F}{\pi} \right) \frac{f_\pi^2 m_b^2}{48} \int_0^1 du \int_0^1 dv \frac{\varphi_\pi(u) \varphi_\pi(v)}{[(p - q)^2 u - P^2 v]^2} \\ &\quad \cdot \{ H_{\pi\pi}^d(u, v; (p - q)^2, P^2) + H_{\pi\pi}^b(u, v; (p - q)^2, P^2) \}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Der Ausdruck $H_{\pi\pi}^d$ steht dabei für den harten Kern des Diagramms, bei dem das Gluon an das d -Quark koppelt,

$$\begin{aligned} H_{\pi\pi}^d(u, v; s' = (p - q)^2, P^2) &= \left[P^2 (2m_b^2 - (2 + u)s' + 3vP^2) \right] B_0(uvP^2, 0, 0) \\ &\quad - \left[\frac{1}{uv} ((u s' + v P^2)m_b^2 + 2v^2 P^4 - u s'^2 - v P^2 s' v) \right] B_0(s', 0, m_b^2) \\ &\quad + \left[\frac{1}{uv} ((u s' + v(1 - 2u)P^2)m_b^2 + v^2(1 - 3u)P^4 \right. \\ &\quad \quad \left. - u(1 + u)s'^2 + (u^2 + 4u - 1)v P^2 s') \right] B_0(\bar{u}(s' - v P^2), 0, m_b^2) \\ &\quad + \left[2P^2 (m_b^2 - s' + v P^2)^2 \right] C_0(s', uv P^2, \bar{u}(s' - v P^2), m_b^2, 0, 0), \end{aligned}$$

und $H_{\pi\pi}^b$ für das entsprechende Diagramm mit dem b -Quark,

$$\begin{aligned} H_{\pi\pi}^b(u, v; s' = (p - q)^2, P^2) &= - \left[P^2 (2m_b^2 + (2 - 3u)s' + v P^2) \right] B_0(uv P^2, m_b^2, m_b^2) \\ &\quad + \left[\frac{1}{uv} ((u s' + v P^2)m_b^2 + u(1 - 2u)s'^2 + v s' P^2) \right] B_0(s', 0, m_b^2) \\ &\quad - \left[\frac{1}{uv} ((u s' + (1 - 2u)v P^2)m_b^2 - v^2(1 + u)P^4 + u(1 - 3u)s'^2 \right. \\ &\quad \quad \left. + (1 + 3u^2)v s' P^2) \right] B_0(\bar{u}(s' - v P^2), 0, m_b^2) \\ &\quad + \frac{2}{uv} \left[(u m_b^2 + v P^2 - u^2 s')(v P^2(m_b^2 - u s') + u s'^2) \right] C_0(s', uv P^2, \bar{u}(s' - v P^2), 0, m_b^2, m_b^2). \end{aligned}$$

Im Unterschied zu den Emissionsdiagrammen wurde hier nicht die Symmetrie der Pion-Verteilungsfunktionen benutzt, sodass das Ergebnis auch für asymmetrische Verteilungsfunktionen Gültigkeit hat. Auf die Komplexität des Resultates hat dies hier keinen Einfluss.

Bei diesen Diagrammen ist der Impuls des Gluons nicht abhängig vom Schleifenimpuls, sondern von der externen Kinematik als $uv P^2$ festgelegt. Solange nicht u oder v sehr klein ist, ist das Gluon also genügend virtuell, damit die Störungstheorie gültig ist. Der Bereich von kleinem u und v ist aber durch die Pion-Verteilungsfunktion unterdrückt. Dieser Sachverhalt wird sich später darin zeigen, dass die Divergenz in $u, v \rightarrow 0$ des Gluon-Propagators $1/uv P^2$ durch das Endpunktverhalten der Verteilungsamplituden gekürzt wird. Ansonsten ist das Resultat UV- und IR-endlich und es ist keine Renormierung notwendig.

Wie zuvor heben sich die Beiträge an dem unphysikalischen Pol $u s' = v P^2$ gegenseitig auf. Der Imaginärteil in $s' \equiv (p - q)^2$ kommt daher nur von den skalaren Einschleifenintegralen B_0 und C_0 selbst. Unter ihnen tritt zusätzlich zu den bereits aus den Emissionsdiagrammen bekannten eine neue C_0 -Funktion auf, deren Imaginärteil in Anhang C berechnet wird:

$$\begin{aligned} \text{Im}_{s'} C_0(s', uv P^2, \bar{u}(s' - v P^2), 0, m_b^2, m_b^2) \\ = \frac{\pi}{u s' - v P^2} \left(\log \left| \frac{s'(u m_b^2 + \bar{u} v P^2)}{u s'^2 + v P^2(m_b^2 - u s')} \right| \Theta(s' - m_b^2) \right. \\ \left. - \log \left| \frac{(s' - v P^2)(u m_b^2 + \bar{u} v P^2)}{\bar{u}(u s'^2 + v P^2(m_b^2 - u s'))} \right| \Theta\left(s' - \frac{m_b^2}{\bar{u}} - v P^2\right) \right). \end{aligned}$$

Der Imaginärteil der beiden Diagramme ist damit

$$\begin{aligned} \text{Im}_{s'} \Pi_{\pi\pi}^{(\tilde{O}_{2,A})}(s' + i\epsilon, P^2) = i f_\pi^2 m_b^2 \left(\frac{\alpha_s C_F}{24} \right) \int_0^1 du \int_0^1 dv \frac{\varphi_\pi(u) \varphi_\pi(v)}{uv(u s' - v P^2)^3} \\ \times \left\{ H_1(u, v; s', P^2) \cdot \Theta(s' - m_b^2) + H_2(u, v; s', P^2) \cdot \Theta\left(s' - \frac{m_b^2}{\bar{u}} - v P^2\right) \right\}, \quad (3.30) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} H_1(u, v; s', P^2) = uv P^2 (m_b^2 - s' + v P^2)^2 \log \left(\frac{v P^2 |m_b^2 - \bar{u} s'|}{u s' (m_b^2 - s' + v P^2)} \right) \\ - \left(1 - \frac{m_b^2}{s'} \right) (u s' - v P^2) (m_b^2 - u s' + v P^2) (u s' + v P^2) \\ - (u(m_b^2 - u s') + v P^2) (v m_b^2 P^2 + u s' (s' - v P^2)) \log \left| \frac{s'(u m_b^2 + \bar{u} v P^2)}{u s'^2 + v P^2(m_b^2 - u s')} \right|, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_2(u, v; s', P^2) = -uv P^2 (m_b^2 - s' + v P^2)^2 \log \left(\frac{\bar{u} v P^2 (m_b^2 - s' + v P^2)}{u (s' - v P^2) |m_b^2 - \bar{u} s'|} \right) \\ + (u s' - v P^2) \left(1 - \frac{m_b^2}{\bar{u}(s' - v P^2)} \right) (m_b^2 (u s' + (1 - 2u)v P^2) - 2u(s' - v P^2)(u s' - v P^2)) \\ + (u(m_b^2 - u s') + v P^2) (v P^2 m_b^2 + u s' (s' - v P^2)) \log \left| \frac{(s' - v P^2)(u m_b^2 + \bar{u} v P^2)}{\bar{u}(u s'^2 + v P^2(m_b^2 - u s'))} \right|. \end{aligned}$$

Die beiden Thetafunktionen entsprechen den beiden in Abbildung 3.16 gezeigten Schnitten, wo das $b\bar{d}$ -Paar am B -Strom bzw. am elektroschwachen Vertex on-shell geht. Für $P^2 < 0$ ist die Kinematik dann so, dass kein weiteres Quarkpaar on-shell gehen kann, und die Amplitude ist rein reell (insbesondere tritt nicht, wie bei der Emission, ein $\log(+P^2)$ auf).

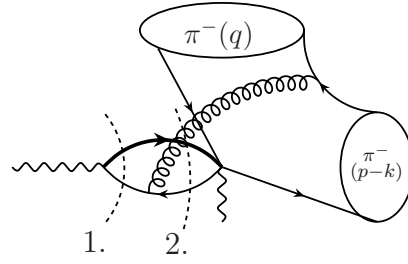


Abbildung 3.16: Schnitte durch die harten Austauschdiagramme, die dem Imaginärteil $\text{Im}_{s'}$ entsprechen: 1. $s' > m_b^2$, 2. $s' > m_b^2/\bar{u} + vP^2$. Die Schnitte des zweiten Austauschdiagrammes sind analog.

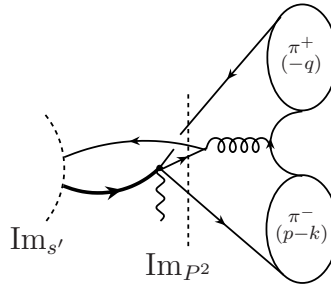


Abbildung 3.17: Imaginärteil des harten Austauschdiagramms nach Schnitt in s' und analytischer Fortsetzung in P^2 . Nur das Diagramm, bei dem das Gluon an das d -Quark in der Schleife koppelt, hat einen Imaginärteil.

Bevor dieses Resultat in die Summenregel (3.17) eingesetzt wird, muss noch die analytische Fortsetzung in $P^2 \rightarrow m_B^2 + i\epsilon$ durchgeführt werden. Das Ergebnis dieser nichttrivialen Prozedur ist, dass der Realteil der Amplitude durch den Realteil von (3.30) mit $P^2 = m_B^2$ (und dem Hauptwert bei $u s' = v P^2$), und der Imaginärteil durch

$$\begin{aligned} \text{Im}_{P^2} \text{Im}_{s'} \Pi_{\pi\pi}^{(\tilde{O}_2^u, A)}(s', m_B^2) &= i \frac{\pi \alpha_s C_F}{24} f_\pi^2 m_b^2 m_B^2 (m_b^2 - s' + v m_B^2)^2 \\ &\times \int_0^1 du \int_0^1 dv \frac{\varphi_\pi(u) \varphi_\pi(v)}{(u s' - v m_B^2)^3} \left[\Theta\left(s' - \frac{m_b^2}{\bar{u}}\right) - \Theta\left(s' - m_b^2 - v m_B^2\right) \right] \end{aligned} \quad (3.31)$$

gegeben ist.

Die Existenz dieses Imaginärteils, also einer neuen starken Phase in der $B \rightarrow \pi\pi$ -Amplitude, ist ein wichtiges Resultat, aber nicht unerwartet: Er entpricht dem Mechanismus, dass ein d -Quark aus dem b -Zerfall mit dem \bar{d} -Spectator-Quark in ein Gluon annihiliert. Der entsprechende Schnitt ist in Abbildung 3.17 gezeigt. In dem Diagramm, in dem das Gluon an das b -Quark koppelt, ist solch ein Prozess kinematisch nicht erlaubt, da der Impulsübertrag nicht für die Erzeugung eines reellen $b\bar{b}$ -Paares ausreicht, und das Diagramm hat keinen Imaginärteil.

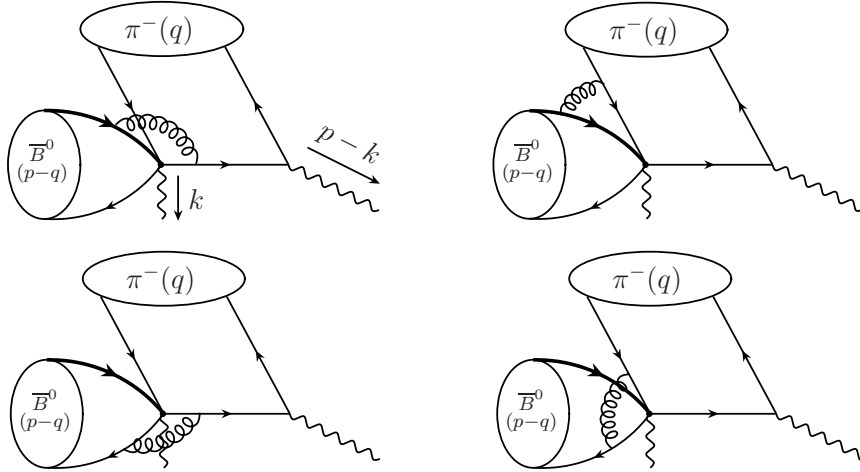


Abbildung 3.18: Vertexdiagramme für die Korrelationsfunktion $\Pi^{B\pi}$

Vertexdiagramme

Bei der Berechnung der Vertexdiagramme Abb. 3.15c-f tritt ein neues Problem auf: Selbst wenn man von der Faktorisierung für $\Pi_{\pi\pi}^{(\tilde{O}_2^u)}$ ausgeht, enthalten die resultierenden Diagramme zwei Schleifen. Einziger machbarer Ausweg ist hier das Ausweichen auf eine neue Methode, die näher an QCD Faktorisierung angelehnt ist. Startpunkt ist dabei die Korrelationsfunktion

$$\Pi_{\alpha}^{B\pi}(p,k,q) = i \int d^4y e^{i(p-k)y} \langle 0|T \{ j_{\alpha 5}^{(\pi)}(y), \tilde{O}_2^u(0) \} |B(p-q)\pi^-(q)\rangle. \quad (3.32)$$

Nach perturbativer Entwicklung des T -Produkts wird dieses Matrixelement genau wie $\Pi_{\pi\pi}^{(O)}$ faktorisiert in eine Pion- und eine B -Meson-Verteilungsfunktion, die definiert ist über [41,42]

$$\begin{aligned} & \langle 0|\bar{d}^{\alpha}(x)b^{\beta}(0)|\bar{B}^0(p-q)\rangle \\ &= \left(\frac{-if_B m_B}{4}\right) \int_0^{\infty} d\omega e^{-i\omega vx} \left[(1+\psi) \left\{ \phi_+^B(\omega) - \frac{\phi_+^B(\omega) - \phi_-^B(\omega)}{2vx} \not{x} \right\} \gamma_5 \right]_{\beta\alpha}, \end{aligned} \quad (3.33)$$

wobei α und β Spinor-Indizes sind und $p-q = m_B v$. Die entsprechenden Diagramme sind in Abbildung 3.18 gezeigt.

Schwierig ist in diesem Fall auch die Wahl der Kinematik. $(p-q)^2 = m_B^2$ und $q^2 = 0$ sind durch den Anfangszustand festgelegt. Hier wurde das π zunächst in den Anfangszustand geschrieben, damit bei der hadronischen Darstellung als Grundzustand der Ein-Pion-Zustand in der Form $\langle 0|j_{\alpha 5}^{\pi}|\pi^-\rangle \cdot \langle \pi^-|\tilde{O}_2^u(0)|\pi^-\bar{B}^0\rangle$ beiträgt. Dies kann dann mit der Dispersionsrelation gleichgesetzt werden, und nach geeigneter analytischer Fortsetzung wird aus dem zweiten Faktor das gesuchte Matrixelement $\langle \pi^-\pi^+|\tilde{O}_2^u|\bar{B}^0\rangle$. Man braucht also zwei unabhängige kinematische Variablen: In der einen wird die Dispersionsrelation geschrieben und anschließend

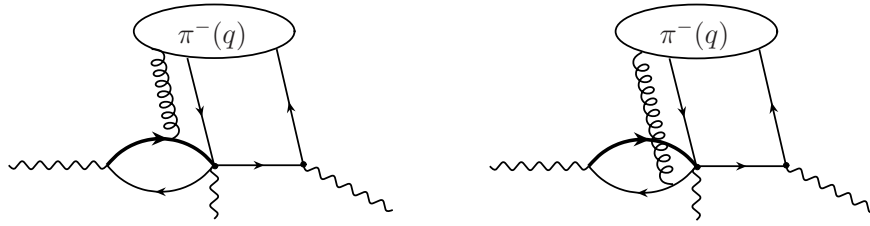


Abbildung 3.19: Weiche Annihilationsdiagramme für die Korrelationsfunktion F .

in der anderen analytisch fortgesetzt. Dies ist nur zu erreichen, wenn wieder ein künstlicher Impuls k am Vertex eingeführt wird. Schließlich muss die Kinematik so gewählt sein, dass die internen Quark-Linien hinreichend virtuell sind.

Diese Anforderungen werden durch die folgende Wahl erfüllt:

$$\begin{aligned}
 (p - k)^2 \equiv s &< 0 & (p - k - q)^2 \equiv P^2 &< 0 \\
 (k - q)^2 &= 0 & q^2 &= 0 \\
 (p - q)^2 &= m_B^2 & & \\
 p^0 - q^0 = E_B &> m_B & q^0 = E_\pi &> 0.
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

Der Impulsübertrag l^2 der internen Quark-Linie ist mit

$$l^2 = \bar{u} s + u P^2 \ll 0$$

weit von der Massenschale entfernt. Die Dispersionsrelation wird dann in der Variablen s geschrieben und nach der analytischen Fortsetzung zu $P^2 \rightarrow m_B^2$ verschwindet auch k wieder.

Vor der Schleifen-Integration muss noch die x -Abhängigkeit in der B -Verteilungsamplitude (3.33) behandelt werden: Der Vorfaktor x kann durch partielle Integration eliminiert werden, der Faktor $1/(vx)$ durch die in der Diplomarbeit [7] gefundene Identität

$$\int d^4x \frac{e^{ipx}}{qx} = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi (2\pi)^4 \delta^4(p - \xi q) \text{sign}(\xi). \tag{3.35}$$

Das Ergebnis ist, dass alle vier Diagramme einzeln verschwinden. Man kann also schlussfolgern, dass dieser Diagrammtyp erst bei höherem Twist und/oder höheren Ordnungen der Störungstheorie beiträgt und daher insgesamt vernachlässigt werden kann.

3.3.2 Berechnung der weichen Diagramme für \tilde{O}_2^u

Bisher wurde davon ausgegangen, dass das ausgetauschte Gluon hinreichend virtuell ist, um es rein störungstheoretisch zu beschreiben - als $O(\alpha_S)$ -Korrektur zur Korrelationsfunktion $F^{(O)}$, die aus technischen Gründen über $\Pi_{\pi\pi}^{(O)}$ beschrieben wurde. Aber auch der Fall, dass das Gluon einen niedrigen Impulsübertrag hat, also „weich“ ist, lässt sich in Lichtkegel-Summenregeln berechnen, wobei diesmal der Umweg über die Faktorisierung von $\Pi_{\pi\pi}^{(O)}$ nicht

nötig (und auch nicht möglich) ist. Der Mechanismus ist in Abbildung 3.19 gezeigt: Die Quarkschleife emittiert ein weiches Gluon, welches dann in das Pion aufgenommen wird. Die Quarks in der Schleife propagieren dabei nach wie vor über eine kurze, lichtartige Distanz, sodass auch die Twist-Entwicklung gültig bleibt.

Die Wechselwirkung virtueller Quarks mit weichen Gluonen wird beschrieben, indem die Quarkpropagatoren in einem externen Gluon-Feld entwickelt werden. Entwicklungsparameter sind dabei der Abstand x^2 sowie der Twist der resultierenden Terme. Statt der Schleifendiagramme vereinfachenden Feynman-Eichung wird nun die *Fock-Schwinger-Eichung* verwendet [43], deren Eichbedingung

$$x_\mu A^\mu(x) = 0 \quad (3.36)$$

ist (mit der Wahl des Koordinatenursprungs $x_0 = 0$ ist sie identisch mit der Lichtkegel-Eichung), sodass $x_\mu \partial^\mu = x_\mu D^\mu$. Sie bricht explizit die Translations-Symmetrie, denn der Punkt $x = 0$ ist jetzt ausgezeichnet; nach Aufsummierung der Diagramme zu eichinvarianten Größen wird sie aber wiederhergestellt. Harte und weiche Beiträge sind einzeln eichinvariant, sodass die Wahl unterschiedlicher Eichbedingungen gerechtfertigt ist.

In [44] (siehe auch [7]) wurde die Entwicklung der Quarkpropagatoren durchgeführt, mit dem Ergebnis, dass sich für das masselose d -Quark

$$S_d(x,0) = -i\langle 0|T\{d(x)\bar{d}(0)\}|0\rangle = \frac{\not{x}}{2\pi^2(x^2)^2} - \frac{1}{16\pi^2 x^2} \int_0^1 dv G^{\tau\rho}(vx) (\not{x}\sigma_{\tau\rho} - 4ivx_\tau\gamma_\rho) + \dots$$

und für das massive b -Quark

$$S_b(0,x) = -i\langle 0|T\{b(0)\bar{b}(x)\}|0\rangle = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ikx} \frac{\not{k} + m_b}{k^2 - m_b^2} - \int_0^1 dv G^{\tau\rho}(vx) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ikx} \left[\frac{1}{2} \frac{\not{k} + m_b}{(k^2 - m_b^2)^2} + \frac{\bar{v}x_\tau\gamma_\rho}{k^2 - m_b^2} \right] + \dots \quad (3.37)$$

ergibt. Die Punkte stehen dabei jeweils für Terme höherer Ordnung in x^2 bzw. $G^2, D^\mu G_{\mu\nu}, \dots$. Letztere resultieren, kombiniert mit den übrigen Quarkfeldern in der Korrelationsfunktion, in Operatoren höheren Twists, die entsprechend unterdrückt sind und hier vernachlässigt werden.

Benutzt man diese Propagatoren für die Entwicklung des T -Produktes im Korrelator (3.1), so kommt man auf Matrixelemente der Form $\langle 0|\bar{u}G^{\mu\nu}d|\pi^-\rangle$. Der niedrigste Twist dieser Quark-Antiquark-Gluon-Operatoren ist 3, bricht man die Reihe nach Twist 4 ab, tragen nur Operatoren mit einem Feldstärke-Operator bei. Das Twist-3-Matrixelement ist

$$\langle 0|\bar{u}(0)\sigma_{\mu\nu}\gamma_5 G_{\alpha\beta}(x_3)d(x_1)|\pi^-(q)\rangle = if_{3\pi} [(q_\alpha q_\mu g_{\beta\nu} - q_\beta q_\mu g_{\alpha\nu}) - (q_\alpha q_\nu g_{\beta\mu} - q_\beta q_\nu g_{\alpha\mu})] \cdot \int_0^1 \mathcal{D}\alpha_i \varphi_{3\pi}(\alpha_i) e^{-iq\cdot(x_1\alpha_1 + x_3\alpha_3)}, \quad (3.38)$$

sein Beitrag zum Korrelator $F^{(O)}$ verschwindet aber nach Spurbildung. Die Twist-4-Beiträge sind

$$\begin{aligned} \langle 0|\bar{u}(0)i\gamma_\mu\tilde{G}_{\alpha\beta}(x_3)d(x_1)|\pi(q)\rangle &= f_\pi \int \mathcal{D}\alpha_i e^{-iq(x_1\alpha_1+x_3\alpha_3)} \\ &\times \left[(g_{\mu\alpha}q_\beta - g_{\mu\beta}q_\alpha)\tilde{\varphi}_\perp(\alpha_i) + q_\mu \frac{z_\beta q_\alpha - z_\alpha q_\beta}{qz} \left(\tilde{\varphi}_\perp(\alpha_i) + \tilde{\varphi}_\parallel(\alpha_i) \right) \right], \end{aligned} \quad (3.39)$$

sowie die Entsprechung mit $i\gamma_\mu \rightarrow \gamma_\mu\gamma_5$, $\tilde{G}_{\alpha\beta} \rightarrow G_{\alpha\beta}$ und $\tilde{\varphi}_{\parallel,\perp} \rightarrow \varphi_{\parallel,\perp}$. Dabei ist $\tilde{G}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta\rho\lambda}G^{\rho\lambda}$, $\mathcal{D}\alpha_i = d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 \delta(1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3)$; x_1 und x_2 sind lichtartig: $x_i = u_i z_i$ mit beliebigem u_i und $z^2 = 0$. Die Form der Wellenfunktion kann z.B. [34] entnommen werden:

$$\begin{aligned} \varphi_\parallel(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= 120\delta_\pi^2 \epsilon_\pi (\alpha_1 - \alpha_2) \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3, \\ \varphi_\perp(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= 30(\alpha_1 - \alpha_2) \alpha_3^2, \\ \tilde{\varphi}_\parallel(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= -120\delta_\pi^2 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \left(\frac{1}{3} + \epsilon_\pi (1 - 3\alpha_3) \right), \\ \tilde{\varphi}_\perp(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= 30\alpha_3^2 \left(\left(\frac{\delta_\pi^2}{3} + 2\delta_\pi^2 \epsilon_\pi (1 - 2\alpha_3) \right) (1 - \alpha_3) \right). \end{aligned}$$

Der Parameter ϵ_π verschwindet im Limes $\mu \rightarrow \infty$ ähnlich wie die Gegenbauer-Momente der Zweiteilchen-Verteilungsamplitude φ_π . Er und die Normierung δ_π^2 sind nichtperturbative Parameter, die z.B. aus QCD Zweipunkt-Summenregeln bestimmt werden können (der Berechnung von δ_π^2 bzw. δ_K^2 widmet sich eigens das Kapitel 4.2).

Da x^2 , y^2 und $(x - y)^2$ nur näherungsweise lichtartig sind, ist die Verwendung von (3.39) streng genommen nicht eindeutig, denn für z könnte ein beliebiger dieser drei Abstände eingesetzt werden. Die sich daraus ergebenden Unterschiede sind dann aber Effekte höherer Ordnung im Sinne der Twist-Entwicklung und im Folgenden wird $z = x$ gewählt. Wie sich am Ende herausstellt ist der zu $z_\alpha/(qz)$ proportionale Teil mit dieser Wahl ohnehin vernachlässigbar klein.

Die nichttriviale Koordinatenabhängigkeit wird wieder mittels partieller Integration bzw. der Identität (3.35) behandelt. Alle Beiträge lassen sich dann auf das Integral

$$\int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} \frac{l_\mu}{l^4((l + (p - q)v\alpha_3q)^2 - m_b^2)} = i(p - q + v\alpha_3q)_\mu \frac{1}{16\pi^2} \int_0^1 dx \frac{x}{m_b^2 - x(p - q + v\alpha_3q)^2}$$

zurückführen und die Korrelationsfunktion ist

$$\begin{aligned}
 & F^{(\tilde{O}_2^y), \text{SoftAnn}}(s \equiv (p-k)^2, P^2, s' \equiv (p-q)^2) \\
 &= \frac{f_\pi m_b^2}{4\pi^2} \int_0^1 dx \int_0^1 dv \int_0^1 \mathcal{D}\alpha_i \left\{ \frac{1}{(-\alpha_1 P^2 - (1-\alpha_1)s)(m_b^2 - x(1-v\alpha_3)s')} \right. \\
 &\quad \cdot \left[(P^2 + 3s' + 2x(1-v)(P^2 - 3s'))\varphi_\perp(\alpha_i) - ((1-4x(1-v))P^2 + 3s')\tilde{\varphi}_\perp(\alpha_i) \right] \\
 &+ \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi \text{sign}(\xi) \frac{P^2}{(-(\alpha_1 + \xi)P^2 - (1-\alpha_1-\xi)s)^2(m_b^2 - x(1-v\alpha_3)s')} \\
 &\quad \left. \left[(P^2 - s')(\varphi_\parallel(\alpha_i) + \varphi_\perp(\alpha_i)) - (P^2 - s')(1-2x(1-v))(\tilde{\varphi}_\parallel(\alpha_i) + \tilde{\varphi}_\perp(\alpha_i)) \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

Die Berechnung des Imaginärteils in s liefert dann Deltafunktionen, die für die α_1 -Integration benutzt werden. Anschließend werden wegen $s < s_0^* \ll |P^2| \sim m_b^2$ Terme der Ordnung s/P^2 im Zähler vernachlässigt, sodass

$$\begin{aligned}
 \text{Im}_s F^{(\tilde{O}_2^y), \text{Ann}, \text{Soft}}(s, P^2, s') &= \frac{f_\pi m_b^2}{4\pi P^2} \int_0^1 dv dx d\alpha_3 \frac{1}{m_b^2 - x(1-v\alpha_3)s'} \\
 &\cdot \left\{ \left(-P^2(1+2(1-v)x) - 3s'(1-2(1-v)x) \right) \varphi_\perp(0, \bar{\alpha}_3, \alpha_3) \right. \\
 &\quad \left. + (P^2(1-4(1-v)x) + 3s') \tilde{\varphi}_\perp(0, \bar{\alpha}_3, \alpha_3) \right. \\
 &+ \frac{s' - P^2}{2} \left[\varphi_\parallel(\bar{\alpha}_3, 0, \alpha_3) - \varphi_\parallel(0, \bar{\alpha}_3, \alpha_3) - (1-2(1-v)x) (\tilde{\varphi}_\parallel(\bar{\alpha}_3, 0, \alpha_3) - \tilde{\varphi}_\parallel(0, \bar{\alpha}_3, \alpha_3)) \right. \\
 &\quad \left. \left. + \varphi_\perp(\bar{\alpha}_3, 0, \alpha_3) - \varphi_\perp(0, \bar{\alpha}_3, \alpha_3) - (1-2(1-v)x) (\tilde{\varphi}_\perp(\bar{\alpha}_3, 0, \alpha_3) - \tilde{\varphi}_\perp(0, \bar{\alpha}_3, \alpha_3)) \right] \right\}
 \end{aligned}$$

($\bar{\alpha}_3 = 1 - \alpha_3$). Der Term in der [eckigen] Klammer ist dabei der analytisch integrierte ξ -abhängige Teil, der aus dem zu $z_\alpha/(qz)$ proportionalem Term in der Twist-4-Verteilungsamplitude (3.39) resultiert. Da er numerisch sehr klein ($< 1\%$) ist, wird er ab jetzt nicht mehr ausgeschrieben.

Die analytische Fortsetzung in P^2 ist trivial. Auch der Imaginärteil in $s' = (p-q)^2$ lässt sich durch Anwendung der Standardformeln leicht berechnen. Darin treten wiederum Deltafunktionen auf, die für die x -Integration benutzt werden. Das Resultat nimmt dann die

einfache Form

$$\begin{aligned}
 \langle \pi^- \pi^+ | \tilde{O}_2^u | \bar{B}^0 \rangle_A^{soft} &= i \frac{m_b^2}{16\pi^2 f_B m_B^4} \int_0^{s_0^\pi} ds e^{-s/M^2} \int_{m_b^2}^{s_0^B} \frac{ds'}{s'} e^{m_B^2/M^2 - s'/M^2} \\
 &\cdot \int_{m_b^2/s'}^1 \frac{dv}{v} \int_{1-v}^1 \frac{d\alpha_3}{\alpha_3} \left\{ \left[m_B^2 + 3s' + 2(m_B^2 - 3s') \frac{m_b^2(v - \bar{\alpha}_3)}{v\alpha_3 s'} \right] \varphi_\perp(0, \bar{\alpha}_3, \alpha_3) \right. \\
 &\quad \left. - \left[m_B^2 + 3s' - 4m_B^2 \frac{m_b^2(v - \bar{\alpha}_3)}{v\alpha_3 s'} \right] \tilde{\varphi}_\perp(0, \bar{\alpha}_3, \alpha_3) \right\} \cdot \{1 + O(s_0^\pi/P^2)\}
 \end{aligned} \tag{3.40}$$

an. In der hier verwendeten Näherung trägt dieser Teil keinen Imaginärteil und damit nicht zur starken Phase der Zerfallsamplitude bei.

3.3.3 Faktoriserbarer Beitrag von O_6

Eingangs wurde gezeigt, dass die Annihilationsdiagramme mit den Strom-Strom-Operatoren $O_{1,2}^u$ verschwinden, wenn man die Amplitude faktorisiert, da der Vektorstrom erhalten ist. Anders bei dem Operator O_6^d , der nach Fierz-Transformation aus $S \pm P$ -Strömen besteht:

$$\begin{aligned}
 \langle \pi^+ \pi^- | O_6^d | \bar{B}^0 \rangle_{A,fakt} &= -2 \langle \pi^+ \pi^- | (\bar{d}d)_{S+P} | 0 \rangle \langle 0 | (\bar{d}b)_{S-P} | \bar{B}^0 \rangle, \\
 O_6^d &= -2(\bar{d}(1 + \gamma_5)d)(\bar{d}(1 - \gamma_5)d). \tag{3.41}
 \end{aligned}$$

Aus dem rechten Faktor wird nach Anwendung der QCD Bewegungsgleichungen die B -Meson-Zerfallskonstante $\langle 0 | \bar{d}\gamma_5 b | B \rangle = -im_B^2 f_B / m_b$ (der Skalare Anteil des $S - P$ -Stroms trägt wegen der Paritätserhaltung nicht bei), der linke ist ein ein skalarer Pion-Formfaktor,

$$\langle \pi^-(p) \pi^+(-q) | \bar{d}d | 0 \rangle = F_\pi^S((p - q)^2). \tag{3.42}$$

Dieser beschreibt die Erzeugung eines Pion-Paares aus dem skalarem Quarkstrom $\bar{d}d$ bei zeitartigem Impulsübertrag $(p - q)^2 = m_B^2$. Insgesamt ist also

$$\langle \pi^+ \pi^- | O_6^d | \bar{B}^0 \rangle = -2i \frac{m_b}{m_B^2} f_B F_\pi^S(m_B^2)$$

Der skalare Pion-Formfaktor F_π^S wird nun mit Lichtkegel-Summenregeln auf die gleiche Weise berechnet, wie in [45] der elektromagnetische Formfaktor berechnet wurde, und zwar zunächst für raumartigen Impulsübertrag $P^2 \equiv (p - q)^2 < 0$. Erst am Ende wird wieder analytisch zu $P^2 = m_B^2$ fortgesetzt. Da der Wilson-Koeffizient c_6 , mit dem das Matrixelement (3.41) multipliziert wird, sehr klein ist, genügt eine Berechnung ohne α_S -Korrekturen. Zudem



Abbildung 3.20: Korrelationsfunktion für den skalaren Pion-Formfaktor mit den externen Strömen $j_0 = \bar{d}d$ und $j_{\alpha 5}^{(\pi)} = \bar{u}\gamma_\alpha\gamma_5 d$.

zeigt die Erfahrung mit dem elektromagnetischem Formfaktor, dass diese wahrscheinlich klein sind.

Die Korrelationsfunktion ist dieses Mal

$$T_\alpha(p, q) = i \int d^4x e^{ipx} \langle 0 | T \{ j_{\alpha 5}^{(\pi)}(x) \bar{d}d(0) \} | \pi^-(q) \rangle,$$

wobei $j_{\alpha 5}^{(\pi)} = \bar{u}\gamma_\alpha\gamma_5 d$ der gleiche Axialvektorstrom wie in (3.1) ist (siehe Abbildung 3.20a). Führt man zwischen den Strömen einen kompletten Satz hadronischer Zustände ein, erhält man (mit $m_\pi = 0$) die hadronische Darstellung

$$T_\alpha(p, q) = \frac{if_\pi F_\pi^S(P^2)}{-p^2} p_\alpha + \int_{s_h^\pi}^\infty ds \frac{\rho_\alpha(p, q, s)}{s - p^2}. \quad (3.43)$$

Mittels Störungstheorie und Twistentwicklung kann man die Korrelationsfunktion andererseits auch wieder in QCD berechnen und das Ergebnis mit (3.43) gleichsetzen. Da der Grundzustandsbeitrag in der hadronischen Darstellung proportional zu p_α ist, ist in der Zerlegung nach Lorentz-Strukturen, $T_\alpha(p, q) = T(p^2, (P^2)p_\alpha + T'(p^2, P^2)q_\alpha$ nur der erste Term relevant. Der so berechnete Korrelator wird als Dispersionsrelation geschrieben und mit der hadronischen Darstellung gleichgesetzt,

$$T(p^2 < 0, P^2 < 0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty ds \frac{\text{Im}_s T(s, P^2)}{s - p^2} = \frac{if_\pi F_\pi^S(P^2)}{-p^2} + \int_{s_h^\pi}^\infty ds \frac{\rho(s, P^2)}{s - p^2},$$

und nach Subtraktion der angeregten Zustände und Anwenden der Borel-Transformation bezüglich p^2 auf beiden Seiten liest sich die Summenregel

$$F_\pi^S(P^2) = -i \frac{1}{\pi f_\pi} \int_0^{s_0^\pi} ds e^{s/M^2} \text{Im}_s T(s, P^2). \quad (3.44)$$

Den führenden Term in $T(p^2, P^2)$ erhält man durch Einsetzen des freien Feynman-Propagators für das kontrahierte d -Feld. Dabei trägt nur die in (3.6) definierte Twist-3-Verteilungsamplitude bei, und

$$T(p^2, P^2) = i \mu_\pi f_\pi \int_0^1 \frac{du}{-p^2 u - P^2 \bar{u}} \left(\varphi_P(u) - \frac{1}{6} \frac{d}{du} \varphi_\sigma(u) \right).$$

Ganz genau wie bei den weichen Annihilationsdiagrammen beschrieben, können auch Diagramme mit weichen Gluonen berücksichtigt werden, die sich dann als Beiträge von Quark-Antiquark-Gluon-Verteilungsamplituden im Ergebnis zeigen (siehe Abb. 3.20b). In diesem Fall trägt aber keins der Diagramme zu der Lorentz-Struktur $\sim p_\alpha$ bei [4].

Der Imaginärteil bezüglich $s \equiv p^2$ ist wieder sehr einfach und liefert die Delta-Funktion $\delta(u s + \bar{u} P^2)$, die u auf $u = -P^2/(s - P^2)$ festlegt. Mit $s < s_0^\pi \ll |P^2| \sim m_B^2$ kann dies aber zu 1 genähert werden, sodass nur der Endpunkt der Verteilungsamplituden beiträgt. Nach der analytischen Fortsetzung zu $P^2 = m_B^2$ ist das Ergebnis

$$F_\pi^S(m_B^2) = -\frac{\mu_\pi}{m_B^2} M^2 \left(1 - e^{-s_0^\pi/M^2} \right) \left(\varphi_P(u) - \frac{1}{6} \frac{d}{du} \varphi_\sigma(u) \right) \Big|_{u=1} \cdot (1 + O(s_0^\pi/m_B^2)).$$

3.3.4 Heavy Quark Limit und QCD Faktorisierung

In der QCD Faktorisierung sind nur die harten Annihilationsdiagramme berücksichtigt, bei denen ein Quark-Antiquark-Paar aus dem elektroschwachen Vertex und ein weiteres aus einem Quark-Antiquark-Gluon-Vertex entstehen, die zusammen die zwei Pionen im Endzustand formen. In den übrigen Diagrammen (Vertex- und faktorisierebare) entsteht im störungstheoretischen Teil (dem „harten Kern“) jedoch nur ein Quark-Antiquark-Paar. Diese Diagramme lassen sich daher nicht in zwei Pion-Verteilungsamplituden faktorisieren.

Aber auch die harten Annihilationsdiagramme bereiten Probleme: Das Konvolutionsintegral (2.23) hat logarithmische Endpunkt-Divergenzen. Genau wie der Twist-3-Beitrag zur harten Emission wird diese logarithmische Divergenz durch einen generischen Logarithmus ersetzt:

$$r_A^{QCDF} \sim \int_0^1 du dv \varphi_\pi(u) \varphi_\pi(v) \left(\frac{1}{v(1-u\bar{v})} + \frac{1}{\bar{u}^2 v} \right), \quad \int_0^1 \frac{du}{\bar{u}} \rightarrow X_A = (1 + \rho_A e^{i\varphi_A}) \log \frac{m_b}{\Lambda_h}. \quad (3.45)$$

Dabei wird $\Lambda_h = 500$ MeV gesetzt; $\rho_A < 1$ und die Phase φ_A sind unbestimmt, werden aber als klein angenommen und in den üblichen numerischen Analysen vernachlässigt. Mit dieser Wahl erhält man aus QCD Faktorisierung

$$r_A^{QCDF} \approx 8 \times 10^{-3}$$

Da in der Isospin-0-Amplitude mit diesem Zahlenwert eine Diskrepanz zwischen Theorie und Daten festgestellt wurde, liegt die Vermutung nahe, die Schätzung könne eine Größenordnung

zu klein ausgefallen sein und/oder die Phase φ_A könnte signifikant sein. Durch einen weiteren Vorgriff auf die numerische Auswertung im letzten Teil dieses Kapitels kann diese Frage verneint werden: Das Ergebnis

$$r_A^{LCSR} = ([-0,67_{-0,87}^{+0,47}] + i[3,6_{-1,1}^{+0,5}]) \times 10^{-3}$$

bestätigt, dass der Beitrag insgesamt klein ist, die Größenordnung für Λ_h also richtig ist. Gleichwohl ist es nicht konsistent mit der Wahl $\rho_A = 0$. Es lässt sich auch kein Wert für ρ_A finden, für den QCD Faktorisierung und Lichtkegel-Summenregeln diagrammweise gleich sind (siehe Anhang A). Das ist keine Überraschung, denn die Verwendung von dem gleichen Wert für X_A in allen Annihilationsdiagrammen wird der Situation nicht gerecht.

Interessant ist aber die Frage, warum in QCD Faktorisierung eine Endpunkt-Divergenz auftritt, nicht aber in den Lichtkegel-Summenregeln. Dazu kann das Ergebnis (3.30) für die harten Annihilationsdiagramme genau wie schon das für die harten Emissionsdiagramme in $1/m_b$ entwickelt werden. Das Resultat

$$r_A^{hard,LCSR} \sim \frac{\Lambda}{m_b} \int_0^1 du \frac{\varphi_\pi(u)}{u^2} \int_0^1 dv \frac{\varphi_\pi(v)}{v} + \dots$$

ist zwar formal mit $1/m_b$ zum Emissionsdiagramm unterdrückt, zeigt aber genau die gleiche Endpunkt-Divergenz für $u \rightarrow 0$ wie sie in der QCD Faktorisierung auftritt. Dort aber kann sie als Konsequenz der Tatsache verstanden werden, dass der Impuls des leichten Quarks im B -Meson vernachlässigt wird, was wiederum durch die zu Grunde liegende $1/m_b$ -Entwicklung bedingt wird. Wird dieser Impuls dagegen – zu illustrativen Zwecken – berücksichtigt, wie er von der B -Meson-Verteilungsamplitude (3.33) vorgegeben wird, so erhält man ein Ergebnis [4],

$$r_A^{QCDF} \sim \int_0^\infty d\omega \phi_B^+(\omega) \int_0^1 du \varphi_\pi(u) \int_0^1 dv \varphi_\pi(v) \times \left[\frac{1}{\bar{u}v(\bar{u} - \omega/m_B)} + \frac{\bar{u} + \omega/m_B}{\bar{u}v(1 - (u - \omega/m_B)(\bar{v} - \omega/m_B))} \right],$$

das in der Tat endlich ist und nur im Limes $m_b \rightarrow \infty$ in den divergenten Ausdruck (3.45) übergeht. Durch den Pol bei $\bar{u} = \omega/m_b$ hat es sogar einen Imaginärteil. Setzt man Zahlenwerte ein, so hat das Ergebnis eine ähnliche Größenordnung wie das aus den Lichtkegel-Summenregeln.

3.3.5 Diskussion

Mit Hilfe der Lichtkegel-Summenregeln konnten die Annihilations-Diagramme erstmals ohne Einführung neuer Parameter berechnet werden. Das Ergebnis ist frei von Divergenzen –

anders als in der QCD Faktorisierung, wo die Divergenz auf das Vernachlässigen der Bewegung des leichten Quarks im B -Meson zurückzuführen ist. Insbesondere wurde dabei auch ein Imaginärteil von den harten Annihilationsdiagrammen gefunden, ein neuer Beitrag zur starken Phase der Zerfallsamplitude. Die Annihilationsdiagramme sind dabei insgesamt mit $1/m_b$ gegenüber den Emissionsdiagrammen unterdrückt. Hervorzuheben ist auch die Tatsache, dass ein faktorisierbarer Annihilationsbeitrag von dem Operator O_6^d gefunden wurde, der in anderen Ansätzen fehlt.

Die Berechnung der harten Annihilationsdiagramme basiert dabei auf der Twist-2-Näherung für den faktorisierten Korrelator $\Pi_{\pi\pi}^{(O)}$. In QCD Faktorisierung wurde auch der Twist-3-Beitrag berechnet; er enthält dieselbe Endpunkt-Divergenz wie der Twist-2-Term. In Lichtkegel-Summenregel ist das Ergebnis ebenfalls divergent, wenn man in $\Pi_{\pi\pi}^{(O)}$ die Twist-3-Verteilungsamplituden einsetzt. Der Grund ist leicht zu verstehen: Letztere verschwinden nicht am Endpunkt $u, v \rightarrow 0$, sodass die Divergenz des Gluon-Propagators $1/uv P^2$ nicht gekürzt wird. Insbesondere bedeutet dies, dass die kinematische Region, in der das Gluon nicht mehr perturbativ ist, nicht unterdrückt ist, sodass der Ansatz an sich nicht mehr gültig ist. Ganz anders stellt sich aber die Situation dar, wenn man zurück zu der eigentlichen Korrelationsfunktion $F^{(O)}$ geht. Dort tritt nur eine Pion-Verteilungsamplitude auf. Setzt man für diese den Twist-3-Beitrag ein, so verschwinden die Diagramme bereits nach Dirac-Spurbildung. Daraus kann man schließen, dass die Divergenz in Twist 3 ein Artefakt der Faktorisierung von $\Pi_{\pi\pi}^{(O)}$ ist und es in Wirklichkeit keinen Twist-3-Beitrag zu diesen Diagrammen gibt.

3.4 Auswertung

Die neuen Berechnungen der Annihilations- und Emissionsdiagramme können nun zusammen mit anderen Ergebnissen aus Lichtkegel-Summenregeln verwendet werden, um die Verzweigungsverhältnisse und CP -Asymmetrien der $B \rightarrow \pi\pi$ -Zerfälle zu berechnen. Als Parameter für die Berechnung gehen jetzt nur noch prozessunabhängige Größen ein, sodass das Ergebnis als echte Vorhersage zu werten ist. Einige der Parameter, die nicht (wie z.B. f_π) direkt gemessen werden können, sind selbst aus Lichtkegel-Summenregeln (wie der $B \rightarrow \pi$ -Formfaktor $f_{B\pi}$) oder QCD Zweipunkt-Summenregeln (wie f_B und die Parameter der Verteilungsamplituden) berechenbar. Die Strategie der numerischen Auswertung ist, für diese direkt die entsprechenden Formeln einzusetzen. Dadurch kann eine konsistente Fehlerabschätzung erreicht werden, denn viele der Formeln hängen von den gleichen Parametern ab.

3.4.1 Parameterwahl

Summenregeln in B -Kanal

Die Zweipunkt-Summenregel für f_B , die Lichtkegel-Summenregel für $f_{B\pi}$ und die für die $B \rightarrow \pi\pi$ -Zerfallsamplituden haben alle gemeinsam, dass anstatt des B -Mesons ein externer pseudoskalarer Strom eingesetzt wird, in dessen Impulsübertrag eine Dispersionsrelation und eine Borel-Transformation durchgeführt wird. In der hadronischen Zustandsdichte

$\rho(s')$ tragen dann jeweils die gleichen angeregten Zustände bei. Für die zugehörigen Parameter werden daher gleiche Werte eingesetzt. Für die b -Quarkmasse wird wie in $f_{B\pi}$ die Einschleifen-Pol-Masse eingesetzt, die sich aus der \overline{MS} -Masse $\bar{m}_b(\bar{m}_b) = 4,25 \pm 0,15$ GeV [20] zu $m_b = 4,7 \pm 0,1$ GeV ergibt. Das Intervall für den Borel-Parameter, $M'^2 = 10 \pm 2$ GeV², und der Dualitäts-Schwellenwert $s_0^B = 35 \mp 2$ GeV² (der Fehler in letzterem ist mit dem von m_b korreliert) folgen aus der f_B -Summenregel.

Renormierungsskala

Die Renormierungsskala wird zu $\mu_b = \sqrt{m_B^2 - m_b^2} = 2,4$ GeV gesetzt, was nahe bei $m_b/2$ liegt. Dies entspricht auch der durchschnittlichen Virtualität der Quarks in den Korrelationsfunktionen, für die M' ein Maß ist. Die Wilson-Koeffizienten des effektiven Hamiltonoperators bei dieser Skala werden aus Tabelle 2.1 (Seite 39) entnommen. Die zu $\alpha_S(M_Z) = 0,1187$ [20] gemessene Kopplungskonstante ist bei dieser Skala $\alpha_S(m_b/2) = 0,284$. Um die Effekte höherer Ordnung der Störungstheorie abzuschätzen, wird für die Fehlerberechnung die Renormierungsskala bis $2\mu_b$ variiert.

Summenregeln im π -Kanal

In einigen Rechnungen ist auch ein Pion durch einen externen (axialen) Strom ersetzt worden. Für die Dispersionsrelation und Borel-Transformation in dessen Impulsübertrag werden die Parameter eingesetzt, die sich aus der Zweipunkt-Summenregel für f_π ergeben [46]: $M^2 = 1,0_{-0,2}^{+0,5}$ GeV² und $s_0^\pi = 0,7$ GeV². Für f_π selbst wird indes der Messwert $f_\pi = 131$ MeV eingesetzt.

Kondensate

Für einige Parameter (f_B [47] und einige Parameter der Pion-Verteilungsamplitude) wird das Ergebnis einer Berechnung mit Zweipunkt-Summenregeln eingesetzt. In dieser Methode treten als Parameter Vakuum-Kondensate auf, die die Tatsache reflektieren, dass die QCD-Felder im physikalischen Vakuum nicht verschwinden⁷. Die verwendeten Zahlenwerte sind $\langle 0|\bar{q}q|0\rangle(1 \text{ GeV}) = (-0.240 \pm 0.010 \text{ GeV})^3$ (was über die PCAC-Relation $\mu_\pi = -2\langle\bar{q}q\rangle/f_\pi^2$ auch $\mu_\pi(1 \text{ GeV}) = 1,61 \pm 0,20$ GeV festlegt), $\langle 0|G^2|0\rangle(1 \text{ GeV}) = 0.012 \pm 0.006 \text{ GeV}^4$ und $\langle 0|\bar{q}Gq|0\rangle = (0.8 \pm 0.2 \text{ GeV}) \times \langle 0|\bar{q}q|0\rangle(1 \text{ GeV})$. Die Skalenabhängigkeit des Quark-Gluon-Kondensates ist dabei vernachlässigbar, alle anderen werden bis zur gemeinsamen Skala μ_b evolviert.

Pion-Verteilungsamplituden

Für die Pion-Verteilungsamplitude (3.6) in Twist 2 werden in der Zerlegung (3.7) in Gegenbauer-Momente nur a_2^π und a_4^π berücksichtigt. Während ein Fit der Lichtkegel-Summenregeln

⁷In den in Kapitel 4 vorgestellten Zweipunkt-Summenregeln werden diese Beiträge ebenfalls behandelt.

für $f_{B\pi}$ an die Messdaten für $B \rightarrow \pi l\nu$ [48] die Bereiche

$$a_2^\pi(1 \text{ GeV}) = 0.1 \pm 0.1, \quad a_4^\pi(1 \text{ GeV}) \geq -0.07$$

liefert, wurde durch eine Analyse des $\pi\gamma^*\gamma$ -Formfaktors [49] die Einschränkung

$$a_2^\pi(1 \text{ GeV}) + a_4^\pi(1 \text{ GeV}) = 0.1 \pm 0.1$$

erhalten. Kombiniert man diese beiden Resultate, erhält man die Intervalle

$$a_2^\pi(1 \text{ GeV}) = 0 \div 0.27, \quad a_4^\pi(1 \text{ GeV}) = -0.07 \div 0.20, \quad (3.46)$$

die konsistent mit anderen Literaturwerten sind (und insbesondere mit dem Ergebnis (4.22) aus Kapitel 4), aber auch eine rein asymptotische Verteilungsamplitude ($a_n^\pi = 0$) einschließen. Für die weitere Fehlerauswertung werden beide Parameter unabhängig um die Mittelwerte der Intervalle variiert.

Schließlich bleiben noch die Parameter der Twist-3 und Twist-4 Dreiteilchen-Verteilungsamplituden (3.6), für die Ergebnisse aus Zweipunkt-Summenregeln [36, 50, 51], $f_{3\pi}(1 \text{ GeV}) = 0.0035 \pm 0.0018 \text{ GeV}^2$, $\omega_{3\pi}(1 \text{ GeV}) = -2.88$ und $\delta_\pi(1 \text{ GeV}) = 0.17 \pm 0.05 \text{ GeV}^2$, $\epsilon_\pi(1 \text{ GeV}) = 0.5$, eingesetzt werden. Auch alle diese Parameter werden zur gemeinsamen Skala μ_b evolviert.

3.4.2 Numerische Resultate

Mit diesen Eingabewerten können wir jetzt zur Tat schreiten und die Parameter der Amplitudenzerlegung aus Abschnitt 2.2.5 auswerten. Die Unsicherheiten werden dabei wie folgt abgeschätzt: Der Zentralwert ergibt sich aus den Zentralwerten aller Eingabeparameter. Dann wird jeder davon einzeln in seinem Fehlerintervall variiert und der Effekt auf das Ergebnis als Einzelfehler gewertet. Anschließend werden alle Einzelfehler, getrennt nach positiven und negativen, quadratisch addiert und als Unsicherheit des Ergebnisses angegeben. (Ein Scan über die Intervalle der Eingabeparameter, der eigentlich die bessere Wahl wäre, ist wegen des enormen Rechenaufwandes, der durch zahlreiche numerische Integrationen entsteht, nicht machbar.)

Wir beginnen mit dem $B \rightarrow \pi$ -Formfaktor, der mit den obigen Eingabewerten

$$f_{B\pi}^+(0) = 0,26 \pm 0,03$$

ist. Dieses Intervall ist konsistent mit der Neuberechnung [52], wo auch eine neue, kleine Twist-3 $O(\alpha_S)$ -Korrektur berücksichtigt wurde.

Für die Emissions-Diagramme der Strom-Strom-Operatoren mit hartem Gluon-Austausch aus Abschnitt 3.2 ist dann in Twist 2:

$$r_E^{hard, Tw2} = \left([-1, 9_{-0,1}^{+0,5}] + i[-3, 6_{-0,4}^{+1,0}] \right) \times 10^{-2}.$$

Für den Twist-3-Beitrag liefern weder Lichtkegel-Summenregeln noch QCD Faktorisierung ein endliches Resultat. Als Abschätzung wird hier das gleiche Intervall addiert wie in QCD Faktorisierung:

$$r_E^{hard,Tw3} = (2,5_{-2,7}^{+3,1}) \times 10^{-2}.$$

Die Emissions-Diagramme mit weichen Gluonen werden aus [31] entnommen:

$$r_E^{soft} = (1,8_{-0,7}^{+0,5}) \times 10^{-2},$$

und die Summe dieser Beiträge mit korrelierter Fehlerabschätzung ist

$$r_E = ([2,4 \pm 3,2] + i[-3,6_{-0,4}^{+1,0}]) \times 10^{-2}.$$

Die entsprechenden harten Korrekturen mit den Pinguin-Operatoren $O_{5,6}$, die wegen der kleinen Wilson-Koeffizienten ohnehin wenig relevant sind, wurden in dieser Arbeit nicht betrachtet, daher wird hier auf QCD Faktorisierung zurückgegriffen:

$$r_E^{(6),hard} = (-2,7 \pm 0,4) \times 10^{-2}$$

Deren weiche Korrekturen mit Twist ≤ 4 verschwinden unterdessen [7].

Das Resultat der in Abschnitt 3.3 berechneten Annihilationsdiagramme für die Strom-Strom-Operatoren ist

$$r_A = ([-0,67_{-0,87}^{+0,47}] + i[3,6_{-1,1}^{+0,5}]) \times 10^{-3}$$

und der neu gefundene, faktorisierbare Beitrag von O_6 :

$$R_A^6 = 0,23_{-0,08}^{+0,05}.$$

Letzterer mag groß erscheinen, multipliziert mit dem Vorfaktor $(c_6 + c_5/3)$ ist dieser Effekt aber von ähnlicher Größenordnung wie $c_1 r_A$. Nichtfaktorisierbare Korrekturen dazu werden daher vernachlässigt: $r_A^{5,6} \approx 0$.

Die Pinguin-Diagramme schließlich wurden in [32,33] berechnet und für die Strom-Strom-Operatoren ist

$$\begin{aligned} r_{P_q} &= [0,11_{-0,36}^{+0,02} + i(1,1_{-0,1}^{+0,2})] \times 10^{-2}, & r_{P_c} &= [-0,18_{-0,68}^{+0,06} + i(-0,80_{-0,08}^{+0,17})] \times 10^{-2}, \\ r_{P_b} &= (0,93_{-0,65}^{+0,09}) \times 10^{-2}, & r_{8g}^{(\pi\pi)} &= -(3,8_{-0,4}^{+1,3}) \times 10^{-2}, \end{aligned}$$

Für die entsprechenden Matrixelemente von $O_{3,4}$ ergibt sich aus der Loop-Integration in dimensionaler Regularisierung die bereits erwähnte endliche Differenz und $\bar{r}_{P_{q,c,b}}^{(\pi\pi)} \simeq r_{P_{q,c,b}}^{(\pi\pi)} - (\alpha_s C_F)/(36\pi)$. Die Pinguindiagramme der Operatoren $O_{5,6}$, die eine $V + A$ -Struktur haben, ergeben sich (bis auf Vorzeichen) aus denen von $O_{1,2}$, da jeweils nur der Vektor- oder Axialvektoranteil beiträgt. Dies ist in der Zerlegung (2.31) bereits berücksichtigt worden.

Bevor es zur Phänomenologie geht, kurz noch ein Wort zur Qualität der verwendeten Lichtkegel-Summenregeln. Ein wichtiges Maß dafür ist die Abhängigkeit vom Borel-Parameter, die möglichst klein sein sollte. Dabei können die einzelnen Parameter in der Zerlegung

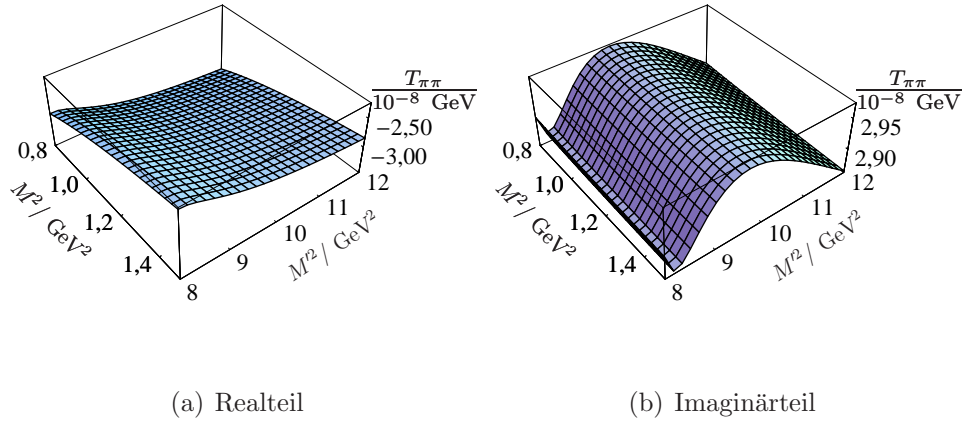


Abbildung 3.21: $T_{\pi\pi}$ in Abhängigkeit der Borel-Parameter M^2 und M'^2 (für alle anderen Eingabeparameter wurden die Zentralwerte eingesetzt).

der Amplituden aber nicht unabhängig voneinander betrachtet werden, denn sie entsprechen verschiedenen Beiträgen zu ein und derselben Korrelationsfunktion, und in Lichtkegel-Summenregeln wird das Resultat oft erst durch höhere Ordnungen in α_s und der Twist-Entwicklung stabilisiert. Um eine Größe auszuwählen, die von CKM -Winkeln unabhängig ist, wurde exemplarisch der Teil $T_{\pi\pi} = |\lambda_u| \left(A_2^{(u,1,2)} + A_0^{(u,1,2)} + A_0^{(\geq 3)} \right)$ der Amplitude untersucht: Abbildung 3.21 zeigt, wie Real- und Imaginärteil dieser Größe von den Borel-Parametern im Pion- und B -Meson-Kanal, M^2 und M'^2 , abhängen. An der Einteilung der z -Achse ist abzulesen, dass die Variation in der Tat nur schwach ist und sich im Rahmen der üblichen Genauigkeit von Summenregeln von ca. 20% bewegt.

Für die Berechnung der Verzweigungsverhältnisse werden schließlich die B -Lebensdauern und die CKM -Parameter benötigt, die aus [3] entnommen werden: Nach quadratischer Addition von statistischem und systematischem Fehler wird $|V_{ub}| = (4,22 \pm 0,26) \cdot 10^{-3}$ gesetzt und für den Winkel γ das konservative Intervall $\gamma = (58,6 \pm 10)^\circ$ verwendet. Die berechneten Verzweigungsverhältnisse und deren Gegenüberstellung mit den aktuellen Messwerten der B -Fabriken [26] sind dann:

$\times 10^{-6}$	$\text{Br}(B^+ \rightarrow \pi^+\pi^0)$	$\text{Br}(B^0 \rightarrow \pi^+\pi^-)$	$\text{Br}(B^0 \rightarrow \pi^0\pi^0)$
Exp. Mittelwert	$5,5 \pm 0,6$	$5,0 \pm 0,4$	$1,45 \pm 0,29$
Theorie	$6,6_{-1,3-0,8}^{+1,8+0,8}$	$9,7_{-1,9-1,2}^{+2,3+1,2}$	$0,25_{-0,08-0,06}^{+0,12+0,07}$

Während bei den Messwerten die Fehler wieder quadratisch addiert wurden, wurden im theoretischen Resultat die Unsicherheiten aus den CKM -Parametern als zweites separat geschrieben. Die Resultate für die CP -Asymmetrien sind:

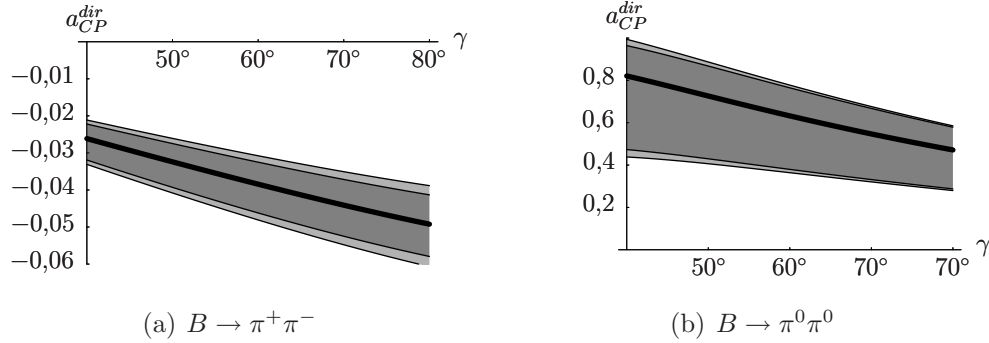


Abbildung 3.22: Vorhersagen für die Direkte CP -Asymmetrie a_{CP}^{dir} als Funktion des CKM -Winkels γ . Der dunkelgraue Bereich zeigt die theoretische Unsicherheit, der hellgraue die von $|V_{ub}|$.

	$a_{CP}^{dir}(B^+ \rightarrow \pi^+\pi^0)$	$a_{CP}^{dir}(B^0 \rightarrow \pi^+\pi^-)$	$a_{CP}^{dir}(B^0 \rightarrow \pi^0\pi^0)$
BaBar	-0.01 ± 0.10	0.09 ± 0.16	0.12 ± 0.56
Belle	0.02 ± 0.08	0.56 ± 0.14	0.44 ± 0.56
Exp.Mittel	0.01 ± 0.06	0.37 ± 0.10	0.28 ± 0.40
Theorie	0	$-0.04 \pm 0.01 \pm 0.01$	$0.65^{+0.13+0.10}_{-0.26-0.09}$

Abbildung 3.22 zeigt die Abhängigkeit der Vorhersagen vom CKM -Winkel γ . Zum Vergleich mit Ergebnissen aus parametrischen Fits sind schließlich die in (2.32) auf Seite 52 definierten Parameter T , P und C interessant. Für die Parametrisierung in [29],

$$x e^{i\Delta} = \frac{C}{T}, \quad d e^{i\Theta} = -\frac{P}{T},$$

ist das Ergebnis

$$\begin{aligned} x &= 0,27^{+0,09}_{-0,07}, & \Delta &= (-17^{+9}_{-6})^\circ, \\ d &= 0,22^{+0,02+0,01}_{-0,03-0,01}, & \Theta &= (-173 \pm 1)^\circ. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Der zweite Fehlerwert in d ist dabei die Unsicherheit von $|V_{ub}|$.

3.4.3 Diskussion

Im Vergleich zum Resultat aus naiver Faktorisierung hat sich qualitativ nur wenig geändert. Zwar ist insbesondere das vormals viel zu klein vorausgesagte Verzweigungsverhältnis für $B^0 \rightarrow \pi^0\pi^0$ etwas näher an den Messwert gelangt, trotzdem sind die Verzweigungsverhältnisse insgesamt inkonsistent mit den Daten. Das gleiche gilt für den Vergleich der Parameter (3.47) mit dem in [29] vorgenommenen Fit.

In Abschnitt 2.2.5 wurde dargelegt, dass die Diskrepanz durch einen neuen, großen und negativen Beitrag zur Isospin-0-Amplitude behoben werden könnte. Der in dieser Arbeit berechnete Annihilationsmechanismus ist aber zu klein, um Theorie und Daten zusammenzubringen. Auch die Neuberechnung der Emissionsdiagramme ergab keine Annäherung, sondern bestätigte den Zahlenwert aus der QCD Faktorisierung. Es stellt sich also die Frage, wo der fehlende Beitrag herkommt – wenn nicht von neuer Physik. Versuche, die Diskrepanz durch höhere perturbative Ordnungen in QCD Faktorisierung zu erklären [53], verbessern die Situation nur unwesentlich. Diese höheren Ordnungen tragen zur Isospin-0- und zur Isospin-2-Amplitude gleichermaßen bei. Als Ausweg blieben noch die Pinguin-Annihilationsdiagramme, die durch eine gluonische Resonanz zum Zusammenbruch der Lichtkegel- bzw. Störungsentwicklung führen könnten. Allerdings würde eine solche Resonanz auch den Zerfall $B^0 \rightarrow \rho^0 \rho^0$ verstärken; ein daraus resultierendes mit $B^0 \rightarrow \pi^0 \pi^0$ vergleichbares Verzweungsverhältnis konnte aber experimentell ausgeschlossen werden. Aufgrund der großen theoretischen und experimentellen Unsicherheiten wäre ein Schluss auf Physik jenseits des Standardmodelles aber in jedem Falle verfrüht.

Kapitel 4

Kaon versus Pion: $SU(3)_{fl}$ -Verletzung

Die Zerfälle $B \rightarrow K\pi$, $B_s \rightarrow K\pi$, $B \rightarrow KK$ und $B_s \rightarrow KK$ haben mit $B \rightarrow \pi\pi$ vieles gemeinsam: Alle beteiligten Mesonen sind weiter Pseudoskalare und die Zerfallsprodukte im Vergleich zum B leicht, also hochenergetisch. Daher lässt sich diese gesamte Klasse von Zerfällen mit genau den gleichen Methoden, angefangen von der Operatorproduktentwicklung für den effektiven Hamiltonoperator bis zu QCD Faktorisierung oder Lichtkegel-Summenregeln behandeln. Diese Zerfälle haben ein großes phänomenologisches Potenzial: Die geladenen $B^\pm \rightarrow (\pi K)^\pm$ -Zerfälle sind zum Beispiel sensitiv auf den CKM -Winkel γ . Aufgrund der anderen Flavour-Struktur spielen außerdem in den Zerfällen Pinguin-Operatoren eine weitaus wichtigere Rolle: Der Zerfall $b \rightarrow s$ ist auf Tree-Ebene verboten und auf Einschleifen-Ebene durch den GIM-Mechanismus unterdrückt. Die Pinguin-Operatoren sind wiederum besonders empfindlich auf neue Physik bei großen Skalen. Und schließlich kann man hoffen, auch über die QCD-Effekte einiges zu erfahren und auf $B \rightarrow \pi\pi$ zu übertragen.

Bei der Berechnung der $B \rightarrow \pi\pi$ -Prozesse wurden die Massen der Up- und Down-Quarks grundsätzlich vernachlässigt – angesichts der Tatsache, dass sie weniger als ein Dreißigstel der nächstgrößeren Skala Λ_{QCD} betragen, eine zweifellos gerechtfertigte Näherung. Im masselosen Limes gilt dann die Isospin-Symmetrie, die auf Relationen zwischen den Zerfallsamplituden führt. Darüberhinaus sind Feynman-Diagramme, die sich nur in den leichten Quark-Flavours unterscheiden, identisch und brauchen nicht jeweils neu berechnet zu werden.

Bei den neuen Prozessen tritt jetzt zusätzlich das Strange-Quark im Anfangs- und/oder Endzustand auf. Mit seiner Masse $m_s \approx 100$ MeV ist es immer noch relativ leicht. Die Versuchung liegt nahe, auch diese Masse zu vernachlässigen. Die Isospin-Symmetrie erweitert sich dann auf die $SU(3)_{flavour}$ -Symmetrie unter Austausch von u , d und s -Quarks. Ähnlich wie in Kapitel 2.2.1 kann dann eine Amplitudenzerlegung nach $SU(3)_{fl}$ -Multipletts vorgenommen werden, die Relationen zwischen den Zerfallsamplituden liefert, wie z.B. [54]

$$A(B^- \rightarrow \pi^- \bar{K}^0) + \sqrt{2}A(B^- \rightarrow \pi^0 K^-) = \sqrt{2} \left(\frac{V_{us}}{V_{ud}} \right) A(B^- \rightarrow \pi^- \pi^0) \cdot \{1 + \delta_{SU(3)}\}, \quad (4.1)$$

wobei der speziell für diese Relation eingeführte Faktor $\delta_{SU(3)}$ mit $m_s \rightarrow 0$ verschwindet. Häufig wird noch ein Schritt weiter gemacht, und einzelne Diagramme werden gleichgesetzt, wenn sie nur durch den Austausch von Quark-Flavours ineinander übergehen (was keiner

$SU(3)_{fl}$ -Transformation des gesamten Systems entspricht). Die Beiträge der Diagramme können dann aus kombinierten Fits an $B \rightarrow \pi\pi$ und $B \rightarrow K\pi$, wobei die Parameter für beide Fälle gleichgesetzt werden, bestimmt werden [29].

Angesichts des Ziels, die Daten aus den Zerfällen für Präzisionsbestimmungen zu nutzen, muss man sich aber Gedanken darüber machen, wie gut die $SU(3)_{fl}$ -Symmetrie bzw. der Limes $m_s \rightarrow 0$ ist. Der einzige direkt zugängliche Effekt ist (abgesehen von der größeren Kaon-Masse, die die Kinematik leicht verändert) das Verhältnis der Zerfallskonstanten: $f_K/f_\pi \simeq 1,20$. Diese Abweichung, die sich direkt auf die Amplituden in naiver Faktorisierung überträgt, ist in der Regel die einzige, die berücksichtigt wird. Dabei ist es alles andere als klar, ob nicht auch in anderen Teilen der Amplitude, z.B. dem $B_{(s)} \rightarrow K$ -Formfaktor oder nichtfaktorisierten Beiträgen $\sim 20\%$ ige Abweichungen auftreten, die in der Summe groß werden.

Die in diesem Kapitel vorgestellten Rechnungen liefern wesentliche Bausteine zur Beantwortung dieser Fragen. Für eine vollständige phänomenologische Beschreibung wie bei $B \rightarrow \pi\pi$ reichen diese indes nicht aus. Allerdings werden genügend Informationen zusammengetragen, um in allen Zerfallskanälen die $SU(3)_{fl}$ -verletzenden Effekte in naiver Faktorisierung sowie für die Relation (4.1) auch in den nichtfaktorisierten Beiträgen zu berechnen.

Der erste Teil dieses Kapitels widmet sich der Twist-2 Lichtkegel-Verteilungsamplitude des Kaons, die im Gegensatz zu der des Pions asymmetrisch ist. Ihre Asymmetrie liefert zum Beispiel den führenden $SU(3)_{fl}$ -verletzenden Beitrag in f_{BK} und $f_{B_s K}$. Sie wird daher in angemessener Präzision – unter Einschluss von $O(\alpha_S)$ -Korrekturen – berechnet. Im zweiten Teil wird die Normierungskonstante für die Twist-4 Dreiteilchen-Verteilungsamplitude berechnet, die in nichtfaktorisierten Diagrammen mit weichem Gluonaustausch auftritt. Im letzten Teil werden diese und weitere Resultate zur Berechnung des Parameters $\delta_{SU(3)}$ verwendet und die übrigen Zerfallsamplituden in naiver Faktorisierung bestimmt.

4.1 Asymmetrie der Zweiteilchen-Verteilungssamplitude:

a_1^K

4.1.1 Definition und Verwendung

Die Twist-2 Lichtkegel-Verteilungssamplitude des Kaons ist ganz analog zu der des Pions (3.6) definiert:

$$\langle K^-(q) | \bar{s}(0) \gamma_\mu \gamma_5 [0, z] u(z) | 0 \rangle_{z^2 \rightarrow 0} = -i q_\mu f_K \int_0^1 du e^{i\bar{u}qz} \varphi_K(u, \mu). \quad (4.2)$$

Dabei wurde diesmal die Wilson-Linie $[0, z]$ ausgeschrieben, die für die Eichunabhängigkeit sorgt, $\bar{u} = 1 - u$ wie gehabt und μ ist die Renormierungsskala, die ein Überbleibsel der z^2 -Abhängigkeit ist. Mit der Isospin- und CP -Symmetrie der starken Wechselwirkung beschreibt dieselbe Verteilungssamplitude auch K^+ , K^0 und \bar{K}^0 .

Sie ist universell und tritt in einer Vielzahl von Prozessen, angefangen von leptonischen oder inklusiven B, B_s und $D \rightarrow K$ -Übergängen bis hin zu den in dieser Arbeit behandelten exklusiven B -Zerfällen auf, wenn eine auf Lichtkegelentwicklung basierende Rechenmethode wie QCD Faktorisierung oder Lichtkegel-Summenregeln verwendet wird. Die Twist-2-Amplitude ist dabei jeweils der führende Beitrag.

Die Pion-Verteilungssamplitude ist wegen der Isospin-Symmetrie symmetrisch unter $u \leftrightarrow \bar{u}$, sodass in der Zerlegung nach Gegenbauer-Momenten,

$$\varphi_{\pi, K}(u, \mu) = 6u\bar{u} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^{\pi, K}(\mu) C_n^{3/2}(u - \bar{u}) \right), \quad (4.3)$$

die ungeraden Momente verschwinden: $a_{2n+1}^\pi = 0$. Diese Symmetrie wird jetzt aber durch die Masse des Strange-Quarks verletzt. Dadurch trägt letzteres im Durchschnitt einen anderen Impulsanteil x_s als das \bar{u} ($x_{\bar{u}}$):

$$\langle x_s - x_{\bar{u}} \rangle_{K^-} = \int_0^1 du \varphi_K(u) (u - \bar{u}) = \frac{3}{5} a_1^K.$$

Das erste Gegenbauer-Moment beschreibt also die Asymmetrie der durchschnittlichen Impulsconfiguration. Wie schon früher erwähnt, werden höhere Gegenbauer-Momente nach Evolution zu einer hinreichend großen Skala, z.B. $\mu \sim m_b$ klein und tragen wegen der schnelleren Oszillation der zugehörigen Gegenbauer-Polynome auch mit kleinerem Gewicht bei. Der führende $SU(3)_{fl}$ -verletzende Beitrag (in der Entwicklung nach Twists und Gegenbauer-Momenten) ist dann in der Regel und abgesehen von dem Verhältnis f_K/f_π proportional zu a_1^K . Ein illustratives Beispiel sind die $B \rightarrow K$ und $B_s \rightarrow K$ -Formfaktoren, aus denen sich in naiver Faktorisierung die Zerfallssamplituden $B_{(s)} \rightarrow \pi K, KK$ ergeben. In

Lichtkegel-Summenregeln, in denen diese Formfaktoren als Konvolution über eine Lichtkegel-Verteilungsamplitude geschrieben werden, erhält man sie aus $f_{B\pi}$ durch Ersetzungen $m_\pi \rightarrow m_K$, $f_\pi \rightarrow f_K$ und eben $\varphi_\pi \rightarrow \varphi_K$. Die hohe Relevanz von a_1^K ist nach Einsetzen von Zahlenwerten schnell ersichtlich:

$$\begin{aligned} f_{BK}(0) &\approx (1,3 + 1,1 a_1^K(\mu_b)) f_{B\pi}(0) \\ f_{B_s K}(0) &\approx (1,3 - 1,0 a_1^K(\mu_b)) f_{B\pi}(0). \end{aligned}$$

Die erste Berechnung von a_1^K wurde in [36] mit Zweipunkt-Summenregeln vorgenommen, wie im weiteren Verlauf dieses Kapitels beschrieben wird. Dabei wurden zwei verschiedene Varianten verwendet, die sich in der zu Grunde liegenden Korrelationsfunktion unterscheiden. In der „Diagonalen“ wurde ein T -Produkt aus zwei Axialvektorströmen verwendet, in der „Nichtdiagonalen“ aus einem Axial- und einem Pseudovektorstrom, und beide Varianten lieferten das Ergebnis

$$[a_1^K(1 \text{ GeV})]^{CZ} \sim 0,17.$$

In [55] wurde die nichtdiagonale Variante näher betrachtet; dabei wurde ein Vorzeichenfehler in der ursprünglichen Rechnung gefunden; zusätzlich wurde versucht, die Genauigkeit durch Berücksichtigung von Strahlungskorrekturen zu erhöhen, und die neue Vorhersage lautete

$$[a_1^K(1 \text{ GeV})]^{BB} = -0,18 \pm 0,09.$$

Es gibt also einen direkten Widerspruch zwischen den beiden Varianten. Um diesen aufzulösen, werden im Folgenden Korrekturterme zu der diagonalen Korrelationsfunktion berechnet. Das Resultat,

$$a_1^K(1 \text{ GeV}) = 0,05 \pm 0,02,$$

bestätigt qualitativ das erste Ergebnis. Aber welches Vorzeichen sollte a_1^K denn haben?

Die naive Erwartung ist, dass a_1^K positiv sein sollte. Denn dies bedeutet, dass das schwerere Strange-Quark im Durchschnitt einen höheren Impulsanteil im Kaon trägt. Da seine Masse aber noch unter der Skala Λ_{QCD} liegt, ist dies nicht zwingend. Zweierlei Argumente, die im Anschluss an die Rechnung dargelegt werden, sprechen deutlicher für einen positiven Wert: Zum einen sind zwei unterschiedliche Berechnungen für den $K \rightarrow \pi$ -Formfaktor $f_{K\pi}$ bei positivem a_1^K besser miteinander konsistent. Zum anderen zeigt sich in der numerischen Auswertung, dass die nichtdiagonale Variante numerisch instabil ist und die der Summenregel zu Grunde liegende Entwicklung nicht gut funktioniert, wogegen das neue Ergebnis keine derartigen Probleme hat.

4.1.2 Lokale Operatoren und Renormierung

Um die Renormierung und das damit zusammenhängende Skalenverhalten der Gegenbauer-Momente zu verstehen, ist es hilfreich, die Gegenbauer-Momente als Matrixelemente lokaler Operatoren zu verstehen. Da die Gegenbauer-Polynome orthogonal sind (wenn Sie zusammen mit der Funktion $6u\bar{u}$ integriert werden), kann man das Moment a_n^K herausprojizieren, wenn

man in (4.2) die Ersetzung $e^{i\bar{u}qz} \rightarrow C_n^{3/2}(u - \bar{u})$ vornimmt. Diese Ersetzung entspricht der Wirkung der Operation

$$\lim_{z \rightarrow 0} C_n^{3/2} \left(1 - \frac{2z \frac{\partial}{\partial z}}{i qz} \right).$$

Ein beliebiges Moment a_n^K ist dann das Matrixelement des lokalen Operators V_n^A (der obere Index soll an die Axialvektor-Struktur des Vertex erinnern):

$$(qz)N_n a_n^K = \langle K^-(q) | V_n^A(q) | 0 \rangle, \quad V_n^A(q) = z^\mu \lim_{z \rightarrow 0} C_n^{3/2} \left(1 - \frac{2z \frac{\partial}{\partial z}}{i qz} \right) \bar{s}(0) \gamma_\mu \gamma_5 [0, z] u(z). \quad (4.4)$$

Der Faktor $N_n = \frac{3(n+1)(n+2)}{2(2n+3)}$ kommt von der Normierung der Gegenbauer-Polynome. Die Multiplikation des Ausdrucks mit z^μ geschieht nur zur leichteren Handhabbarkeit und z ist wie in der Definition der Wellenfunktion ein lichtartiger Vektor: $z^2 = 0$. Mit der Einführung des neuen Symbols $\hat{z} = z$, auf das die Ableitung $\partial/\partial z$ nicht wirken soll, kann man den Ausdruck vereinfacht mit $\gamma_\mu \rightarrow \hat{z}$ schreiben. Die Wirkung der Ortsableitung auf die Wilson-Linie ist identisch mit der Eichkovarianten Ableitung, sodass

$$V_n^A(q) = \bar{s} C_n^{3/2} \left(1 - \frac{2zD}{i qz} \right) \hat{z} \gamma_5 u \quad (4.5)$$

eine äquivalente Definition ist¹. Während in (4.5) die Lokalität offensichtlicher ist, ist für praktische Zwecke (4.4) geeigneter, da sich Rechnungen so im Bezug auf n leichter allgemein halten lassen. q ist jeweils der durch den Vertex fließende Impuls.

Die Operatoren $V_n^A(q)$ werden auf ähnliche Weise renormiert wie die Vierfermion-Operatoren, deren Renormierung in Kapitel 2.1.2 erklärt wurde. Das heißt, dass zur Bestimmung der anomalen Dimensionen zunächst die in Abbildung 4.1 gezeigten Diagramme ausgerechnet werden müssen. Dabei muss bei der störungstheoretischen Entwicklung auch die Wilson-Linie

$$[0, z] = P \left\{ \exp \left(-ig_S \int_0^1 dt t^\alpha z^\mu A_\mu^\alpha(tz) \right) \right\}$$

berücksichtigt werden. P steht für das pfadgeordnete Produkt, aus dem, wenn in z die Zeitordnung vorliegt, das zeitgeordnete Produkt wird. Zusätzlich müssen noch die Selbstenergie-Diagramme addiert werden und die Feldrenormierung durchgeführt werden, was insgesamt der Multiplikation des Resultats mit $(1 + 2 \cdot \delta_\psi/2)$ entspricht. Die Diagramme werden in dimensionaler Regularisierung berechnet, und es sind nur die divergenten und μ -abhängigen

¹Durch eine Translation kann man zeigen, dass a_1^K wie in [36] als Matrixelement von $\bar{s} \hat{z} \gamma_5 \left(\frac{z\overrightarrow{D}}{qz} \right) u$ geschrieben werden kann.

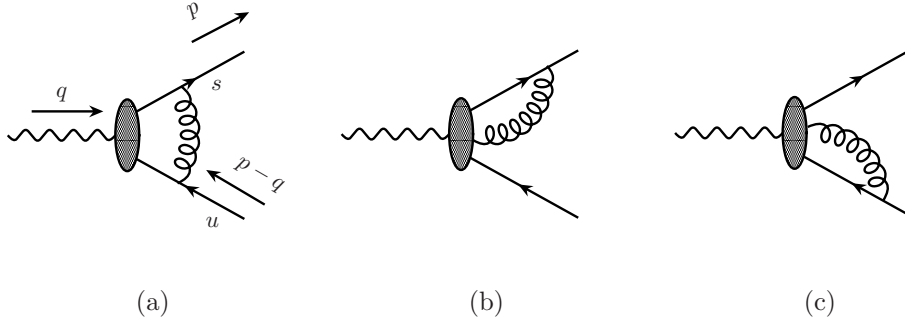


Abbildung 4.1: Diagramme zur Berechnung der anomalen Dimensionen der Operatoren $V_n^A(q)$ (schraffierte Ovale). Diagramme (b) und (c) kommen aus der Entwicklung der Wilson-Linie.

Terme interessant. Bei expliziter Rechnung für $n = 0, 1, 2, 3$ sind die Resultate:

$$\begin{aligned}
 \langle u(p-q)\bar{s}(p)|V_0^A(q)|0\rangle_{div} &= 0, \\
 \langle u(p-q)\bar{s}(p)|V_1^A(q)|0\rangle_{div} &= \frac{-\alpha_S}{4\pi} \langle u(p-q)\bar{s}(p)|V_1^A(q)|0\rangle_{Tree} \cdot \frac{32}{9} \left(\Delta_{div} + \log \frac{\mu^2}{q^2} \right), \\
 \langle u(p-q)\bar{s}(p)|V_2^A(q)|0\rangle_{div} &= \frac{-\alpha_S}{4\pi} \langle u(p-q)\bar{s}(p)|V_2^A(q)|0\rangle_{Tree} \cdot \frac{50}{9} \left(\Delta_{div} + \log \frac{\mu^2}{q^2} \right), \\
 \langle u(p-q)\bar{s}(p)|V_3^A(q)|0\rangle_{div} &= \frac{-\alpha_S}{4\pi} \langle u(p-q)\bar{s}(p)|V_3^A(q)|0\rangle_{Tree} \cdot \frac{314}{45} \left(\Delta_{div} + \log \frac{\mu^2}{q^2} \right).
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Es fällt auf, dass die divergenten Beiträge jeweils proportional zum Tree-Level-Resultat sind: Es tritt also keine Operatormischung auf. Während dies hier nur ein Ergebnis expliziter Berechnung ist, wurde in [36, 44, 56] allgemein gezeigt, dass die Gegenbauer-Momente die Basis darstellen, in denen die Operatoren nicht mischen.

Um die Divergenzen zu kompensieren, wird im \overline{MS} -Schema die Operatorrenormierung $V_n^A \rightarrow \hat{V}_n^A = \left(1 + \frac{\alpha_S}{4\pi} \gamma_n \Delta_{div}\right)^A V_n$ durchgeführt. Die Anomalen Dimensionen $\gamma_{0,1,2,3} = \left(0, \frac{32}{9}, \frac{50}{9}, \frac{314}{45}\right)$ können dabei direkt aus (4.6) abgelesen werden; die allgemeine Formel ist [36, 44, 56]

$$\gamma_n = \frac{4}{3} \left(1 - \frac{2}{(n+1)(n+2)} + 4 \sum_{j=2}^{n+1} \frac{1}{j} \right).$$

Insbesondere muss V_0^A , ein reiner Axialvektorstrom, nicht renormiert werden.

Die Renormierung überträgt sich direkt auf die Gegenbauer-Momente:

$$\hat{a}_n^K = a_n^K \left(1 + \frac{\alpha_S}{4\pi} \gamma_n \Delta_{div} \right)$$

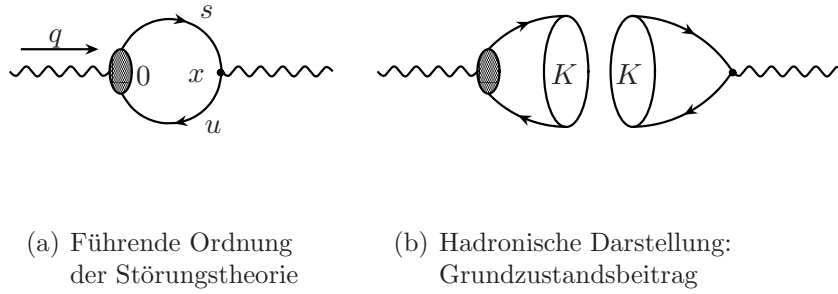


Abbildung 4.2: Korrelationsfunktion Π^n der Zweipunkt-Summenregel für a_n^K .

(der Hut wird ab jetzt wieder weggelassen). Wie sich aus (4.6) ablesen lässt, gibt die Anomale Dimension auch die Renormierungsskalenabhängigkeit der Operatoren V_n bzw. der Momente a_n^K an:

$$\frac{da_n^K}{d \log \mu} = -2\gamma_n \frac{\alpha_S}{4\pi} a_n^K.$$

Diese Differenzialgleichung lässt sich nach Separation der Variablen integrieren, wobei die μ -Abhängigkeit der Kopplungskonstante aus (1.2) von Seite 19 verwendet wird:

$$\begin{aligned} \log a_n^K(\mu) - \log a_n^K(\mu_0) &= - \int_{\log \mu_0}^{\log \mu} 2\gamma_n \frac{\alpha_S(\mu')}{4\pi} d \log \mu' \\ \Rightarrow \frac{a_n^K(\mu)}{a_n^K(\mu_0)} &= \left(\frac{\alpha_S(\mu)}{\alpha_S(\mu_0)} \right)^{\frac{2\gamma_n}{\beta_0}}. \end{aligned}$$

Numerisch ergibt sich z.B. für die Evolution von $\mu_0 = 1$ GeV, bei der die Momente berechnet werden, zu $\mu \sim m_b$, bei der sie verwendet werden:

n	0	1	2	3	4	...	10	11
$\frac{a_n(4.7 \text{ GeV})}{a_n(1 \text{ GeV})}$	1	0,72	0,59	0,52	0,47	...	0,32	0,31

Bei der Evolution ist zu beachten, dass sich bei der Charm-Quark-Masse $\mu = m_c \approx 1,3$ GeV der Wert von β_0 ändert, und eine entsprechende Anschlussrechnung vorzunehmen ist.

4.1.3 Zweipunkt-Summenregel

Die QCD Zweipunkt- oder SVZ-Summenregeln, die lange vor Lichtkegel-Summenregeln entwickelt wurden [46], basieren auf einer Korrelationsfunktion, die als Vakuum-nach-Vakuum-

Matrixelement von zwei Strömen definiert ist,

$$\Pi^{SVZ} \sim \langle 0 | T \{ j_1(x), j_2(0) \} | 0 \rangle,$$

sodass bei der Berechnung der Korrelationsfunktion selbst keine hadronischen Größen wie Lichtkegel-Verteilungsamplituden auftreten. Diese kommen erst über die hadronische Darstellung

$$\Pi \sim \langle 0 | j_1 | h \rangle \langle h | j_2 | 0 \rangle$$

ins Spiel, mit der das Dispersionsintegral über die Korrelationsfunktion gleichgesetzt wird. Dieses Vorgehen selbst ist aber bei den Lichtkegel-Summenregeln ähnlich geblieben. Daher werden die Schritte hier nur sehr knapp nochmals aufgelistet.

Gesucht ist also eine Zweipunkt-Korrelationsfunktion, in deren hadronischer Darstellung die Momente der Kaon-Verteilungsamplitude auftreten. Die geeignete Wahl hierzu ist

$$\Pi^n(q^2, qz) = i \int d^4x e^{iqx} \langle 0 | T \{ \bar{u}(x) \not{x} \gamma_5 s(x), V_n^A(q) \} | 0 \rangle \quad (4.7)$$

und in Abbildung 4.2 dargestellt. Mit $z^2 = 0$ ist dies immer Proportional zu $(qz)^2$ und hängt ansonsten nicht von z ab: $\Pi^n(q^2, qz) \equiv (qz)^2 \Pi^n(q^2)$. Nach Einfügen eines kompletten Satzes hadronischer Zustände $|h\rangle\langle h|$ – genau wie in (3.9) auf Seite 64 – erhält man die hadronische Darstellung

$$\Pi^n(q^2) = \frac{f_K^2 N_n a_n^K}{m_K^2 - q^2} + \int_{s_h}^{\infty} ds \frac{\rho_h^n(s)}{s - q^2}. \quad (4.8)$$

Diese wird mit der Dispersionsrelation,

$$\Pi^n(q^2) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} ds \frac{\text{Im}_s \Pi^n(s)}{s - q^2 - i\epsilon} \quad (4.9)$$

gleichgesetzt, und nach Subtraktion des Dualitäts-Intervalls $s_0^K < s < \infty$ und Borel-Transformation ist die Summenregel für a_n^K :

$$a_n^K = \left(\frac{e^{m_K^2/M^2}}{f_K^2 N_n} \right) \frac{1}{\pi} \int_0^{s_0^K} ds e^{-s/M^2} \text{Im}_s \Pi^n(s). \quad (4.10)$$

Dabei ist s_0^K der effektive Dualitäts-Schwellenwert für die angeregten Zustände (der prinzipiell für jedes n verschieden sein kann) und M der Borel-Parameter.

Schreibweise für allgemeines n

Die Berechnung der Diagramme für allgemeines n vereinfacht sich, wenn man für V_n^A die Definition (4.4) einsetzt und den Differenzialoperator $C_n^{3/2}(\cdot)$ erst am Ende anwendet. Das heißt man startet mit

$$\Pi_z(q^2, qz) = i \int d^4x e^{iqx} \langle 0 | T \{ \bar{u}(x) \not{x} \gamma_5 s(x), \bar{s}(0) \not{z} \gamma_5 [0, z] u(z) \} | 0 \rangle, \quad (4.11)$$

sodass

$$\Pi^n(q^2) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{(qz)^2} C_n^{3/2} \left(1 - \frac{2}{i} \frac{z \partial_z}{qz} \right) \Pi_z(q^2, qz).$$

Der Hut über dem \hat{z} verdeutlicht dabei nur wieder, dass die Ortsableitung ∂_z hier nicht wirken soll. Er wird im Weiteren wieder weggelassen. Das Ergebnis für Π_z lässt sich stets in der Form

$$\Pi_z(q^2, qz) = (qz)^2 \int_0^1 du e^{i\bar{u}qz} \pi(u, q^2) \quad (4.12)$$

angeben, wobei die Funktion $\pi(u, q^2)$ auch Deltafunktionen in u und Ableitungen davon enthalten kann. Ausgedrückt durch diese Funktion ist die Summenregel für a_n^K dann

$$a_n^K = \frac{2(2n+3)}{3(n+1)(n+2)} \left(\frac{e^{m_K^2/M^2}}{f_K^2} \right) \frac{1}{\pi} \int_0^{s_0^K} ds e^{-s/M^2} \int_0^1 du C_n^{3/2}(u - \bar{u}) \text{Im}_s \pi(u, s),$$

wobei jetzt auch der Normierungsfaktor N_n eingesetzt wurde. Ist die Funktion $\pi(u, q^2)$ also bekannt, lassen sich daraus prinzipiell alle Momente a_n^K bestimmen. Wie schon in [36] bemerkt, konvergiert die im folgenden vorgestellte Operatorproduktentwicklung mit steigendem n immer schlechter, sodass am Ende nur die Projektionen mit $n \leq 2$ verwendbar sind.

4.1.4 Operatorproduktentwicklung und Kondensate

Die Aufgabe ist jetzt wieder, die Korrelationsfunktion in QCD zu berechnen. Dabei wird q^2 zunächst als negativ und groß gewählt, sodass die Störungstheorie gültig ist. Für das T -Produkt kann das Wick-Theorem angewendet werden und für kontrahierte Felder werden Feynman-Propagatoren eingesetzt, während die nicht kontrahierten Felder als normalgeordnetes Produkt stehen bleiben, zum Beispiel:

$$\begin{aligned} T \{ \bar{q}_1(x_1) q_2(x_2) \bar{q}_2(x_3) q_1(x_4) \} = & \underbrace{\bar{q}_1(x_1) q_2(x_2) \bar{q}_2(x_3) q_1(x_4)}_{\text{normalgeordnet}} : + : \bar{q}_1(x_1) \underbrace{q_2(x_2) \bar{q}_2(x_3)}_{\text{normalgeordnet}} q_1(x_4) : \\ & + : \underbrace{\bar{q}_1(x_1) q_2(x_2) \bar{q}_2(x_3)}_{\text{normalgeordnet}} q_1(x_4) : + : \bar{q}_1(x_1) q_2(x_2) \bar{q}_2(x_3) q_1(x_4) : . \end{aligned} \quad (4.13)$$

Das Matrixelement der normalgeordneten Produkte mit dem störungstheoretischen Vakuum ist dann Null, denn dort verschwinden die Felder nach Definition. Im physikalischen Vakuum ist dies dagegen nicht der Fall, und die Matrixelemente von normalgeordneten Operatoren sind – sofern diese Lorentz- und Eichinvariant sind, denn diese Symmetrien gelten auch für das Vakuum – von Null verschieden.

Die Impulse dieser Vakuumfelder sind allerdings klein im Vergleich zu q (bzw. der Abstand x klein im Vergleich zur Skala, auf der sich die Vakuumfelder ändern), sodass nichtlokale Operatoren in der Koordinate entwickelt werden können:

$$q_{vac}(x) = q_{vac}(0) + x_\mu D^\mu q_{vac}(0) + \dots$$

Da im Folgenden wieder die Fock-Schwinger-Eichung (3.36) verwendet wird, wurde bereits $x_\mu \partial^\mu = x_\mu D^\mu$ eingesetzt. Durch Ausnutzung der Lorentz-Invarianz (und bei entsprechender Wahl des Koordinatenursprungs in der Fock-Schwinger-Eichung) lässt sich das Matrixelement des normalgeordneten Quark-Antiquark-Operators aus obigem Beispiel dann reduzieren auf

$$\langle 0 | : \bar{q}_\alpha^a(x_1) q_\beta^b(x_4) : | 0 \rangle = \langle 0 | : \bar{q}_\alpha^a(0) q_\beta^b(0) : | 0 \rangle + (x_4 - x_1)^\mu \langle 0 | : \bar{q}_\alpha^a(0) D_\mu^{bc} q_\beta^c(0) : | 0 \rangle + \dots, \quad (4.14)$$

wobei jetzt die Spinorindizes α und β sowie die Farbindices a und b mit ausgeschrieben wurden. Aufgrund der Lorentz-Symmetrie muss der erste Beitrag proportional zu $\delta_{\alpha\beta} \delta_{ab}$ und der zweite zu $(\gamma_\mu)_{\alpha\beta} \delta_{ab}$ sein. Kontrahiert man den ersten Faktor mit $\delta_{\alpha\beta} \delta_{ab}$ und den zweiten mit $(\gamma^\mu)_{\beta\alpha} \delta_{ab}$, so erhält man

$$\begin{aligned} \langle 0 | : \bar{q}_\alpha^a q_\beta^b : | 0 \rangle &= \frac{1}{12} \langle 0 | \bar{q}q | 0 \rangle \delta_{ab} \delta_{\alpha\beta} \\ \langle 0 | : \bar{q}_\alpha^a D_\mu^{bc} q_\beta^c : | 0 \rangle &= \frac{-i m_q}{48} \langle 0 | \bar{q}q | 0 \rangle \delta_{ab} (\gamma_\mu)_{\alpha\beta}, \end{aligned}$$

wobei in der zweiten Zeile die QCD Bewegungsgleichung $i \not{D} q = m_q q$ für das Quarkfeld ausgenutzt wurde. Ein entsprechender Ausdruck ergibt sich auch für den Fall, dass die Ableitung auf \bar{q} wirkt. Bei der Schreibweise $\langle 0 | \bar{q}q | 0 \rangle$ gilt weiter die Normalordnung und die Summierung über Farb- und Spinorindizes ist impliziert.

Das Beispiel (4.13) entspricht der Struktur des Korrelators in niedrigster Ordnung der Störungstheorie. In höheren Ordnungen der Kopplungskonstanten und in höheren Ordnungen der Koordinatenentwicklung treten aber auch normalgeordnete Produkte mit Gluon-Feldern auf. Diese lassen sich nach Dimension sortieren. Beschränkt man sich auf Dimension ≤ 6 , ist die Auswahl an lokalen, Eich- und Lorentzinvarianten Operatoren überschaubar, und es werden die folgenden Kurzschreibweisen eingeführt (ohne Ausschreibung der Summation über Farbindices):

$\langle 0 : \bar{q}q : 0 \rangle$	\equiv	$\langle 0 G^2 0 \rangle$	Quark-Kondensat	Dim.3
$\langle 0 : \frac{\alpha_S}{\pi} G^{\mu\nu a} G_{\mu\nu}^a : 0 \rangle$	\equiv	$\langle 0 \bar{q}Gq 0 \rangle$	Gluon-Kondensat	Dim.4
$\langle 0 : g_S \bar{q} \sigma_{\mu\nu} G^{\mu\nu a} t^a q : 0 \rangle$	\equiv		Quark-Gluon-Kondensat	Dim.5
$\langle 0 : (\bar{q} \Gamma_r q) (\bar{q} \Gamma_s q) : 0 \rangle$	\equiv		Vier-Quark-Kondensat	Dim.6

Das normalgeordnete Produkt wird im Folgenden nicht mehr ausgeschrieben; das Vierquark-Kondensat hängt von den vorerst allgemein gehaltenen Dirac- und Farbmatrizen $\Gamma_{r,s}$ ab.

Die einzige zur Verfügung stehende Skala für diese Matrixelemente ist Λ_{QCD} . In der Korrelationsfunktion dagegen tritt als Skala nur der Impulsübertrag q^2 auf, sodass die Operatoren höherer Dimension mit Λ_{QCD}^2/q^2 unterdrückt sind. Ein Maß für die Virtualität, auf die die Korrelationsfunktion nach Dispersionsrelation und Borel-Transformation sensitiv ist, ist der Borel-Parameter $M \sim 1$ GeV.

Das T -Produkt kann so also entwickelt werden in lokale Operatoren von steigender Dimension. An die Stelle dieser lokalen Operatorproduktentwicklung ist bei den Lichtkegel-

Summenregeln die Twist-Entwicklung getreten. Die numerischen Werte der Vakuum-Kondensate sind neue, prozessunabhängige Parameter, die z.B. aus Fits von Vorhersagen der QCD Summenregeln zu Daten gewonnen werden können.

4.1.5 Berechnung der Diagramme

Bei der Operatorproduktentwicklung des Korrelators für die Momente a_n^K werden die Kondensate bis einschließlich Dimension 6 berücksichtigt. Da die Strange-Masse m_s im Vergleich zum Borel-Parameter klein ist, wird auch in ihr entwickelt; insgesamt werden Beiträge vernachlässigt, wenn die Summe der Kondensatdimension und der Potenz von m_s größer als sechs ist. Die Masse des u -Quarks wird zu null gesetzt.

Ein sehr nützliches Hilfsmittel für die Berechnung der Diagramme mit Kondensaten ist die Hintergrund-Eichung. Diese ist für sich keine Eichbedingung, sondern zunächst eine Schreibweise, in der Vakuum-Felder und perturbative Gluonen getrennt werden. Wie in [57] gezeigt, kann man auf konsistente Weise für beide eine unterschiedliche Eichung verwenden. Für die Vakuum-Felder wird jetzt die Fock-Schwinger-Eichung (3.36) verwendet. Die Wilson-Linie verschwindet somit, $[0, z]_{FS} = 1$, und trägt nicht direkt zu den Kondensaten bei. Für die perturbativen $O(\alpha_S)$ -Korrekturen dagegen wird die Feynman-Eichung verwendet. Hier muss die Wilson-Linie berücksichtigt werden.

Perturbativer Term

Der „rein perturbative“ Beitrag ist derjenige, in dem alle Felder auskontrahiert wurden. In niedrigster Ordnung Störungstheorie ist dies das Einschleifen-Diagramm Abb. 4.2a. Die Berechnung dieses Diagrammes ist sehr einfach, sodass hier auch nicht in m_s entwickelt wird, und das Resultat lautet

$$\pi^{loop}(u, q^2) = -\frac{3u\bar{u}}{2\pi^2} \log\left(\frac{m_s^2 - uq^2}{\mu^2}\right). \quad (4.15)$$

Ein zusätzlicher Term, der polynominell von q^2 abhängt wurde nicht ausgeschrieben, da er nach der Borel-Transformation verschwindet. Gleiches gilt auch für die Abhängigkeit von der Renormierungsskala μ . $O(\alpha_S)$ -Korrekturen sind bisher nur im masselosen Fall berechnet worden [55, 58, 59] und betragen für $n = 0$ weniger als 10%. Für a_1^K ist der perturbative Term (also die Konvolution von (4.15) mit $C_1^{3/2}(\bar{u} - u)$) insgesamt von der Ordnung m_s^2/M^2 , denn er muss mit $m_s \rightarrow 0$ verschwinden und m_s geht nur in gerader Potenz ein. Im Vergleich zu dem Beitrag des Quark-Kondensates (siehe unten) ist er sehr klein, weswegen die $O(\alpha_S m_s^2)$ -Korrekturen für das Loop-Diagramm vorerst vernachlässigt werden – deren Berechnung kann und wird in der Zukunft noch nachgeholt werden.

Quark-Kondensat

Den Dimension-3-Term in der OPE erhält man in führender Ordnung Störungstheorie aus den mittleren beiden Termen in der Wick-Formel (4.13), was den Diagrammen Abb. 4.3 ent-

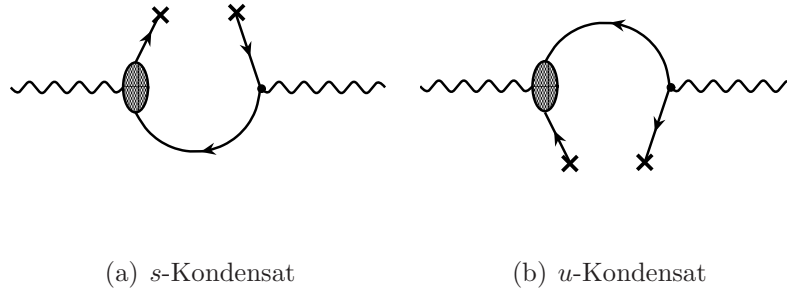


Abbildung 4.3: Beiträge des Quark-Kondensates zur Korrelationsfunktion auf Tree-Level

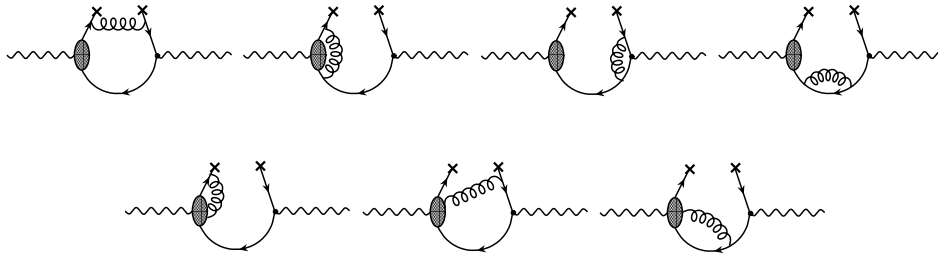


Abbildung 4.4: $O(\alpha_S)$ -Korrekturen zum Beitrag des s -Kondensates in der Korrelationsfunktion. Die Diagramme in der zweiten Zeile kommen aus der Entwicklung der Wilson-Linie. Für das u -Kondensat gibt es einen entsprechenden Satz Diagramme.

spricht. Das u -Kondensat $\langle 0 | \bar{u}u | 0 \rangle$ trägt im Limes $m_u \approx 0$ nicht bei. Für das s -Kondensat muss die Koordinatenentwicklung (4.14) bis zur dritten Ordnung durchgeführt werden, um alle Terme bis $O(m_s^3)$ zu erhalten. Die Matrixelemente der Operatoren mit mehreren kovarianten Ableitungen haben dabei eine komplizierte Struktur – durch Anwendung der QCD Bewegungsgleichungen erhält man unter anderem auch einen Beitrag des Quark-Gluon-Kondensates, wie weiter unten gezeigt wird. Hier jedoch ist nur der Teil von Interesse, der wieder proportional zu $\langle 0 | \bar{s}s | 0 \rangle$ ist, der in der hier benötigten Ordnung

$$\langle 0 | \bar{s}_\alpha(0) s_\beta(z) | 0 \rangle = \frac{1}{4} \langle 0 | \bar{s}s | 0 \rangle \left(\delta_{\beta\alpha} - \frac{1}{4} i z^\mu m_s [\gamma_\mu]_{\beta\alpha} - \frac{1}{8} z^2 m_s^2 \delta_{\beta\alpha} + \frac{1}{96} i z^2 z^\mu m_s^3 [\gamma_\mu]_{\beta\alpha} \right)$$

ist [60, 61]. Das Resultat für die Korrelationsfunktion ist damit

$$\pi^{\langle \bar{q}q \rangle}(u, q^2) = \frac{m_s \langle \bar{s}s \rangle}{(q^2)^2} \left[\left(1 - \frac{1}{3} \frac{m_s^2}{q^2} \right) \delta(u) - \frac{1}{3} \frac{m_s^2}{q^2} \delta'(u) \right].$$

Für a_1^K ist dieser Term der bei weitem dominante, deswegen werden auch die $O(\alpha_S)$ -Korrekturen dazu berücksichtigt. Für die Gluonen in den zugehörigen Schleifendiagrammen

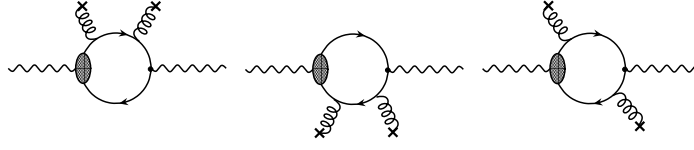


Abbildung 4.5: Beitrag des Gluon-Kondensats zur Korrelationsfunktion

(Abb. 4.4) wird die Feynman-Eichung verwendet, was wie eingangs erwähnt unabhängig von der Eichung der Vakuumpfelder möglich ist. Damit müssen auch Beiträge aus der perturbativen Entwicklung der Wilson-Linie berücksichtigt werden. Anstelle der Funktion $\pi(u, q^2)$, die sehr kompliziert wird, ist es hier einfacher, direkt die Projektionen für $n = 0, 1, 2, 3$ des Resultats anzugeben:

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 du C_0^{3/2}(u - \bar{u}) \pi^{\alpha_s \langle \bar{q}q \rangle}(u, q^2) &= -\frac{\alpha_s m_s \langle \bar{s}s \rangle}{\pi (q^2)^2} - \frac{4 \alpha_s m_s \langle \bar{u}u \rangle}{3 \pi (q^2)^2}, \\
 \int_0^1 du C_1^{3/2}(u - \bar{u}) \pi^{\alpha_s \langle \bar{q}q \rangle}(u, q^2) &= \frac{4 \alpha_s m_s \langle \bar{s}s \rangle}{3 \pi (q^2)^2} \left[2 \left(\Delta_{\text{div}} - \log \left(-\frac{q^2}{\mu^2} \right) \right) + \frac{31}{3} \right] \\
 &\quad - \frac{4 \alpha_s m_s \langle \bar{u}u \rangle}{3 \pi (q^2)^2}, \\
 \int_0^1 du C_2^{3/2}(u - \bar{u}) \pi^{\alpha_s \langle \bar{q}q \rangle}(u, q^2) &= \frac{4 \alpha_s m_s \langle \bar{s}s \rangle}{3 \pi (q^2)^2} \left[-\frac{25}{4} \left(\Delta_{\text{div}} - \log \left(-\frac{q^2}{\mu^2} \right) \right) - \frac{763}{24} \right] \\
 &\quad - \frac{4 \alpha_s 7 m_s \langle \bar{u}u \rangle}{3 \pi 2 (q^2)^2}, \\
 \int_0^1 du C_3^{3/2}(u - \bar{u}) \pi^{\alpha_s \langle \bar{q}q \rangle}(u, q^2) &= \frac{4 \alpha_s m_s \langle \bar{s}s \rangle}{3 \pi (q^2)^2} \left[-\frac{157}{12} \left(\Delta_{\text{div}} - \log \left(-\frac{q^2}{\mu^2} \right) \right) + \frac{24629}{360} \right] \\
 &\quad - \frac{4 \alpha_s 9 m_s \langle \bar{u}u \rangle}{3 \pi 2 (q^2)^2}.
 \end{aligned}$$

Die zweite Zeile ist für a_1^K relevant. Die Entwicklung in m_s wurde hier nach $O(m_s^1)$ abgebrochen. Der Beitrag des u -Kondensates ist UV -endlich, denn es trägt auf Tree-Ebene nicht bei. Der Koeffizient der UV -Divergenz im Beitrag des s -Kondensates ist genau die anomale Dimension (4.6). Die Kombination $m_s \langle 0 | \bar{s}s | 0 \rangle$ ist Renormierungsinvariant (die anomalen Dimensionen von Masse und Kondensat heben sich auf). Die Renormierung von a_n^K bzw. des Quark-Stroms in der Korrelationsfunktion besteht dann einfach darin, $\Delta_{\text{div}} \rightarrow 0$ zu setzen.

Gluon-Kondensat

Da die Korrelationsfunktion selbst keine Gluon-Felder enthält, sind für das Gluon-Kondensat in der perturbativen Entwicklung zwei Wechselwirkungsterme einzusetzen. In der

Fock-Schwinger-Eichung gibt es einen einfachen Zusammenhang zwischen dem gluonischen Feldstärke-Tensor und dem Feld A_μ [43]:

$$A^\mu(x) = \frac{1}{2}x_\alpha G^{\alpha\mu}(0) + \frac{1}{3}x_\nu x_\alpha (D^\alpha G^{\nu\mu})(0) + \dots, \quad (4.16)$$

wobei für das Gluon-Kondensat nur der erste Term relevant ist. Äquivalent kann man auch die Entwicklung des Quark-Propagators im externen Gluon-Feld (3.37) einsetzen, wenn man diese bis zur zweiten Ordnung in der Feldstärke fortführt. Weiterhin ist zu beachten, dass es in der Operatorproduktentwicklung des Operators $m_s \bar{s}s$ in erster Ordnung der Störungstheorie auch einen zum Gluon-Kondensat proportionalen Term gibt, wie in [62] ausgeführt wird:

$$\langle 0 | m_s \bar{s}s | 0 \rangle = -\frac{1}{12} \langle 0 | \frac{\alpha_S}{\pi} G^2 | 0 \rangle + \dots$$

Entsprechend muss zu dem Wilson-Koeffizienten von $\langle 0 | G^2 | 0 \rangle$ das $(-1/12)$ -fache des Wilson-Koeffizienten von $\langle 0 | m_s \bar{s}s | 0 \rangle$ auf Tree-Ebene addiert werden. Das Resultat der Diagramme Abb. 4.5 ist dann

$$\begin{aligned} \pi^{\langle G^2 \rangle}(u, q^2) = \frac{\langle G^2 \rangle}{12} & \left[\frac{m_s^2 u (2u q^2 + (1 - 3u)m_s^2)}{(m_s^2 - u q^2)^4} \right. \\ & \left. + \frac{\delta(u)}{(q^2)^2} \left(1 - \frac{m_s^2}{3 q^2} \right) + \frac{\delta(\bar{u})}{2(m_s^2 - q^2)^2} - \frac{\delta'(u) m_s^2}{3 (q^2)^3} \right]. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Wichtig ist, dass dieser Beitrag im Limes $m_s \rightarrow 0$ nach Konvolution mit ungeraden Gegenbauer-Polynomen verschwindet² und der Beitrag zu a_1^K ist von der Ordnung m_s^2 .

Quark-Gluon-Kondensat

Das Quark-Gluon-Kondensat trägt auf zweierlei Arten bei (Abb. 4.6). Zum einen nach Einsetzung eines Wechselwirkungstermes ähnlich wie beim Gluon-Kondensat. Für das Gluon-Feld $A_\mu(x)$ wird dann die Entwicklung (4.16) eingesetzt, wobei auch hier nur der erste Term beiträgt. In dem daraus resultierenden Matrixelement der Art $\langle 0 | \bar{s}(0) G_{\mu\nu}(0) s(z) | 0 \rangle$ wird schließlich das Feld $s(z)$ wieder in der Koordinate entwickelt. Die nullte Ordnung der Entwicklung in z führt dann sofort auf das Quark-Gluon-Kondensat, während das Matrixelement $\langle 0 | \bar{s}_\alpha G_{\mu\nu} D_\lambda s_\beta | 0 \rangle$ (α, β : Spinorindizes) zu bestimmen bleibt. Die Struktur in den Lorentz- und Spinor-Indizes hat die allgemeine Form $[A \cdot \epsilon_{\mu\nu\lambda\sigma} \gamma^\sigma \gamma_5 + B \cdot (g_{\mu\lambda} \gamma_\nu - g_{\nu\lambda} \gamma_\mu)]_{\beta\alpha}$. Die Koeffizienten A und B erhält man aus Kontraktion mit geeigneten Dirac-Matrizen und Anwendung der QCD Bewegungsgleichungen, sodass schließlich [57, 60, 63]

$$\langle 0 | \bar{s}_\alpha G_{\mu\nu} D_\lambda s_\beta | 0 \rangle = \frac{m_s}{96} \langle 0 | \bar{s} \sigma G s | 0 \rangle [g_{\mu\lambda} \gamma_\nu - g_{\nu\lambda} \gamma_\mu]_{\beta\alpha}.$$

²Der Grenzübergang $m_s \rightarrow 0$ darf erst nach der Konvolution gemacht werden, da ansonsten logarithmisch divergente Terme auftreten. Wird die Rechnung von vorn herein mit $m_s = 0$ durchgeführt, dann tritt der zusätzliche Term aus dem Gluon-Kondensat nicht auf und das Ergebnis ist direkt endlich und symmetrisch unter $u \leftrightarrow \bar{u}$.

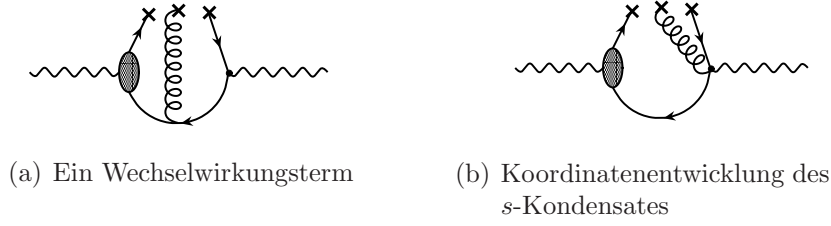


Abbildung 4.6: Beitrag des s -Quark-Gluon-Kondensates zur Korrelationsfunktion.

Zum zweiten erhält man durch ähnliche Überlegungen einen Beitrag aus der zweiten Ordnung der Entwicklung (4.14) des Quark-Kondensates in der Koordinate:

$$\langle 0 | \bar{s}_\alpha D_\mu D_\nu s_\beta | 0 \rangle_{\bar{s}G_s} = \frac{1}{96} (3g_{\mu\nu}\delta_{\alpha\beta} - i[\sigma_{\mu\nu}]_{\beta\alpha}) \langle 0 | \bar{s}\sigma G_s | 0 \rangle.$$

Beide Beiträge verschwinden für das u -Kondensat, und das Ergebnis lautet

$$\pi^{\langle \bar{s}G_s \rangle}(u, q^2) = \frac{1}{3} m_s \langle \bar{s}G_s \rangle \delta'(u) \frac{1}{(q^2)^3}.$$

Vierquark-Kondensat

Der Tree-Level-Beitrag des Vierquark-Kondensates, der sich direkt aus dem letzten Term von (4.13) ergibt, verschwindet, denn das zugehörigen Diagramm 4.7a zerfällt in zwei Teile und der Impuls q kann nicht übertragen werden. In Ordnung α_S gibt es drei Beiträge: Erstens vom gemischten Kondensat (Diagramme 4.7b), das nach Flavour-Singletts faktorisiert wird:

$$\langle 0 | \bar{u}_\alpha u_\beta \bar{s}_\gamma s_\delta | 0 \rangle = \langle 0 | \bar{u}_\alpha u_\beta | 0 \rangle \langle 0 | \bar{s}_\gamma s_\delta | 0 \rangle.$$

Zweitens aus Diagrammen mit einem Wechselwirkungsterm, wenn man für das Gluonfeld $A_\mu(x)$ die Entwicklung (4.16) bis zum zweiten Term fortführt. Durch Anwendung der QCD-Bewegungsgleichungen

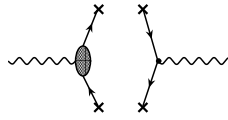
$$D_\mu G^{\mu\nu a} = -g_s \bar{q} \gamma^\nu t^a q$$

erhält man daraus durch ähnliche Überlegungen wie beim Quark-Gluon-Kondensat

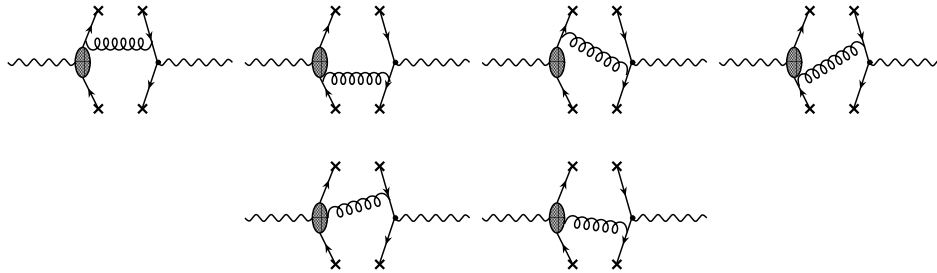
$$\langle 0 | \bar{s}_\alpha^a D_\rho G_{\mu\nu}^a s_\beta^b | 0 \rangle = g_s \frac{\langle 0 | \bar{s}s | 0 \rangle^2}{3^3 \cdot 2^4} [g_{\rho\nu}\gamma_\mu - g_{\rho\mu}\gamma_\nu]_{\beta\alpha} [t^a]_{ba}.$$

Und schließlich drittens aus dem Term dritter Ordnung der Koordinatenentwicklung (4.14). Auch hier kommen die QCD-Bewegungsgleichungen zur Anwendung, und

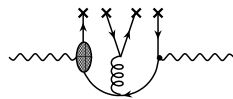
$$\langle 0 | \bar{q}_\alpha^a(0) D_\mu D_\nu D_\lambda q_\beta^b(0) | 0 \rangle_{\bar{q}q\bar{q}q} = -\frac{4\pi i \alpha_S}{3^5 \cdot 2^4} \delta^{ab} \langle 0 | \bar{q}q | 0 \rangle^2 [\gamma_\mu g_{\nu\lambda} + \gamma_\lambda g_{\mu\nu} - 5\gamma_\nu g_{\mu\lambda}]_{\beta\alpha}$$



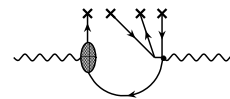
(a) Dieses Tree-Level-Diagramm trägt nicht bei



(b) Gemischtes Vierquark-Kondensat $\langle 0|\bar{s}s|0\rangle\langle 0|\bar{u}u|0\rangle$



(c) $\langle 0|\bar{s}s|0\rangle^2$ aus der Koordinatenentwicklung von $\langle 0|\bar{s}A_\mu s|0\rangle$



(d) $\langle 0|\bar{s}s|0\rangle^2$ aus der Koordinatenentwicklung von $\langle 0|\bar{s}s|0\rangle$

Abbildung 4.7: Beiträge des Vierquark-Kondensates zur Korrelationsfunktion. Die Beiträge von $\langle 0|\bar{u}u|0\rangle^2$ sind analog zu denen von $\langle 0|\bar{s}s|0\rangle^2$.

($q = u, s$). Die Summe aller drei Terme ist dann

$$\begin{aligned} \pi^{\langle \bar{q}q \rangle^2}(u, q^2) = & -\frac{32\pi\alpha_s}{81(q^2)^3} \left(\langle \bar{s}s \rangle^2 [\delta(u) + \delta'(u)] + \langle \bar{u}u \rangle^2 [\delta(\bar{u}) + \delta'(\bar{u})] \right. \\ & \left. + \frac{9}{2} \langle \bar{s}s \rangle \langle \bar{u}u \rangle [\delta(u) + \delta(\bar{u})] \right). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Der gemischte Beitrag $\langle \bar{s}s \rangle \langle \bar{u}u \rangle$ verschwindet bei ungeraden Momenten.

Resultat für a_1^K

Die Berechnung der Imaginärteile bezüglich $s \equiv q^2$ ist mit der Formelsammlung aus Anhang B.3 kein Problem, und die s -Integration in der Summenregel (4.10) kann leicht analytisch durchgeführt werden. Setzt man die $n = 1$ -Projektionen aller Beiträge zusammen, so lautet das Endergebnis

$$\begin{aligned}
 a_1^K = & \frac{e^{m_K^2/M^2}}{f_K^2} \left\{ \frac{5m_s^4}{4\pi^2} \int_{m_s^2}^{s_0^K} ds e^{-\frac{s}{M^2}} \frac{(m_s^2 - s)^2}{s^4} - \frac{5}{3} \frac{m_s \langle \bar{s}s \rangle}{M^2} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{m_s^2}{M^2} \right) \right. \\
 & + \frac{5\alpha_s C_F m_s}{9\pi M^2} \left[-\langle \bar{u}u \rangle + 2\langle \bar{s}s \rangle \left(\frac{25}{6} + \gamma_E - e^{-s_0^K/M^2} \frac{M^2}{s_0^K} - \log\left(\frac{M^2}{\mu^2}\right) - \text{Ei}\left(-\frac{s_0^K}{M^2}\right) \right) \right] \\
 & + \frac{5}{18\pi} \frac{m_s^2}{M^4} \langle G^2 \rangle \left[\gamma_E - \frac{1}{4} - \text{Ei}\left(-\frac{s_0^K}{M^2}\right) + \log\left(\frac{m_s^2}{M^2}\right) + e^{-s_0^K/M^2} \left(\frac{M^4}{s_0^{K2}} - \frac{M^2}{s_0^K} \right) \right] \\
 & \left. + \frac{5}{9} \frac{m_s \langle \bar{s}Gs \rangle}{M^4} - \frac{80\pi}{81} \frac{\alpha_s}{M^4} (\langle \bar{s}s \rangle^2 - \langle \bar{u}u \rangle^2) \right\}. \quad (4.19)
 \end{aligned}$$

Der perturbative Beitrag ist von zweiter Ordnung in der m_s -Entwicklung,

$$\frac{5m_s^4}{4\pi^2} \int_{m_s^2}^{s_0^K} ds e^{-\frac{s}{M^2}} \frac{(m_s^2 - s)^2}{s^4} = \frac{5m_s^2}{12\pi^2} + O(m_s^4),$$

und $\text{Ei}(x) = -\int_{-x}^{\infty} dt e^{-t}/t$. Der $O(m_s^2)$ -Term des perturbativen Teils sowie das Quark- und Quark-Gluon-Kondensat auf Tree-Level stimmen mit dem ursprünglichen Resultat [51] überein, die übrigen Terme sind neu.

4.1.6 Numerische Auswertung

Als Eingabeparameter tritt hier zunächst die Strange-Quark-Masse auf, die zu $m_s(1 \text{ GeV}) = 130 \pm 20 \text{ MeV}$ (\overline{MS} -Masse) gesetzt wird. Für das u -Kondensat wird wie schon bei der $B \rightarrow \pi\pi$ -Analyse der Wert $\langle 0|\bar{q}q|0\rangle(1 \text{ GeV}) = -(240 \pm 10 \text{ MeV})^3$, der allgemein auch für das d -Kondensat gilt, verwendet. Für das s -Kondensat wird dagegen ein anderer Wert verwendet. Dieser hängt zwar prinzipiell von m_s ab und muss mit $m_s \rightarrow 0$ in $\langle 0|\bar{q}q|0\rangle$ übergehen. Bisher konnte das Kondensat aber nicht aus den Grundgleichungen der QCD berechnet werden und auch die Abhängigkeit zwischen s -Kondensat und -Masse ist unbekannt. Daher wird für erstes ein m_s -unabhängiges Intervall verwendet: $\langle 0|\bar{s}s|0\rangle = (0,8 \pm 0,3)\langle 0|\bar{q}q|0\rangle$. Weiterhin wird wie bei der Auswertung der $B \rightarrow \pi\pi$ -Amplituden $\langle 0|G^2|0\rangle(1 \text{ GeV}) = 0,012 \pm 0,006 \text{ GeV}^4$, $\langle 0|\bar{q}Gq|0\rangle(\mu) = (0,8 \pm 0,2 \text{ GeV}^2)\langle 0|\bar{q}q|0\rangle(1 \text{ GeV})$ (mit vernachlässigbarer μ -Abhängigkeit) und $\langle 0|\bar{s}Gs|0\rangle/\langle 0|\bar{q}Gq|0\rangle = \langle 0|\bar{s}s|0\rangle/\langle 0|\bar{q}q|0\rangle$ verwendet. Die Renormierungsskala wird mit dem Borel-Parameter $\mu = M$ identifiziert und für die starke Kopplung weiter der Messwert $\alpha_s(M_Z) = 0,1187$ verwendet.

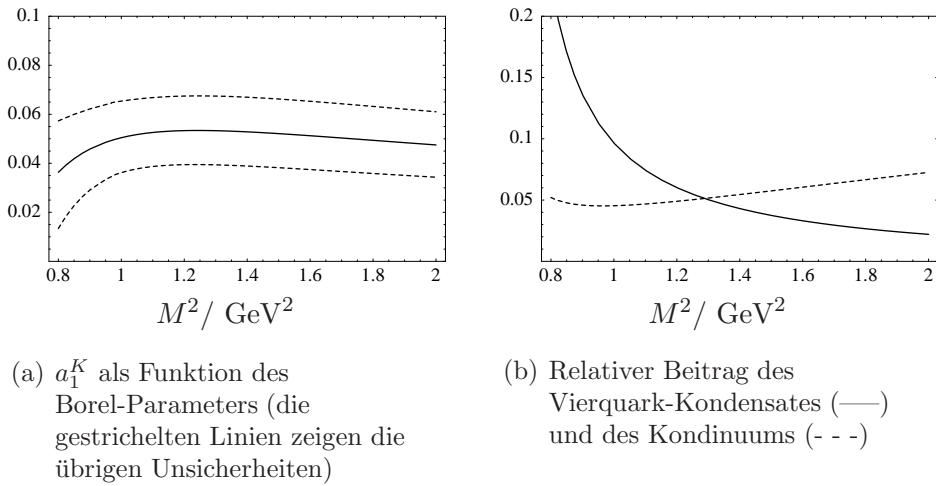


Abbildung 4.8: Neue Summenregel-Vorhersage für a_1^K

Nulltes Moment: f_K

Um die Zuverlässigkeit der Summenregel zu testen, wird zunächst der Fall $n = 0$ betrachtet. In diesem Fall erhält man genau die bereits bekannte Summenregel für f_K [46], beziehungsweise in der hier verwendeten Schreibweise $a_0^{K theor.} = (f_K^{theor.} / f_K^{exp.})$. Dabei wird diese jetzt zusätzlich um den $O(\alpha_s \langle 0 | \bar{q}q | 0 \rangle)$ -Term und höhere Ordnungen in m_s verfeinert. Der experimentelle Messwert ist $f_K^{exp.} = 160 \text{ MeV}$ [20].

Zuerst wird der Dualitäts-Schwellenwert s_0^K so gefittet, dass die Abhängigkeit vom Borel-Parameter möglichst schwach ist. Der erlaubte Wertebereich für diesen ergibt sich durch die Forderung, dass die OPE gut konvergieren soll (untere Grenze) und dass der Beitrag des Dualitäts-Intervalls $s_0^K < s < \infty$ klein sein soll (obere Grenze). In dem Intervall $0,5 \text{ GeV}^2 < M^2 < 1,0 \text{ GeV}^2$ sind sowohl der relative Beitrag des Vierquark-Kondensates als auch der des Dualitätsintervalls weniger als 30%. s_0^K wird dann zu $1,05 \text{ GeV}^2$ gefittet. Die Summenregel-Vorhersage ist dann $f_K^{theor.} = (0,92 \pm 0,02) f_K^{exp.}$. Die Einzelfehler aus Variation der Eingabeparameter wurden quadratisch addiert. Die Übereinstimmung von theoretische Vorhersage und Messwert ist durchaus zufriedenstellend und rechtfertigt das Vertrauen in die Methode. Für f_K selbst wird ab jetzt aber trotzdem der experimentelle Messwert verwendet.

Die Asymmetrie: a_1^K

Die Voraussage für a_1^K in Abhängigkeit des Borel-Parameters ist in Abbildung 4.8a gezeigt. Die untere Grenze für M^2 muss hier allerdings auf $0,8 \text{ GeV}^2$ angehoben werden, da die OPE ansonsten nicht gut genug konvergiert. An dieser unteren Grenze beträgt auch die α_s -Korrektur zum Kondensat-Term weniger als 50% des Tree-Level-Beitrags: Die Anwendung der Störungstheorie scheint also gerechtfertigt. Andererseits ist der Kontinuums-Beitrag auch

bis $M^2 < 1,5 \text{ GeV}^2$ weniger als 10% des Gesamtergebnisses (siehe Abbildung 4.8b). Innerhalb dieser Grenzen ändert sich das Ergebnis nur wenig mit M^2 . Da die Abhängigkeit von s_0^K extrem schwach ist (nur mit m_s^2/M^2 oder α_S unterdrückte Terme hängen überhaupt von s_0^K ab), wird der Wert vom Fall $n = 0$ übernommen. Wird für den Zentralwert $M^2 = 1 \text{ GeV}^2$ eingesetzt und die Variation im Intervall $0,8 \text{ GeV}^2 < M^2 < 1,5 \text{ GeV}^2$ als Fehler quadratisch zu den übrigen addiert, so ist das Endergebnis

$$a_1^K(1 \text{ GeV}) = 0,05 \pm 0,02. \quad (4.20)$$

Nach der Berücksichtigung der zusätzlichen höheren Ordnungen in m_s und α_S ist das Ergebnis aus der diagonalen Summenregel im Vergleich zu [36] signifikant kleiner geworden, das Vorzeichen hat sich aber nicht geändert.

Höhere Momente: a_2^K und a_2^π

Durch einfaches Einsetzen von $n = 2$ erhält man quasi als kostenlose Dreingabe auch eine Vorhersage für das zweite Moment:

$$a_2^K(1 \text{ GeV}) = 0,27_{-0,12}^{+0,37}. \quad (4.21)$$

Im Limes $m_s \rightarrow 0$ und $\langle 0|\bar{s}s|0\rangle \rightarrow \langle 0|\bar{q}q|0\rangle$ wird daraus das zweite Moment des Pions,

$$a_2^\pi(1 \text{ GeV}) = 0,26_{-0,09}^{+0,21}, \quad (4.22)$$

das vergleichbar zu anderen Abschätzungen ist, etwa aus Fits zu Daten (wie in Abschnitt 3.4.1 auf Seite 101 verwendet). Die Fehlerintervalle sind signifikant größer geworden als bei $n = 1$, ein Zeichen für die bereits eingangs erwähnte Beobachtung, dass die Operatorproduktentwicklung mit steigendem n immer schlechter wird.

a_1^K aus der nichtdiagonalen Summenregel

Die nichtdiagonale Summenregel, die ein negatives Ergebnis für a_1^K liefert, wird jetzt mit den identischen Eingabeparametern untersucht. Dabei fällt zuerst auf, dass sich drei Terme numerisch gegenseitig fast genau aufheben: Der perturbative Beitrag und der des Quark-Kondensates in $O(\alpha_S^0)$ sowie das Quark-Gluon-Kondensat. Dieser Effekt ist dabei offenbar Zufall und kann nicht auf ein tieferes Prinzip zurückgeführt werden. Übrig bleiben die α_S -Korrekturen des perturbativen und des Quark-Kondensat-Terms, die das Ergebnis damit dominieren. Betrachtet man den perturbativen Teil allein, dann ist die $O(\alpha_S)$ -Korrektur etwa doppelt so groß wie der $O(\alpha_S^0)$ -Beitrag (dieses Verhalten zeigt sich in der nichtdiagonalen Summenregel auch bei $n = 0$). Die Abhängigkeit vom Borel-Parameter ist in Abbildung 4.9a geplottet und die Variation in M^2 ist vergleichsweise groß. In Summenregeln ist dies oft ein Zeichen dafür, dass die Korrelationsfunktion große Beiträge von Instantonen, nichtperturbativen Beiträgen jenseits der Operatorproduktentwicklung, enthält. Es ist beispielsweise bekannt, dass Summenregeln mit zwei pseudoskalaren Strömen in der Korrelationsfunktion

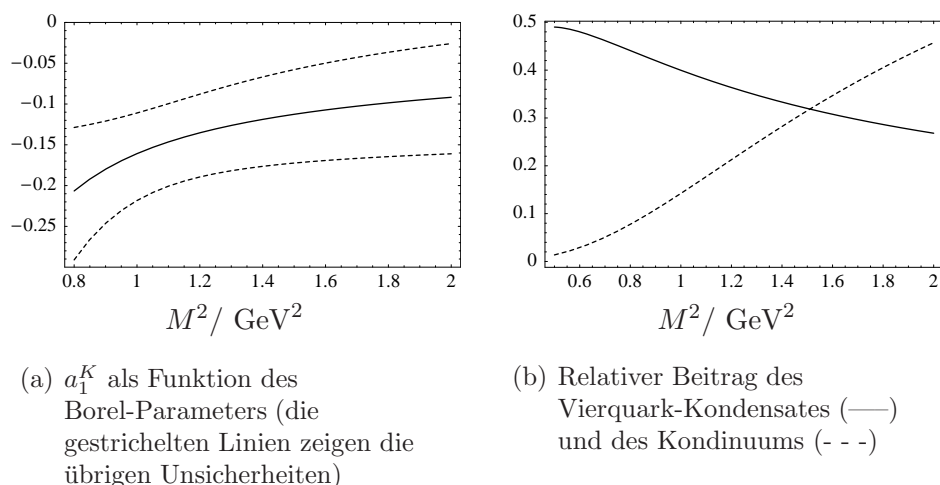


Abbildung 4.9: a_1^K aus der nichtdiagonalen Summenregel

dadurch in der Regel unbrauchbar werden. Wie Abbildung 4.9b zeigt, gibt es auch kein Bereich für den Borel-Parameter, in dem sowohl der relative Beitrag des Dualitätsintervalls als auch der des letzten (Dim. 6) Terms der Operatorproduktentwicklung unter 30% liegen.

Alle diese Fakten zusammengenommen, drängt sich der Schluss auf, dass die nichtdiagonalen Summenregeln entweder aufgrund der eher zufälligen großen Sensitivität auf α_S -Korrekturen und/oder wegen Instantonen kein zuverlässiges Resultat liefern.

4.1.7 Beitrag von K_1

Im vorletzten Abschnitt wurde bereits erwähnt, dass in der diagonalen Summenregel für a_1^K das Dualitätsintervall $s_0^K < s < \infty$ nur einen kleinen Beitrag liefert. Offensichtlich tragen in der hadronischen Darstellung der Korrelationsfunktion Zustände, die schwerer als das Kaon sind, nur wenig bei. Um diese Schlussfolgerung zu untermauern, können die ersten angeregten Zustände direkt betrachtet werden. In der Korrelationsfunktion mit zwei Axialvektorströmen tragen pseudoskalare und axiale Mesonen bei.

Die nach dem Kaon nächstleichten Pseudoskalaren Mesonen mit gleichem Flavour-Inhalt sind $K(1440)$ und $K(1830)$ [20]. Ihre Zerfallskonstanten sind proportional zu den Massen der leichten Quarks, insbesondere lieferte eine Abschätzung in Summenregeln, dass $f_{K(1440,1830)} < 20$ MeV. Addiert man diese Beiträge explizit in der hadronischen Darstellung (4.8), sodass der Schwellenwert s_0^K , über dem die Zustände mittels Quark-Hadron-Dualität abgeschätzt werden, entsprechend erhöht wird, wird die Änderung größenordnungsmäßig $f_{K(1440,1830)}/f_K < 2\%$ betragen. In der hadronischen Darstellung können diese pseudoskalaren Mesonen daher sicher vernachlässigt werden.

Der Beitrag des leichtesten Axialvektor-Mesons $K_1(1270)$ [20] dagegen kann mit einer eigenen Summenregel-Rechnung bestimmt werden. Die zugehörigen hadronischen Größen

werden definiert als

$$\langle 0 | \bar{u} \gamma_\mu \gamma_5 s | K_1(q, \lambda) \rangle = \epsilon_\mu^\lambda f_{K_1} m_{K_1}, \quad (4.23)$$

$$\langle K_1(q, \lambda) | \bar{s}(0) \gamma_\nu \gamma_5 [0, z] u(z) | 0 \rangle = \epsilon_\nu^{\lambda*} f_{K_1} m_{K_1} \int_0^1 du e^{i\bar{u}qz} \varphi_{K_1}(u), \quad (4.24)$$

wobei $\varphi_{K_1}(u)$ eine der Verteilungsaamplituden des K_1 und ϵ der Polarisationsvektor ist. Damit wird die hadronische Darstellung (4.8) zu

$$\Pi^n(q^2) = \frac{f_K^2 N_n a_n^K}{m_K^2 - q^2} + \frac{f_{K_1}^2 N_n a_n^{K_1}}{m_{K_1}^2 - q^2} + \int_{s'_h}^\infty ds \frac{\rho_h^n(s)}{s - q^2}. \quad (4.25)$$

Das Integral über angeregte Zustände, das über den entsprechenden Teil des Dispersionsintegrals abgeschätzt wird, beginnt jetzt erst bei der Grenze $s'_h \geq (1270 \text{ MeV})^2$, aus der für das Dualitätsintervall die neue effektive Schwelle $s_0^{K_1} > s_0^K$ wird. Die Summenregel (4.10) wird dann zu

$$f_K^2 a_n^K e^{-m_K^2/M^2} + f_{K_1}^2 a_n^{K_1} e^{-m_{K_1}^2/M^2} = \frac{1}{N_n} \frac{1}{\pi} \int_0^{s_0^{K_1}} ds e^{-s/M^2} \text{Im}_s \Pi^n(s). \quad (4.26)$$

Um den Term $f_{K_1}^2 a_n^{K_1}$ zu bestimmen, wird eine allgemeinere Korrelationsfunktion

$$\Pi_{\mu\nu}(q, z) = i \int d^4x e^{iqx} \langle 0 | T \{ \bar{u}(x) \gamma_\mu \gamma_5 s(x), \bar{s}(0) \gamma_\nu \gamma_5 [0, z] u(z) \} | 0 \rangle \quad (4.27)$$

eingeführt, die, in Lorentz-Skalare zerlegt, die Form

$$\Pi_{\mu\nu} = \Pi_1 q_\mu q_\nu + \Pi_2 g_{\mu\nu} + \Pi_3 q_\mu z_\nu + \Pi_4 z_\mu q_\nu + \Pi_5 z_\mu z_\nu$$

hat. Π_1 ist dabei identisch mit der bisher für das Kaon verwendeten Korrelationsfunktion (4.11): $(qz)^2 \Pi_1(q^2, qz) = \Pi_z(q^2, qz)$. Während das K ausschließlich zu Π_1 beiträgt, trägt K_1 sowohl zu Π_1 als auch zu Π_2 bei:

$$\Pi_{\mu\nu}^{K_1}(q, z) = (q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu} m_{K_1}^2) \frac{f_{K_1}^2}{m_{K_1}^2 - q^2} \int_0^1 du e^{i\bar{u}qz} \varphi_{K_1}(u).$$

Wegen der Transversalität $\epsilon^\lambda \cdot q = 0$ ist der K_1 -Beitrag zu Π_1 und Π_2 bis auf den Faktor $m_{K_1}^2$ identisch; in Π_2 ist K_1 zudem der leichteste beitragende Zustand. Die Größe $f_{K_1}^2 a_n^{K_1}$ kann also aus einer Summenregel für Π_2 bestimmt werden:

$$-m_{K_1}^2 f_{K_1}^2 a_n^{K_1} e^{-m_{K_1}^2/M^2} = \frac{2(2n+3)}{3(n+1)(n+2)} \frac{1}{\pi} \int_0^{s_0^{K_1}} ds e^{-s/M^2} \int_0^1 du C_n^{3/2}(u - \bar{u}) \text{Im}_s \pi_2(u, s). \quad (4.28)$$

Dabei ist durch $\Pi_2(q^2, qz) = \int_0^1 du e^{i\bar{u}qz} \pi_2(u, q^2)$ die Funktion $\pi_2(u, q^2)$ ganz analog zu $\pi(u, q^2)$ definiert.

Da es hier nur um eine grobe Abschätzung geht, werden in der Berechnung von $\pi_2(u, q^2)$ nur der perturbative α_s^0 -Term sowie Quark- und Quark-Gluon-Kondensat berücksichtigt. Für $n = 0$ ist das Ergebnis mit (4.28):

$$\begin{aligned}
 f_{K_1}^2 = & \frac{e^{\frac{m_{K_1}^2}{M^2}}}{m_{K_1}^2} \left[-\frac{m_s^3}{12M^2} \langle 0 | \bar{s}s | 0 \rangle + e^{-\frac{m_s^2}{M^2}} m_s \langle 0 | \bar{u}u | 0 \rangle - \frac{e^{-\frac{m_s^2}{M^2}} m_s^3}{4M^4} \langle 0 | \bar{u}Gu | 0 \rangle \right. \\
 & - \frac{e^{-\frac{s_0^{K_1}}{M^2}}}{8\pi^2 s_0^{K_1}} (m_s^6 - 3M^2 s_0^{K_1} m_s^2 + 2M^2 s_0^{K_1} (M^2 + s_0^{K_1})) + \frac{e^{-\frac{m_s^2}{M^2}}}{8\pi^2} (m_s^4 - M^2 m_s^2 + 2M^4) \\
 & \left. - \frac{m_s^6}{8\pi^2 M^2} \left(\text{Ei} \left(-\frac{s_0^{K_1}}{M^2} \right) - \text{Ei} \left(-\frac{m_s^2}{M^2} \right) \right) \right]. \quad (4.29)
 \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis³ wird jetzt in (4.26) eingesetzt, um die ursprüngliche Summenregel für f_K^2 zu verbessern. Bei der Bestimmung von $s_0^{K_1}$ zeigt sich, dass die beste Borel-Stabilität erzielt wird, wenn für (4.26) und (4.29) der gleiche Wert verwendet wird (obwohl sie auf unterschiedlichen Korrelationsfunktionen basieren). Der Fit ergibt $s_0^{K_1} \approx 1,7 \text{ GeV}^2$ und damit $f_{K_1}^2 \approx 0.031_{-0.003}^{+0.006} \text{ GeV}^2$, was mit dem aus der $\tau \rightarrow K_1 \nu_\tau$ -Zerfallsbreite extrahierten Wert gut übereinstimmt [5]. Das Resultat für f_K^2 ändert sich damit kaum.

Mit diesem Wissen kann jetzt $n = 1$ eingesetzt werden, mit dem Resultat

$$\begin{aligned}
 f_{K_1}^2 a_1^{K_1} = & \frac{e^{\frac{m_{K_1}^2}{M^2}}}{m_{K_1}^2} \left[-\frac{5}{6} m_s \langle 0 | \bar{s}s | 0 \rangle + \frac{5}{3} e^{-\frac{m_s^2}{M^2}} m_s \langle 0 | \bar{u}u | 0 \rangle + \frac{5}{18} \frac{m_s}{M^2} \langle 0 | \bar{s}Gs | 0 \rangle \right. \\
 & - \frac{5}{12} e^{-\frac{m_s^2}{M^2}} \frac{2m_s M^2 + m_s^3}{M^4} \langle 0 | \bar{u}Gu | 0 \rangle - \frac{5}{48} \frac{e^{-\frac{s_0^{K_1}}{M^2}}}{\pi^2 M^2 (s_0^{K_1})^2} (4M^4 (s_0^{K_1})^2 m_s^2 + (M^2 - s_0^{K_1}) m_s^8) \\
 & + \frac{5}{48} \frac{e^{-\frac{m_s^2}{M^2}}}{\pi^2 M^2} (4M^4 m_s^2 + M^2 m_s^4 - m_s^6) \\
 & \left. + \frac{5}{48} \frac{m_s^4 (m_s^4 - 6M^4)}{\pi^2 M^4} \left(\text{Ei} \left(-\frac{s_0^{K_1}}{M^2} \right) - \text{Ei} \left(-\frac{m_s^2}{M^2} \right) \right) \right],
 \end{aligned}$$

und nach Division durch den eben angegebenen Wert für $f_{K_1}^2$ ist $a_1^{K_1} \approx -0.04_{-0.03}^{+0.04}$. Schließlich kann alles zusammen in (4.26) eingesetzt werden und der neue Zahlenwert für a_1^K ist

$$a_1^K = 0.07_{-0.03}^{+0.02}. \quad (4.30)$$

³Die Tatsache, dass hier höhere Ordnungen und Exponentialfunktionen in m_s auftreten, obwohl in der Korrelationsfunktion selbst nur bis $O(m_s^6, m_s^3, m_s)$ (Loop, Quark-Kondensat, Quark-Gluon-Kondensat) entwickelt wurde, ist auf die s -Integration zurückzuführen, bei denen in Diagrammen mit dem Strange-Quark-Propagator m_s^2 die untere Integrationsgrenze ist. Während streng genommen das Resultat wieder in m_s entwickelt werden müsste, richtet das Mitnehmen der höheren Ordnungen aber auch keinen Schaden an.

Dies liegt etwas über dem ohne explizite Berücksichtigung von $K_1(1270)$ bestimmten Wert, ist aber mit diesem konsistent. Aus der Tatsache, dass die Differenz nur moderat ist, folgt also, dass die diagonale Summenregel für a_1^K durch K_1 nur wenig „verunreinigt“ wird, die Quark-Hadron-Dualität also mit zufriedenstellender Genauigkeit verwendet werden kann. Insbesondere kann ein negativer Wert für a_1^K mit großer Sicherheit ausgeschlossen werden.

4.1.8 Vergleichsrechnung mit $f_{K\pi}$

Eine interessante Möglichkeit, unabhängig von den Zweipunkt-Summenregeln Rückschlüsse auf a_1^K zu machen, bietet der $K \rightarrow \pi$ -Formfaktor $f_{K\pi}^+$, der ähnlich wie der $B \rightarrow \pi$ -Formfaktor definiert ist über

$$\langle \pi^-(p-q) | \bar{s} \gamma_\mu u | K^0(p) \rangle = 2f_{K\pi}^+(q^2)p_\mu - (f_{K\pi}^+(q^2) - f_{K\pi}^-(q^2))q_\mu.$$

Bei positivem Impulsübertrag $0 < q^2 < (m_K - m_\pi)^2$ ist er zum Beispiel in K_{l3} -Zerfällen messbar. Theoretisch interessant ist aber auch sein Verhalten bei negativem q^2 . In diesem Bereich ist er geradezu ein Paradebeispiel für die Anwendung von Lichtkegel-Summenregeln [30] und wird genau wie der elektromagnetische Pion- oder Kaon-Formfaktor [45, 34] berechnet, wobei die Pion- und Kaon-Verteilungssamplituden als zentrale Größen auftreten. $f_{K\pi}^+(q^2 < 0)$ lässt sich dabei auf zwei unterschiedlichen Wegen berechnen, von denen einer die Kaon-Verteilungssamplitude und damit a_1^K involviert, während der andere nur die Pion-Verteilungssamplitude benötigt. Dann kann ermittelt werden, für welchen Wert von a_1^K die Ergebnisse besser konsistent miteinander sind. Dies wurde in [34] bereits in Twist-2-Genauigkeit durchgeführt, lässt sich aber mittels der dort angegebenen Resultate leicht auf Twist 4 verbessern.

Startpunkt der Berechnung ist die allgemeine Korrelationsfunktion

$$T_{\mu\nu}(p,q) = i \int d^4x e^{iqx} \langle 0 | T \{ (\bar{q}_2(0) \gamma_\mu \gamma_5 q_1(0)), (e_1 \bar{q}_1(x) \gamma_\nu q'_1(x) + e_2 \bar{q}'_2(x) \gamma_\nu q_2(x)) \} | P(p) \rangle,$$

von der in der Zerlegung nach Lorentz-Skalaren nur der Term $T((p+q)^2, q^2)$ proportional zu $p_\mu p_\nu$ verwendet wird.

Für die erste Summenregel wird davon der Spezialfall

$$T_1((p+q)^2, q^2) = T((p+q)^2, q^2; q_1 = s, q'_1 = u, q_2 = d, P = \pi^+, e_1 = 1, e_2 = 0) \quad (4.31)$$

betrachtet. In der hadronischen Darstellung trägt hier als leichtester Zustand das Kaon bei:

$$T_1^K((p+q)^2, q^2) = - \int d^4x e^{iqx} \frac{1}{m_K^2 - (p+q)^2} (i f_K) (-2f_{K\pi}^+(q^2)).$$

Nach dem üblichen Vorgehen, das heißt schreiben der Dispersionsrelation in $(p+q)^2$, Subtraktion der angeregten Zustände mittels Quark-Hadron-Dualität und schließlich Borel-Transformation, erhält man damit die Summenregel für $f_{K\pi}^+(q^2)$:

$$f_{K\pi}^+(q^2) = \frac{e^{m_K^2/M^2}}{2i\pi f_K} \int_0^{s_0^K} ds e^{-s/M^2} \text{Im}_s T_1(s \equiv (p+q)^2, q^2).$$

Der Ausdruck für T_1 ist in [34] bis Twist 4 angegeben und kann nach den Ersetzungen (4.31) direkt eingesetzt werden, zur Illustration sei hier nur der Twist-2-Beitrag gezeigt:

$$f_{K\pi}^+(q^2) = \frac{f_\pi}{f_K} \int_{u_0^K}^1 du \varphi_\pi(u) e^{-\frac{\bar{u}q^2}{uM^2} + \frac{m_K^2}{M^2}} + \dots \quad (4.32)$$

mit $u_0^K = -q^2/(-q^2 + s_0^K)$.

Die zweite Summenregel erhält man aus der allgemeinen Korrelationsfunktion durch

$$T_2((p+q)^2, q^2) = T((p+q)^2, q^2; q_1 = d, q'_2 = s, q_2 = u, P = K^0, e_1 = 0, e_2 = 1).$$

In der hadronischen Darstellung ist der Grundzustand diesmal das Pion,

$$T_2^\pi((p+q)^2, q^2) = \int d^4x e^{iqx} \frac{1}{-(p+q)^2} (i f_\pi) (-2 f_{K\pi}^+(q^2))$$

sodass die entsprechende Summenregel am Ende

$$f_{K\pi}^+(q^2) = -\frac{1}{2i\pi f_\pi} \int_0^{s_0^\pi} ds e^{-s/M^2} \text{Im}_s T_2(s \equiv (p+q)^2, q^2)$$

lautet. Auch hier wird nur der Twist-2-Beitrag

$$f_{K\pi}^+(q^2) = \frac{f_K}{f_\pi} \int_{u_0^\pi}^1 du \varphi_K(u) e^{-\frac{\bar{u}q^2}{uM^2} - \frac{\bar{u}m_K^2}{M^2}} + \dots \quad (4.33)$$

mit $s_0^\pi = (1 - u_0^\pi)(-q^2/u_0^\pi + m_K^2)$ wiedergegeben, während sich die Beiträge der höheren Twists mit den entsprechenden Ersetzungen aus den allgemeinen Formeln in [34] ergeben.

Während (4.33) also über φ_K von a_1^K abhängt, tritt in (4.32) keine asymmetrische Verteilungsamplitude auf. Zur Aswertung werden jetzt in beide Summenregeln die gleichen Zahlenwerte wie bisher eingesetzt, lediglich a_1^K wird als feier Parameter offen gelassen. Im Gültigkeitsbereich $-3 \text{ GeV}^2 < q^2 < -1 \text{ GeV}^2$ der Summenregel kann jetzt zum Beispiel der Quotient der beiden betrachtet werden, der idealerweise 1 sein sollte. Abbildung 4.10 zeigt diesen Quotienten als Funktion von q^2 für verschiedene Werte von a_1^K (wobei in der Fehlerabschätzung auch die Variation des Borelparameters $1 \text{ GeV}^2 < M^2 < 2 \text{ GeV}^2$ berücksichtigt wurde). Es zeigt sich, dass der Quotient bei positivem a_1^K tatsächlich gut mit 1 konsistent ist, während die Abweichungen bei negativem a_1^K deutlich größer sind. Alternativ kann man auch den Impulsübertrag z.B. zu $q^2 = -2 \text{ GeV}^2$ fixieren und die Gleichung nach a_1^K auflösen, woraus sich dafür ein Wert von $a_1^K \approx 0,2 \pm 0,1$ ergibt.

4.1.9 Diskussion

Die hier vorgestellte Neuberechnung von a_1^K über QCD Zweipunkt-Summenregeln macht die erste Abschätzung [36] durch Berücksichtigung höherer Ordnungen in m_s , α_s und den

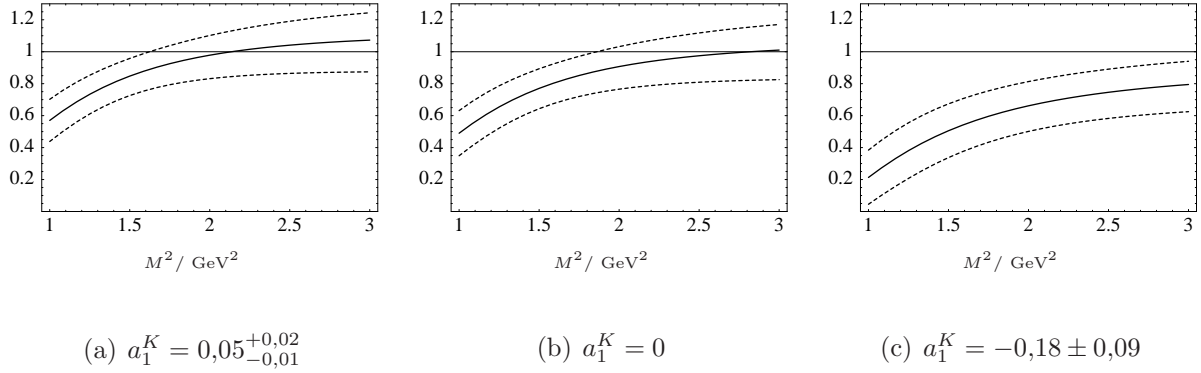


Abbildung 4.10: $f_{K\pi}^+(q^2)$ aus (4.33) dividiert durch die gleiche Größe aus (4.32) für verschiedene Werte von a_1^K . Die gestrichelten Linien zeigen die Unsicherheiten (Variation mit allen Eingabeparametern quadratisch addiert).

Kondensaten insgesamt deutlich genauer. Dabei wurde eine diagonale Korrelationsfunktion verwendet, und das Resultat steht im direkten Widerspruch zu dem kürzlich [55] aus der nichtdiagonalen Korrelationsfunktion gewonnenem. Letzteres leidet aber an numerischen Instabilitäten und weder die Quark-Hadron-Dualität noch die Operatorproduktentwicklung scheinen in dieser Methode gut zu funktionieren. Das Vertrauen in das Resultat der diagonalen Summenregel wird durch eine Reihe von Argumenten untermauert: So konnte gezeigt werden dass die Summenregel auf angeregte Zustände (allen voran $K_1(1270)$) nur wenig sensitiv ist, die Näherungen und Entwicklungen zeigen numerisch eine gute Stabilität. Und schließlich konnte ganz unabhängig von der direkten Berechnung über den $K \rightarrow \pi$ -Formfaktor gezeigt werden, dass a_1^K mit ziemlicher Sicherheit positiv ist.

Das Resultat $a_1^K = 0,05 \pm 0,02$ steht also bereit, um in der Berechnung von hadronischen Prozessen verwendet zu werden. Relevant ist es etwa in hadronischen oder semileptonischen B und B_s -Zerfällen mit einem oder mehreren Kaonen im Endzustand und tritt zum Beispiel in Lichtkegel-Summenregeln und QCD Faktorisierung über die Kaon-Verteilungsamplitude auf. Während in vielen Fällen der führende $SU(3)_{fl}$ -verletzende Beitrag abgesehen von f_K/f_π proportional zu a_1^K ist, sollte bei der Beurteilung der Unsicherheit nicht vergessen werden, dass a_1^K den Charakter eines Korrekturterms hat. Mag der relative Fehler in dem Resultat auch 40% betragen, so ist das Resultat, dass a_1^K mit großer Sicherheit relativ klein ist, als absolute Aussage betrachtet, durchaus eine Präzisionsvorhersage im Rahmen der methodischen Genauigkeitsgrenzen.

4.2 Normierung der Dreiteilchen-Verteilungsamplitude: δ_K

Die Normierung der Twist-2-Verteilungsamplituden ist durch die Zerfallskonstanten f_π und f_K gegeben, die beide sehr genau gemessen wurden. Der Asymmetrieterm a_1^K hat eher den

Charakter einer Korrektur zweiter Ordnung, was die $SU(3)_{fl}$ -Brechung anbelangt, ist aber deshalb so bedeutsam, weil die Twist-2-Verteilungsamplitude in vielen hadronischen Größen den führenden Beitrag liefert. Geht man zu höherem Twist, nimmt die numerische Relevanz in ähnlichem Maße ab, wie die Unkenntnis steigt. Die Normierung der Zweiteilchen-Verteilungsamplitude in Twist 3 ist mit $f_{\pi,K}$ über den ebenfalls gut bekannten Faktor $\mu_{\pi,K}$ verbunden. Die Normierungsfaktoren $f_{3\pi,K}$ und $\delta_{\pi,K}^2$ der in (3.38) und (3.39) auf Seite 93 definierten Quark-Antiquark-Gluon-Verteilungsamplituden sind dagegen nicht direkt experimentell messbar. Sie können über Zweipunkt-Summenregeln berechnet werden, was bisher aber nur für das Pion gemacht wurde [50]. Um einen Eindruck von $SU(3)_{fl}$ -verletzenden Effekten bei höheren Twists zu bekommen wurde daher exemplarisch die Normierungskonstante δ_K^2 der Twist-4-Verteilungsamplitude des Kaons berechnet. Die Normierungskonstante f_{3K} in Twist 3 ließe sich auf ähnliche Weise berechnen, aber die Rechnung ist technisch etwas aufwendiger. Die rein qualitative Aussage über das Verhältnis δ_K^2/δ_π^2 , die das Ziel dieser Rechnung ist, lässt sich aber auch auf $f_{3K}/f_{3\pi}$ übertragen.

4.2.1 Zweipunkt-Summenregel und Diagramme

Die Normierungskonstante δ_K^2 ergibt sich aus dem lokalen ($x = y = 0$) Grenzwert des Matrixelements (3.39), das die Twist-4-Verteilungsamplitude definiert:

$$\langle 0|\tilde{a}_\mu|K^+(p)\rangle = -if_K\delta_K^2p_\mu, \quad \tilde{a}_\mu = \bar{s}\gamma_\rho\tilde{G}_{\rho\mu}u, \quad (4.34)$$

mit $\tilde{G}_{\rho\mu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\rho\mu\alpha\beta}G^{\alpha\beta}$. In [50] wurden – für die entsprechende Konstante des Pions – zwei Ansätze gezeigt, deren Ergebnisse gut übereinstimmen. Der erste basiert auf einer Korrelationsfunktion mit \tilde{a}_μ und dem Axialvektor-Quarkstrom $j_\nu^{(K)} = \bar{u}\gamma_\nu\gamma_5s$, die vom Gluon-Kondensat dominiert wird. In dieser Rechnung wird der zweite Ansatz verwendet, der auf der Korrelationsfunktion

$$\tilde{\pi}_{\mu\nu}(q) = i \int e^{iqx} d^4x \langle 0|T\{\tilde{a}_\mu^\dagger(x), \tilde{a}_\nu(0)\}|0\rangle.$$

basiert, von der nur die $q_\mu q_\nu$ -Komponente $\tilde{\pi}(q^2)$ verwendet wird.

Da der Leser inzwischen zu einem Experten auf dem Gebiet der Summenregeln avanciert ist, wird die Rechnung hier nur noch sehr knapp vorgestellt. Aus der hadronischen Darstellung des Korrelators

$$\tilde{\pi}(q^2) = \frac{f_K^2\delta_K^4}{m_K^2 - q^2} + \int_{s_h}^{\infty} ds \frac{\rho_h(s)}{s - q^2}$$

wird die Summenregel abgelesen:

$$\delta_K^4 f_K^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{s_0^K} ds \operatorname{Im}_s \tilde{\pi}^{QCD}(s) e^{(m_K^2 - s)/M^2}.$$

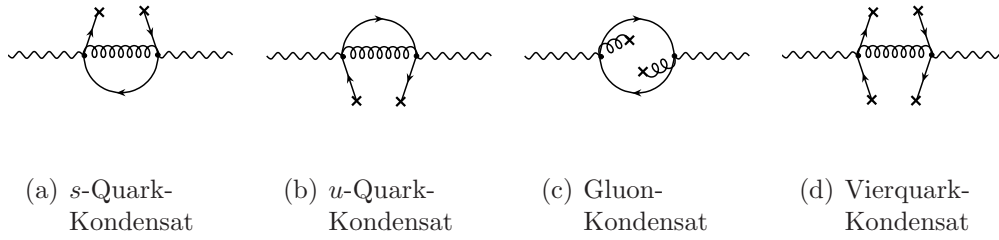


Abbildung 4.11: Beiträge zur Korrelationsfunktion für δ_K^2

In der Berechnung werden die Kondensate bis zur Dimension 6 berücksichtigt. Lediglich das Quark-Gluon-Kondensat wird dabei ausgelassen, da sein Beitrag proportional zur Quarkmasse und damit im Vergleich sehr klein ist. Gleiches gilt für den rein perturbativen Beitrag, für den eine Zweischleifen-Rechnung nötig ist. Bereits sein Beitrag zu δ_π^2 ist verschwindend gering und Korrekturen treten erst in der Ordnung m_s^2 auf. Das Resultat für die verbleibenden Diagramme Abb. 4.11 ist

$$\delta_K^4 f_K^2 = e^{m_K^2/M^2} \left\{ M^2 \left[\frac{\alpha_s m_s}{6\pi} \left(\langle \bar{s}s \rangle - \frac{4}{3} \langle \bar{u}u \rangle \right) + \frac{1}{72} \left\langle \frac{\alpha_s}{\pi} G^2 \right\rangle \right] + \frac{8}{9} \pi \alpha_s \langle \bar{s}s \rangle \langle \bar{u}u \rangle \right\} + O(m_s^2) + O(m_s \langle \bar{q}Gq \rangle).$$

Mit $K \rightarrow \pi$, $m_s \rightarrow 0$ und $\langle 0 | \bar{s}s | 0 \rangle \rightarrow \langle 0 | \bar{q}q | 0 \rangle$ stimmt dies mit dem Resultat von [50] überein.

4.2.2 Resultat

Mit den üblichen Zahlenwerten für die Kondensate ist das Verhältnis der Twist-4-Normierungskonstanten

$$\frac{\delta_K^2 f_K}{\delta_\pi^2 f_\pi} = 1,07^{+0,14}_{-0,13}. \quad (4.35)$$

Das Intervall ist mit 1 konsistent, erlaubt aber auch eine Abweichung in der Größenordnung von f_K/f_π . Die deutlich schwierigere Berechnung von f_{3K} ist bisher noch nicht durchgeführt worden, das obige Resultat motiviert aber eine Schätzung von

$$\frac{f_{3K}}{f_{3\pi}} = 1,0 \pm 0,2, \quad (4.36)$$

die im folgenden Abschnitt verwendet wird.

4.3 $SU(3)_{fl}$ in $B \rightarrow PP$

Die neuen Parameterwerte für das Kaon können jetzt für die $B \rightarrow PP$ -Zerfallsamplituden ($B = B^\pm, B^0, B_s, P = \pi, K$) verwendet werden. Dazu muss zuerst der effektive Hamiltonoperator (2.13) (Seite 37) verallgemeinert werden, denn die dort angegebenen Operatoren ändern alle die Strangeness-Quantenzahl nicht ($\Delta S = 0$). Der Strangeness-verändernde Teil mit $\Delta S = \pm 1$ ergibt sich aber aus (2.13) durch die Ersetzung $d \rightarrow s$ in den Quarkströmen und in den CKM -Faktoren. Die Wilson-Koeffizienten bleiben dabei die gleichen, denn bei der hohen Skala der darin enthaltenen Physik fällt die Masse des Strange-Quarks nicht ins Gewicht. Allerdings ändert sich die Hierarchie der CKM -Faktoren, sodass die Pinguin-Operatoren $O_{3..8}$ eine weitaus wichtigere Rolle spielen, und auch die in $B \rightarrow \pi\pi$ vernachlässigten elektroschwachen Pinguine relevant sind [64]. Wie schon bei $B \rightarrow \pi\pi$ tragen die Operatoren in verschiedenen Kombinationen und mit verschiedenen Diagrammen zu den Zerfallskanälen bei; eine umfassende Beschreibung der einzelnen Zerfallsamplituden würde aber den Rahmen dieser Arbeit sprengen, weswegen stattdessen auf die Literatur [29, 65, 66, 67] verwiesen wird. Der Hauptfokus dieses Teils ist hingegen, die Matrixelemente der einzelnen Vierquark-Operatoren auf die numerischen Unterschiede zu untersuchen, die sich ergeben, wenn ein Up- oder Down-Quark durch ein Strange-Quark ausgetauscht wird. Denn genau diese Unterschiede werden in phänomenologischen Analysen häufig vernachlässigt oder pauschal durch f_K/f_π abgeschätzt.

In Quark-Schleifen mit hoher Virtualität, zum Beispiel in den Vertexkorrekturen der Emissionsdiagramme, steht die Strange-Quark-Masse im Verhältnis zur harten Skala $\mu_b \sim m_b$ und die Näherung $m_s \approx 0$ ist durchaus gerechtfertigt (in der Berechnung von a_1^K und δ_K^2 war die relevante Skala mit $M \sim 1$ GeV deutlich niedriger). Daher genügt es in vielen Fällen, in den Ausdrücken für die Matrixelemente und verwandte Größen die Pion-Parameter (Masse, Verteilungsamplituden, Summenregel-Parameter etc.) durch die des Kaons zu ersetzen.

4.3.1 Amplituden in naiver Faktorisierung

Wie schon bei $B \rightarrow \pi\pi$ kann man mit naiver Faktorisierung eine erste Abschätzung für die Zerfallsamplituden erhalten. Die Faktorisierungsformel (2.18) wird dafür zunächst verallgemeinert:

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} \langle B | O_{BP_1P_2} | P_1 P_2 \rangle = \mathcal{A}_{BP_1P_2} = i \frac{G_F}{\sqrt{2}} (m_B^2 - m_{P_2}^2) f_{P_2} f_{BP_1}^+ (m_{P_2}^2). \quad (4.37)$$

Der Operator $O_{BP_1P_2}$ steht dabei allgemein für denjenigen Vierquark-Operator, der einen Farbsinglett- $V-A$ -Strom mit den Quantenzahlen des emittierten Mesons P_2 enthält und einen weiteren, der den $B \rightarrow P_1$ -Übergang induziert. Dieser Operator ist je nach betrachtetem Zerfallskanal ein anderer Teil des effektiven Hamiltonoperators. Je nach Zerfallskanal treten hier neben dem guten Bekannten f_K neue Formfaktoren für die Übergänge $B \rightarrow K$ und $B_s \rightarrow K$ auf.

Die Berechnung des $B \rightarrow \pi$ -Formfaktors in Lichtkegel-Summenregeln, die hier nicht im

Detail vorgestellt wird, führt auf [21]

$$f_{B\pi}^+(q^2) = \frac{f_\pi m_b^2}{2m_B^2 f_B} \int_{u_0}^1 \frac{du}{u} \exp\left(\frac{m_B^2}{M^2} - \frac{m_b^2 - q^2 \bar{u}}{u M^2}\right) \left(\varphi_\pi(u, \mu) + \frac{\mu_\pi}{m_b} \left[u \varphi_p^{(\pi)}(u, \mu) + \frac{\varphi_\sigma^{(\pi)}(u, \mu)}{3} - \frac{u \varphi_\sigma^{(\pi)'}(u, \mu)}{6} \right] \right) + O(\alpha_S) + \text{höhere Twists}$$

mit $\varphi_\sigma^{(\pi)'}(u) = d\varphi_\sigma^{(\pi)}(u)/du$ und $u_0 = (m_b^2 - q^2)/(s_0^B - q^2)$. Die Beiträge der Twists 3 und 4 liefern entsprechende Konvolutionen über die zugehörigen Zwei- und Dreiteilchen-Verteilungsamplituden, die $O(\alpha_S)$ -Korrekturen sind zusätzliche Terme in den Konvolutionskernen. Der $B \rightarrow K$ -Formfaktor ist der entsprechende Ausdruck mit $\varphi_\pi \rightarrow \varphi_K, m_\pi \rightarrow m_K$ etc.. Die Zahlenwerte für die Summenregel-Parameter im Kaon-Kanal werden der Zweipunkt-Summenregel für f_K (aus Abschnitt 4.1.6 Seite 124) entnommen. Für die Asymmetrie a_1^K wird das neue Ergebnis (4.20) verwendet. Das zweite Moment a_2^K wird ebenfalls aus der Zweipunkt-Summenregel (4.21) entnommen, aus Konsistenzgründen wird jetzt auch für das Pion das entsprechende Ergebnis (4.22) für a_2^π verwendet. Auf die Berücksichtigung höherer Momente wird hier verzichtet, denn erstens gibt es bezüglich des Kaons keine Informationen darüber und zweitens zeigten die numerischen Auswertungen in Kapitel 3, dass ihr Einfluss gering ist. Die Normierungskonstanten der höheren Twists werden für das Pion wie zuvor zu $f_{3\pi} = 0,0035 \text{ GeV}^2$ und $\delta_\pi^2 = 0,17 \pm 0,05 \text{ GeV}^2$ gesetzt, für das Kaon werden die Korrekturen (4.35) und (4.36) verwendet, Asymmetrieterme aber nicht berücksichtigt. Durch die etwas geänderten Eingabewerte für $a_{2,4}^\pi$ (die aber mit den Intervallen (3.46) konsistent sind) verschiebt sich der Zentralwert für $f_{B\pi}^+(0)$ etwas, was aber nicht weiter ins Gewicht fällt, da im Weiteren nur Verhältnisse von Formfaktoren bzw. Amplituden betrachtet werden. Wichtiger ist es, dass in diesen Verhältnissen Zähler und Nenner in konsistenter Weise berechnet werden. Für den $B \rightarrow K$ -Formfaktor ergibt sich

$$\frac{f_{BK}^+(0)}{f_{B\pi}^+(0)} = 1,36_{-0,09}^{+0,12}.$$

Für den $B_s \rightarrow K$ -Formfaktor wird zusätzlich f_{B_s} benötigt. Dafür muss in der Zweipunkt-Summenregel für f_B das leichte Quark durch das Strange-Quark ersetzt werden [47] und

$$\frac{f_{B_s}}{f_B} = 1,16 \pm 0,05.$$

Beim $B_s \rightarrow K$ -Übergang ist das Strange-Quark jetzt Spectator, sodass die Asymmetrie der Kaon-Verteilungsamplitude mit anderem Vorzeichen beiträgt ($\varphi_K(\bar{u})$ statt $\varphi_K(u)$). Das Resultat ist

$$\frac{f_{B_s K}^+(0)}{f_{B\pi}^+(0)} = 1,21_{-0,11}^{+0,14}.$$

In der naiven Faktorisierung (4.37) treten die Formfaktoren bei nichtverschwindendem $p^2 = m_K^2 > 0$ auf, was die Kinematik etwas verändert. Numerisch hat dies aber einen verschwindend geringen Einfluss, wie sich aus expliziter Berechnung ergibt: $|(f_{BP}(m_K^2) - f_{BP}(0))/f_{BP}(0)| < 1\%$, sodass weiter die Näherung verschwindenden Impulsübertrages verwendet wird. Im Ergebnis zeigt sich dann, dass sich die $SU(3)_{fl}$ -verletzenden Effekte teils gegenseitig aufheben, teils aber auch aufaddieren:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{A}_{B\pi K} &= \frac{f_K}{f_\pi} \mathcal{A}_{B\pi\pi} = 1,22 \\ \mathcal{A}_{BK\pi} &= 1,36_{-0,09}^{+0,12} \\ \mathcal{A}_{BKK} &= 1,65_{-0,11}^{+0,14} \\ \mathcal{A}_{B_s K K} &= 1,52_{-0,14}^{+0,18} \\ \mathcal{A}_{B_s K \pi} &= 1,25_{-0,12}^{+0,14} \end{aligned} \right\} \times \mathcal{A}_{B\pi\pi}. \quad (4.38)$$

Die Abweichung von 1 bzw. f_K/f_π rechtfertigt die Verwendung von $SU(3)_{fl}$ als Symmetrie nicht, und es gibt keine Rechtfertigung, die Strange-Quark-Masse grundsätzlich zu vernachlässigen.

4.3.2 Nichtfaktorisierbare Anteile

Exemplarisch werden jetzt auch die nichtfaktorisierbaren Beiträge in der $SU(3)_{fl}$ -Relation (4.1) auf Effekte der Strange-Quark-Masse untersucht. Dazu wird zuerst die Zerlegung der Zerfallsamplituden in der in Abschnitt 2.2.5 auf Seite 47 eingeführten Schreibweise benötigt, wobei elektroschwache Pinguin-Operatoren im effektiven Hamiltonoperator weiter vernachlässigt werden. Die Amplitude für $B^- \rightarrow \pi^- \pi^0$ ist dabei ein alter Bekannter; hier trägt nur die Isospin-2-Amplitude bei. Diese enthält nur Emissions-Diagramme der Strom-Strom-Operatoren:

$$\mathcal{A}(B^- \rightarrow \pi^- \pi^0) = \frac{V_{ud}V_{ub}^*}{\sqrt{2}} \mathcal{A}_{B\pi\pi} \left[\frac{4}{3}(c_1 + c_2) + 2(c_1 + c_2)r_E^{B\pi\pi} \right].$$

In dem Parameter r_E für die nichtfaktorisierbaren Emissions-Diagramme wurde jetzt zur späteren Unterscheidung als oberer zusätzlich Index der Zerfallskanal angegeben. Die Zerfallsamplitude $B^- \rightarrow \pi^0 K^-$ enthält sowohl zwei Klassen von Emissions-Diagrammen, bei denen entweder das Kaon oder das Pion das emittierte Teilchen ist, als auch Pinguin- und Annihilations-Diagramme. In $B^- \rightarrow \pi^- \bar{K}^0$ dagegen tragen nur diese Pinguin- und Annihilationsdiagramme bei, die aber durch Austausch von u - und d -Quarks (in diesem Falle übrigens eine echte Isospin-Transformation) aus den Diagrammen für $B^- \rightarrow \pi^0 K^-$ hervorgehen. In der Relation (4.1) heben sich diese Beiträge dann gegenseitig auf:

$$\sqrt{2}\mathcal{A}(B^- \rightarrow \pi^0 K^-) + \mathcal{A}(B^- \rightarrow \pi^- \bar{K}^0) = \sqrt{2}\mathcal{A}(B^- \rightarrow \pi^0 K^-)_E.$$

Damit ist es ausreichend, die Emissions-Diagramme der Strom-Strom-Operatoren ($O_{1,2}^u$ bzw. die entsprechenden mit $d \rightarrow s$) zu betrachten. Zwecks Eindeutigkeit wird im Folgenden die

Notation $O_1^{u,(d)} = (\bar{d}u)_{V-A}(\bar{b})_{V-A}$ die die Operatoren des effektiven Hamiltonsoperators mit $\Delta S = 0$ (2.13) und $O_1^{u,(s)} = (\bar{s}u)_{V-A}(\bar{s}b)_{V-A}$ für die Operatoren des $\Delta S = 1$ -Teils verwendet. Der Emissionsteil der $B^- \rightarrow \pi^0 K^-$ -Zerfallsamplitude ist dann gegeben durch

$$\mathcal{A}(B^- \rightarrow \pi^0 K^-)_{\text{Em}} = \frac{V_{us}V_{ub}^*}{\sqrt{2}} \left[\mathcal{A}_{B\pi K} \left(c_1 + \frac{c_2}{3} + 2c_2 r_E^{B\pi K} \right) + \mathcal{A}_{BK\pi} \left(c_2 + \frac{c_1}{3} + 2c_1 r_E^{BK\pi} \right) \right],$$

wobei die nichtfaktorisierten Emissionsbeiträge,

$$r_E^{B\pi K} = \frac{\langle \pi^+ K^- | \tilde{O}_1^{u,(s)} | \bar{B}^0 \rangle_E}{\langle \pi^+ K^- | O_1^{u,(s)} | \bar{B}^0 \rangle_E}, \quad r_E^{BK\pi} = \frac{\langle \pi^+ K^- | \tilde{O}_2^{u,(s)} | \bar{B}^0 \rangle_E}{\langle \pi^+ K^- | O_2^{u,(s)} | \bar{B}^0 \rangle_E},$$

analog zu (2.26) auf Seite 49 definiert wurden. Genau wie dort wird der \bar{B}^0 -Zerfall als Referenz verwendet, aus dem nach Austausch des Spectator-Quarks der B^- -Zerfall wird. $r_E^{B\pi K}$ entspricht dabei dem Fall, dass K das emittierte Teilchen ist, während in $r_E^{BK\pi}$ das Pion emittiert ist. Diese beiden Parameter bleiben jetzt noch zu bestimmen:

Für die Diagramme mit harten Gluonen kann das Ergebnis (3.26) aus dieser Arbeit leider nicht verwendet werden, da es nur für den Fall gültig ist, dass die Verteilungsamplitude des emittierten Mesons symmetrisch ist. Für $r_E^{B\pi K,hard}$ muss also auf die QCD Faktorisierung (2.23) zurückgegriffen werden, wo die Verteilungsamplitude des Kaons die des (emittierten) Pions ersetzt. Aus Konsistenzgründen wird auch für $r_E^{BK\pi,hard}$ das Ergebnis der QCD Faktorisierung verwendet, für das in der Faktorisierungsformel (2.23) auf Seite 44 $f_{B\pi} \rightarrow f_{BK}$ sowie im Teil T^{II} die Kaon-Verteilungsamplitude eingesetzt wird.

Die Diagramme mit weichen Gluonen dagegen können wieder mit der in Kapitel 3.1 vorgestellten Methode in Lichtkegel-Summenregeln berechnet werden [31]. In der Berechnung der Korrelationsfunktion für $r_E^{B\pi K}$ treten dann Schleifendiagramme mit internem Strange-Quark auf, wobei die Virtualität der Schleife ~ 1 GeV ist. Die Strange-Quark-Masse muss dort entsprechend berücksichtigt werden. Dabei trägt auch das Quark-Kondensat proportional zu m_s bei. Das Resultat in Twist 3 lässt sich durch einen Korrekturfaktor ausdrücken [7, 6]:

$$r_E^{B\pi K,soft,Tw3} = \left(1 + \frac{4\pi^2 m_s \langle 0 | \bar{q}q | 0 \rangle}{3M^4} - \frac{4m_s^2}{M^2} \right) r_E^{B\pi\pi,soft,Tw3}.$$

Dabei ist $M \sim 1$ GeV der Borel-Parameter im Kaon-Kanal. In Twist 4 wurden ebenfalls die $O(m_s^2)$ -Korrekturen berechnet, die aber numerisch bedeutungslos sind, was motiviert, hier auch den Beitrag des Quark-Kondensates zu vernachlässigen [7, 6]:

$$r_E^{B\pi K,soft,Tw4} \approx r_E^{B\pi\pi,soft,Tw4}.$$

Der Parameter $r_E^{BK\pi}$ dagegen ergibt sich aus $r_E^{B\pi\pi}$ durch die Ersetzung der Verteilungsamplituden und der zugehörigen Summenregel-Parameter: Hier kommen wieder die Normierungskonstanten δ_K^2 und f_{3K} ins Spiel.

Die $SU(3)_{fl}$ -Verletzung in den nichtfaktorisierten Beiträgen ergibt sich zu

$$\begin{aligned}\frac{r_E^{BK\pi}}{r_E^{B\pi\pi}} - 1 &= (-4,5_{-3,0}^{+5,0} + i[-7,9_{-8,5}^{+8,3}]) \times 10^{-2}, \\ \frac{r_E^{B\pi K}}{r_E^{B\pi\pi}} - 1 &= (5,8_{-2,5}^{+3,9} + i[2,5_{-5,0}^{+8,6}]) \times 10^{-2},\end{aligned}$$

und ist in Anbetracht der Tatsache, dass die r_E 's selbst Korrekturterme sind, klein.

4.3.3 $SU(3)_{fl}$ -Relationen

Da in der $SU(3)_{fl}$ -Relation (4.1) Pinguin- und Annihilationsdiagramme nicht beitragen, kann jetzt der Parameter $\delta_{SU(3)}$ bestimmt werden, der nur für diese spezielle Relation eingeführt wurde (also eine prozessabhängige Größe ist). Übertragen auf andere Relationen lässt sich das Resultat also nur qualitativ. Auflösen der Relation nach diesem Parameter und Einsetzen der Zerfallsamplituden liefert

$$\delta_{SU(3)} = \frac{(c_1 + c_2/3 + 2c_2 r_E^{B\pi K})f_K/f_\pi + (c_2 + c_1/3 + 2c_1 r_E^{BK\pi})f_{BK}/f_{B\pi}}{[(c_1 + c_2/3 + 2c_2 r_E^{B\pi\pi}) + (c_2 + c_1/3 + 2c_1 r_E^{B\pi\pi})]} - 1,$$

und nach Einsetzen der Zahlenwerte ist

$$\delta_{SU(3)} = (0,215_{-0,016}^{+0,019}) + (-0,009_{-0,010}^{+0,009})i.$$

Neben (4.1) werden in der Literatur auch andere Relationen verwendet. In [65] wird zum Beispiel eine $SU(2)$ -Untergruppe der $SU(3)_{fl}$ als Symmetrie gefordert. Diese „U-Spin“ genannte Symmetrie entspricht dem Vertauschen von d - und s -Quarks und führt zum Beispiel auf die Relation

$$\mathcal{A}(B_s \rightarrow K^+ K^-) \simeq \mathcal{A}(B^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-).$$

Aus (4.38) können die Amplituden lediglich in naiver Faktorisierung abgelesen werden, und

$$\frac{\mathcal{A}(B_s \rightarrow K^+ K^-)_{\text{fakt}}}{\mathcal{A}(B^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-)_{\text{fakt}}} = \frac{\mathcal{A}_{B_s K K}}{\mathcal{A}_{B\pi\pi}} = 1,52_{-0,14}^{+0,18}.$$

Die Abweichung von 1 ist hier bedeutend und man kann schlussfolgern, dass es keine Rechtfertigung gibt, die U -Spin-Symmetrie im Gegensatz zu $SU(3)_{fl}$ als gute Näherung zu verwenden.

In [65] wird weiterhin die Abschätzung

$$\mathcal{A}(B_s \rightarrow K^+ K^-) \simeq \mathcal{A}(\overline{B}^0 \rightarrow \pi^+ K^-)$$

vorgeschlagen. Wieder reicht die Datenlage nur zu einer Berechnung in naiver Faktorisierung, gleichwohl ist die Abweichung wieder groß:

$$\frac{\mathcal{A}(B_s \rightarrow K^+ K^-)_{\text{fakt}}}{\mathcal{A}(\overline{B}^0 \rightarrow \pi^+ K^-)_{\text{fakt}}} = \frac{\mathcal{A}_{B_s K K}}{\mathcal{A}_{B\pi K}} = 1,25_{-0,12}^{+0,14}.$$

4.3.4 Fazit

Mittels QCD Zweipunkt- und Lichtkegel-Summenregeln können die Zweikörper-Zerfälle der B -Mesonen in Pionen und Kaonen berechnet werden, *ohne* dabei die $SU(3)_{fl}$ -Symmetrie zu verwenden. Ein Vergleich der Resultate zeigt, dass diese Symmetrie nicht besonders gut erfüllt ist und in phänomenologischen Analysen nicht verwendet werden sollte. Einer Bestimmung der hadronischen Zerfallsamplituden unter Verwendung oben zitierter Symmetrieregeln ist eine Berechnung in „voller“ QCD, das heißt einschließlich endlicher s -Quark-Masse, vorzuziehen. Für diese vollständige Analyse fehlen aber noch die Berechnungen der nichtfaktorisierbaren Anteile in Lichtkegel-Summenregeln. Lediglich die weichen Emissions-Diagramme sind bekannt, diese reichen für die exemplarische Analyse der $SU(3)_{fl}$ -Relation (4.1) aber aus. Das Ergebnis für den Parameter $\delta_{SU(3)}$ hat relativ kleine theoretische Fehler und kann daher in Anwendungen dieser Relation direkt verwendet werden.

Hervorzuheben ist, dass alle $SU(3)_{fl}$ -verletzenden Effekte, das heißt f_K/f_π , φ_K/φ_π und Verteilungsamplituden höheren Twists sowie deren Effekte auf Formfaktoren und nichtfaktorisierbare Beiträge, mittels Zweipunkt-Summenregeln auf die fundamentalen $SU(3)_{fl}$ -verletzenden Parameter zurückgeführt werden können: Die Strange-Quark-Masse m_s und die Differenz der Kondensate $\langle 0|\bar{s}s|0\rangle - \langle 0|\bar{q}q|0\rangle$. Der Zusammenhang zwischen diesen beiden Größen, der in der QCD zweifelsohne bestehen muss, ist dagegen noch unbekannt, sodass sie als unabhängige Eingabewerte betrachtet werden.

Die Tatsache, dass sämtliche Parameter als Funktion von m_s und $\langle 0|\bar{s}s|0\rangle - \langle 0|\bar{q}q|0\rangle$ bekannt sind, ermöglicht insbesondere eine konsistente Fehlerabschätzung, bei der auf den gleichen Eingabeparameter zurückzuführende Unsicherheiten nicht mehrfach gezählt werden. In Lichtkegel-Summenregeln heben sich so Unsicherheiten in Quotienten teilweise gegeneinander auf.

Kapitel 5

Zusammenfassung und Ausblick

$B \rightarrow \pi\pi$ -Zerfälle spielen eine wichtige Rolle bei der Bestimmung der CKM -Winkel α und γ . Der Vergleich mit Messungen in anderen Prozessen erlaubt es, das Standardmodell und seine Beschreibung der CP -Verletzung zu überprüfen. Um aus den Messdaten der B -Fabriken und weiteren Experimenten aber auf die fundamentalen Parameter zurückzuschließen, ist eine genaue theoretische Beschreibung nötig. Das Quark-Confinement macht dies zu einer schwierigen Aufgabe, denn mit reiner Störungstheorie können die Prozesse nicht beschrieben werden. In der QCD Faktorisierung wurden im Rahmen einer $1/m_b$ - und $\alpha_S(m_b)$ -Entwicklung störungstheoretisch berechenbare Anteile von nichtperturbativen, prozessunabhängigen Größen getrennt. Im Vergleich zu den Messdaten wurde aber die Isospin-0-Amplitude (in der Isospin-Zerlegung des Zwei-Pionen-Endzustandes) nicht richtig vorhergesagt. In dieser Isospin-0-Amplitude tragen insbesondere Pinguin- und Annihilationsdiagramme bei. Um zu überprüfen, ob $1/m_b$ -unterdrückte Beiträge an der Diskrepanz schuld sind, muss auf eine andere Methode zurückgegriffen werden. Die Lichtkegel-Summenregeln bieten sich hier an, denn sie beschreiben die hadronischen Zustände nicht über neue, nichtperturbative Parameter, sondern benutzen Dispersionsrelationen und die Quark-Hadron-Dualität. Dabei sind auch Effekte höherer Ordnungen in $1/m_b$ berechenbar, zum Beispiel der Austausch weicher Gluonen. Mit einer Modifikation der ursprünglich vorgeschlagenen Methode, die $B \rightarrow \pi\pi$ -Zerfallsamplituden in Lichtkegel-Summenregeln zu berechnen, konnten jetzt auch Emissionsdiagramme mit hartem Gluonaustausch und Annihilationsdiagramme berechnet werden. Die Ergebnisse schlossen auch eine harte Phase aus Endzustands-Wechselwirkungen ein. Zusammen mit bereits zuvor in Lichtkegel-Summenregeln berechneten Beiträgen konnten jetzt alle relevanten Diagramme zu den Zerfallsamplituden zusammengesetzt werden. Allerdings wurde kein großer, neuer Beitrag zu der Isospin-0-Amplitude gefunden und die Diskrepanz zwischen Theorie und Daten bleibt weiter bestehen. Es kann nur spekuliert werden, ob dafür zum Beispiel resonante Pinguin-Annihilationsdiagramme verantwortlich sind. Fragen wirft auch die Faktorisierung der Korrelationsfunktion auf, denn in höheren Twists treten hier (wie auch in der QCD Faktorisierung) divergente Integrale auf. Für einen Schluss auf neue Physik jenseits des Standardmodelles ist es jedoch in jedem Falle noch zu früh.

Ebenso wichtig sind auch die Zerfälle $B \rightarrow K\pi$, KK und die entsprechenden B_s -Zerfälle. Darin tritt jetzt ein Strange-Quark an die Stelle eines leichten (Up- oder Down-) Quarks. In einigen dieser Prozesse dominieren Pinguin-Operatoren, die besonders sensitiv auf neue,

unbekannte Teilchensorten sind, welche in der Pinguin-Schleife beitragen können. Außerdem werden sie häufig benutzt, um auf die Dynamik der $B \rightarrow \pi\pi$ -Zerfälle zurückzuschließen. Dafür werden Diagramme, die sich nur durch die Quark-Flavours (Up, Down, Strange) unterscheiden, gleichgesetzt, was der Postulierung einer $SU(3)_{fl}$ -Symmetrie gleichkommt. Die Strange-Quark-Masse ist aber im Vergleich zu hadronischen Skalen nicht klein, und die $SU(3)_{fl}$ -Symmetrie ist durch sie explizit gebrochen. Diese $SU(3)_{fl}$ -verletzenden Effekte können mit QCD Zweipunkt- und Lichtkegel-Summenregeln untersucht werden. Der wichtigste Effekt ist dabei die Asymmetrie der führenden Lichtkegel-Verteilungsfunktion des Kaons. Diese Asymmetrie wurde in Zweipunkt-Summenregeln neu berechnet, wobei die Bestimmung von Termen höherer Ordnung in α_S und in der Operatorproduktentwicklung für die Kondensate das Ergebnis deutlich genauer machte. Auch die Strange-Massen-Effekte in der Twist-4-Verteilungsamplitude konnten so abgeschätzt werden, wobei hier aber nur die Normierungskonstante bestimmt wurde, denn der Twist-4-Beitrag zu Zerfallsamplituden ist ohnehin klein. Auch in nichtfaktorisierbaren Beiträgen macht sich die Strange-Masse bemerkbar, wie sich aus Lichtkegel-Summenregeln bestimmen ließ. Damit konnte gezeigt werden, dass die oft verwendeten $SU(3)_{fl}$ -Relationen im Hinblick auf Präzisionsmessungen keine besonders guten Näherungen sind. Gleichzeitig aber wurde die Möglichkeit eröffnet, die Zerfallsamplituden unter voller Berücksichtigung der Strange-Masse zu bestimmen, was die Verwendung von $SU(3)_{fl}$ überflüssig macht. Für eine vollständige Bestimmung aller Zerfallsamplituden in Lichtkegel-Summenregeln müssen in der Zukunft alle nichtfaktorisierbaren Beiträge in Diagrammen mit Strange-Quarks berechnet werden, was in erster Linie eine Fleißarbeit ist.

Während in dieser Arbeit also weder Theorie und Experiment in besseren Einklang gebracht werden konnten, noch ein Schluss auf Physik jenseits des Standardmodells möglich war, so konnte doch die theoretische Beschreibung von Zweikörper- B -Zerfällen in Pionen und Kaonen deutlich verbessert werden, denn die Methode der QCD Summenregeln erlaubte es, sowohl $1/m_b$ -Effekte als auch $SU(3)_{fl}$ -verletzende Effekte systematisch zu berechnen. Diese haben in der bisherigen Untersuchung der Zerfälle gefehlt.

Anhang A

Vergleich mit Notationen in QCD Faktorisierung

In der QCD Faktorisierung [23, 24, 25] werden die $B \rightarrow \pi\pi$ -Zerfallsamplituden einschließlich nichtfaktorisierbarer Beiträge aus hartem Gluonaustausch durch die Parameter a_i und b_i ausgedrückt:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\bar{B}^0 \rightarrow \pi^+\pi^-) &= \left[\lambda_u a_1 + \sum_{p=u,c} \lambda_p (a_4^p + r_\chi^\pi a_6^p) \right] \mathcal{A}_{\pi\pi} \\ &\quad + \left[\lambda_u b_1 + (\lambda_u + \lambda_c)(b_3 + 2b_4) \right] \mathcal{B}_{\pi\pi}, \\ \sqrt{2}\mathcal{A}(B^- \rightarrow \pi^-\pi^0) &= \lambda_u (a_1 + a_2) \mathcal{A}_{\pi\pi}, \end{aligned}$$

wobei $r_\chi^\pi = 2\mu_\pi/m_b$, $\mathcal{A}_{\pi\pi} = i\frac{G_F}{\sqrt{2}}m_B^2 f_{B\pi}^0(0)f_\pi$ und $\mathcal{B}_{\pi\pi} = i\frac{G_F}{\sqrt{2}}f_B f_\pi^2$. Der Vergleich dieser Ausdrücke mit der in Abschnitt 2.2.5 eingeführten Zerlegung liefert den Zusammenhang zwischen den Parametern. Der Beitrag der Emissionsdiagramme mit den Strom-Strom-Operatoren $O_{1,2}^u$ wird durch $a_{1,2}$ ausgedrückt:

$$a_1 = c_1 + \frac{c_2}{3} + 2c_2 r_E, \quad a_2 = c_2 + \frac{c_1}{3} + 2c_1 r_E.$$

Die Beiträge von Pinguin-Operatoren und -Diagrammen sind

$$\begin{aligned} a_4^p + r_\chi a_6^p &= c_4 + \frac{c_3}{3} + 2c_3 r_E + 2c_1 r_{P_p} + 2c_3 (r_{P_u} + r_{P_b}) \\ &\quad + 2(c_4 + c_6) (3\bar{r}_{P_q} + \bar{r}_{P_c} + \bar{r}_{P_b}) + r_\chi^\pi \left(c_6 + \frac{c_5}{3} \right) + 2c_5 r_E + c_{8g}^{eff} r_{8g}, \end{aligned}$$

und die der Annihilationsdiagramme schließlich

$$\begin{aligned} b_1 &= 2c_1 r_A \frac{\mathcal{A}_{\pi\pi}}{\mathcal{B}_{\pi\pi}}, \quad b_3 = \left[2c_3 r_A + \left(c_6 + \frac{c_5}{3} \right) R_A^6 + 2c_5 r_A^6 \right] \frac{\mathcal{A}_{\pi\pi}}{\mathcal{B}_{\pi\pi}}, \\ b_4 &= 2 \left[c_4 r_A^{(\pi\pi)} + c_6 r_A^5 \right] \frac{\mathcal{A}_{\pi\pi}}{\mathcal{B}_{\pi\pi}}. \end{aligned}$$

Mit den Ergebnissen dieser Arbeit (Abschnitt 3.4) erhält man für die Emissions- und Annihilationsdiagramme:

$$\begin{aligned}
 a_1 &= 1,020_{-0,019}^{+0,015} + i(0,020_{-0,011}^{+0,002}) \\
 a_2 &= 0,157_{-0,062}^{+0,085} + i(-0,081_{-0,009}^{+0,025}) \\
 \frac{\mathcal{B}_{\pi\pi}}{\mathcal{A}_{\pi\pi}} b_1 &= [-0,15_{-0,19}^{+0,10} + i(0,82_{-0,27}^{+0,11})] \times 10^{-2} \\
 \frac{\mathcal{B}_{\pi\pi}}{\mathcal{A}_{\pi\pi}} b_3 &= [-1,31_{-0,31}^{+0,67} + i(0,015_{-0,008}^{+0,002})] \times 10^{-2} \\
 b_4 &\simeq \frac{c_4}{c_1} b_1.
 \end{aligned}$$

Die verschiedenen Annihilationsdiagramme, die zu b_1 und b_2 beitragen, werden in der QCD Faktorisierung durch die Parameter $A_{1,2,3}^{i,f}$ ausgedrückt, für die die Entsprechungen

$$\begin{aligned}
 r_A \mathcal{A}_{\pi\pi} &\hat{=} \frac{C_F}{18} A_1^i \mathcal{B}_{\pi\pi}, & r_A^5 \mathcal{A}_{\pi\pi} &\hat{=} \frac{C_F}{18} A_2^i \mathcal{B}_{\pi\pi}, \\
 R_A^6 \mathcal{A}_{\pi\pi} &\hat{=} \frac{C_F}{3} A_3^f \mathcal{B}_{\pi\pi}, & r_A^6 \mathcal{A}_{\pi\pi} &\hat{=} \frac{C_F}{18} A_3^i \mathcal{B}_{\pi\pi}
 \end{aligned}$$

sind. Dies sind aber keine Identitäten, denn in QCD Faktorisierung und Lichtkegel-Summenregeln wurden unterschiedliche Näherungen verwendet. So ist zum Beispiel R_A^6 von Ordnung α_S^0 , während A_3^f von Ordnung α_S^1 ist.

Für die divergenten Konvolutionsintegrale wurde in QCD Faktorisierung der Parameter

$$X_A = \int_0^1 \frac{du}{u} = (1 + \rho_A e^{i\varphi_A}) \log \frac{m_b}{\Lambda_h}$$

eingeführt und Λ_h darin zu 500 MeV gesetzt. Die Werte für ρ_A und φ_A werden in allen Annihilationsdiagrammen gleichgesetzt und sind in der Standard-Auswertung 0. Allgemein ist aber nicht zu erwarten, dass diese Beiträge überall identisch sind. Die Entsprechung zwischen A_1^i und r_A liefert zum Beispiel

$$\rho_A = 0,84_{-0,05}^{+0,10}, \quad \varphi_A = (155_{-2}^{+4})^\circ.$$

Da X_A quadratisch in die Ergebnisse der QCD Faktorisierung eingeht, ergeben sich aus der Gleichsetzung zwei Lösungen, von der hier die mit dem kleineren ρ_A gezeigt ist. Aufgrund der konzeptionellen Unterschiede gerade zwischen R_A^6 und A_3^f und der in dieser Arbeit verwendeten Näherung $r_A^5 \approx r_A^6 \approx 0$ erscheint es nicht sinnvoll, X_A zum Vergleich aus einer der anderen Entsprechungen zu bestimmen.

Anhang B

Komplexe Analysis

B.1 Analytische Fortsetzung

Im Folgenden werden der Begriff „analytische Fortsetzung“ definiert und einige damit zusammenhängende mathematische Schlussfolgerungen aufgelistet. Deren Beweise befinden sich in allen Standardwerken über komplexe Analysis (z.B. [68]). Auch für Details über die genau zu erfüllenden Voraussetzungen, Spezialfälle o.ä. wird auf die Literatur verwiesen.

Eindeutigkeit

Sei D eine Teilmenge von \mathbb{C} und $f_1, f_2 : D \rightarrow \mathbb{C}$ seien komplex differenzierbare (=analytische) Funktionen. Wenn es eine Teilmenge $G \subset D$ gibt, sodass $f_1(x) = f_2(x) \forall x \in G$, dann ist auch $f_1(x) = f_2(x) \forall x \in D$.

Zwei analytische Funktionen *mit gleichem Definitionsbereich*, die auf einer Teilmenge des Definitionsbereiches identisch sind, sind also automatisch überall identisch.

Analytische Fortsetzung einer reellen Funktion

Sei D eine Teilmenge von \mathbb{R} und $f_1 : D \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetig differenzierbare, komplexwertige Funktion. Sei G eine Teilmenge von \mathbb{C} sodass $D \subset G$ und $f_2 : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine komplex differenzierbare Funktion mit $f_2(x) = f_1(x) \forall x \in D$. Nach dem vorausstehendem Satz ist diese Funktion f_2 zu vorgegebenem f_1 , D und G eindeutig. Sie heißt *analytische Fortsetzung von f_1 auf G* .

Beispiel: Analytische Fortsetzung des Logarithmus

Sei $D =]0, \infty[$ und $f_1(x) = \log x$ der reelle Logarithmus. Es lässt sich keine analytische Fortsetzung von f_1 auf \mathbb{C} finden. Auf $G_2 = \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$ allerdings schon: Sie ist durch $f_2(r \cdot e^{i\varphi}) = \log r + i(\varphi - n \cdot 2\pi)$ mit $n \in \mathbb{Z}$ sodass $-\pi < \varphi - n \cdot 2\pi < \pi$ gegeben. Dies ist die allgemein übliche Definition des komplexen Logarithmus, der einen Schnitt an der negativen reellen Achse hat:

$$\log(-x + i\epsilon) - \log(-x - i\epsilon) = 2\pi i \quad (x > 0).$$

Alternativ könnte man aber auch z.B. mit $G_3 = \mathbb{C} \setminus [0, i\infty[$ die positive imaginäre Achse aus dem Definitionsbereich herausnehmen. Mit $f_3(r \cdot e^{i\varphi}) = \log r + i(\varphi - m \cdot 2\pi)$ und $-\frac{3}{2}\pi < \varphi - m \cdot 2\pi < \frac{1}{2}\pi$ erhält man eine analytische Fortsetzung des Logarithmus auf G_3 , die sich von f_2 unterscheidet. Dieses Beispiel verdeutlicht schon, dass die analytisch fortgesetzte Funktion je nach Definitionsbereich unterschiedlich sein kann.

Reflexionsprinzip von Schwarz

Sei $D =]-\infty, 0[$ und $f_1 : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine reellwertige, differenzierbare Funktion. Sei $G = \mathbb{C} \setminus [0, \infty[$ und $f_2 : G \rightarrow \mathbb{C}$ die analytische Fortsetzung von f_1 auf G . Dann ist

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \operatorname{Im} f_2(s + i\epsilon) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2i} (f_2(s + i\epsilon) - f_2(s - i\epsilon)) \quad \text{für } s > 0.$$

Dieser Satz ist der Grund, warum die Diskontinuität analytisch fortgesetzter Funktionen auf der positiven reellen Achse als „Imaginärteil“ bezeichnet wird. Ist die Voraussetzung, dass f_1 reellwertig ist, nicht erfüllt, kann der als Diskontinuität definierte Imaginärteil auch komplexwertig sein.

B.2 Produktregel

Real- und Imaginärteil eines Produktes aus zwei komplexen Zahlen berechnet sich aus

$$(a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + a_2b_1).$$

Für den als Diskontinuität definierten Imaginärteil einer Funktion

$$\operatorname{Im}_s f(s) = \operatorname{Disc}_s f_s = \frac{1}{2i} (f(s + i\epsilon) - f(s - i\epsilon))$$

und den entsprechend definierten Realteil

$$\operatorname{Re}_s f(s) = \frac{1}{2} (f(s + i\epsilon) + f(s - i\epsilon))$$

lässt sich die analoge Regel finden:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}_s [f_1(s)f_2(s)] &= \frac{1}{2i} [f_1(s + i\epsilon)f_2(s + i\epsilon) - f_1(s - i\epsilon)f_2(s - i\epsilon)] \\ &= \frac{1}{2i} [f_1(s + i\epsilon)f_2(s + i\epsilon) - (f_1(s + i\epsilon) - 2i\operatorname{Im}_s f_1(s))(f_2(s + i\epsilon) - 2i\operatorname{Im}_s f_2(s))] \\ &= f_2(s + i\epsilon)\operatorname{Im}_s f_1(s) + f_1(s + i\epsilon)\operatorname{Im}_s f_2(s) - 2i\operatorname{Im}_s f_1(s)\operatorname{Im}_s f_2(s) \\ &= [f_2(s + i\epsilon) - i\operatorname{Im}_s f_2(s)]\operatorname{Im}_s f_1(s) + [f_1(s + i\epsilon) - i\operatorname{Im}_s f_1(s)]\operatorname{Im}_s f_2(s) \\ &= \operatorname{Re}_s f_2(s)\operatorname{Im}_s f_1(s) + \operatorname{Re}_s f_1(s)\operatorname{Im}_s f_2(s). \end{aligned} \tag{B.1}$$

und analog

$$\operatorname{Re}_s [f_1(s)f_2(s)] = \operatorname{Re}_s f_1(s)\operatorname{Re}_s f_2(s) - \operatorname{Im}_s f_1(s)\operatorname{Im}_s f_2(s). \tag{B.2}$$

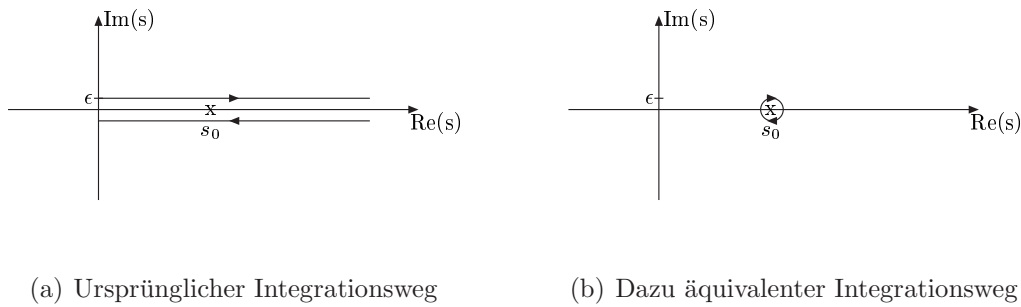


Abbildung B.1: Integrationswege zum Beitrag von Polen in Dispersionsintegralen

B.3 Formelsammlung: Imaginärteile

Die Funktionen, von denen der als Schnitt definierte Imaginärteil benötigt wird, sind Produkte aus rationalen Funktionen (also Brüche mit Polynomen in Zähler und Nenner) und Logarithmen. Zunächst werden für die einzelnen Bestandteile die Imaginärteile angegeben, anschließend wird gezeigt, wie man den Imaginärteil zusammengesetzter Funktionen erhält.

Pole

Die Funktion f habe einen Pol der Ordnung n an der Stelle s_0 :

$$f(s) = \frac{F(s)}{(s - s_0)^n},$$

wobei $F(s)$ eine endliche, differenzierbare Funktion ist. Gesucht ist der Imaginärteil dieser Funktion, über den im Allgemeinen integriert wird:

$$I = \int_0^\infty \text{Im}_s f(s) ds = \frac{1}{2i} \int_0^\infty (f(s + i\epsilon) - f(s - i\epsilon)) ds.$$

Dies entspricht der Integration von $f(s)$ entlang des in Abbildung B.1a gezeigten Integrationsweges. Mit $\epsilon \rightarrow 0$ ist dies ein geschlossener Integrationsweg, der den Pol s_0 im mathematisch negativem Sinne umläuft, und kann daher durch den in Abbildung B.1b gezeigten Weg ersetzt werden. Dieses Integral über den geschlossenen Weg ist das *Residuum*:

$$I = -\pi \text{Res}_s f(s).$$

Das Residuum, definiert als der Koeffizient des $\frac{1}{s-s_0}$ -Terms in der Laurent-Reihe um s_0 , ist für die Funktion $f(s)$ leicht zu bestimmen:

$$\text{Res}_s \frac{F(s)}{(s - s_0)^n} = \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}} [F(s)]_{s=s_0}$$

Setzt man dies in das Dispersionsintegral ein, so erhält man nach $(n - 1)$ -facher partieller Integration

$$I = -\pi \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \int_0^\infty F(s) \delta^{(n-1)}(s - s_0) ds,$$

also

$$\operatorname{Im}_s \frac{F(s)}{(s - s_0)^n} = \pi \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \delta^{(n-1)}(s - s_0).$$

Logarithmen

Der Imaginärteil des komplexen Logarithmus, der so definiert ist, dass der Schnitt auf der negativen reellen Achse liegt, ergibt sich aus dem Beispiel im vorigen Abschnitt zu

$$\operatorname{Im}_s \log(s) = -\pi \Theta(-s). \quad (\text{B.3})$$

Schwieriger wird es bei Logarithmen von Quotienten, zum Beispiel

$$f(s) = \log \frac{a + b s}{c + d s}.$$

Die Koeffizienten a, b, c, d seien dabei derart, dass das Argument bei $s < 0$ reell und positiv ist, also o.B.d.A. $b, d < 0$. Diese Funktion muss jetzt auf $\mathbb{C} \setminus [0, \infty[$ analytisch fortgesetzt werden. Die Funktion

$$f_1(s) = \log(-b) + \log\left(-\frac{a}{b} - s\right) - \log(-d) - \log\left(-\frac{c}{d} - s\right)$$

ist für negative s mit $f(s)$ identisch, außerdem hat sie die Eigenschaft, dass sie einen Schnitt auf der positiven reellen Achse hat. Dies ist also die einzig mögliche analytische Fortsetzung, und

$$\operatorname{Im}_s f(s) = \operatorname{Im}_s f_1(s) = -\pi \left[\Theta\left(s + \frac{a}{b}\right) - \Theta\left(s + \frac{c}{d}\right) \right].$$

Analoges gilt auch für den Logarithmus eines Produktes.

Zusammengesetzte Funktionen

Die in der Rechnung dieser Arbeit vorkommenden Funktionen lassen sich als Produkte

$$f(s) = \prod_{j=1}^n f_j(s)$$

schreiben, wobei jedes $f_j(s)$ entweder ein Logarithmus, ein Pol oder eine reguläre (endliche und differenzierbare) Funktion ohne Imaginärteil ist. Mit der Produktregel (B.1) und (B.2) kann man den Imaginärteil der Gesamtfunktion auf die Einzel-Imaginärteile zurückführen.

Dafür bietet sich, gerade bei der Benutzung von Computeralgebrasystemen, die Formulierung als Rekursionsformel an:

$$\operatorname{Im}_s \left(\prod_{j=1}^n f_j(s) \right) = \sum_{k=1}^n \left[\operatorname{Re}_s f_k(s) \cdot \operatorname{Im}_s \left(\prod_{j \neq k} f_j(s) \right) + \operatorname{Im}_s f_k(s) \cdot \operatorname{Re}_s \left(\prod_{j \neq k} f_j(s) \right) \right].$$

Dazu werden noch die Realteile Re_s der Bestandteile gebraucht:

- Der Realteil einer regulären Funktion $F(s)$ ist identisch mit der Funktion selbst.
- Der Realteil eines Pols, über den integriert wird, ist definiert als der Hauptwert des Integrales:

$$\int_0^\infty ds \operatorname{Re}_s \frac{F(s)}{(s-s_0)^n} = \oint_0^\infty ds \frac{F(s)}{(s-s_0)^n}.$$

- Der Realteil eines allgemeinen Logarithmus ist der Logarithmus des Betrages

$$\operatorname{Re}_s \log(f(s)) = \log |f(s)|.$$

Anhang C

Imaginärteil der C_0 -Funktionen

C.1 C_0 mit einem massiven Propagator

Gesucht ist der Imaginärteil Im_s der in (3.21) auf Seite 75 definierten skalaren Dreipunkt-Funktion

$$C_0(s, uv P^2, \bar{u}(s - v P^2), m_b^2, 0, 0)$$

für $P^2 < 0$ und $0 < u, v < 1$ ($\bar{u} = 1 - u$). Sie lässt sich am einfachsten durch das Feynman-Parameter-Integral ausdrücken:

$$C_0 = - \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy [(1-x-y)(m_b^2 - (x + \bar{u}y)s) + vy P^2 ((1-x-y)\bar{u} - ux)]^{-1}.$$

Für $P^2 < 0$ und $s < m_b^2 + P^2$ hat dieses Integral keinen Pol, sodass C_0 rein reell ist. Mit der Substitution $y = (1-x)y'$ vereinfacht sich der Ausdruck derart, dass x nur noch linear auftritt, sodass die x -Integration leicht analytisch durchgeführt werden kann:

$$C_0 = \int_0^1 dy \frac{\log [(1-y)(m_b^2 - \bar{u}y(s - v P^2))] - \log [(1-y)(m_b^2 - s) + uv y P^2]}{(1 - \bar{u}y)((y-1)s - vy P^2)}.$$

Die Logarithmen wurden dabei schon so geschrieben, dass ihr Schnitt nach analytischer Fortsetzung auf der positiven reellen s -Achse liegt.

Jetzt wird der Imaginärteil unter dem Integral bestimmt. An der Nullstelle des Nenners, $s = -yv P^2/(1-y)$, heben sich die Logarithmen auf, sodass dieser Pol nicht zum Imaginärteil beiträgt. Nach der Produktregel (B.1) muss der Imaginärteil der Logarithmen mit dem Realteil des Poles multipliziert werden, sodass das y -Integral zum Hauptwertintegral wird. Der Imaginärteil der Logarithmen selbst ist durch (B.3) gegeben, sodass

$$\text{Im}_s C_0 = \pi \int_0^1 dy \frac{\Theta\left(s - m_b^2 + uv P^2 \frac{y}{1-y}\right) - \Theta\left(s - \frac{1}{\bar{u}y} m_b^2 - v P^2\right)}{(1 - \bar{u}y)((1-y)s + vy P^2)}$$

Aus den Θ -Funktionen können jetzt neue Integrationsgrenzen abgelesen werden, wobei nach wie vor $P^2 < 0$ ist. Die erste Θ -Funktion liefert $0 < y < \frac{m_b^2 - s}{m_b^2 - s + uv P^2}$ und $s > m_b^2$, die zweite

$\frac{m_b^2}{\bar{u}(s-vP^2)} < y < 1$ und $s > \frac{m_b^2}{\bar{u}} + vP^2$. Die Stammfunktion des Integranden ist zunächst allgemein

$$\int \frac{-\pi}{(1-\bar{u}y)((1-y)s+vyP^2)} dy = \pi \frac{\log(1-\bar{u}y) - \log((y-1)s - vyP^2)}{vP^2 - us},$$

und die y -Integration hat einen Pol bei $y_0 = \frac{s}{s-vP^2}$. Wenn dieser Pol außerhalb des Integrationsbereiches liegt, kann die Stammfunktion direkt verwendet werden. Dies ist für $s < \frac{m_b^2}{\bar{u}}$ der Fall. Ansonsten muss die Hauptwertintegration explizit durchgeführt werden, wofür die Beziehung

$$\oint_0^1 f(y) dy = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_0^{y_0-\epsilon} f(y) dy + \int_{y_0+\epsilon}^1 f(y) dy \right)$$

benutzt wird. Für die Bereiche $y < y_0$ und $y > y_0$ müssen die Vorzeichen der Logarithmus-Argumente in der Stammfunktion dann unterschiedlich gesetzt werden (was in bestimmten Integralen im Gegensatz zum unbestimmten Integral zunächst keinen Unterschied macht, denn die Imaginärteile, die sich durch den Vorzeichenwechsel in den Logarithmen ergeben, heben sich an Ober- und Untergrenze auf). Die beiden Fälle $s \lesseqgtr \frac{m_b^2}{\bar{u}}$ unterscheiden sich im Resultat schließlich durch das Vorzeichen eines Terms $\bar{u}s - m_b^2$, sodass man beide Fälle zusammenfassen kann, wenn dieser Term durch seinen Betrag ersetzt wird:

$$\begin{aligned} \text{Im}_s C_0 &= \frac{\pi}{us - vP^2} \log \left(\frac{-vP^2 |m_b^2 - \bar{u}s|}{us(s - m_b^2 - vP^2)} \right) \Theta(s - m_b^2) \\ &\quad - \frac{\pi}{us - vP^2} \log \left(\frac{-\bar{u}vP^2 (s - m_b^2 - vP^2)}{u(s - vP^2) |m_b^2 - \bar{u}s|} \right) \Theta \left(s - \frac{m_b^2}{\bar{u}} - vP^2 \right) \end{aligned}$$

Da die C_0 -Funktion wie oben erwähnt bei $P^2 < 0$ und $s < m_b^2 + P^2$ rein reell ist, muss nach dem Schwarz'schen Reflexionsprinzip auch der Imaginärteil Im_s für positives s reell sein, solange P^2 negativ bleibt. Es lässt sich leicht überprüfen, dass die Argumente der Logarithmen in $\text{Im}_s C_0$ immer positiv sind, sodass die Forderung erfüllt ist. Würde der Term $m_b^2 - \bar{u}s$ ohne Betragsstriche vorkommen, wäre dies nicht der Fall.

C.2 C_0 mit zwei massiven Propagatoren

Die zweite auftretende Dreipunktfunktion ist

$$C_0(s, uvP^2, \bar{u}(s-vP^2), 0, m_b^2, m_b^2).$$

Durch Feynman-Parameter geschrieben, ist dies nach Linearisierung des Nenners in y :

$$C_0 = - \int_0^1 dx \int_0^1 dy [m_b^2 - (1-ux)ys + vxP^2(y - u(1 - (1-y)x))]^{-1}.$$

Für $P^2 < 0$ und $s < m_b^2 + P^2$ ist auch dieses Integral endlich, sodass C_0 rein reell ist. Die y -Integration kann jetzt leicht durchgeführt werden:

$$C_0 = - \int_0^1 dx \frac{\log(m_b^2 - x(1-x)uvP^2) - \log(m_b^2 + \bar{u}vxP^2 - (1-ux)s)}{(1-ux)(s-vxP^2)}$$

An der Nullstelle des Nenners $s = vxP^2$ heben sich die Logarithmen auf, sodass hier kein Pol ist, der zum Imaginärteil beiträgt. Der erste Logarithmus hängt nicht von s ab und trägt folglich ebenfalls nicht zum Imaginärteil bei. Übrig bleibt der zweite Logarithmus multipliziert mit dem Hauptwert des Pols:

$$\text{Im}_s C_0 = -\pi \rlap{-}\int_0^1 dx \frac{\Theta\left(s - \frac{m_b^2 + \bar{u}vxP^2}{1-ux}\right)}{(1-ux)(s-vxP^2)}.$$

An dem Pol verschwindet aber die Θ -Funktion, sodass das Hauptwertintegral mit dem normalen Integral identisch ist. Die Stammfunktion des Integranden ist

$$\int -\frac{\pi}{(1-ux)(s-vxP^2)} dx = \pi \frac{\log(1-ux) - \log(s-vxP^2)}{us - vP^2}.$$

Allerdings sind hier die Integrationsgrenzen, die sich aus der Θ -Funktion ergeben, deutlich komplizierter:

$$\begin{aligned} 0 < x < 1 & \quad \text{für} \quad P^2 < -\frac{m_b^2 u}{v\bar{u}}, s > m_b^2, \\ \frac{s - m_b^2}{us + \bar{u}vP^2} < x < 1 & \quad \text{für} \quad P^2 < -\frac{m_b^2 u}{v\bar{u}}, \frac{m_b^2}{\bar{u}} + vP^2 < s < m_b^2, \\ 0 < x < 1 & \quad \text{für} \quad P^2 > -\frac{m_b^2 u}{v\bar{u}}, s > \frac{m_b^2}{\bar{u}} + vP^2, \\ 0 < x < \frac{s - m_b^2}{us + \bar{u}vP^2} & \quad \text{für} \quad P^2 > -\frac{m_b^2 u}{v\bar{u}}, m_b^2 < s < \frac{m_b^2}{\bar{u}} + vP^2. \end{aligned}$$

Je nach Integrationsbereich müssen auch hier die Vorzeichen des Arguments im Logarithmus passend gewählt werden, damit die resultierende Funktion reellwertig bleibt, wie sie es nach dem Schwarz'schen Reflexionsprinzip sein muss. Das Wissen um die Reellwertigkeit kann man auch direkt nutzen, indem kurzerhand alle Argumente von Logarithmen als Absolutbetrag genommen werden. Das Resultat ist

$$\begin{aligned} \text{Im}_s C_0 = \frac{\pi}{us - vP^2} & \left[\log \left| \frac{s(um_b^2 + \bar{u}vP^2)}{us^2 + vP^2(m_b^2 - us)} \right| \Theta(s - m_b^2) \right. \\ & \left. - \log \left| \frac{(s - vP^2)(um_b^2 + \bar{u}vP^2)}{\bar{u}(us^2 + vP^2(m_b^2 - us))} \right| \Theta\left(s - \frac{m_b^2}{\bar{u}} - vP^2\right) \right]. \end{aligned}$$

Dieses Resultat gilt nur für $P^2 < 0$. Die analytische Fortsetzung zu positivem P^2 ist recht aufwendig. Hier hilft das kinematische Argument aus Abschnitt 3.3.1 weiter, nach dem $\text{Im}_s C_0$

auch bei positivem P^2 keinen Imaginärteil hat, die Beträge bleiben also auch nach der analytischen Fortsetzung stehen und in der obigen Formel darf direkt ein positives P^2 eingesetzt werden. Das Resultat wird durch eine explizite Rechnung bestätigt, die allerdings zu lang ist, um sie hier im Detail aufzulisten. Stattdessen wird nur der verwendete Algorithmus skizziert:

1. Schreibe für negatives P^2 die Integrationen über u , v und s aus, und zwar so, dass die einzelnen Integrationsbereiche disjunkt sind.
2. Schreibe die Absolutbeträge (auch für $P^2 < 0$) aus als $\log |a| = \Theta(a) \log(a) + \Theta(-a) \log(-a)$ und bestimme die zugehörigen, disjunkten Integrationsbereiche.
Das Resultat ist jetzt eine Summe von Integrationen $\int ds \int du \int dv$ über Funktionen, die keine Beträge mehr enthalten und analytisch in P^2 sind. Die Integrationsbereiche überlappen sich nicht.
3. Skalieren (substituiere) alle Integrationsvariablen so, dass die Integrationen von 0 bis 1 bzw. für s von 0 bis ∞ gehen. Nur noch die Integranden hängen jetzt von P^2 ab.
4. Setze die Integranden in P^2 analytisch fort und bestimme den Imaginärteil Im_{P^2} .
5. Schreibe die resultierenden Θ -Funktionen erneut als Integrationsbereiche.
6. Mache die Skalierung der Integrationsvariablen wieder rückgängig.

Das Ergebnis dieser Prozedur, die auch auf das C_0 mit einem schweren Propagator angewendet werden kann und dort zum richtigen Resultat führt, ist, dass sich in der Tat alle Terme gegeneinander aufheben und $\text{Im}_{P^2} \text{Im}_s C_0 = 0$ ist.

Literaturverzeichnis

- [1] M. E. Peskin und D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Addison-Wesley, 1995 .
- [2] M. Böhm, A. Denner und H. Joos, *Gauge Theories of the Strong und Electroweak Interactions*, Teubner, 2001 .
- [3] J. Charles *et al.* [CKMfitter Group], Eur. Phys. J. C **41** (2005) 1 .
- [4] A. Khodjamirian, T. Mannel, M. Melcher und B. Melic, Phys. Rev. D **72** (2005) 094012 .
- [5] A. Khodjamirian, T. Mannel und M. Melcher, Phys. Rev. D **70** (2004) 094002 .
- [6] A. Khodjamirian, T. Mannel und M. Melcher, Phys. Rev. D **68** (2003) 114007 .
- [7] M. Melcher, Diplomarbeit,
<http://www.martin-melcher.de/lebenslauf/dokumente/diplomarbeit.pdf>
- [8] G. Buchalla, A. J. Buras und M. E. Lautenbacher, Rev. Mod. Phys. **68** (1996) 1125 .
- [9] F. J. Gilman und M. B. Wise, Phys. Rev. D **20** (1979) 2392 .
- [10] M. A. Shifman, A. I. Vainshtein und V. I. Zakharov, Nucl. Phys. B **120** (1977) 316 .
- [11] A. J. Buras, M. Jamin, M. E. Lautenbacher und P. H. Weisz, Nucl. Phys. B **370** (1992) 69
[Addendum-ibid. B **375** (1992) 501].
- [12] A. J. Buras, M. Jamin, M. E. Lautenbacher und P. H. Weisz, Nucl. Phys. B **400** (1993) 37 ;
A. J. Buras, M. Jamin und M. E. Lautenbacher, Nucl. Phys. B **400** (1993) 75 .
- [13] G. Buchalla, A. J. Buras und M. K. Harlander, Nucl. Phys. B **349** (1991) 1 .
- [14] G. Altarelli, G. Curci, G. Martinelli und S. Petrarca, Nucl. Phys. B **187** (1981) 461 .
- [15] F. Jegerlehner, Eur. Phys. J. C **18** (2001) 673 .
- [16] P. F. Harrison und H. R. Quinn [BABAR Collaboration], SLAC-R-0504 .
- [17] M. Gronau, O. F. Hernandez, D. London und J. L. Rosner, Phys. Rev. D **50** (1994) 4529 .
- [18] J. D. Bjorken, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **11** (1989) 325 .

- [19] O. Haan und B. Stech, Nucl. Phys. B **22** (1970) 448.
- [20] S. Eidelman *et al.* [Particle Data Group], Phys. Lett. B **592** (2004) 1.
- [21] V. M. Belyaev, A. Khodjamirian und R. Ruckl, Z. Phys. C **60** (1993) 349 ;
V. M. Belyaev, V. M. Braun, A. Khodjamirian und R. Ruckl, Phys. Rev. D **51** (1995) 6177 ;
A. Khodjamirian, R. Ruckl, S. Weinzierl und O. I. Yakovlev, Phys. Lett. B **410** (1997) 275 ;
E. Bagan, P. Ball und V. M. Braun, Phys. Lett. B **417** (1998) 154 ;
P. Ball und R. Zwicky, JHEP **0110** (2001) 019 .
- [22] A. Khodjamirian, R. Ruckl, S. Weinzierl, C. W. Winhart und O. I. Yakovlev, Phys. Rev. D **62** (2000) 114002 .
- [23] M. Beneke, G. Buchalla, M. Neubert und C. T. Sachrajda, Phys. Rev. Lett. **83** (1999) 1914 .
- [24] M. Beneke, G. Buchalla, M. Neubert und C. T. Sachrajda, Nucl. Phys. B **591** (2000) 313 .
- [25] M. Beneke, G. Buchalla, M. Neubert und C. T. Sachrajda, Nucl. Phys. B **606** (2001) 245 .
- [26] H. F. A. Group(HFAG), arXiv:hep-ex/0505100 ;
B. Aubert *et al.* [BABAR Collaboration], Phys. Rev. Lett. **94** (2005) 181802 ;
B. Aubert *et al.* [BABAR Collaboration], Phys. Rev. D **70** (2004) 032006 ;
Y. Chao *et al.* [Belle Collaboration], Phys. Rev. D **69** (2004) 111102 ;
P. Chang *et al.* [Belle Collaboration], Phys. Rev. D **71** (2005) 091106 ;
A. Bornheim *et al.* [CLEO Collaboration], Phys. Rev. D **68** (2003) 052002 ;
S. J. Richichi *et al.* [CLEO Collaboration], Phys. Rev. Lett. **85** (2000) 520 ;
A. Warburton [CDF Collaboration], Int. J. Mod. Phys. A **20** (2005) 3554 .
- [27] D. Becirevic und A. B. Kaidalov, Phys. Lett. B **478**, 417 (2000) .
- [28] A. J. Buras und L. Silvestrini, Nucl. Phys. B **569** (2000) 3 .
- [29] A. J. Buras, R. Fleischer, S. Recksiegel und F. Schwab, Nucl. Phys. B **697** (2004) 133 .
- [30] I. I. Balitsky, V. M. Braun und A. V. Kolesnichenko, Nucl. Phys. B **312** (1989) 509 ;
V. M. Braun und I. E. Filyanov, Z. Phys. C **44** (1989) 157 ;
V. L. Chernyak und I. R. Zhitnitsky, Nucl. Phys. B **345** (1990) 137 .
- [31] A. Khodjamirian, Nucl. Phys. B **605** (2001) 558 .
- [32] A. Khodjamirian, T. Mannel und P. Urban, Phys. Rev. D **67** (2003) 054027 .
- [33] A. Khodjamirian, T. Mannel und B. Melic, Phys. Lett. B **571** (2003) 75 [Phys. Lett. B **572** (2003) 171] .
- [34] J. Bijnens und A. Khodjamirian, Eur. Phys. J. C **26** (2002) 67 .
- [35] P. Ball, JHEP **9901** (1999) 010 .

- [36] V. L. Chernyak und A. R. Zhitnitsky, Phys. Rept. **112** (1984) 173 .
- [37] R. Mertig, M. Bohm und A. Denner, Comput. Phys. Commun. **64** (1991) 345 .
- [38] E. Bagan, P. Ball, V. M. Braun und H. G. Dosch, Phys. Lett. B **278** (1992) 457 .
- [39] A. Khodjamirian, T. Mannel und N. Offen, Phys. Lett. B **620** (2005) 52 .
- [40] V. M. Braun, D. Y. Ivanov und G. P. Korchemsky, Phys. Rev. D **69** (2004) 034014 .
- [41] A. G. Grozin und M. Neubert, Phys. Rev. D **55** (1997) 272 .
- [42] M. Beneke and T. Feldmann, Nucl. Phys. B **592** (2001) 3 .
- [43] V. A. Novikov, M. A. Shifman, A. I. Vainshtein und V. I. Zakharov, Fortsch. Phys. **32** (1984) 585 .
- [44] I. I. Balitsky und V. M. Braun, Nucl. Phys. B **311** (1989) 541 .
- [45] V. M. Braun und I. E. Halperin, Phys. Lett. B **328**, 457 (1994) .
- [46] M. A. Shifman, A. I. Vainshtein und V. I. Zakharov, Nucl. Phys. B **147** (1979) 385 .
- [47] M. Jamin und B. O. Lange, Phys. Rev. D **65** (2002) 056005 .
- [48] P. Ball und R. Zwicky, Phys. Lett. B **625** (2005) 225 .
- [49] A. P. Bakulev, K. Passek-Kumericki, W. Schroers und N. G. Stefanis, Phys. Rev. D **70** (2004) 033014 [Erratum-ibid. D **70** (2004) 079906] .
- [50] V. A. Novikov, M. A. Shifman, A. I. Vainshtein, M. B. Voloshin und V. I. Zakharov, Nucl. Phys. B **237** (1984) 525 .
- [51] A. R. Zhitnitsky, I. R. Zhitnitsky und V. L. Chernyak, Sov. J. Nucl. Phys. **41** (1985) 284 [Yad. Fiz. **41** (1985) 445] .
- [52] P. Ball und R. Zwicky, Phys. Rev. D **71** (2005) 014015 .
- [53] M. Beneke und S. Jäger, arXiv:hep-ph/0512351 .
- [54] M. Gronau, J. L. Rosner und D. London, Phys. Rev. Lett. **73** (1994) 21 ;
M. Gronau, O. F. Hernandez, D. London und J. L. Rosner, Phys. Rev. D **50** (1994) 4529 ;
M. Gronau and D. London, Phys. Rev. Lett. **65** (1990) 3381 .
- [55] P. Ball und M. Boglione, Phys. Rev. D **68** (2003) 094006 .
- [56] G. P. Lepage and S. J. Brodsky, Phys. Lett. B **87** (1979) 359 .
- [57] A. G. Grozin, Int. J. Mod. Phys. A **10** (1995) 3497 .
- [58] S. V. Mikhailov und A. V. Radyushkin, Phys. Rev. D **45** (1992) 1754 .

- [59] A. S. Gorsky, Sov. J. Nucl. Phys. **41**, 275 (1985) [Yad. Fiz. **41**, 430 (1985)].
- [60] V. Elias, T. G. Steele und M. D. Scadron, Phys. Rev. D **38** (1988) 1584.
- [61] M. Jamin und M. Munz, Z. Phys. C **60** (1993) 569.
- [62] L. J. Reinders, H. Rubinstein und S. Yazaki, Phys. Rept. **127** (1985) 1.
- [63] B. L. Ioffe und A. V. Smilga, Nucl. Phys. B **216** (1983) 373.
- [64] T. Yoshikawa, Phys. Rev. D **68** (2003) 054023.
- [65] R. Fleischer, Phys. Rept. **370** (2002) 537.
- [66] A. J. Buras, R. Fleischer, S. Recksiegel und F. Schwab, Eur. Phys. J. C **32** (2003) 45.
- [67] R. Fleischer und T. Mannel, Phys. Rev. D **57** (1998) 2752.
- [68] R. Busam und E. Freitag, *Complex Analysis*, Springer, 2005.

Danksagung

Der Dank für die Betreuung der Arbeit, die nachweislich besser war als Karlsruhe schön, gilt in erster Linie Herrn Thomas Mannel und Herrn Alexander Khodjamirian. Ihre Fähigkeit, Verständnisfragen nicht nur trefflich, sondern auch nachvollziehbar zu beantworten, und hilfreiche technische Tipps und Tricks zu den Rechnungen haben erheblich zum Vorankommen der wissenschaftlichen Arbeit beigetragen. Die kurzen Wege (zwei Türen weiter) und das gute Betreuungsverhältnis (2:1) konnten die Zeitspannen verständnisloser Verzweiflung meinerseits entsprechend kurz halten.

Auch für die guten Rahmenbedingungen, wie zum Beispiel die Gelegenheit, regelmäßig Konferenzen und Schulen zu besuchen, und das schöne Büro mit Südbalkon möchte ich mich an dieser Stelle bedanken. Das Institut für Theoretische Teilchenphysik der Universität Karlsruhe, an dem ich die ersten acht Monate der Promotion verbracht habe, und die entsprechende Unterstützung des dortigen Graduiertenkollegs sollen nicht unerwähnt bleiben. Übrigens hat Siegen doppelt so viele Schlösser wie Karlsruhe.

Bei Frau Blazenka Melić bedanke ich mich für die fruchtbare Zusammenarbeit, was die Berechnung der Annihilationsdiagramme betrifft.

Besonders bedanken möchte ich mich bei Herrn Hans D. Dahmen für die Übernahme des Korreferates der Dissertation.

Nils Offen und Thorsten Feldmann danke ich für die inhaltlichen, stilistischen und orthografischen Hinweise zum vorliegenden Dokument sowie ersterem insbesondere für die wiedergefundenen Faktoren 2 im zweiten Kapitel; letzterem darüberhinaus für aufschlussreiche fachliche Diskussionen während der Arbeit.

Ohne die Hilfe des LaTeX- und Design-Experten Robert Feger wäre dieser Ausdruck nicht halb so schön anzusehen.

Für das Bereitstellen einer funktionierenden Computer-Infrastruktur gilt der Dank Kai Grybel, Sven Over und Wolfgang Walkowiak (nur meine Soundkarte geht immer noch nicht...).

Für ungezwungene, informative und angenehme Plaudereien sowie Hilfe in allen Lebenslagen sorgten weiterhin Heike Boos, Siegmund Brandt, Benjamin Dassinger, Sven Faller, Martin Jung und Benjamin Pecjak sowie die bereits erwähnten Damen und Herren.

Ein ganz besonderer, persönlicher Dank geht an meine Frau Géraldine für jahrelange Unterstützung, Motivation und Verständnis, dafür, mir in Stresssituationen den Rücken frei gehalten zu haben, den Blick für das Wesentliche nicht zu verlieren, und die Erkenntnis, dass die Stadt Siegen ja auch gar nicht so übel ist.

Meinen Eltern danke ich schließlich für die finanzielle und ideelle Unterstützung und Förderung, jeweils zur richtigen Zeit am richtigen Ort, während meiner gesamten Schul- und Studienzeit, ohne die ich nie so weit gekommen wäre.