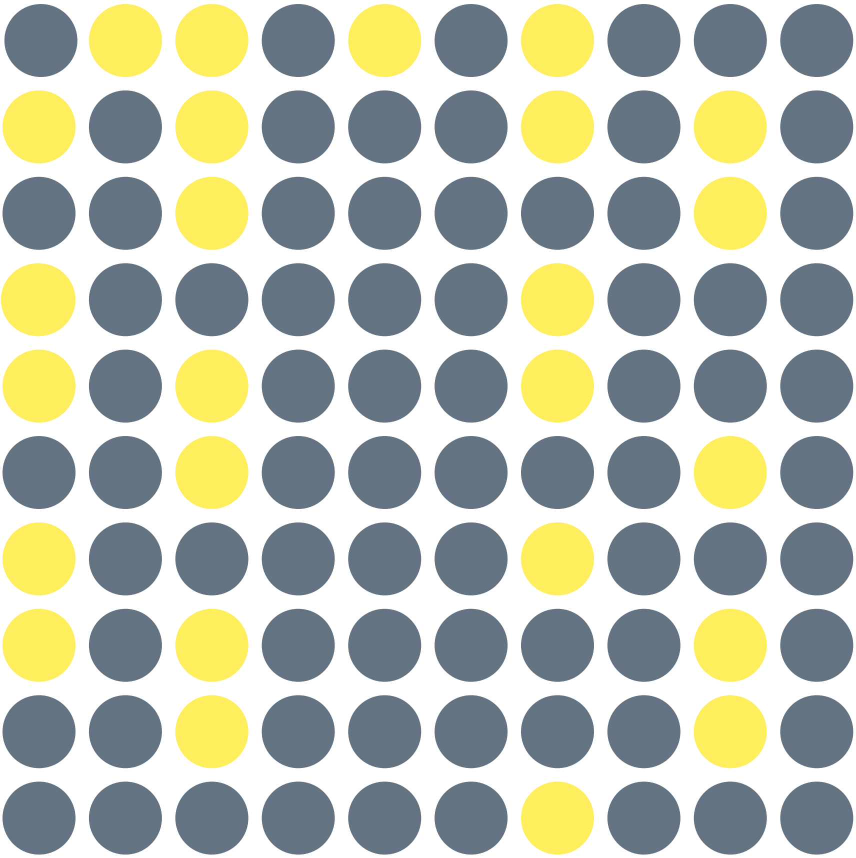
SieB

Ralf Krömer und Gregor Nickel (Hrsg.)

Band 14 • 2021

Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik



Mit Beiträgen von

H. Heske | H. Junker | A. Kirchartz

O. Passon & T. v. d. Twer | T. Reimers |

S. Spies | C.-P. Wirth

Ralf Krömer, Gregor Nickel (Hrsg.)

SieB

Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik

Band 14 (2021)

Mit Beiträgen von:
H. Heske | H. Junker | A. Kirchartz | O. Passon und T. von der Twer
T. Reimers | S. Spies | C.-P. Wirth

universi
UNIVERSITÄTSVERLAG SIEGEN

Ralf Krömer
Fachgruppe Mathematik
Bergische Universität Wuppertal
Gaußstraße 20
D-42119 Wuppertal
rkroemer@uni-wuppertal.de

Gregor Nickel
Departement Mathematik
Universität Siegen
Walter-Flex-Str. 3
D-57068 Siegen
nickel@mathematik.uni-siegen.de

Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik Bd. 14 (2021)
Herausgeber: Ralf Krömer (Wuppertal) und Gregor Nickel (Siegen)

univer*si* – Universitätsverlag Siegen 2021

Umschlaggestaltung: Sebastian Schorcht
Druck: UniPrint, Universität Siegen

gedruckt auf holz- und säurefreiem Papier

ISSN: 2197-5590

Vertrieb:
univer*si* – Universitätsverlag Siegen
Am Eichenhang 50
57076 Siegen
info@universi.uni-siegen.de
www.uni-siegen.de/universi

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

> Bin Ich es nicht, der die tausend Nadeln der Pinie zusammenhält und aus Millionen Wellen ein Meer glättet? Continuität des Bewusstseins projicirt sich als Consistenz der Aussenwelt; in dem regellosen Wirbel der Molecüle erliest sich das Subject sein Object, das Chaos wird durchsiebt zum Kosmos. Die festen Linien der Umwelt sind die Fäden, an denen sich das Bewusstsein entlang tastet; die Gesetzlichkeit, die ich um mich vorfinde, ist Widerschein der Bedingung, unter der ich mich vorfinde. In dem einen Chaos sind viele κόσμοι möglich, wie im Raum viele Geraden und Kreise; jeder Ausschnitt aus dem Chaos, jede Beschränkung der transcendenten Willkür kann einer Abfolge von Bewusstseinsvorgängen entsprechen. Die Richtung einer Beschränkung, also gesteigertes Bewusstsein; dass Ich mir die Mühe nehme, die Pinie dauern zu sehen, trägt zur Befestigung meines Ich bei. Und je mehr Gesetzlichkeit, desto mehr Ich; je strengere Auslese unter dem Möglichen, um so reichere Wirklichkeit; je enger das Sieb, um so feiner das Korn.
>
> Felix Hausdorff (1868-1942)

Mit dem kosmischen Sieb aus dieser Betrachtung Felix Hausdorffs, das wir dem vorliegenden 14. Band der Siegener Beiträge voranstellen, möchten wir eines großen Mathematikers, Philosophen und Poeten gedenken, dessen Todestag sich im Jahr 2022 zum 80. Male jährt. Der immer bedrückender werden Situation im Deutschland der NS-Diktatur und der schließlich drohenden Deportation und Ermordung hatte er sich am 25. Januar 1942 gemeinsam mit seiner Frau Charlotte und ihrer Schwester, Edith Pappenheim, durch Freitod entzogen[1].

Der oben zitierte 388. Aphorismus der *Gedanken aus der Landschaft Zarathustras* (1897)[2] befindet sich im Abschnitt „Zur Kritik des Erkennens“. Darin skizziert Hausdorff, alias Paul Mongré, eine Überlegung, die er später in seinem größeren erkenntnistheoretischen Versuch *Das Chaos in kosmischer Auslese* (1898) detaillierter ausarbeiten wird. Als seinen „Anfangspunkt“ benennt er dort einen „unbedingten Dualismus zwischen Erscheinung und Ding an sich“ – im Anschluss

1. Eine beeindruckend detailreiche und in vielen Aspekten bewegende Biographie Hausdorffs, die die unterschiedlichsten Facetten seines Werkes beleuchtet, ist 2021 erschienen; vgl. Egbert Brieskorn, Walter Purkert: *Felix Hausdorff. Mathematiker, Philosoph, Literat.* Springer Spektrum, Berlin 2021.
2. Paul Mongré: *Sant' Ilario. Gedanken aus der Landschaft Zarathustras.* Verlag C. G. Naumann, Leipzig 1897, p. 329; mit Anmerkungen ediert von W. Stegmaier in Band VII der Hausdorff-Edition, Springer Verlag, Berlin 2004.

an Berkeley und Kant. Insofern „Bewusstseinswelt“ und „Welt an sich“[3] voneinander durch eine absolut unpassierbaren Grenze getrennt sind, kann der empirisch erfahrene Weltverlauf in keiner Weise als „unmittelbar getreue Abbildung des wirklichen, transcendenten“ angesehen werden, wie dies ein „naive[r] Realismus“ behauptet[4]. Ganz im Gegenteil lässt sich eine sogar in ihrer Zeitstruktur völlig regellose Welt denken, aus der dann aber das Subjekt einen geregelte, kausale Abfolge herausfiltert. Die „Vorstellung, einer Causalwelt anzugehören“ ist zwar nur eine „augenblickliche Bewusstseinsillusion [...] und als solche, bei chaotischem Zufallsspiel des transcendenten Geschehens, nur vorübergehend und höchst selten“. Allerdings blendet die Logik des subjektiven Bewusstseins alle anderen Eindrücke aus: „aus dem Begriff der Causalität aber, den wir in diesen bevorzugten Augenblicken entwerfen, folgt, dass wir ewig in einer causalen Welt zu leben glauben. Dieses einfache Schema giebt die Deduction des Kosmos aus dem Chaos; dieses logische Netz ist das Sieb, das die chaotischen Zeitstrecken aus dem Bewusstsein herausfallen lässt und nur die kosmischen übrig lässt.“[5]

Glücklicherweise standen die Herausgeber der Siegener Beiträge vor einer weniger radikalen Aufgabe. Die in erfreulich großer Anzahl und Themenbreite eingereichten Beiträge, deren Inhalt uns keineswegs als chaotisch erschien, waren lediglich in eine passende Reihung zu bringen. Mit dem Kriterium absteigender Länge haben wir nun für diesen Band aus den möglichen Regeln eine denkbar einfache und ganz formale gewählt, die vielleicht jedoch zu manch unerwarteter Nachbarschaft geführt hat.

Wie immer hoffen wir, dass ein interessiertes Lesepublikum manche Anregung in den Siegener Beiträgen finden kann und dass dieser wie seine Vorgänger Anstoß für einen produktiven Diskurs sein kann im Bemühen um ein besseres Verstehen 'der' Mathematik. Den Autoren danken wir sehr herzlich für ihre Bereitschaft, daran mitzuwirken.

Unser Dank gilt darüber hinaus Sebastian Schorcht für die Gestaltung der Titelgraphik, Fabian Amberg für die LaTeX-Bearbeitung des Manuskripts sowie Kordula Lindner-Jarchow für die verlagsseitige Betreuung der Reihe.

Ralf Krömer Gregor Nickel

3. Ders.: *Das Chaos in kosmischer Auslese. Ein erkenntniskritischer Versuch.* Leipzig 1898, p. 1.
4. Mongré: *Sant' Illario.* p. 356.
5. A.a.O. p. 359.

Gisbert Hasenjaeger and a Most Interesting Unpublished Draft for Hilbert and Bernays' "Grundlagen der Mathematik"

Claus-Peter Wirth

Abstract[1]

In 1934, in Bernays' preface to the *first edition* of the first volume of Hilbert and Bernays' monograph "Grundlagen der Mathematik", a nearly completed draft of the the finally two-volume monograph is mentioned, which had to be revoked because of the completely changed situation in the area of proof theory after Herbrand and Gödel's revolutionary results. Nothing at all seems to be known about this draft and its whereabouts.

A third of a century later, Bernays' preface to the *second edition* (1968) of the first volume of Hilbert and Bernays' "Grundlagen der Mathematik" mentions joint work of Hasenjaeger and Bernays on the second edition. Bernays states there that "it became obvious that the integration of the many new results in the area of proof theory would have required a complete reorganization of the book", i.e. that the inclusion of the intermediately found new results in the area of proof theory turned out to be unobtainable by a revision, but would have required *a complete reorganization of the entire textbook*. We will document that — even after the need for a complete reorganization had become obvious — this joint work went on *to a considerable extent*. Moreover, we will document *when Hasenjaeger stayed in Zürich* to assist Bernays in the completion of the second edition.

In May 2017, we identified an incorrectly filed text in Bernays' scientific legacy at the archive of the ETH Zurich as a candidate for the beginning of the revoked draft for the first edition or of a revoked draft for the second edition.

[1] This article is a thoroughly revised and improved version of (Wirth, 2021).

In a *partial presentation* and careful investigation of this text we gather only some minor evidence that this text is the beginning of the nearly completed draft of the first edition, but ample evidence that this text is part of the work of Hasenjaeger and Bernays on the second edition. We provide some evidence that this work has covered *a complete reorganization of the entire first volume, including a completely new version of its last chapter on the* ι.

The great mathematician, logician, and computer scientist Gisbert Hasenjaeger has been completely neglected up to now by historiography — except for some autobiographical remarks and except for his work centered around computing machinery,[2] in particlar around the German Enigma and his fight against Alan Turing. He lost that fight luckily, as a victory may have prolonged the Second World War in Germany up to the time when the US were willing to throw atom bombs. As this is to the best of our knowledge the only historiographical publication on Gisbert Hasenjaeger's seminal work in logic and mathematics, we felt the need to include here his own Curriculum Vitae with an English translation and a few remarks on it into our Appendix and, moreover, to include his hopefully complete bibliography into our Bibliography.

1 Introduction

1.1 Hilbert's program in general

By the 1930s, ground-breaking work had been achieved by German scientists, especially in philosophy, psychology, physics, chemistry, and mathematics. With the Nazis' seizure of power in 1933, the historical tradition of German research was discontinued in most areas, and, as a further consequence, many achievements of German science in the first half of the 20^th century have still not been sufficiently recognized. This is the case especially for those developments that had not been completed before the Nazis covered Germany under twelve years of intellectual darkness.

David Hilbert (1862–1943) is one of the most outstanding representatives of mathematics, mathematical physics, and logic-oriented foundational sciences in general (Reid, 1970). From the end of the 19^th century to the erosion of the University of Göttingen by the Nazis, HILBERT formed and reshaped many areas of applied and pure mathematics. Most well-known and highly acknowledged are his "Foundations of Geometry" (Hilbert, 1899).[3]

After initial work at the very beginning of the 20^th century, Hilbert re-intensified his research into the logical foundations of mathematics in 1917, together with his new assistant Paul Bernays (1888–1977). Supported by their PhD student Wilhelm Ackermann (1896–1962), Bernays and Hilbert developed the field of

[2] Cf. (Börger & Glaschick, 2022).
[3] Cf. (Toepell, 1986).

proof theory (or *metamathematics*), where formalized mathematical proofs become themselves the objects of mathematical operations and investigations — just as numbers are the objects of number theory. The goal of Hilbert's endeavors in this field was to prove the consistency of the customary methods in mathematics once and for all, without the loss of essential theorems as in the competing intuitionist movements of Kronecker, Brouwer, Weyl, and Heyting. The proof of the consistency of mathematics was to be achieved by sub-division into the following three tasks:

- *Arithmetization* of mathematics.
- *Logical formalization* of arithmetic.
- *Consistency proof* in the form of a *proof of impossibility*: It cannot occur in arithmetic that there are formal derivations of a formula A and also of its negation $\overline{A}$.

The problematic step in this program (nowadays called *Hilbert's program*) is the consistency proof.

Hilbert's program was nourished by the hope that mathematics — as the foundation of natural sciences, and in particular of modern physics — could thus provide the proof of its own groundedness. This was a paramount task of the time, not least because of the foundational crisis in mathematics (which had been evoked among others by Russell's Paradox at the beginning of the 20th century) and the vivid philosophic discussions of the formal sciences stimulated *inter alia* by Wittgenstein and the Vienna Circle.[4]

It should be recognized that Hilbert's primary goal was neither a reduction of mathematical reasoning and writing to formal logic as in the seminal work of Whitehead & Russell (1910–1913), nor a formalization of larger parts of mathematics as in the publications of the famous French Bourbaki (1939ff.) group of mathematicians. His ambition was to secure — once and for all — the foundation of mathematics with consistency proofs, in which an intuitively consistent, "finitist" part of mathematics was to be used for showing that no contradiction could be formally derived in larger and larger parts of non-constructive and axiomatic mathematics.

Hilbert's program fascinated an elite of young outstanding mathematicians, among them John von Neumann (1903–1957), Kurt Gödel (1906–1978), Jacques Herbrand (1908–1931), and Gerhard Gentzen (1909–1945), whose contributions essentially shaped the fields of modern mathematical logic and proof theory.

We know today that Hilbert's quest to establish a foundation for the whole scientific edifice could not be successful to the proposed extent: Gödel's incompleteness theorems dashed the broader hopes of Hilbert's program. Without the emphasis that Hilbert has put on the foundational issues, however, our negative and positive knowledge on the possibility of a logical grounding of mathematics (and thus of all exact sciences) would hardly have been achieved at his time.

[4]Cf. e.g. (Wittgenstein, 1994), (Waismann, 1967).

1.2 Drafts for Hilbert–Bernays

The central and most involved presentation of Hilbert's program and Hilbert's proof theory is found in the two-volume monograph "Grundlagen der Mathematik" of Hilbert & Bernays (1934; 1939), and its second revised edition (Hilbert & Bernays, 1968; 1970).

We should not forget the historical context of the original writing of these texts in the late 1920s and the 1930s: First, Herbrand's Fundamental Theorem and Gödel's incompleteness theorems hit the new field of proof theory like a hurricane. Moreover, after the Nazi takeover of Germany in January 1933, Bernays was expelled from his academic position in Göttingen in April 1933, and had to leave the country. As a consequence, both volumes show strong signs of reorganization and rewriting, sometimes even the signs of hurry to meet the publication deadlines.

Because of this editorial and historical context, the drafts for both editions of the two Hilbert–Bernays volumes are of special interest, in particular the drafts that did not find their way into any of the editions.

Until recently, however, we did not know anything substantial about these revoked drafts for Hilbert–Bernays. In May 2017, however, we identified an incorrectly filed text in Bernays' scientific legacy in the archive of the ETH Zurich as a candidate for such a revoked draft. We will describe and investigate this text in this paper, and discuss at what time it was probably written, and by whom, &c.

There are two infamous revoked drafts for Hilbert–Bernays of which Bernays stated that they at least had existed — one for the first and one for the second edition:

1.2.1 The Mentioning of the Draft for the First Edition

Bernays' "Vorwort zur ersten Auflage"[5] of (Hilbert & Bernays, 1934, p.VII f.), begins as follows:

> "Eine Darstellung der Beweistheorie, welche aus dem HILBERTschen Ansatz zur Behandlung der mathematisch-logischen Grundlagenprobleme erwachsen ist, wurde schon seit längerem von HILBERT angekündigt.
>
> Die Ausführung dieses Vorhabens hat eine wesentliche Verzögerung dadurch erfahren, daß in einem Stadium, in dem die Darstellung schon ihrem Abschluß nahe war, durch das Erscheinen der Arbeiten von HERBRAND und GÖDEL eine veränderte Situation im Gebiet der Beweistheorie entstand, welche die Berücksichtigung neuer Einsichten |VIII zur Aufgabe machte. Dabei ist der Umfang des Buches angewachsen, so daß eine Teilung in zwei Bände angezeigt erschien."

5 "Preface to the First Edition"

In the translation of (Hilbert & Bernays, 2017a, p.VII.b, engl.) (comments omitted):

> "Some time ago, HILBERT announced a presentation of the proof theory that developed from the HILBERTian approach to the problems in the foundations of mathematics and logic.
>
> The execution of this enterprise received considerable delay because the whole field of proof theory was changed by the publication of the works of HERBRAND and GÖDEL when our work was already close to completion; and this change put the consideration of new insights $|_{\mathrm{VIII}}$ onto the agenda. As a consequence of this, the size of the book grew to the extent that a separation into two volumes seemed appropriate."

Nothing about this work "already close to completion" and its whereabouts seems to be known.

1.2.2 The Mentioning of the Given-Up Work on the Second Edition

Bernays' "Vorwort zur zweiten Auflage"[6] of (Hilbert & Bernays, 1968, p.V) begins as follows:

> "Schon vor etlichen Jahren haben der verstorbene HEINRICH SCHOLZ und Herr F. K. SCHMIDT mir vorgeschlagen, eine zweite Auflage der ‚Grundlagen der Mathematik' vorzunehmen, und Herr G. HASENJAEGER war auch zu meiner Unterstützung bei dieser Arbeit auf einige Zeit nach Zürich gekommen. Es zeigte sich jedoch bereits damals, daß eine Einarbeitung der vielen im Gebiet der Beweistheorie hinzugekommenen Ergebnisse eine völlige Umgestaltung des Buches erfordert hätte. Erst recht kann bei der jetzt vorliegenden zweiten Auflage, zu der wiederum Herr F. K. SCHMIDT den Anstoß gab, nicht davon die Rede sein, den Inhalt dessen, was seither in der Beweistheorie erreicht worden ist, zur Darstellung zu bringen."

In the translation of (Hilbert & Bernays, 2017a, p.V, engl.):

> "A number of years ago, the late HEINRICH SCHOLZ and Mr. F. K. SCHMIDT suggested the undertaking of a second edition of the 'Foundations of Mathematics'; and moreover, to assist me in this work, Mr. G. HASENJAEGER came to Zürich for some time. Already back then, it became obvious that the integration of the many new results in the area of proof theory would have required a complete reorganization of the book. Furthermore, the present second edition (the impetus for which came again from Mr. F. K. SCHMIDT) can by no means present the substance of the achievements in proof theory since the appearance of the first edition."

[6] "Preface to the Second Edition"

In § 4.2, we will document when Gisbert Hasenjaeger came to Zürich for this purpose, and provide some evidence that the work of Hasenjaeger and Bernays has covered *a complete reorganization of the entire first volume*, which means that the main document of this collaboration and its whereabouts still remain completely unknown, and also that Bernays may give us a wrong impression by using the subjunctive "erfordert hätte"[7] in the above quotation.

2 Our Typescript

The unpublished typescript we discuss in this paper will briefly be called "our typescript".

2.1 Form, Location, and Incorrect Filing of Our Typescript

Its *outer form* is as follows: It is an untitled typescript, with corrections by Bernays' hand. Our typescript has 34 pages, with page numbers 2–34 on the respective page headers. Its spelling is German–Austrian, and it includes the German letter "ß" not found on typewriters with Swiss layout. In this context it may be relevant that — according Ludwig Bernays — his close uncle and legator Paul Bernays never had a typewriter and is not known to have ever used one.[8] The *location* of our typescript is the archive (ETH-Bibliothek, Hochschularchiv) of the ETH Zurich (Swiss Federal Institute of Technology in Zürich) (Switzerland).

The folder in which our typescript was found there by Claus-Peter Wirth on May 12, 2017, was one of two folders in the legacy of Paul Bernays under the label "Hs 973: 41", which is listed in the inventory (Bernays, 1986) on page 7 as

> "41. Texte und Korrekturen zur Neuauflage des "Grundlagenbuches" Bd. II von David Hilbert und Paul Bernays. 1970 2 Mappen"
>
> "41. Texts and corrections for the new edition of the "Foundations Book" Vol. II by David Hilbert und Paul Bernays. 1970 2 folders"

This was a wrong place for our typescript because its contents refer exclusively to Vol. I, published in 1934 (1st edn.) and in 1968 (2nd edn.) — neither to Vol. II, nor to the year 1970. Thus, regarding its subject, our typescript was *incorrectly filed*; since June 22, 2021, however, it is correctly filed in the new sub-folder Hs 973:41.1.

[7] "would have required"

[8] "Paul Bernays hat keine Schreibmaschine benutzt", private E-mail to Claus-Peter Wirth from Ludwig Bernays, Zürich, the nephew and heir to the copyrights of Paul Bernays, Nov. 12, 2017.

2.2 Two Additional Copies of Our Typescript, With Footnotes!

Moreover, in January 2018, in the legacy of Gisbert Hasenjaeger,[9] his daughter Beate Becker succeeded in finding two carbon copies of our typescript.

Both of these carbon copies come without the corrections *by Bernays' hand* found in our typescript, but one of them has most of these corrections added (mostly with a typewriter), and the other includes the typewriting of even more of the corrections by Bernays' hand found in our typescript.

One of these carbon copies comes with two extra typewritten pages containing all footnotes for our typescript, again corrected by Bernays' hand. Our typescript, however, does not contain any footnotes at all, but only raised closing parentheses (without any numbers, letters, asterisks or other signs) to indicate their respective positions in the text.

Regarding the font and the actual typing of the letters, we did not find any significant differences between our typescript and the extra footnote pages found by Beate Becker.

2.3 Presentational Form of Our Excerpts

The deletions and additions by Bernays' handwritten remarks are not documented in the following excerpts from our typescript; only the version of our typescript after the application of Bernays' hand-written corrections is presented here.

Therefore, the additions ([this text is added]) indicated in these excerpts are ours, not Bernays'. As there are only two occurences of required deletion in these excerpts, we have just indicated this by means of footnotes.[10]

Moreover — in these excerpts — the footnotes of the form [...] are our additions, whereas the other footnotes are those from the two extra pages found with one of the two carbon copies of our typescript in the Hasenjaeger legacy (cf. § 2.2).

All footnote numbers in these excerpts are introduced by us. This form of presentation seems appropriate in particular because our typescript has no footnotes (but only raised closing parentheses to indicate their positions, cf. § 2.2).

The positions of the original page breaks in our typescript are indicated by the sign "|" in our excerpts, with the number of the new page in a lower index, such as "$|_5$" for the page break from page 4 to page 5.

If we use small capitals for a name (as in "HILBERT") this is to indicate a full capitalization in our typescript (as in "HILBERT", even if it is written "Hilbert" because of a typo) or small capitals in (Hilbert & Bernays, 1934; 1939; 1968; 1970).

[9] By the end of the year 2018, Beate Becker gave her part of the scientific legacy of her father Gisbert Hasenjaeger in 9 boxes to the following archive: Legacy of GISBERT HASENJAEGER, Deutsches Museum, München, Archiv: "Nachlässe H, NL 288".

[10] Cf. Notes 19 and 31.

2.4 Discussion and Excerpts of § 1 of Our Typescript

The first section of our typescript has the headline "Einleitung."[11] and the additional subsection headline "§ 1. Einführung in die Fragestellung".[12]

2.4.1 Parallel introductory part, several paragraphs missing in our typescript

The text starts literally with the first paragraph of § 1 of (Hilbert & Bernays, 1934; 1968) (p. 1), including the enumerated list of three items.

The next paragraph of (Hilbert & Bernays, 1934; 1968), however, is not present in our typescript, namely the paragraph on the "verschärften methodischen Anforderungen"[13] resulting in "eine neue Art der Auseinandersetzung mit dem Problem des Unendlichen".[14]

Then, however, the text continues almost literally with the penultimate paragraph and the first sentence of the last paragraph of p. 1 of (Hilbert & Bernays, 1934; 1968).

The part on the subject of the "*existentiale Form*"[15] (which starts in the middle of the last paragraph of p. 1 and runs up to the end of the 1st paragraph starting on p. 2) is again missing in our typescript – just as the introduction to this subject was omitted before, namely in the paragraph on the problem of the infinite, right after the enumerated list of three items. Instead of this part, the paragraph ends in our typescript with a digression into satisfiability and consistency.

Then the last paragraph on p. 2 of our typescript follows almost literally the text from the 2nd paragraph starting on p. 2 of (Hilbert & Bernays, 1934; 1968) up to the end of the 2nd paragraph starting on p. 3 of (Hilbert & Bernays, 1934; 1968), where only the last part of the last sentence

> "als gültig vorausgesetzt, und wir kommen so zu der Frage, welcher Art diese Geltung ist."[16]

is missing in our typescript, where the sentence ends with

> "zugrundegelegt."[17]

instead — at the *very end of page 4* of our typescript.

---

[11] "Introduction."
[12] "§ 1. Introduction to the Problem Definition"
[13] "sharpened methodological requirements"
[14] "to deal with the problem of the infinite in a new way"
[15] "*existential form*"
[16] "presupposed to be valid. And so we come to the question what nature of validity this is."
[17] "taken as a basis."

2.4.2 Over 16 pages entirely missing in the typescript

The remainder of § 1 of (Hilbert & Bernays, 1934; 1968) is entirely omitted in our typescript, i.e. everything from the penultimate paragraph on p. 3 to the very end of p. 19 is entirely missing. This remainder covers – among others subjects – the following: the logical symbolism, axiomatizations of geometry, satisfiability and universal validity of formulas, the ACHILLES Paradox, the existence of an infinite manifold, the method of arithmetization, and the task of a proof of consistency as an impossibility proof.

2.4.3 A completely unknown introduction; from our typescript, pp. 5–14

In § 1 of our typescript, however, right after the very end of page 4 (just mentioned at the very end of § 2.4.1), there is a completely unknown, most interesting, and well-written introduction to the foundations of mathematics, HILBERT's proof theory, and the finitist standpoint, which seems to be entirely unpublished up to now.

We now present this introduction in the following way: The German original is found on the pages with even page numbers and our English translation on the respectively following pages with odd page numbers.

To this end, the remainder of the current page is left blank here.

|5 Wir kommen somit zu dem zweiten der anfangs genannten Themata der Grundlagenuntersuchungen. In der Begründung der Analysis ist es ja im 19. Jahrhundert zuerst durch die Untersuchungen von Bolzano und Cauchy und hernach deren Weiterführung und Vollendung durch Dedekind, Cantor und Weierstrasz gelungen,[18] die Methoden der Infinitesimalrechnung, die ja in ihren Anfängen einer vollen Deutlichkeit entbehrten und mehr nur instinktiv gehandhabt wurden, im Sinne einer stärkeren Anknüpfung an die klassischen Methoden der griechischen Mathematiker Eudoxos und Archimedes zu einer[19] präzise mitteilbaren und lehrbaren zu gestalten.

Indem diese Deutlichkeit erreicht wurde, traten zugleich die zugrundeliegenden methodischen Voraussetzungen mehr hervor, und man ging auch dazu über, diese Voraussetzungen über die Zielsetzung der Infinitesimalrechnung hinaus systematisch zu verwerten, wie es ja vor allem in der Cantor'schen Mengenlehre geschah. Die hier stattfindende starke Überschreitung des mathematisch Gewohnten weckte vielerseits Kritik, die dann noch durch die Entdeckung der mengentheoretischen Paradoxien bestärkt wurde.

Wenngleich es sich nun auch bei näherem Zusehen erwies, daß es zur Verhütung der Paradoxien genügte, gewisse extreme Begriffsbildungen zu vermeiden, die tatsächlich für den Aufbau der Mengenlehre und erst recht für die Methoden der Analysis gar nicht erforderlich sind, so ist doch seitdem die Diskussion über die Grundlagen der Mathematik nicht zur Ruhe gekommen, und man hat sich auch jener Paradoxien als Argument bedient, um viel weiter gehende Einschränkungen des mathematischen Verfahrens zu motivieren, als sie zur Behebung der Widersprüche |6 direkt erfordert werden.

Für eine gründliche Stellungnahme zu dieser Grundlagendiskussion erscheint eine eingehende Betrachtung der *logischen Struktur der mathematischen Theorien* als geboten.

[18] Méray, Enc. I.1, 3 (1904).

[19] [This word "einer" should have been deleted by Bernays. Indeed, "einer stärkeren Anknüpfung" and "einer vollen Deutlichkeit" are the most salient referents for "präzise mitteilbaren und lehrbaren", which do not make any sense, however. Thus, "die Methoden der Infinitesimalrechnung" is the only possible referent, which is a plural, whereas "einer präzise mitteilbaren und lehrbaren" is singular. On the basis of our wide experience with Bernays's scientific writing we are certain that Bernays would definitely have disambiguated this to "einer präzise mitteilbaren und lehrbaren Methode". It cannot be the case, however, that "Methode" is omitted in the typescript, because Bernays would never have claimed that infinitesimal calculus is to be taught only by a single method. All in all, "einer" must have remained in the typescript by error.]

|5 Let us now turn to the second topic of the foundational investigations listed at the beginning, regarding the grounding of Analysis. As is well known, in the 19th century, first through the investigations of BOLZANO and CAUCHY and then through their continuation and completion by DEDEKIND, CANTOR and WEIERSTRASZ,[20] the methods of infinitesimal calculus, which lacked clarity and were applied more or less instinctively in their beginnings, were given a precisely communicable and teachable form, in the sense of a closer orientation toward the classical methods of the Greek mathematicians EUDOXOS and ARCHIMEDES.

As this clarity was achieved, the underlying presuppositions of these methods became more obvious as well. Moreover, these presuppositions were then systematically applied beyond the field of infinitesimal calculus, in particular in CANTOR's set theory. The strong transgression of the common usage of these presuppositions in mathematics aroused criticism which came from many sides and was then further encouraged by the discovery of the set-theoretic paradoxes.

On a closer inspection, however, it turned out that the paradoxes can be averted by the exclusion of certain extreme concept formations, which are not actually required for the constructions of set theory, and even less for the methods of Analysis. And yet, the discussion on the foundations of mathematics has not settled down since then. Moreover, those paradoxes were employed as motivational arguments for restrictions on the mathematical approach that go far beyond of what is immediately required for eliminating the contradictions. |6

A careful positioning in this discussion on the foundations of mathematics requires a more detailed consideration of the *logical structure of the mathematical theories.*

[20] MÉRAY, Enc. I.1, 3 (1904).

[It is difficult to say what this abbreviated footnote text by Bernays' hand means, but it probably refers to section "6. Point de vue de CH. MÉRAY", pp. 147–149 in (Pringsheim, 1904/07). This would make sense because our typescript omits the first name to be mentioned in the list, namely Charles Méray (1835–1911), and (Pringsheim, 1904/07) is one of the first texts that mentions the primacy of this neglected mathematician. Note that the German original (Pringsheim, 1898) does not contain this section on Méray at all.

The footnote is not executed in any of the two carbon copies (cf. § 2.2) of our typescript, but Bernays probably wanted to add "MÉRAY," before "DEDEKIND" and have the expanded proper citation in a footnote.]

In der Tat bemerkt man, daß es sich bei den zur Diskussion stehenden Verfahren der Mathematik um Methoden des Folgerns und der Begriffsbildung handelt, daß also hier eine Art der Erweiterung der gewöhnlichen Logik zur Geltung kommt. Zugleich zeigt sich eine enge Verflochtenheit des Mathematischen mit dem Logischen: einerseits tritt die Mengenlehre ihrem Gegenstand nach, durch die Beziehung von Mengen und Prädikaten (d. h. durch das Verhältnis von Umfang und Inhalt der Begriffe) in engste Berührung mit der Logik; andererseits wird man in der systematischen Untersuchung der logischen Bildungsformen und Schlußweisen mit Notwendigkeit auf mathematische Betrachtungen geführt. So ist ja bereits die traditionelle Lehre von den kategorischen Schlüssen eine typisch mathematische Untersuchung, was nur durch ihre historische Einordnung in die Philosophie leicht verdeckt wird. Mit dieser mathematischen Seite des Logischen hängt es auch zusammen, daß die logischen Schlüsse – wie sie insbesondere bei der reichhaltigeren Anwendung der Logik in den mathematischen Theorien zur Verwendung kommen –, in einer mathematischen Weise fixierbar und aus einer Reihe von wenigen Elementarprozessen zusammensetzbar sind.

Dieser Sachverhalt wurde zur vollen Deutlichkeit gebracht $|_7$ durch die Entwicklung der Systeme der symbolischen Logik, wie sie, vorbereitet durch den Boole'schen Logikkalkul,[21] um die Jahrhundertwende insbesondere von Peirce, Frege, Schröder, Peano, Whitehead u. Russell geschaffen wurden. Bei der Konstruktion dieser Systeme ging man teils darauf aus, eine handliche Symbolik zu gewinnen, die zugleich eine genauere Kontrolle der Schlußfolgerungen ermöglichte, teils bezweckte man eine Einordnung der Mathematik in die Logik.

Es war der Gedanke Hilberts, die logische Symbolik dazu zu verwerten, die mathematischen Beweismethoden zum Gegenstand einer mathematischen Untersuchung, einer „Beweistheorie", zu machen.[22] Der wesentliche Gesichtspunkt dabei ist, die Methode der formalen Axiomatik auch auf das logische Schließen selbst, wie es in den Theorien der Arithmetik und Mengenlehre ausgeübt wird, anzuwenden und somit an die Stelle der Prozesse der logische[n] Begriffsbildung und Folgerung formal angesetzte Operationen treten zu lassen. Hierdurch gewinnen wir den Vorteil, daß wir bei strittigen Begriffen und Schlußweisen nicht die inhaltliche Bedeutung in Betracht zu ziehen brauchen, sondern nur den formalen Effekt, der durch ihre Anwendung in den deduktiven Prozessen bewirkt wird. Dieser Effekt läßt sich vom Standpunkt einer ganz elementaren Betrachtung verfolgen. Wir haben so die Möglichkeit, Methoden, die vom inhaltlichen Standpunkt problematisch erscheinen, als beweistechnische Verfahren zu akzeptieren und zu rechtfertigen.

---

21 [*Sic!*]

22 Der erste Ansatz in dieser Richtung war der Hilbert'sche Heidelberger Vortrag 1904 (Hilbert, 1905), der freilich noch ganz im Fragmentarischen blieb. (In diesem wurde auch schon der Gedanke eines gemeinsamen Aufbaus von Mathematik und Logik zur Geltung gebracht.) Eine erste Weiterführung dieser Gedanken findet sich, noch vor Hilberts späteren Untersuchungen, in dem Werk von Julius König: Neue Grundlagen der Logik, Arithmetik, und Mengenlehre (Leipzig, 1914) [(König, 1914)].

Let us notice that the mathematical approaches under discussion, in fact, consist of methods of inference and concept formation. This means that some extension of the usual logic comes to bear in these approaches. At the same time, we notice that the mathematical and the logical are tightly intertwined here: On the one hand, considering its objects, set theory comes very close to logic through the relation between sets and predicates, i.e. through the relationship between extension and content of notions. On the other hand, any systematic investigation of the modes of logical formation and inference will necessarily lead us to mathematical considerations. As a matter of fact, the traditional teaching of the categorical inferences is already a typical mathematical investigation; this fact is only superficially concealed by the historical classification of this teaching into philosophy. It is also connected with this mathematical side of the logical that the logical inferences — in particular as they occur in comprehensive logic application in mathematical theories — can be captured in a mathematical way as being composed of a small number of elementary processes.

This state of affairs was brought to full clarity $|_7$ by the development of the systems of symbolic logic, which, prepared by the BOOLEan logic calculus, were created around the turn of the century in particular by PEIRCE, FREGE, SCHRÖDER, PEANO, WHITEHEAD & RUSSELL. The construction of these systems partly aimed at obtaining a handy symbolism, which also facilitated a more precise control over the conclusions, and partly aimed at a classification of mathematics into logic.

It was HILBERT's idea to create a "proof theory", in which the mathematical proof methods, formalized in a logical symbolism, become the objects of mathematical investigation.[23] The significant viewpoint is to apply the method of formal axiomatics also to the logical reasoning itself as it is applied in the theories of arithmetic and set theory, and thus to let formally specified operations take the places of the processes of logical concept formation and conclusion. This has the advantage that we need not consider the contentual meaning of contentious notions and modes of inference, but only the formal effect of their application in deductive processes. This effect can be traced by means of most elementary considerations. We thus have the possibility of accepting and justifying methods as proof-technical procedures, no matter whether they are problematic from the contentual standpoint.

[23] The first approach in this direction was HILBERT's Heidelberg talk of 1904 (Hilbert, 1905), which, of course, had to remain outright fragmentary. (In this talk also the idea of a joint construction of mathematics and logic is already brought to bear.) A first continuation of these ideas can be found, even before HILBERT's later investigations, in the work of JULIUS KÖNIG: Neue Grundlagen der Logik, Arithmetik, und Mengenlehre [New Foundations of Logic, Arithmetic, and Set Theory] (Leipzig, 1914) [(König, 1914)].

In diesem Sinne hat Hilbert die Aufgabe gestellt und in Angriff genommen, das System der Analysis und Mengenlehre als |8 ein widerspruchsfreies Gedankengebäude zu erweisen. Diese Aufgabe gliedert sich in zwei Teile.

Es handelt sich zunächst darum, die Beweismethoden der Analysis und Mengenlehre einer formalen Axiomatik zu unterwerfen oder, wie wir es kurz nennen wollen, zu *formalisieren.* Hierfür konnte sich Hilbert auf die bereits ausgebildeten zuvor genannten Systeme der Logistik stützen, in denen eine solche Formalisierung bereits geleistet war. Der Gesichtspunkt der streng formalen Deduktion wurde zuerst bei Frege scharf herausgestellt und für Teile der Mathematik zur Durchführung gebracht. Die Methode zur handlichen Ausgestaltung einer Formalisierung wurde durch Peano entwickelt. Eine Verbindung von beiden fand in den *Principia Mathematica* durch Whitehead und Russell statt.

Die hier[mit] vorliegende Formalisierung ist freilich für die Zwecke der Beweistheorie insofern nicht vorteilhaft, als sie keine Gliederung in elementarere und höhere Bereiche der Begriffsbildung und des Schließens ermöglicht. Das rührt davon her, daß in den Principia Mathematica sowie bei Frege die Gewinnung der Zahlentheorie aus der allgemeinen Mengenlehre als eines der Hauptziele genommen ist. So können hier die Methoden einer elementareren Behandlung der Zahlentheorie nicht in Erscheinung treten.

Von einer Formalisierung für die Zwecke der Beweistheorie ist zu wünschen, daß sie eine analoge axiomatische Gliederung der logisch-mathematischen Bildungen und Prozesse liefert, wie sie in der üblichen Axiomatik durch die Sonderung der Axiomengruppen bewirkt wird. Unter diesem Gesichtspunkt erscheint ein schichtweiser Aufbau des deduktiven Formalismus als angemessen. |9

So wurde man veranlaßt, von neuem die Formalisierung der mathematischen Disziplinen vorzunehmen, und man ist dabei zur präzisen Beschreibung von naturgemäß abgegrenzten Teilbereichen der logisch-mathematischen Deduktion gelangt, welche sich als solche zum ersten Mal an Hand des Formalisierungsprozesses darstellten.

Auf Grund der vollzogenen Formalisierung gewinnt nun die Aufgabe des Nachweises der Widerspruchsfreiheit für die arithmetischen Disziplinen eine bestimmtere mathematische Form. Es handelt sich jetzt darum, zu erkennen, daß die festgelegten Prozesse der Aussagenbildung und der Schlußfolgerung nicht zur Herleitung solcher Sätze führen können, die einander im Sinne der gewöhnlichen inhaltlichen Interpretation widersprechen. Das Widersprechen von Sätzen stellt sich mittels der Formalisierung der Negation durch eine einfache Beziehung der entsprechenden Satzformeln dar.

In this sense, Hilbert has set and tackled the task of proving the system of Analysis and set theory to be $|_8$ a consistent construct of ideas. This task subdivides into two parts.

First we have to represent the proof methods of Analysis and set theory in a formal axiomatics or, as we want to call it briefly, to *formalize* them. To this end, Hilbert could resort to the mentioned full-fledged systems of formal mathematical logic, in which such a formalization had already been accomplished. Frege was the first who clearly displayed the viewpoint of strict formal deduction and put it into practice for parts of mathematics. It was Peano who first developed handy presentations for such formalizations. Both accomplishments were combined in the *Principia Mathematica* by Whitehead and Russell.

This formalization is not advantageous for the purposes of proof theory, however, as it lacks subdividability into elementary and more advanced domains of concept formation and inference. This lack of subdividability has its historic origin in one of the main goals of the Principia Mathematica as well as Frege's work: the extraction of number theory from general set theory. Consequently, methods for a more elementary treatment of number theory cannot appear in these formalizations.

It is to be desired from a formalization for the purposes of proof theory that it admits an axiomatic subdivision of the logico-mathematical formations and processes that is analogous to the effect of the separation of axioms into different groups, as it is often found in customary axiomatics. From this viewpoint, it appears to be adequate to construct the deductive formalism in layers. $|_9$

Therefore, the formalization of the mathematical disciplines was put on the agenda again. And, in the course of the resulting formalization process, naturally separated subdomains of logico-mathematical deduction were brought into separate being for the first time, together with their precise descriptions.

On the basis of the given formalization, the task of proving the consistency of the arithmetical disciplines now gains a more definite mathematical form. It now means to realize that the uniquely defined processes of conclusion and of proposition formation cannot lead to the derivation of sentences that contradict each other according to the common contentual interpretation. By means of the formalization of negation, a contradiction of sentences can be represented simply as the occurrence of two corresponding formalized sentences.[24]

[24][This sentence may mean two different things; in the order of preference: 1. "The realization of sentences that contradict each other can be reduced to tracing the derivation of two sentences of the forms A and $\overline{A}$." Soundness of this problem reduction requires that the derivation process satisfies *ex falso quodlibet*, and completeness of the reduction requires a certain form of completeness of the derivation process. The latter, for instance, is not given for the derivation process in (Wirth & Stolzenburg, 2016, § 2.2). 2. "Contradiction may be defined in this context as two derivable sentences of the forms A and $\overline{A}$."]

Überdies ergibt sich bei einer zweckmäßigen Formalisierung der Aussagenlogik noch eine Vereinfachung in der Weise, daß ausgehend von irgend einem Widerspruch jede beliebige Aussage des formalisierten Bereichs herleitbar wird. Auf Grund davon genügt es, um die Unmöglichkeit eines Widerspruchs in dem genannten Sinne erkennen zu lassen, daß man das Gegenteil eines bestimmten einzelnen elementar gültigen Satzes als nicht herleitbar erweist. Die Ausführung eines solchen Nachweises – anschließend an den schrittweisen Aufstieg der Teilbereiche – bildet den zweiten Teil des Hilbert'schen Programms. Die Durchführung ist freilich Hilbert nicht gelungen, und es ist auch heute noch nicht abzusehen, ob – oder vielmehr in welchem Sinne – sie gelingen kann. |10

Es bestehen nämlich hier nicht nur große technische, sondern auch grundsätzliche Schwierigkeiten. Diese erheben sich vor allem mit Bezug auf die Frage, welche Mittel für den gewünschten Nachweis zugelassen werden sollen. In der Tat ging ja das Bedürfnis für einen solchen Nachweis von einer Kritik der üblichen Beweismethoden aus. Soll dieser Kritik Rechnung getragen werden, so darf der Nachweis der Widerspruchsfreiheit nicht seinerseits auf einer Verwendung der kritisierten Methoden beruhen.

Durch diese Erwägung erhalten wir aber zunächst nur eine Abgrenzung im negativen Sinne, und es bleibt noch die Aufgabe, genauer zu bestimmen, auf welche Arten der Überlegung die Beweistheorie sich stützen soll. Für die Wahl dieses Standpunkts wird uns ein Anhalt durch das Erfordernis gegeben, daß zumindest ja die Behauptung der Widerspruchsfreiheit für die formalisierten Theorien sich präzise fassen lassen muß.

Diesem Erfordernis wird bereits genügt durch eine Art der elementaren mathematischen Betrachtungsweise, welche Hilbert als den *finiten Standpunkt* bezeichnet hat. Es ist diejenige Art anschaulicher mathematischer Überlegung, wie sie in der elementaren Kombinatorik angewandt wird. Auch die elementare Zahlentheorie und Buchstaben-Algebra läßt sich auf diese Art behandeln. Das Kennzeichnende für die finite Betrachtung besteht in folgenden Momenten:

Moreover, there is a further simplification by the fact that, for a formalization of propositional logic appropriate for our purposes, an arbitrary contradiction will admit the derivation of each and every proposition of the formalized domain. To realize the impossibility of a contradiction in the mentioned sense, it thus suffices to pick any definite, elementary valid sentence and show that the opposite of this sentence cannot be derived. After the stepwise construction of the subdomains, it is the execution of such a proof which forms the second part of HILBERT's program. Admittedly, this execution was not achieved by HILBERT, and even today it is still not foreseeable whether — or rather in which sense — it may be achieved. |10

In fact, there are not only major technical difficulties here, but also fundamental ones. These arise mainly with regard to the question, which means are to be admitted for the desired proof. It was, after all, a critique of the customary proof methods that prompted the demand for such a proof. If this critique is to be taken into proper account, then the proof of consistency must not in turn rely on the application of the criticized methods.

By this consideration, however, we get only a first boundary in the negative sense; and the task still remains to determine more precisely, on which sorts of consideration proof theory is to be based. A hint on the choice of this standpoint is given by the requirement that at least the assertion of consistency must be precisely expressible for the formalized theories.

This requirement is already satisfied by some elementary mode of mathematical consideration, which HILBERT called the *finitist standpoint*. It is that mode of intuitive mathematical consideration which is applied in elementary combinatorics. Also elementary number theory and algebra can be treated in this mode. The characteristics of finitist consideration are given by the following moments:

1. Als Gegenstände werden nur *endliche* Gebilde genommen, an denen auch nur *diskrete* Gestaltsmerkmale unterschieden werden.
2. Die Formen des allgemeinen und des existentialen Urteils kommen nur auf eine eingeschränkte Art zur Anwendung, im Sinne $|_{11}$ der Vermeidung der Vorstellung von unendlichen Gesamtheiten; nämlich das allgemeine Urteil wird nur in hypothetischem Sinne gebraucht, als eine Aussage über jedweden vorliegenden Einzelfall, und das existentiale Urteil als ein (zweckmäßig zu vermerkender) Teil einer näher bestimmten Feststellung, in der entweder ein bestimmt strukturiertes Gebilde vorgewiesen oder ein allgemeines Verfahren aufgezeigt wird, nach dem man zu einem (gewisse Bedingungen erfüllenden) Gegenstand[25] einen anderen Gegenstand mit verlangten Eigenschaften gewinnen kann.
3. Alle Annahmen, die man einführt, beziehen sich auf endliche Konfigurationen.

Mit der genaueren Beschreibung und Erörterung der finiten Betrachtungsweise werden wir uns noch des Näheren zu befassen haben.

Es wäre zweifellos sehr befriedigend, wenn wir uns in der beweistheoretischen Untersuchung völlig an diesen Rahmen elementarer Betrachtung halten könnten. Die Möglichkeit hierfür scheint zunächst insofern gegeben zu sein, als ja mit Bezug auf eine formalisierte Theorie die Behauptung ihrer Widerspruchsfreiheit sich nach dem vorhin Bemerkten in finiter Form dahin aussprechen läßt, daß ein jeder formalisierte Beweis eine Endformel hat, die verschieden ist von der Negation einer bestimmten[,] geeignet gewählten Satzformel.

Die Formulierbarkeit eines Problems im Rahmen gewisser Ausdrucksmittel bietet aber noch keine Gewähr dafür, daß seine Lösung sich mit diesen Mitteln bewerkstelligen läßt. Tatsächlich hat es sich im Fall der Beweistheorie herausgestellt, daß für die gewünschten Nachweise der Widerspruchsfreiheit formalisierter Theorien die finiten Methoden nicht zulänglich sind. $|_{12}$ Man hat sich so genötigt gesehen, für die Beweistheorie den ursprünglichen finiten Standpunkt zu einem „konstruktiven“ Standpunkt zu erweitern, der sich etwa so kennzeichen läßt, daß von den drei soeben genannten Forderungen nur die ersten beiden aufrechterhalten werden, die dritte aber fallen gelassen wird. So kommt man dazu, für die Beweistheorie eine ungefähr solche methodische Haltung einzunehmen, wie sie der BROUWER'sche Intuitionismus für die Mathematik überhaupt als einzig zulässig ansieht.[26]

[25] [This must be the plural in general: "zu (gewisse Bedingungen erfüllenden) Gegenständen".]

[26] Eine präzise Vergleichung ist darum hier nicht zu verlangen, weil die intuitionistische Haltung nicht durch Gebrauchsregeln, sondern durch eine philosophische Einstellung charakterisiert ist. Das wird auch von HEYTING ungeachtet der von ihm durchgeführten Formalisierung der intuitionistischen Logik und Mathematik hervorgehoben. Für eine Konfrontierung der Methoden der konstruktiven Beweistheorie mit denen des Intuitionismus sind auch die neueren Untersuchungen von G. F. C. GRISS über die negationsfreie intuitionistische Mathematik von Belang, bei welchen das Operieren mit irrealen (unerfüllten) Annahmen grundsätzlich vermieden wird (Proc. Kon. Ned. Adad. v. Wetensch. 49 (1946) [(Griss, 1946)], 53 (1950) [(Griss, 1950)] und 54 (1951) [(Griss, 1951a; 1951b; 1951c; 1951d))].

1. The objects must be *finite* entities, distinguished only by their *discrete* attributes.
2. Universal and existential judgments may occur only if $|_{11}$ they do not refer to the conception of any infinite totality: The universal judgment may be used only in the hypothetical sense, as a proposition on any individual object to be given. Moreover, the existential judgment may occur only as (an appropriately noted) part of a more specifically determined statement, which additionally presents either an entity of definite structure, or else a general procedure for generating an object of the asserted properties from any object[s] to be given (satisfying certain conditions).[27]
3. Assumptions may be introduced only if they refer to finite configurations.

We will have to take a closer look on a more detailed description and discussion of the finitist mode of consideration later.

There can be no doubt that it would be very fulfilling if we were able to confine our proof-theoretic investigations to this framework of elementary consideration. At first, this seems to be possible insofar as — according to what we have previously noticed — the assertion of the consistency of a formalized theory can be expressed in finitist form by the assertion that every formalized proof has an end formula that is different from the negation of a definite, properly chosen formalized sentence.

The expressibility of a problem within the limits of certain means of expression, however, does not guarantee that its solution can be accomplished with these means as well. For the case of proof theory, it has indeed turned out that the finitist methods are not sufficient for the desired proofs of consistency of formalized theories.[28] $|_{12}$ Therefore, it became necessary to extend the original finitist standpoint for proof theory to a "constructive" one, which can be characterized roughly by maintaining only the first two requirements of the three just mentioned ones, but dropping the third. Thus, we arrive at at position toward the methods in proof theory which is roughly the one that BROUWER's intuitionism considers to be the only admissible one in mathematics in general.[29]

[27][The objects which the general procedure (to be presented here) must accept as input arguments are those individual objects which may be given to the universal judgments on which the existential judgment depends, i.e. in whose scope the existential judgment occurs. See (Wirth, 2004; 2017) for several formal frameworks where this statement makes sense even in the absence of quantifiers.

The conditions that these individual objects may be assumed to satisfy (according to "gewisse Bedingungen erfüllenden"/"satisfying certain conditions") are those which arise from the logical context of the existential judgment, e.g. for an existential judgment in the conclusion of an implication, the individual objects may be assumed to satisfy the condition of the implication, &c. The required form of reasoning with this kind of logical context, called *hierarchical contextual reasoning*, was nicely formalized in (Autexier, 2003) for the first time.]

[28][Can this refer to anything else but (Gödel, 1931) ?]

[29]A precise comparison is not to be demanded here, because the intuitionist position is actually not characterized by rules of application, but by a philosophical attitude. This is emphasized also by HEYTING, notwithstanding his formalization of intuitionist logic and mathematics. Moreover, a most relevant comparison of the methods of constructive proof theory with those of intuitionism is found in the more recent investigations of G. F. C. GRISS on negation-

Doch selbst bei dieser Erweiterung des finiten Standpunkts hat es nicht allenthalben sein Bewenden. Man sieht sich vielmehr bei der Behandlung gewisser Fragen dazu gedrängt, auch die zweite der obigen Forderungen fallen zu lassen. Dies ist zum Beispiel bei der Behandlung der Frage der Vollständigkeit des Systems der Regeln für die gewöhnliche Prädikatenlogik der Fall, die zuerst von Kurt Gödel im positiven Sinne gelöst worden ist. Hier erfordert bereits die Formulierung des Ergebnisses, wenigstens wenn man sie in prägnanter und einfacher Form haben will, die Einführung einer nichtkonstruktiven Begriffsbildung. Eine finite Fassung des Ergebnisses und auch ein Beweis im finiten Rahmen läßt sich erzwingen, ist aber mit technischen Komplikationen belastet.

Dieses Beispiel des Gödel'schen Vollständigkeitssatzes ist zugleich dafür charakteristisch, daß die beweistheoretische Fragestellung in ihrer natürlichen Ausgestaltung nicht bei dem Problem verbleibt, welches aus der Kritik der üblichen Verfahren der klassischen Mathematik erwachsen ist. Auch Hilbert hat ja von vornherein die Aufgabe der Beweistheorie sehr weit gefaßt.[30] |13

Unter den weitergehenden Fragestellungen sind nun auch etliche solche, bei denen die Verbindlichkeit der Anforderung einer methodischen Beschränkung als fraglich erscheint. So sind in neuerer Zeit verschiedenen[31] erfolgreiche Untersuchungen, die in weiterem Sinne zum Felde der Beweistheorie gehören, im Rahmen der üblichen mathematischen Methodik, also ohne Beschränkung der Begriffsbildungen und Beweismethoden, durchgeführt worden. Andererseits haben verschiedene Autoren für jene speziellen beweistheoretischen Untersuchungen, die es mit den Fragen der Widerspruchsfreiheit zu tun haben, einen solchen Standpunkt gewählt, bei welchem von den drei vorhin formulierten Forderungen nur die erste zugrunde gelegt wird.

free intuitionist mathematics, where the handling of unreal (i.e. unsatisfiable) assumptions is avoided on principle (Proc. Kon. Ned. Adad. v. Wetensch. 49 (1946) [(Griss, 1946)], 53 (1950) [(Griss, 1950)], and 54 (1951) [(Griss, 1951a; 1951b; 1951c; 1951d)]).

[30] Vgl. seine Äußerungen in dem Vortrag: Axiomatisches Denken (Math. Ann. 78, pp. 405–415 (1918)) [(Hilbert, 1918)].

[31] [Typo for "verschiedene".]

Even this extension of the finitist standpoint, however, does not suffice in all cases. In fact, for treating certain problems, we feel urged to drop the second of the above requirements as well. This is for example the case for the treatment of the problem of completeness of the rule system for ordinary predicate logic, first solved by KURT GÖDEL — in the positive sense. In this example, a concise and simple expression of the result already requires the introduction of a non-constructive concept formation. A finitist version of the result can be enforced, and also a proof by finitist means, but these versions are burdened with technical complication.[32]

Thus, GÖDEL's completeness theorem provides also a characteristic example that proof-theoretic problem definitions in their natural embodiment already exceed the problem that resulted from the critique of the customary procedures in classical mathematics. Accordingly, HILBERT already gave a comprehensive outlook on the tasks of proof theory from the very beginning.[33] |13

Moreover, for quite a few among the more advanced problem definitions, the commitment to a restriction of the methods may be questioned anyway. In fact, in more recent times, in the field of proof theory in the broader sense, various successful investigations have been realized with the full methodology of customary mathematics, restricting neither concept formations nor proof methods. Furthermore, even for proof-theoretic investigations actually concerned with the problems of consistency, various authors have chosen a standpoint that relies only on the first of the three previously stated restrictions.

[32][This refers to Herbrand's Fundamental Theorem (Herbrand, 1930), which, together with the Löwenheim–Skolem Theorem (Löwenheim, 1915), yields a finitist version of Gödel's completeness theorem (Gödel, 1930), cf. e.g. (Wirth &al., 2009; 2014), (Wirth, 2012; 2014).]

[33]Cf. his statements in his talk: Axiomatisches Denken [Axiomatic Tought] (Math. Ann. 78, pp. 405–415 (1918)) [(Hilbert, 1918)].

Eine endgültige Entscheidung der Methodenfrage kann dieser Sachlage gegenüber jedenfalls nur erwartet werden, wenn man einen Überblick darüber hat, was die verschiedenen Methoden zu leisten vermögen. Es kann schwerlich behauptet werden, daß gegenwärtig eine Entscheidung jener Frage vorliegt, die nicht bloß durch eine vorgefaßte philosophische Ansicht bestimmt ist. Und bezüglich der verschiedenen sich bekämpfenden und heute üblichermaßen gegenübergestellten philosophischen Lehrmeinungen besteht der Verdacht, daß sie ungeklärte Voraussetzungen in sich schließen, die ihrerseits vielleicht eher fragwürdig sind als die angefochtenen mathematischen Theorien.

Angesichts dieser Sachlage erscheint es als das angemessene Verfahren, daß wir einerseits die methodische Richtlinie, die durch den Gesichtspunkt der finiten Betrachtung gegeben wird, im Auge behalten, andererseits uns [aber dadurch] nicht in der Methode festlegen. Dabei ist insbesondere der Umstand mitbestimmend, daß neuerdings die beweistheoretischen Untersuchungen in einen engeren Kontakt getreten sind mit den allgemeinen Theorien der abstrakten Algebra und Topologie, $|_{14}$ so daß die Aussicht sich eröffnet, daß die beweistheoretischen Methoden zu einem wirkungsvollen Hilfsmittel in diesen Gebieten sich entwickeln. Bei solchen Anwendungen fungiert die Beweistheorie nicht in der Rolle der Beweiskritik, sondern im Rahmen der üblichen Methoden des mathematischen Schließens, und es würde darum hier die Forderung der finiten Betrachtungsweise gar nicht am Platze sein.

—

Zur Vorbereitung unserer beweistheoretischen Betrachtungen ist es nun auf jeden Fall wünschenswert, daß die spezifische Art der finiten Überlegung deutlich gemacht werde. Zur Illustrierung eignet sich besonders das Gebiet der elementaren Zahlentheorie, in welcher der Standpunkt der direkten inhaltlichen, ohne axiomatische Annahmen sich vollziehenden Überlegungen am reinsten ausgebildet ist. $|_{15}$

In any case — confronted with this overall situation — a final answer to the question which methods to choose can only be expected after attaining a comprehensive insight into the full capability of the different methods. It can hardly be claimed that an answer to that question has been given until today, unless determined by preconceived philosophical beliefs. And the various competing philosophical doctrines — nowadays mostly confronted with each other[34] — are suspected to comprise uncleared presuppositions. Moreover, these presuppositions may well be more questionable in turn than the mathematical theories under challenge.

In view of this situation, the appropriate procedure seems to be that we will keep track of the viewpoint of a finitist treatment as a guideline to determine our method of choice, but do not strictly limit ourselves to this method. A particular reason for this non-limitation is the fact that recently the proof-theoretic investigations have come into closer contact with the general theories of abstract algebra and topology,[35] $|_{14}$ and thus the prospect is opening up that the proof-theoretic methods may develop into a powerful tool in these fields. In such applications, proof theory does not act in the rôle of a proof critique, but within the framework of the customary methods of mathematical inference, and therefore the demand for a finitist mode of consideration would not be appropriate here at all.

—

For the preparation of our proof-theoretic considerations, it is now desirable in any case that the specific mode of finitist considerations is demonstrated. Particularly suitable for such an illustration is the field of elementary number theory, where the standpoint of direct contentual consideration without axiomatic assumptions is developed most purely. $|_{15}$

[34][The English phrase "confronted with each other" is just as ambiguous as the German original "gegenübergestellt", meaning either to be brought into opposition or to be arranged face-to-face for a comparison.]

[35][In the given context of the predicate calculus, this most probably refers to the PhD thesis (Hasenjaeger, 1950c) or to its improved version (Hasenjaeger, 1952b), both entitled "Topologische Untersuchungen zur Semantik und Syntax eines erweiterten Prädikatenkalküls" ("Topological Investigations on Semantics and Syntax of an Extended Predicate Calculus"). The papers (Stone, 1934) and (Mostowski, 1937; 1947) — cited and discussed in (Hasenjaeger, 1952b) — opened fascinating ways to transform logical problems into topological ones (with some effort), which then can be solved in an elegant and easy way by application of standard theorems of general topology. From these papers cited by Hasenjaeger, only (Mostowski, 1947) covers more than classical propositional logic. Thus, our typescript can hardly refer here to any publication previous to (Mostowski, 1947) and (Hasenjaeger, 1950c; 1952b). Indeed, we do not know of any previous publication to which this could refer w.r.t. the predicate calculus, and Hasenjaeger and Bernays did not know in 1952 of any such publication either: otherwise this would have been cited in (Hasenjaeger, 1952b), in particular as Bernays was referee of Hasenjaeger's PhD thesis. All in all, this provides strong evidence that our typescript was not written before 1947, and hardly before 1950.]

With the previous paragraph ends our long excerpt from our typescript and its § 1, presented here together with its English translation on the right-hand sides (i.e. on the pages with uneven numbers).

2.5 Discussion and Excerpts of § 2 of Our Typescript

§ 2 of our typescript comes with the subsection headline "§ 2. Die elementare Zahlentheorie"[36] and contains a version similar to the first nine pages (pp. 20–28) of § 2 of (Hilbert & Bernays, 1934; 1968), which comes with a similar headline:

> "§ 2. Die elementare Zahlentheorie. — Das finite Schließen und seine Grenzen."[37]

The first five paragraphs of § 2 of (Hilbert & Bernays, 1934; 1968), however, are missing in our typescript. For the first of these paragraphs, this is just a consequence of the omission of several paragraphs at the beginning of § 1 (cf. our § 2.4.1), because it is again on the subject of the "*existential form*". The further four of these paragraphs missing in our typescript contain a digression into the subject of geometry.

2.5.1 A sentence following the second edition instead of the first one

A significant difference to (Hilbert & Bernays, 1934) is that — instead of the one-sentence paragraph

> "Diese Figuren bilden eine Art von Ziffern; wir wollen hier das Wort ‚*Ziffer*' schlechtweg zur Bezeichnung *dieser* Figuren gebrauchen."[38]

of (Hilbert & Bernays, 1934, p. 21) — we find in our typescript the following sentence of (Hilbert & Bernays, 1968, p. 21):

> "Wir wollen diese Figuren, mit einer leichten Abweichung vom gewohnten Sprachgebrauch, als ‚*Ziffern*' bezeichen."[39]

It is unlikely that this text was just copied from the second edition, however, because our typescript contains the addition "(in Ermangelung eines besseren kurzen Ausdrucks)"[40], which is deleted by Bernays' hand.

2.5.2 A significant improvement compared to both editions

Another significant difference in our typescript occurs in the enumerated list of five items found on page 21f. in both editions of Vol. I (Hilbert & Bernays, 1934; 1968). This list describes the syntactic form of the "Zeichen zur Mitteilung".[41]

[36] "§ 2. Elementary Number Theory"
[37] "§ 2. Elementary Number Theory. — Finitist Inference and its Limits."
[38] "These figures constitute a kind of numeral; and we will simply use the word '*numeral*' to designate just *these* figures."
[39] "Deviating slightly from the common usage of language, we will call these figures '*numerals*'."
[40] "(lacking a better short expression)"
[41] "symbols for communication"

Item 1 of our typescript reads:

> "kleine deutsche Buchstaben zur Bezeichnung für unbestimmt gelassene Ziffern;"

> "small German letters for designating numerals that are left undetermined;"

Instead of this, we find

> "Kleine deutsche Buchstaben zur Bezeichnung für irgendeine nicht festgelegte Ziffer;"

> "Small German letters for designating an arbitrary, not determined numeral;"

in both editions of "Grundlagen der Mathematik".

Together with other hints on the finitist standpoint found in our typescript, this clarification in our typescript was crucial for a change in translation in the third English edition (Hilbert & Bernays, 2017a), as compared to the first two English editions where we translated the latter German term — after communication with several members of the advisory board of the Hilbert–Bernays Project,[42] who agreed that the meaning is ambiguous — with the similarly ambiguous term "an arbitrary indeterminate numeral".[43] Our new translation in the third edition is:

> "small German letters for designating arbitrary, not determined numerals;"

This new version clearly disambiguates these small German letters from *formal* variables as well as from arbitrary objects in the sense of Fine (1985). For a more detailed discussion see Note 21.6 on p. 21.b in the third English edition of "Grundlagen der Mathematik" (Hilbert & Bernays, 2017a).

In this context, it should be recalled that German letters — all over (Hilbert & Bernays, 1934; 1939; 1968; 1970) — do not denote *formal* variables (as Latin letters do). On the contrary, in the metalogical, finitist framework of Hilbert–Bernays' "Grundlagen der Mathematik" — depending on the natural-language context — German letters may be used either for *free atoms* or for *free variables*

[42] Cf. `https://w2.cs.uni-saarland.de/p/hilbertbernays/staff.html` or else `http://wirth.bplaced.net/p/hilbertbernays/staff.html`.

[43] As long as we were not able to give the German term a unique reading, we had to be careful and use a translation that does not cut off any possibly meaningful reading. It was our typescript here that provided the information for such a unique reading. Now we can translate that reading and do not have to bother our readers with an ambiguous English term.

As long as there are several possible readings, a translator must not give only his favorite interpretation of the original in the translation. If the translator knows exactly what is meant, however, then that meaning should to be captured in the translation as clearly and unambiguously as possible; otherwise the translator would propagate the weed of imperfect expression that always comes with the crop, in particular regarding the fruits of science.

in the terminology of (Wirth, 2017), which are both substantially different from the three kinds of *formal* variables of Hilbert–Bernays, i.e. from the bound individual variables, the free individual variables, and the free formula variables.

The technical term "*atom*" is from set theories (with atoms or urelements) and comes implicitly with a universal quantification,[44] whereas the term "*free variable*" is from free-variable semantic tableaus[45] and comes implicitly with an existential quantification.[46]

Moreover, in (Wirth, 2004; 2017), these atoms and free variables were formalized and became part of the formal language, which also admits ε-restriction of the free variables by a choice condition. This means that the formal language offers a more general version of Hilbert's epsilon — even without any quantification, neither quantification resulting in formulas ($\forall$, $\exists$) nor resulting in terms (ε, λ).

2.6 Discussion and Excerpts of § 3 of Our Typescript

§ 3 is the final section of our typescript. It comes with the subsection headline "§ 3. Überschreitung des finiten Standpunktes im mathematischen Schließen.".[47]

2.6.1 From our typescript: the entire text of § 3, pp. 32–34

In its first two paragraphs of § 3, our typescript announces to discuss the most interesting and critical approach to finitism chosen in the penultimate paragraph of § 1 of our typescript. In the penultimate paragraphs on Pages 22 and 23 here, we have quoted the sentence on this choice and translated it as follows:

> "In view of this situation, the appropriate procedure seems to be that we will keep track of the viewpoint of a finitist treatment as a guideline to determine our method of choice, but do not strictly limit ourselves to this method."

The bad news is that § 3 is obviously truncated in our typescript: It breaks off abruptly after the first discussion of an abstract example on mathematical induction, not covering all what was announced in its first two paragraphs.

As this truncation results in a very short, but most interesting section (pp. 32–34), we present this section here in total, in the same way as we presented the new introduction from § 1 in § 2.4.3: The German original is found on the pages with even page numbers and our English translation on the respectively following pages with odd page numbers.

To this end, the remainder of the current page is left blank here.

[44] Such as in the equations on p. 30 of (Hilbert & Bernays, 1934; 1968; 2017a).
[45] *Sic*! Cf. (Fitting, 1990; 1996)
[46] Such as in the equations on p. 28 of (Hilbert & Bernays, 1934; 1968; 2017a)
[47] "§ 3. Transgression of the finitist standpoint in mathematical inference."

Unsere ausgeführte Betrachtung der Anfangsgründe der Zahlentheorie diente dazu, uns das direkte inhaltliche, in Gedankenexperimenten an anschaulich vorgestellten Objekten sich vollziehende und von axiomatischen Annahmen freie Schließen in seiner Anwendung und Handhabung vorzuführen. Wir haben uns dabei an die methodische Einstellung gehalten, die wir anfangs nach HILBERT als den "finiten Standpunkt" bezeichnet haben. Wir wollen nun des näheren betrachten, wie man dazu veranlaßt wird, den finiten Standpunkt zu überschreiten. Dabei wollen wir anknüpfen an die früher gegebene Kennzeichnung des finiten Standpunktes, die ja mittels der drei charakteristischen Momente erfolgte: 1. Beschränkung der Gegenstände auf endliche diskrete Gebilde; 2. Beschränkung der Anwendung der logischen Formen des allgemeinen und des existentialen Urteils im Sinne der Vermeidung der Vorstellung von fertigen unendlichen Gesamtheiten; 3. Beschränkung der Annahmen auf solche über endliche Konfigurationen.

Diese Momente sind geordnet im Sinne einer zunehmenden Anforderung. Wir werden nun bei der Betrachtung der Überschreitung des finiten Standpunktes naturgemäß in entgegengesetzter Reihenfolge, im Sinne einer schrittweisen Abstreifung der Anforderungen, verfahren. |33

Ein Verstoß gegen die dritte Forderung, wonach alle Annahmen sich auf endliche Konfigurationen beziehen sollen, liegt bereits überall da vor, wo man die Annahme der Gültigkeit eines allgemeinen Satzes über Ziffern einführt.

Eine Veranlassung dazu ist insbesondere gegeben bei Anwendung der vollständigen Induktion zum Beweise von Sätzen, welche eine Beziehung $\mathfrak{A}(\mathfrak{m},\mathfrak{n})$ für beliebige Ziffern $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ behaupten. Soll die Induktion, etwa nach $\mathfrak{n}$, im finiten Sinne erfolgen, so muß bei dem Schluß von $\mathfrak{A}(\mathfrak{m},\mathfrak{n})$ auf $\mathfrak{A}(\mathfrak{m},\mathfrak{n}{+}1)$ die Ziffer $\mathfrak{m}$ festgehalten werden. In dieser Weise sind wir auch im vorigen Paragraphen bei den Beweisen der Rechengesetze für Summe und Produkt verfahren.

Häufig wird aber die vollständige Induktion so angewandt, daß man zunächst zeigt, daß für jede Ziffer $\mathfrak{m}$ die Beziehung $\mathfrak{A}(\mathfrak{m},1)$ besteht, und sodann beweist, daß, falls für die Ziffer $\mathfrak{n}$ bei jeder beliebigen Ziffer $\mathfrak{m}$ $\mathfrak{A}(\mathfrak{m},\mathfrak{n})$ besteht, dann auch bei jeder Ziffer $\mathfrak{m}$ $\mathfrak{A}(\mathfrak{m},\mathfrak{n}{+}1)$ besteht. Man schließt daraus nach der vollständigen Induktion, daß für jede Ziffer $\mathfrak{n}$ gilt, daß für jede Ziffer $\mathfrak{m}$ $\mathfrak{A}(\mathfrak{m},\mathfrak{n}{+}1)$ besteht.

Hier hat man in der zweiten zu beweisenden Behauptung einen Allsatz als Prämisse; es wird ja angenommen, daß (für den fixierten Wert $\mathfrak{n}$) bei jeder Ziffer $\mathfrak{m}$ die Beziehung $\mathfrak{A}(\mathfrak{m},\mathfrak{n})$ bestehe. Dieses Vorausgesetzte können wir uns nicht in der Vorstellung eigentlich vergegenwärtigen.

Our treatment of the basics of number theory was meant to demonstrate the application and the use of direct contentual inference in thought experiments on intuitively conceived objects, free of axiomatic assumptions.[48] In this treatment, we have observed the methodological attitude we initially called the "finitist standpoint" according to HILBERT. We now want to discuss in more detail what may be the cause for a transgression of the finitist standpoint. We want to follow here the previously given characterization of the finitist standpoint by means of three characteristic moments: 1. limitation of any object to be a finite discrete entity; 2. limitation of any application of the logical forms of the universal and the existential judgment to avoid the conception of any completed infinite totality; 3. limitation of any assumption to refer only to finite configurations.

These moments are ordered by increasing demand. Now, in our discussion of the transgression of the finitist standpoint — in the sense of a stepwise discarding of demands — we will naturally proceed in the reverse order. |33

A violation of the third requirement, according to which all assumptions should refer to finite configurations, is already given wherever one introduces the assumption of the validity of a universal sentence about numerals.

In particular, a cause for such a violation may be given in an application of mathematical induction for the proof of a sentence that asserts a relation $\mathfrak{A}(\mathfrak{m},\mathfrak{n})$ for arbitrary numerals $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$. If the induction, say on $\mathfrak{n}$, is to be carried out in the finitist sense, then the numeral $\mathfrak{m}$ must be held constant in the conclusion step from $\mathfrak{A}(\mathfrak{m},\mathfrak{n})$ to $\mathfrak{A}(\mathfrak{m},\mathfrak{n}{+}1)$. In this way we proceeded also in the previous section in the proofs of the laws of calculation for sum and product.

Frequently, however, mathematical induction is applied in such a way that one first shows that the relation $\mathfrak{A}(\mathfrak{m},1)$ holds for every numeral $\mathfrak{m}$, and then proves for the numeral $\mathfrak{n}$ that $\mathfrak{A}(\mathfrak{m},\mathfrak{n}{+}1)$ holds for every numeral $\mathfrak{m}$, under the assumption that $\mathfrak{A}(\mathfrak{m},\mathfrak{n})$ holds for any numeral $\mathfrak{m}$. From this, we may conclude by mathematical induction for every numeral $\mathfrak{n}$: $\mathfrak{A}(\mathfrak{m},\mathfrak{n}{+}1)$ holds for every numeral $\mathfrak{m}$.

In the second assertion to be shown here, we have a universal sentence as premise; indeed, we assume that (for the fixed value $\mathfrak{n}$) the relation $\mathfrak{A}(\mathfrak{m},\mathfrak{n})$ holds for every numeral $\mathfrak{m}$. In our conception, we are not really able to bring clearly to our mind what we have to presuppose here.[49]

[48] [This sentence is very similar to the first sentence of the third paragraph on p. 32 in (Hilbert & Bernays, 1934; 1968; 2017a).]

[49] [Indeed, we cannot visualize — element by element — the set $\{\ \mathfrak{A}(\mathfrak{z},\mathfrak{n}) \mid \mathfrak{z} \in \mathbf{N}\ \}$ of all potential assumptions, but only effectively given, finite subsets of it.]

Freilich läßt sich in vielen Fällen die genannte Form der Anwendung der vollständigen Induktion vom finiten Standpunkt motivieren. Das ist z. B. dann der Fall, wenn beim Beweis des Bestehens von $\mathfrak{A}(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}+1)$ für ein bestimmtes $\mathfrak{m}$ die Voraussetzung des Bestehens von $\mathfrak{A}(\mathfrak{z}, \mathfrak{n})$ für beliebige $\mathfrak{z}$ nur $|_{34}$ in solcher Weise zur Anwendung kommt, daß eine durch $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ bestimmte endliche Anzahl von Beziehungen

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{k}_1, \mathfrak{n}), \quad \ldots, \quad \mathfrak{A}(\mathfrak{k}_{\mathfrak{r}}, \mathfrak{n}) \tag{1}$$

benutzt wird, worin $\mathfrak{k}_1, \ldots, \mathfrak{k}_{\mathfrak{r}}$ gewisse aus $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ zu ermittelnde Ziffern sind.

In diesem Falle kommt ja der Beweis des hypothetischen Satzes mit der Allprämisse darauf hinaus, daß man zeigt, daß sich die Feststellung der Beziehung $\mathfrak{A}(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}+1)$ (für die fixierten Ziffern $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$) zurückführen läßt auf die Feststellung der Beziehungen (1), und damit ist ein Regreß gegeben, der die Feststellung von $\mathfrak{A}(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}+1)$ in einer begrenzten Zahl von Schritten auf die Feststellung von Beziehungen

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{z}_1, 1), \quad \ldots, \quad \mathfrak{A}(\mathfrak{z}_{\mathfrak{s}}, 1)$$

zurückführt, und für diese wird durch den anfänglichen Beweis des Bestehens von $\mathfrak{A}(\mathfrak{m}, 1)$ für beliebige $\mathfrak{m}$ das allgemeine Verfahren gegeben.

Diese Art der Rechtfertigung der erweiterten Form der vollständigen Induktion mit Allsätzen als Prämissen ist jedoch nicht generell anwendbar. Insbesondere erwächst eine Schwierigkeit aus dem Umstand, daß derartige erweiterte Induktionen in komplizierter Weise ineinandergeschachtelt sein können. Wir wollen einen typischen Fall dieser Art näher betrachten. Es handelt sich dabei um einen konstruktiv behandelbaren Teil der CANTORschen Theorie der transfiniten Ordinalzahlen. $|_{35}$

Nevertheless, the considered application of mathematical induction can be justified from the finitist standpoint in many cases.[50] For instance, such a justification is always possible if — in the proof that $\mathfrak{A}(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}+1)$ holds for a particular $\mathfrak{m}$ — the application of the hypothesis that $\mathfrak{A}(\mathfrak{z}, \mathfrak{n})$ holds for arbitrary $\mathfrak{z}$ can be restricted |$_{34}$ to a finite number of [instances of this universal sentence in the form of] relations

$$(1) \qquad \mathfrak{A}(\mathfrak{k}_1, \mathfrak{n}), \quad \ldots, \quad \mathfrak{A}(\mathfrak{k}_\mathfrak{r}, \mathfrak{n}),$$

where [$\mathfrak{r}$ as well as] $\mathfrak{k}_1, \ldots, \mathfrak{k}_\mathfrak{r}$ are certain numerals that have to be determined from $\mathfrak{m}$ and $\mathfrak{n}$.

In this case the proof of the proposition[51] with the universal premise amounts to showing that the verification of the relation $\mathfrak{A}(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}+1)$ (for the fixed numerals $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$) can be reduced to the verification of the relations (1). And therefore, we are then given a regression procedure that reduces the verification of $\mathfrak{A}(\mathfrak{m}, \mathfrak{n}+1)$ to the verification of relations

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{z}_1, 1), \quad \ldots, \quad \mathfrak{A}(\mathfrak{z}_\mathfrak{s}, 1)$$

in a limited number of steps. Moreover, for these relations, there is a general procedure given by the initial proof that $\mathfrak{A}(\mathfrak{m}, 1)$ holds for arbitrary $\mathfrak{m}$.

This way of justifying the extended form of mathematical induction with universal sentences as premises, however, is not applicable in general. In particular, one of the difficulties that may arise here is the circumstance that such extended inductions can be nested into each other in a complicated way. Let us discuss a typical case of this kind in more detail. We will deal here with a part of CANTOR's theory of transfinite ordinal numbers that can be treated constructively. |$_{35}$

[50] [For a formal treatment of this motivation see pp. 348–351 of (Hilbert & Bernays, 1968; 2017c).]

[51] [The occurrence of "hypothetischen" in the German original is to make clear that "Satzes" ("sentence") does not refer to a theorem, but just to a proposition, namely the induction step here. The German wording clashes with the standard notion of an *induction hypothesis*. Indeed, we cannot translate this occurrence as "hypothetical sentence" here because we already translated "Voraussetzung" ("presupposition") in the previous paragraph as "hypothesis".]

With the previous paragraph ends our excerpt presenting § 3 of our typescript in total — here together with its English translation on the right-hand sides (i.e. on the pages with uneven numbers).

The original text suddenly breaks off here. It is not clear whether the remainder is just incorrectly filed or whether Bernays further draft (in GABELSBERGER shorthand?) — which must have been written before the introduction to this subsection — was never put into typewriting.

3 Trying to Find Hints on the Time of Writing

3.1 § 1 of Our Typescript (Hints: Before 1929, 1931, or 1951–1977)

3.1.1 Possible explanations for the missing of the two paragraphs on the "existential form" in the introductory part

To explain why the two paragraphs from the beginning of § 1 of (Hilbert & Bernays, 1934; 1968) are missing in our typescript (as described in § 2.4.1), we see the following *three options*:

1. The missing of the two paragraphs may indicate that our typescript was written before 1929 for the following reason: Soon later the subject of these paragraphs, the "existential form", became an integral part of Bernays' standard introduction, never omitted in any publication on the foundations of mathematics; cf. the initial sections of (Bernays, 1930/31), (Hilbert & Bernays, 1934; 1968).
2. It could have been the case that Bernays or the Hilbert school in logic temporarily dropped the idea of the "existentiale Form" after the shock of Gödel's incompleteness theorems, say in 1931.
3. A third option is that the whole text was written by Gisbert Hasenjaeger during his stay as Bernays' assistant in Zürich, or later as a consequence of this stay. What speaks for this option is the overall improved pedagogical quality of our typescript as compared to the corresponding sections in (Hilbert & Bernays, 1934; 1968). Then these paragraphs may be not actually missing, but just deferred to a later section where they are more appropriate from the pedagogical viewpoint.

3.1.2 The completely unknown introduction

In the completely unknown introduction to the foundations of mathematics and Hilbert's proof theory (cf. § 2.4.3), there are some references to relevant published work that may help to date our typescript.

1. There is the following reference (cf. Note 28, § 2.4.3):

   > "Tatsächlich hat es sich im Fall der Beweistheorie herausgestellt, daß für die gewünschten Nachweise der Widerspruchsfreiheit formalisierter Theorien die finiten Methoden nicht zulänglich sind."
   >
   > "For the case of proof theory, it has indeed turned out that the finitist methods are not sufficient for the desired proofs of consistency of formalized theories."

   We do not think that this could have been written before autumn 1930, when Gödel's incompleteness theorems (1931) became known. If this is so, then our typescript cannot have been written before autumn 1930, which excludes the first option of § 3.1.1.

2. Moreover, there is the reference to (Griss, 1951a; 1951b; 1951c; 1951d) in Notes 26 and 29 of § 2.4.3. Unless the notes on the extra pages (cf. § 2.2) were added much later to our typescript than our typescript itself was originally written (which is very unlikely because the position markers of the footnotes are already part of our typescript), this means that our typescript cannot have been written before 1951.

3. Furthermore, there is also the following reference (cf. Note 35, § 2.4.3):

> "Dabei ist insbesondere der Umstand mitbestimmend, daß neuerdings die beweistheoretischen Untersuchungen in einen engeren Kontakt getreten sind mit den allgemeinen Theorien der abstrakten Algebra und Topologie, $|_{14}$ so daß die Aussicht sich eröffnet, daß die beweistheoretischen Methoden zu einem wirkungsvollen Hilfsmittel in diesen Gebieten sich entwickeln."
>
> "A particular reason for this non-limitation is the fact that recently the proof-theoretic investigations have come into closer contact with the general theories of abstract algebra and topology, $|_{14}$ and thus the prospect is opening up that the proof-theoretic methods may develop into a powerful tool in these fields."

   As we have discussed in detail in Note 35, there is strong evidence that this was not written before 1947, and hardly before 1950.

If our assessment in the last two items is correct, then also the second option of § 3.1.1 can be excluded and our typescript was probably written by Hasenjaeger during or after his stay with Bernays in Zürich.

3.2 § 2 of Our Typescript (Hints: Hasenjaeger, 1951–1977)

The sentence of our typescript found in the second instead of the first edition of "Grundlagen der Mathematik" (which we discussed in § 2.5.1) clearly speaks in favor of a version written during the preparation of the second edition; and the only work in this context we know about is the joint work of Hasenjaeger and Bernays.

The sentence of our typescript improving on both editions of "Grundlagen der Mathematik" (which we discussed in § 2.5.2) makes it likely that it was written with the intention of a thorough revision; and the only such attempt we know about is the joint work of Hasenjaeger and Bernays. Moreover, as Bernays used to keep track of any of his own corrections very carefully in his author's copies,[52]

[52] Such as the one of the first edition (Hilbert & Bernays, 1934; 1939) owned by Erwin Engeler and the one of the second edition (Hilbert & Bernays, 1968; 1970) owned by René Bernays, cf. (Hilbert & Bernays, 2017a; 2017b; 2017c).

where we do not find this correction, however, this improvement over both editions also indicates that our typescript was the result of a collaboration indeed.

3.3 § 3 of Our Typescript (No Hints)

Although § 3 of our typescript is very interesting and we would be keen on reading the remainder of it if it were found, it breaks off too soon for giving us a clear hint on the time of its writing.

4 Hasenjaeger and Bernays

As we have seen, for finding out the time of writing of our typescript, it may be helpful to find out more about Hasenjaeger's scholarship as Bernays' assistant in Zürich for the preparation of the second edition of "Grundlagen der Mathematik" in the early 1950s (cf. § 1.2.2). So the questions is: *What do we know about the relation of Hasenjaeger and Bernays around the year 1950?*

Besides several biographical remarks from Hasenjaeger in (Menzler-Trott, 2001), there seem to be essentially only two non-trivial biographical texts on Hasenjaeger: One is a laudation by Diller (2000); the other one is on his time as a cryptologist responsible for the security of the German Enigma in the Second World War and appears in similar forms in (Schmeh, 2005; 2009; 2013). There we learn that he was born June 1, 1919, in Hildesheim (Germany) as a son of a lawyer,[53] that he was seriously wounded on January 2, 1942, as a German soldier in Russia, and that the famous logician, philosopher, and theologian Heinrich Scholz (1884–1956) saved him from being ordered to the Russian front again, by recruiting him for the cryptology department of the High Command of the German Armed Forces (OKW/Chi) in Berlin.

As we were neither able to find a reasonable short CV of Hasenjaeger in publications nor in the WWW, we have put his own CV together with an English translation and some further remarks into our Appendix. For a list of his publications, see our hint at the beginning of our Bibliography.

4.1 Early Relation

Hasenjaeger and Bernays were exchanging letters on the first edition of "Grundlagen der Mathematik" since 1943, and from 1949 on also on Hasenjaeger's own work.[54] They definitely met each other in autumn 1949 at the "Kolloquium zur

[53] According to (Menzler-Trott, 2001, p.186) and also to Hasenjaeger's daughter Beate Becker, Gisbert Hasenjaeger's father was Edwin Hasenjaeger (1888–1972), who was the mayor of Mülheim an der Ruhr (Germany) from 1936 to 1946, and a very close friend of Heinrich Scholz (according to `https://www.muelheim-ruhr.de/cms/edwin_hasenjaeger_-_portrait_eines_oberbuergermeisters_1936-19461.html`).

[54] In particular, Hasenjaeger and Bernays were exchanging letters on the following publications: (Hasenjaeger, 1950a; 1950b; 1950c; 1952a; 1953).

Logistik und der mathematischen Grundlagenforschung", Sept. 27 – Oct. 1, 1949, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach (MFO), Oberwolfach (Germany). Indeed, the following photo[55] shows Hasenjaeger in the back row to the right behind Bernays (with H. Arnold Schmidt in dark suit to the right of Bernays, and Kurt Schütte rightmost):

Bernays seems to have reviewed the PhD thesis of Hasenjaeger (1950c) before May 24, 1950, which is the date of the final report by Hasenjaeger's supervisor Heinrich Scholz.[56]

4.2 Joint Work on "Grundlagen der Mathematik"

All in all, three scholarships were granted to Hasenjaeger by the ETH Board,[57] with the goal to assist Bernays in the preparation of the second edition of "Grundlagen der Mathematik". Hasenjaeger's first stay as Bernays' assistant in Zürich took place in winter term 1950/51.[58] As planned from the beginning, a second stay followed in summer term 1951.

Only after this second stay in Zürich, however, Hasenjaeger produced the *first proper sketch*[59] of the overall layout for the second edition of "Grundlagen der Mathematik", in the form of a rough table of contents. This sketch was and still is attached to Hasenjaeger's letter (1951) to Bernays. It is an elaborated and augmented protocol of the first detailed discussion with Bernays on the subject of the layout for the second edition of Hilbert–Bernays, which probably took place

[55] Source: Univ. Archiv Freiburg (Breisgau, Germany): Depositalbestand E6. Scanned, imprinted, and usage permitted by Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach (MFO), Oberwolfach (Germany): `https://opc.mfo.de/detail?photo_id=11199`

[56] For more information on Hasenjaeger' promotion, see the item labeled (Hasenjaeger, 1950c) in our Bibliography.

[57] In German: "ETH-Rat", at that time called "Schweizerischer Schulrat". For the grants see (Hasenjaeger, 1951; 1952g).

[58] Cf. (Hasenjaeger, 1950e).

in Zürich at the very end of the summer term 1951.[60]

During Hasenjaeger's first two semesters in Zürich, there were neither publications under his name nor work on the "Grundlagen der Mathematik". Therefore, a further stay of Hasenjaeger as Bernays' assistant was strongly suggested by Heinrich Scholz already February 1, 1951, in Scholz' letter (1951b) to Hasenjaeger. This third stay indeed took place during winter term 1951/52 at the ETH Zurich, and Hasenjaeger left Zürich soon after February 18, 1952.[61]

Most surprisingly, however, this first proper sketch attached to (Hasenjaeger, 1951) *does not show the slightest similarity with our typescript here.* As the non-matching of this sketch (handwritten by Hasenjaeger) with our typescript is crucial for the timing assessment of our typescript, let us quote the "Introduction" ("Einleitung") right at the beginning of it, roughly with the original line breaking:

"Die logische Struktur der mathematischen Theorien.
Gliederungsentwurf.

Einleitung (E)

a) Endliche Bereiche. Das finite Schliessen in Bezug auf "offene" Gesamtheiten (Spezies). Endliche Zahlen – Ordnungszahlen. Unendliche Bereiche. Beweise als mathematische Objekte.

b) Elementare Verbands- und/oder Gruppen-theorie. Dabei Aufsuchen der einfachsten Schlussweisen. Aufstellung eines provisorischen Aussagen-Kalküls (evtl. Dingvariablen zunächst nur als Mitteilungszeichen; dann Überlegung zum) elementaren Kalkül mit freien Variablen.

[59] This sketch attached to (Hasenjaeger, 1951) may only have been written in response to Scholz' letter (1951a) to Bernays, where Scholz expresses his worries raised by an oral report from Hasenjaeger (who must have met Scholz in Münster between the years 1950 and 1951) that the work on "Grundlagen der Mathematik" had not even started yet:

"Inzwischen ist Herr Hasenjaeger hier erschienen, und ich habe ihn als allererstes gefragt nach dem Stande der Arbeit an dem Grundlagenbuch. Er hat mir gesagt, dass diese Arbeit noch gar nicht hat anlaufen können, weil Sie die Mengenlehre erst fertig machen müssen. Dies hat mich nun wirklich so erschreckt, dass ich es Ihnen mit der ersten Möglichkeit sagen muss."

In English: "In the meantime, Mr. Hasenjaeger appeared here, and my very first question was about the state of affairs of the work on the foundations book. He told me that this work could not even have started yet, because you first have to complete the set theory. Now this has alarmed me to such an extent that I have to tell this to you with the first opportunity."

The noun phrase "the set theory" refers to (Bernays, 1954) (received March 30, 1953), where Hasenjaeger is mentioned only in the form of a reference to (Hasenjaeger, 1953).

In the eyes of Scholz, it was even worse for Hasenjaeger's career that the work of Hasenjaeger and Bernays on the second edition did not even start before summer 1951, cf. (Scholz, 1951c; 1951d).

[60] For estimating the time of the detailed discussion with Bernays, see also (Scholz, 1951d) in addition to (Hasenjaeger, 1951). In the letter (Hasenjaeger, 1951), a very rough previous sketch is mentioned to have been brought into accordance with the elaborated sketch attached to (Hasenjaeger, 1951). This very rough sketch is probably a protocol of a very first short discussion with Bernays on the Hilbert–Bernays subject, which took place at the end of winter term 1950/51 in Zürich.

[61] Cf. (Hasenjaeger, 1952d; 1970).

c) Kombinatorischer Reichtum der "Beweistheorie". Einbettung der Beweistheorie in die Zahlentheorie (Arithmetisierung). ? Elementare Probleme, die nichtelementare Methoden erfordern; Vergleich mit Zahlentheorie.

d) Widerspruchsfreiheit. Behandlung durch endliche Modelle und durch Entscheidungsverfahren. Entscheidungsverfahren an sich (Beisp.Verb.theorie)."

English translation:

"The logical structure of mathematical theories.
Layout outline.

Introduction (E)

a) Finite domains. Finitist inference w.r.t. "open" totalities (species). Finite numbers — ordinal numbers. Infinite domains. Proofs as mathematical objects.

b) Elementary lattice and/or group theory. Thereby exploration of the most simple modes of inference. Establishing a provisional propositional calculus (maybe object variables first only as symbols for communication; then considerations on the) elementary calculus with free variables.

c) Combinatorial abundance of "proof theory". Embedding of proof theory into number theory (arithmetization). ? Elementary problems that require non-elementary methods; comparison to number theory.

d) Consistency. Treatment by means of finite models and decision procedures. Decision procedures themselves (example lattice theory)."

All in all, the complete sketch attached to (Hasenjaeger, 1951) shows that the goal of the joint work of Hasenjaeger and Bernays was *a complete rewriting or even a completely new writing of the book right from the beginning* — definitely not just an integration of new parts into the first edition as found in our typescript and as indicated in the "Preface to the Second Edition", cf. § 1.2.2.

From the sequence of letters and postcards (Hasenjaeger, 1952e), (Bernays, 1952), (Hasenjaeger, 1952f), it becomes clear that the project of a complete reorganization of the book was still continued in 1952; in particular a completely new version of the treatment of the ι-operator is discussed in this sequence of letters. Moreover, Hasenjaeger's state-of-the-art introduction of the ι-operator (1952h) — ready for press and fundamentally different from the obsolete treatment in both Hilbert–Bernays editions — was probably already attached to the first letter (Hasenjaeger, 1952e). Note that, according to the sketch attached to (Hasenjaeger, 1951), the ι was to be treated in Chapters VI and VII of all in all 12 chapters (incl. the unnumbered introduction and the supplement chapters).

All in all, *Bernays may give us a wrong impression* by using the subjunctive "erfordert hätte" ("would have required") in the "Preface to the Second Edition", cf. § 1.2.2. Indeed, as a complete rewriting of the book was obviously planned from the very beginning of the work in summer 1951 and pursued far beyond the end of Hasenjaeger's last stay in Zürich in February 1952, it cannot be the case that the planned work was *reduced* when — "already back then" when "Mr. G. HASENJAEGER came to Zürich for some time" — "it became obvious that the integration of the many new results in the area of proof theory would have required a complete reorganization of the book." Of course, Bernays does not explicitly state that the work on a complete reorganization was *reduced* "already back then", but his directly following sentence already speaks only of the *reduced* version of the second edition — without mentioning *any other point in time* for the decision on this reduction, cf. § 1.2.2. Considering Bernays most contextual style of writing, where a sentence often can only be understood correctly if the reader has the meaning of several sentences of the context completely in mind, we never had the slightest doubt on the identity of these two points in time for several decades, until we started our investigations on the joint work of Hasenjaeger and Bernays.

The truth about the joint work of Hasenjaeger and Bernays on the "Grundlagen der Mathematik" seems to be that this work was given up only after a completely reorganized version for the first volume was already written, including *two* completely new chapters on the ι-operator (among other subjects). Be reminded that the ι-operator is treated in both published editions at the very end of the first volume only in a *single* chapter, which does not even meet the state of the art of the original treatment of the ε in the second volume of the first edition (Hilbert & Bernays, 1939).

In addition to this huge work on the entire first volume, the joint work of Hasenjaeger and Bernays also includes the writing of our typescript (not at all following the "Introduction" presented above) and, moreover, at least the still lost continuation of its § 3.

5 Conclusion

5.1 Overall Assessment of Our Typescript

In spite of some minor evidence that our typescript was written before 1929 (cf. § 3.1.1(1)) or in the year 1931 (cf. § 3.1.1(2)), the overwhelming evidence says that it was written not before 1951 (as explicated in §§ 3.1.2 and 3.2). In § 4.2, we then studied the joint work of Bernays and Hasenjaeger in Zürich 1950–1952, where we found some further evidence that our typescript resulted from that joint work. After all, the strongest evidence we have is the following: Two carbon copies of our typescript were found in Hasenjaeger's legacy — together with the only source for the footnotes to our typescript! As Hasenjaeger seems to have added these footnotes to a typescript — corrected by BERNAYS' hand and with marks indicating the places of the anchors for these footnotes — Hasenjaeger must have been involved in the production of our typescript — and, for this and several other reasons (cf. §§ 2.1 and 2.2), he is most probably the actual typist of it as well.

What we still do not know, however, is the time of writing, and we cannot exclude any year from 1951 to 1968 (when the second edition of the first volume of "Grundlagen der Mathematik" was published). Because of the improvements of our typescript over both editions of Hilbert–Bernays (cf. § 2.5.2, § 3.1.1(3), § 3.2), even the years from 1968 to 1977 (when Bernays died) cannot be excluded. Most likely, however, is the time of the winter term 1951/52, the last one Hasenjaeger stayed with Bernays at the ETH in Zürich (as explicated in § 4.2).

In any case, the finding of this incorrectly filed typescript is essential in the context of Hilbert and Bernays' "Grundlagen der Mathematik", because it provides us with some new insights[62] into the finitist standpoint and its development, in particular in connection with the two editions of the *first volume* of "Grundlagen der Mathematik" (Hilbert & Bernays, 1934; 1968).

5.2 Three Most Interesting Scripts Still Missing

As we do not know any way to find the following three scripts with our limited resources, the treasure quest remains open for future prospectors:

1. It is worthwhile to invest further effort and to search the legacy of Bernays and the ETH archives more broadly: There may be a chance to find an incorrectly filed continuation of our typescript, at least the remainder of its § 3, possibly in form of a draft partly in Bernays' Gabelsberger shorthand.

   Such a finding may change our point of view on Bernays' ideas on the foundations of mathematics considerably.

2. Be aware that our typescript must not be mistaken for the *other script* that Hasenjaeger wrote according to his handwritten sketch attached to (Hasenjaeger, 1951) — probably a typescript of a completely rewritten first volume of "Grundlagen der Mathematik", cf. § 4.2.

   This other script would be a real bonanza regarding the views of Bernays on the foundations of mathematics in the early 1950s.

   We have no idea on the whereabouts of this other script.

   It would be a real pity if this major work of Hasenjaeger and Bernays, which can hardly be overlooked in any library by its mere size, really remained lost.

3. Finally, to find the initial, nearly completed script for the first edition remains, of course, one of the biggest wishes of maybe every historian of modern logic.

[62]For instance, § 2 of our typescript has provided us with some new insight into the finitist standpoint, which helped us to improve the translation of the first part of § 2 of (Hilbert & Bernays, 1934; 1968) in (Hilbert & Bernays, 2017a) considerably, cf. § 2.5.2.

Moreover — and maybe more important — also § 3 of our typescript has provided us with some new insight into the finitist standpoint, which led to Note 349.2 in (Hilbert & Bernays, 2017c, p. 349).

Curriculum Vitae of Gisbert Hasenjaeger by Himself

German Original

The following is a reprint of (Hasenjaeger, 1997), written by Gisbert Hasenjaeger himself. Also the layout is exactly the one of Hasenjaeger's ASCII file.

```
Erstellt am: 16.08.1997


                VITA    Gisbert HASENJAEGER, geb. 01.06.19 Hildesheim

          [REM mit Korrekturen im Sinne von Standardisierung und von Kürzungen
               einverstanden; Mitteilung des Ergebnisses erbeten]

          1937 Abitur in Mülheim a.d. Ruhr.1937-1939 Arbeits- und Wehr-dienst.

          1942 Nach "Kopfschuß" (2.1.) und Rekonvalensenz bei OKW/CHI gegen
               (wie ich viel später erfuhr) A. Turing eingesetzt.

          1945-1950 Studium in Münster/Westf., dabei seit Beginn (wissensch.)
               Hilfskraft am Seminar/Institut für Mathematische Logik und
               Grundlagenforschung.

          1950 Promotion zum Dr.rer.nat. bei Heinrich Scholz mit der Disser-
               tation "Topologische Untersuchungen zur Semantik und Syntax
               eines erweiterten Prädikatenkalküls".
          1950 wissenschaflicher Assistent am o.a. Institut.

          1950/51 (das akademische Jahr) Stipendiat Gast bei Paul Bernays a.d.
               ETH Zürich.

          1953 Habilitation und venia legendi (Mathematische Logik und Grund-
               lagenforschung) an der Universität Münster (Habilitationsschrift.
               Widerspruchsfreie Axiomensysteme ohne Standard-Modell).
          1955 Diätendozentur, 1960 apl. Professur U Münster.

          1961 SS und WS 61/62 Vertretung einer neu gegründeten Professur für
               Logik an der Philosophischen Fakultät der Universität Bonn.

          1962 Berufung auf diese (a.o.) Professur, für Logik und Grundlagen-
               forschung. [REM Durch das Fehlen des Adjektivs (math.) und den
               heutigen Sprachgebrauch ist das nun wohl "ein weites Feld",
               welches zu beackern ich mir nicht mehr zumuten möchte.]
          1964 Persönlicher Ordinarius, 1966 o. Prof.

          1964/5 (das akademische Jahr) Gast am Institut for Advanced Studies
               Princeton N.J.
          1970/1 (das akademische Jahr) Gast-Professur an der University of
               Illinois in Urbana/Champaign.

          1984 Emeritierung U Bonn.
```

English translation

Date of Generation: Aug. 16, 1997

VITA Gisbert HASENJAEGER, born June 1, 1919, in Hildesheim (Germany)

[REM[ark?:] I agree with corrections in the sense of standardization and abbreviation, but ask for communication of the result]

1937 A-levels (Abitur) in Mülheim a.d. Ruhr.
1937–1939 Working and Military Service.
1942 After shot in the head (Jan. 2) and reconvalensence at OKW/CHI[63] mission against A. Turing (as I was told much later).
1945–1950 Studies in Münster/Westf., from the beginning Scientific Assistent at the Seminar/Institute for Mathematical Logic and Foundational Research
1950 Promotion to Dr. rer. nat. by Heinrich Scholz with the dissertation "Topological Investigations on Semantics and Syntax of an Extended Predicate Calculus".
1950 Postdoctoral Research Assistent at the above-mentioned institute.
1950/51 (the academic year) Scholarship Awardee as a guest of Paul Bernays at the ETH Zurich.
1953 Habilitation and venia legendi (mathematical logic and foundational research) at the Univ. Münster
(habilitation thesis: "Consistent Axiom Systems Without Standard Model").
1955 Position of Supernumerary University Lecturer, 1960 Adjunct Professor, Univ. Münster
1961/62 (summer and winter term) Deputy for a newly founded logic professorship at the philosophical faculty at Univ. Bonn.
1962 Appointed to this professorschip, for logic and foundational research.
[REM As the adjective "math." is lacking here and according to today's usage of language, this seems to be a "wide field" nowadays, which I would definitely not want to treat anymore.]
1964 Personal Professor ("Persönlicher Ordinarius"),
1966 Full Professor ("Ordinarius").
1964/5 (the academic year) Guest at the Institut for Advanced Studies Princeton N.J.
1970/1 (the academic year) Guest Professorship at the Univ. of Illinois in Urbana/Champaign.
1984 Professor Emeritus, Univ. Bonn.

[63] Actually: "OKW/Chi", i.e. Oberkommando der Wehrmacht/Chiffrierabteilung.

Remarks on Hasenjaeger's Curriculum Vitae

To provide some more detail and to overcome errors in other publications, we would like to add here three remarks to Hasenjaeger's Curriculum Vitae.[64]

First we would like to clarify some difficult point regarding his stay with Bernays in Zürich: In his CV (Hasenjaeger, 1997), Hasenjaeger omits the last semester of his grants in Zürich. In his draft for an English CV (Hasenjaeger, 1970), however, he writes: "From autumn 1950 to spring 1952 I worked under a scholarship with P. Bernays at the ETH, Switzerland." Up to now, we can only be certain that Hasenjaeger was in Zürich for the first 18 days of February 1952, i.e. during the very end of the winter term 1951/52, and that he planned to meet SCHOLZ in Münster (Westfalen) not before Feb. 29, 1952. The hard evidence for this is the letter (Hasenjaeger, 1952d) to SCHOLZ, written on Feb. 18, 1952, in Zürich.

Second, we would like to remark that — in spite of his severe war injury in 1942, as an artillerist in the German attack of Russia, after he had been drafted for military service in 1939 — he was able to keep a good work/life balance: In 1956 he married Irmhild Reinländer, a former student assistant of HEINRICH SCHOLZ and a mathematics and physics teacher in Soest (Germany) (1955–1957). Moreover, he had three children with his wife: Andreas (*1957), Beate (*1959), and Cordula (*1961). When he was Visitor at the Institute for Advanced Study, Princeton (NJ), in winter term 1964/65 and summer term 1965, or Visiting Professor at the Univ. of Illinois at Urbana–Champaign in winter term 1970/71 and summer term 1971, he took his whole family with himself to the US. Gisbert Hasenjaeger died on the estate of his wife in Plettenberg (Germany), Sept. 2, 2006. She died as his widow in 2012.

And a final, but lengthy remark has become necessary to clarify some important detail on his working and military service (Reichsarbeits- und Wehrdienst) during the years 1937–1939, namely that he did *not volunteer* for this — not only because this was not possible at that time, but also because neither he nor his family were in any way admirers the Nazi regime. Moreover, Gisbert Hasenjaeger himself hated anything military. Contrary to a text that wrongly puts Hasenjaeger close to being an admirer of the Nazi reign of terror, found on Dec. 28, 2019, in the German, English and French Wikipedia entries on Gisbert Hasenjaeger and also in the many places that automatically copy this attack to the soundness of public knowledge, Hasenjaeger did *not* do these services *voluntarily*. For instance, in the German version we could read: "Hasenjaeger war danach freiwillig beim Reichsarbeitsdienst und leistete seinen Wehrdienst." By Nov. 11, 2021, after many corrections by us and others, this nonsense has reappeared again in the English and French Wiki-

[64] Sources: Correspondence Hasenjaeger–Bernays: (Hasenjaeger, 1950d; 1950e; 1952e; 1952f). Three Curricula Vitae by Hasenjaeger himself: (Hasenjaeger, 1952g; 1970; 1997). Published articles: (Schmeh, 2005; 2009; 2013). Unpublished laudation: (Diller, 2000). Communication with Gisbert Hasenjaeger's daughter Beate Becker by E-mail and by phone, Jan.–Feb. 2018, Jan. 2020, and Nov.–Dec. 2021.

pedia versions of Nov. 11, 2021.[65]

Having completed his 18th year by June 1, 1937, Hasenjaeger was forced by law to do 6 months service according to the Reichsarbeitsdienstgesetz of June 26, 1935, immediately followed by 24 months service according to the Wehrgesetz of May 21, 1935. According to these laws, the lengths of these services are to be set by the "Führer and Reichskanzler", i.e. by Adolf Hitler, who chose these times as given here.

So Hasenjaeger should have been drafted by the Nazi state by July 1937, unless something relevant for the Nazi regime spoke against it, such as activities relevant for warfare, which included *studying medicine*.

A possible source for the claim of a *voluntary* participation is a link newly added to the German Wikipedia on Jan. 10, 2020, pointing to (Schmeh, 2005), where we read: "Nach dem Abitur im Jahr 1936 meldete er sich zunächst freiwillig zum Arbeitsdienst, um anschließend studieren zu können. Da jedoch der Krieg dazwischen kam, wurde er zum Militärdienst eingezogen." In (Schmeh, 2009, p. 343) we find an English version of these sentences: "After his graduation in 1936, he volunteered for labor service, planning to take up his studies afterwards. But the war intervened and he was drafted."

Several aspects should be noted here: (1) The sentences are not very reliable as Hasenjaeger writes in his own CV (Hasenjaeger, 1997) that he graduated in 1937, which is perfectly in line with the German standard of entering school with 6 (i.e. in late summer 1925) and graduating 12 years later from 1937 on (before 1937: 13 years). (2) The war intervened not during Hasenjaeger's labor service, but during his later military service. (3) In (Schmeh, 2009, p. 343) we read: "The author met him in 2005, a year before his death." Therefore, the German sentence in (Schmeh, 2005) is closer to the communication of Klaus Schmeh with Hasenjaeger in 2005 and therefore more reliable. (4) This is relevant because the German version actually says something different: Not the labor service was voluntary, but his "Meldung" ("answer" or "notice"). Thus, after passing his obligatory muster (probably in late 1936), Hasenjaeger probably answered that he would prefer an early start of his labor service because he wanted to study mathematics (but not medicine!) after his labor and military services *as early as possible without any interruption of his studies.*

Acknowledgments

We would like to thank Beate Becker (née Hasenjaeger), Ludwig Bernays, Egon Börger, Rainer Glaschick, Norbert Hungerbühler, Ralf Krömer, Paolo Mancosu, Klaus Schmeh, and Wilfried Sieg for their most helpful comments, and Norbert Hungerbühler and Frieder Stolzenburg for their kind support.

[65] Based on several similar corrections of mathematical errors, it really seems that any nonsense on Wikipedia reoccurs there again and again and that any effort to correct it turns out to be in vain in the end.

Bibliography

For a hopefully complete list of Gisbert Hasenjaeger's scientific and scholarly publications, check the items with the labels of the forms (Behnke & Hasenjaeger, 1955), (Börger &al., 1984), (Hasenjaeger, ...), (Hasenjaeger & Thyssen, 1968), (Scholz & Hasenjaeger, 1961).

Anon, 1899. *Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauß-Weber-Denkmals in Göttingen, herausgegeben von dem Fest-Comitee.* Verlag von B. G. Teubner, Leipzig.

Anon, 1968. *Bonner Gelehrte, Beiträge zur Geschichte der Wissenschaften in Bonn. Vol. 4: Philosophie und Altertumswissenschaften.* No. II-4 in „150 Jahre Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität zu Bonn 1818–1968". Verlag H[edwig] Bouvier & Co., Bonn.

Anon, 1984. *Logik und Grundlagenforschung: Festkolloquium zum 100. Geburtstag von Heinrich Scholz.* No. 8 (n.F.) in Schriftenreihe der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster. Aschendorffsche Verlagsbuchhandlung, Münster. 130 pp.

Serge Autexier, 2003. *Hierarchical Contextual Reasoning.* PhD thesis, Fachrichtung Informatik, Universität des Saarlandes, 66123 Saarbrücken, Germany.

Heinrich Behnke, Gisbert Hasenjaeger, 1955. Gilt $12:2*3=18$ oder $12:2*3=2$? *Mathematisch-Physikalische Semesterberichte*, IV:250–255. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen.

Paul Bernays, 1930/31. Die Philosophie der Mathematik und die Hilbertsche Beweistheorie. *Blätter für Deutsche Philosophie*, 4:326–367. Also in (Bernays, 1976, pp. 17–61). English translation "The Philosophy of Mathematics and Hilbert's Proof Theory" by Paolo Mancosu in (Mancosu, 1998, pp. 234–265).

Paul Bernays, 1937. A system of axiomatic set theory — Part I. *J. Symbolic Logic*, 2:65–77. Received Sept. 29, 1936.

Paul Bernays, 1938. Über die aktuelle Methodenfrage der Hilbertschen Beweistheorie. Ausarbeitung des Vortrages an der Grundlagenkonferenz Zürich, Dez. 1938. Unpublished manuscript, 18 pp., ETH-Bibliothek, Hochschularchiv, Hs 973 (Paul Bernays): 5 (cf. (Bernays, 1986, p. 4)), Swiss Federal Institute of Technology in Zürich (ETH Zurich), Zürich (Switzerland); transcribed by the Bernays Project to the file `Final-9-09/German/bg16.pdf`, 9 pp., in `http://www.phil.cmu.edu/projects/bernays/Latex/Bernays.zip`. Cf. also (Bernays, 1941b).

Paul Bernays, 1941a. A system of axiomatic set theory — Part II. *J. Symbolic Logic*, 6:1–17. Received June 12, 1940.

Paul Bernays, 1941b. Sur les questions méthodologiques actuelles de la théorie hilbertienne de la démonstration. Obscure French translation of (Bernays, 1938) with lots of changes apparently not approved by Bernays. In (Gonseth, 1941, pp. 144–152, Discussion pp. 153–161).

Paul Bernays, 1942a. A system of axiomatic set theory: Part III. Infinity and enumerability. Analysis. *J. Symbolic Logic*, 7:65–89. Received Oct. 7, 1940.

Paul Bernays, 1942b. A system of axiomatic set theory: Part IV. General set theory. *J. Symbolic Logic*, 7:133–145. Received April 25, 1941.

Paul Bernays, 1943. A system of axiomatic set theory: Part V.

General set theory (continued). *J. Symbolic Logic*, 8:89–106. Received June 9, 1941, with additions to §§14, 15 received Aug. 26, 1941, and an addition to §13 received Sept. 24, 1942.

Paul Bernays, 1948. A system of axiomatic set theory — Part VI. *J. Symbolic Logic*, 13:65–79. Received April 29, 1947.

Paul Bernays, 1952. Letter to Hasenjaeger, discussing a (nowadays lost) new chapter on the ι for the planned 2nd edn. of (Hilbert & Bernays, 1934). March 25, 1952. ETH-Bibliothek, Hochschularchiv, Hs 975 (Paul Bernays): 1987 (cf. (Bernays, 1986, p. 80)), Swiss Federal Institute of Technology in Zürich (ETH Zurich), Zürich (Switzerland).

Paul Bernays, 1954. A system of axiomatic set theory — Part VII. *J. Symbolic Logic*, 19:81–96. Received March 30, 1953.

Paul Bernays, 1958. *Axiomatic Set Theory.* Studies in logic and the foundations of mathematics. North-Holland (Elsevier), Amsterdam, Amsterdam. With a historical introduction by Adolf Abraham Fraenkel. 2nd edn. 1968.

Paul Bernays, 1976. *Abhandlungen zur Philosophie der Mathematik.* Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt.

Paul Bernays, 1986. Manuscripts. Handschriften und Autographen der ETH-Bibliothek 66, Wissenschaftshistorische Sammlung der ETH-Bibliothek, Swiss Federal Institute of Technology in Zürich (ETH Zurich), Zürich (Switzerland). `http://dx.doi.org/10.3929/ethz-a-000381167`, `e-collection.library.ethz.ch/eserv/eth:22103/eth-22103-01.pdf`.

Paul Bernays, Gisbert Hasenjaeger, 1952(?). A most interesting draft for Hilbert and Bernays' "Grundlagen der Mathematik". Unpublished untitled typescript by Hasenjaeger with corrections from Bernays' hand, 34 pp., with page numbers 2–34 on the respective page headers; ETH-Bibliothek, Hochschularchiv, in Hs 973 (Paul Bernays): 41 (since June 22, 2021, in the new sub-folder Hs 973:41.1). Swiss Federal Institute of Technology in Zürich (ETH Zurich), Zürich (Switzerland). Cf. (Bernays, 1986, p. 7) and `http://archivdatenbank-online.ethz.ch/hsa/#/content/cbe1f559fdbd4e338909ebed6c2740e2` for the listing in the archive and (Wirth, 2021) for a discussion of the typescript. Scan of the typescript: `https://etheritage.ethz.ch/wp-content/uploads/2021/05/Hs_973_41_S_1-34.pdf`. Two carbon copies without the corrections from Bernays' hand (however, with most of these corrections executed with a typewriter), but with two extra pages containing the footnotes for the original typescript (which comes only with footnote marks, but without any footnote texts) were found in Jan. 2018, by Beate Becker (née Hasenjaeger) in her part of the legacy of Gisbert Hasenjaeger, which she gave to the following archive by the end of the year 2018: Legacy of Gisbert Hasenjaeger, Deutsches Museum, München, Archiv: "Nachlässe H, NL 288".

Egon Börger (ed.), 1987. *Computation Theory and Logic. In Memory of Dieter Rödding.* No. 270 in Lecture Notes in Computer Science. Springer, Berlin.

Egon Börger, Rainer Glaschick, 2022. Logic and machines: Turing tradition at the logic school of Münster. *FACS FACTS: Newsletter of the Formal Aspects of Computing Sci. (FACS) Specialist Group*, 2022(1). ISSN 09501231. To appear.

Egon Börger, Gisbert Hasenjaeger, Dieter Rödding (eds.), 1984. *Logic and*

Machines: Decision Problems and Complexity. Proc. Symposium „Rekursive Kombinatorik", May 23–28, 1983, Institut für Mathematische Logik und Grundlagenforschung der Universität Münster, no. 171 in Lecture Notes in Computer Science. Springer, Berlin.

Nicolas Bourbaki, 1939ff.. *Éléments des mathématique — Livres 1–9*. Actualités scientifiques et industrielles. Hermann, Paris.

L. E. J. Brouwer, Evert Willem Beth, Arend Heyting (eds.), 1955. *Mathematical Interpretation of Formal Systems*. No. 15 in Studies in logic and the foundations of mathematics. North-Holland (Elsevier), Amsterdam. 1st edn. (2nd edn. 1971).

Barry S. Cooper, Jan van Leeuwen (eds.), 2013. *Alan Turing— His Work and Impact*. Elsevier, Amsterdam.

John N. Crossley (ed.), 1967. *Sets, Models and Recursion Theory. Proc. Summer School in Mathematical Logic and Tenth Logic Colloquium, Leicester, Aug.–Sept. 1965*. North-Holland (Elsevier), Amsterdam. 331 pp.

Justus Diller, 2000. Laudatio anläßlich der Erneuerung der Doktorurkunde von Herrn Prof. Dr. Gisbert Hasenjaeger am 24. November 2000. `http://archive.is/20130213012124/wwwmath.uni-muenster.de/logik/Veroeffentlichungen/etc/Hasenjaeger/haselaud.html#selection-21.29-51.22`.

William Ewald (ed.), 1996. *From Kant to Hilbert — A source book in the foundations of mathematics*. Oxford Univ. Press.

Kit Fine, 1985. *Reasoning with Arbitrary Objects*. No. 3 in Aristotelian Society Series. Basil Blackwell, Oxford.

Melvin Fitting, 1990. *First-order logic and automated theorem proving*. Springer, Berlin. 1st edn. (2nd rev. edn. is (Fitting, 1996)).

Melvin Fitting, 1996. *First-order logic and automated theorem proving*. Springer, Berlin. 2nd rev. edn. (1st edn. is (Fitting, 1990)).

Dov Gabbay, John Woods (eds.), 2004ff.. *Handbook of the History of Logic*. North-Holland (Elsevier), Amsterdam.

Kurt Gödel, 1930. Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls. *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 37:349–360. With English translation also in (Gödel, 1986ff., Vol. I, pp. 102–123).

Kurt Gödel, 1931. Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I. *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 38:173–198. With English translation also in (Gödel, 1986ff., Vol. I, pp. 145–195). English translation also in (Heijenoort, 1971, pp. 596–616) and in (Gödel, 1962).

Kurt Gödel, 1962. *On Formally Undecidable Propositions of Principia Mathematica and Related Systems*. Basic Books, New York. English translation of (Gödel, 1931) by Bernard Meltzer. With an introduction by R. B. Braithwaite. 2nd edn. by Dover Publications, 1992.

Kurt Gödel, 1986ff. *Collected Works*. Ed. by Solomon Feferman, John W. Dawson Jr., Warren Goldfarb, Jean van Heijenoort, Stephen C. Kleene, Charles Parsons, Wilfried Sieg, &al. Oxford Univ. Press.

Warren Goldfarb, 1970. Review of (Herbrand, 1968). *The Philosophical Review*, 79:576–578.

Ferdinand Gonseth (ed.), 1941. *Les entretiens de Zurich sur les fondements et la méthode des sciences mathématiques, 6–9 décembre 1938. Exposés et discussions.* S. A. Leemann Frères & Cie., Zürich. 209 pp.

G. F. C. Griss, 1946. Negationless intuitionistic mathematics. In (KNAW, 1946, pp. 1127–1133).

G. F. C. Griss, 1950. Negationless intuitionistic mathematics II. In (KNAW, 1950, pp. 456–463).

G. F. C. Griss, 1951a. Logic of negationless intuitionistic mathematics. In (KNAW, 1951, pp. 41–49).

G. F. C. Griss, 1951b. Negationless intuitionistic mathematics III. In (KNAW, 1951, pp. 193–199).

G. F. C. Griss, 1951c. Negationless intuitionistic mathematics IVa. In (KNAW, 1951, pp. 452–462).

G. F. C. Griss, 1951d. Negationless intuitionistic mathematics IVb. In (KNAW, 1951, pp. 463–471).

Gisbert Hasenjaeger, 1950a. Über eine Art von Unvollständigkeit des Prädikatenkalküls der ersten Stufe. *J. Symbolic Logic*, 15:273–276. Received Dec. 30, 1949.

Gisbert Hasenjaeger, 1950b. Ein Beitrag zur Ordnungstheorie. *Archiv für mathematische Logik und Grundlagenforschung, Verlag W. Kohlhammer, Stuttgart; since 1988: Archive for Mathematical Logic, Springer, Berlin*, 1:30–31.

Gisbert Hasenjaeger, 1950c. *Topologische Untersuchungen zur Semantik und Syntax eines erweiterten Prädikatenkalküls.* PhD thesis, Mathematisch-naturwissenschaftliche Fakultät, Westfälische Wilhelmsuniversität, Münster (Westfalen, Germany). Submitted to the faculty: April 3, 1950 (cf. (Hasenjaeger, 1950d)). Deposit copies: July 25, 1950. Rev. version is (Hasenjaeger, 1952b). The advisor was Heinrich Scholz and he wrote the final report (Scholz, 1950) on May 24, 1950, in which he mentions Paul Bernays and Hans Hermes as previous reviewers.

Gisbert Hasenjaeger, 1950d. Letter to Paul Bernays. April 3, 1950. ETH-Bibliothek, Hochschularchiv, Hs 975 (Paul Bernays): 1982 (cf. (Bernays, 1986, p. 80)), Swiss Federal Institute of Technology in Zürich (ETH Zurich), Zürich (Switzerland).

Gisbert Hasenjaeger, 1950e. Letter to Paul Bernays. Aug. 2, 1950. ETH-Bibliothek, Hochschularchiv, Hs 975 (Paul Bernays): 1983 (cf. (Bernays, 1986, p. 80)), Swiss Federal Institute of Technology in Zürich (ETH Zurich), Zürich (Switzerland).

Gisbert Hasenjaeger, 1951. Letter to Paul Bernays from "Mülheim/Ruhr, Wallstr. 6" without date, containing a layout for the planned 2nd edn. of (Hilbert & Bernays, 1934). Date most probably early Aug. 1951, because it contains an instruction to send the answer after Aug. 15, 1951, to a different address. 1(letter) + 7(layout) pp. ETH-Bibliothek, Hochschularchiv, Hs 975 (Paul Bernays): 1985 (cf. (Bernays, 1986, p. 80)), Swiss Federal Institute of Technology in Zürich (ETH Zurich), Zürich (Switzerland).

Gisbert Hasenjaeger, 1952a. Über ω-Unvollständigkeit in der Peano-Arithmetik. *J. Symbolic Logic*, 17:81–97. Received April 17, 1950.

Gisbert Hasenjaeger, 1952b. Topologische Untersuchungen zur Semantik und Syntax eines erweiterten Prädikatenkalküls. *Archiv für mathematische Logik und Grundlagenforschung, Verlag W. Kohlhammer, Stuttgart; since 1988: Archive for Mathematical Logic, Springer, Berlin*, 1:99–129. Rev. version of (Hasenjaeger, 1950c).

Gisbert Hasenjaeger, 1952c. Konsequenzenlogik. In (Hermes & Scholz, 1952, pp. 78–82). A printed copy exists according to `https://rclab.de/hasenjaeger/publikationen_von_gisbert_hasenjaeger` of Dec. 28, 2019, in the following archive: Legacy of Gisbert Hasenjaeger, Deutsches Museum, München, Archiv: "Nachlässe H, NL 288".

Gisbert Hasenjaeger, 1952d. Letter to Heinrich Scholz, Feb. 18, 1952. Legacy of Gisbert Hasenjaeger, Deutsches Museum, München, Archiv: "Nachlässe H, NL 288".

Gisbert Hasenjaeger, 1952e. Letter to Paul Bernays, announcing the attachment of the first pages of a lost new chapter on the ι for the planned 2nd edn. of (Hilbert & Bernays, 1934). Dated "Mülheim, 14.3.52", i.e. March 14, 1952. ETH-Bibliothek, Hochschularchiv, Hs 975 (Paul Bernays): 1986 (cf. (Bernays, 1986, p. 80)), Swiss Federal Institute of Technology in Zürich (ETH Zurich), Zürich (Switzerland). The beginning of the missing attachment announced in the letter is most probably (Hasenjaeger, 1952h).

Gisbert Hasenjaeger, 1952f. Postcard to Paul Bernays, April 9, 1952. ETH-Bibliothek, Hochschularchiv, Hs 975 (Paul Bernays): 1988 (cf. (Bernays, 1986, p. 80)), Swiss Federal Institute of Technology in Zürich (ETH Zurich), Zürich (Switzerland).

Gisbert Hasenjaeger, 1952g. Short Curriculum Vitae (1 p.) together with a short list of publications (1 p.) of Gisbert Hasenjaeger, Dec. 12, 1952. Legacy of Gisbert Hasenjaeger, Deutsches Museum, München, Archiv: "Nachlässe H, NL 288".

Gisbert Hasenjaeger, 1952h. Der bestimmte Artikel im Prädikatenkalkül. Unpublished typescript by Hasenjaeger in the form used for the typesetting of (Hilbert & Bernays, 1934; 1939; 1968; 1970); dated at the upper left of the title page by Hasenjaeger's hand (definitely not by Bernays' hand!): "G. Hasenjaeger, 13.III.52.", i.e. March 13, 1952. 7 pp., with page numbers 2–7 on the respective page headers. ETH-Bibliothek, Hochschularchiv, in Hs 973 (Paul Bernays): 41 (since June 22, 2021, in the new sub-folder Hs 973:41.1). Swiss Federal Institute of Technology in Zürich (ETH Zurich), Zürich (Switzerland). This typescript was most probably originally attached to (Hasenjaeger, 1952e). Cf. (Bernays, 1986, p. 7) and `http://archivdatenbank-online.ethz.ch/hsa/#/content/cbe1f559fdbd4e338909ebed6c2740e2` for the listing in the archive and (Wirth, 2021) for a discussion of the typescript.

Gisbert Hasenjaeger, 1953. Eine Bemerkung zu Henkin's Beweis für die Vollständigkeit des Prädikatenkalküls der ersten Stufe. *J. Symbolic Logic*, 18:42–48. Received July 26, 1951. Henkin's proof is found in (Henkin, 1949).

Gisbert Hasenjaeger, 1953/54. Einführung in die Mengenlehre. Lectures winter term 1953/54, Westfälischen Wilhelms-Universität Münster. Ausarbeitung by Hans-Rüdiger Wiehle. A printed copy exists according to `https://rclab.de/hasenjaeger/publikationen_von_gisbert_hasenjaeger` of Dec. 28, 2019, in the folling archive: Legacy of Gisbert Hasenjaeger, Deutsches Museum, München, Archiv: "Nachlässe H, NL 288".

Gisbert Hasenjaeger, 1955. On definability and derivability. In (Brouwer &al., 1955, pp. 15–25).

Gisbert Hasenjaeger, 1958a. Über Interpretationen der Prädikatenkalküle höherer Stufe. *Archiv für mathematische Logik und Grundlagenforschung, Verlag W. Kohlhammer, Stuttgart; since 1988: Archive for Mathematical Logic, Springer, Berlin*, 4:175–177.

Gisbert Hasenjaeger, 1958b. Zur Axiomatisierung der k-zahlig allgemeingültigen Ausdrücke des Stufenkalküls. *Zeitschrift für math. Logik und Grundlagen der Mathematik*, 4:71–80.

Gisbert Hasenjaeger, 1959. Formales und produktives Schließen. *Mathematisch-Physikalische Semesterberichte*, VI:184–194. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen.

Gisbert Hasenjaeger, 1961. Unabhängigkeitsbeweise in Mengenlehre und Stufenlogik durch Modelle. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 63 (1960):141–162. Extd. version of a talk (Oct. 21,1959) at "Tagung der Deutschen Mathematiker-Vereiningung in Münster (Westfalen), 1959". Received Jan. 2, 1961.

Gisbert Hasenjaeger, 1962. *Einführung in die Grundbegriffe und Probleme der modernen Logik.* Studium Universale. Verlag Karl Alber, Freiburg (Breisgau, Germany). 201 pp. Spanish and rev. English translations are (Hasenjaeger, 1968b; 1972b).

Gisbert Hasenjaeger, 1965. Zur arithmetischen Klassifikation reeller Zahlen. *Acta Philosophica Fennica*, XVIII:13–19.

Gisbert Hasenjaeger, 1966a. Logik und Ontologie. *Studium Generale: Zeitschrift für interdisziplinäre Studien*, 19:136–140. Springer, Berlin.

Gisbert Hasenjaeger, 1966b. Was ist Cantors Continuumproblem nicht? *Kant-Studien*, 57:373–377. De Gruyter, Berlin.

Gisbert Hasenjaeger, 1967. On Löwenheim–Skolem-type insufficiencies of second-order logic. In (Crossley, 1967, pp. 173–182).

Gisbert Hasenjaeger, 1968a. Oskar Beckers Beiträge zur Logik und zu den Grundlagen der Mathematik. In (Hasenjaeger & Thyssen, 1968, pp. 119–122).

Gisbert Hasenjaeger, 1968b. *Conceptos y problemas de la lógica moderna.* Biblioteca Universitaria Labor, Barcelona. 184 pp. Spanish translation of (Hasenjaeger, 1962) by Manuel Sacristán.

Gisbert Hasenjaeger, 1968c. Logik und Ontologie. In (Klibansky, 1968, pp. 241–249).

Gisbert Hasenjaeger, 1970. Curriculum Vitae of *Gisbert* Franz Robert *Hasenjaeger*. Short draft for an English Curriculum Vitae of Gisbert Hasenjaeger, Jan. 20, 1970. Legacy of Gisbert Hasenjaeger, Deutsches Museum, München, Archiv: "Nachlässe H, NL 288".

Gisbert Hasenjaeger, 1972a. Definierbar. In (Ritter &al., 1971–2007, Vol. 2, p. 30).

Gisbert Hasenjaeger, 1972b. *Introduction to the Basic Concepts and Problems of Modern Logic.* D. Reidel Publ. (Springer), Dordrecht. 184 pp. Rev. English translation of (Hasenjaeger, 1962) by E. C. M. Mays.

Gisbert Hasenjaeger, 1976a. Kategorientheorie. In (Ritter &al., 1971–2007, Vol. 4, p. 783).

Gisbert Hasenjaeger, 1976b. Kategorisch (monomorph). In (Ritter &al., 1971–2007, Vol. 4, p. 784).

Gisbert Hasenjaeger, 1976c. Registermaschinen. *contact – Zeitschrift für die Freunde unseres Hauses, Leybold-Heraeus GmbH & Co. KG, Bonner Str. 504, Köln*, 14:11–13; 15:4–6.

Gisbert Hasenjaeger, 1977. Von der Syllogistik zur Mengentheorie. In (Patzig &al., 1977, pp. 85–93).

Gisbert Hasenjaeger, 1978. Prädikatenvariablen in der Zahlentheorie. *Dialectica*, 32:209–220.

Gisbert Hasenjaeger, 1984a. Die Absolutheit der semantischen und die Relativität der syntaktischen Begriffe. In (Anon, 1984, pp. 33–40).

Gisbert Hasenjaeger, 1984b. Modell, Modelltheorie. In (Ritter &al., 1971–2007, Vol. 6, p. 50f.).

Gisbert Hasenjaeger, 1984c. Universal Turing Machines (UTM) and Jones–Matijasevich-Masking. In (Börger &al., 1984, pp. 248–253).

Gisbert Hasenjaeger, 1987. On the early history of register machines. In (Börger, 1987, pp. 181–188).

Gisbert Hasenjaeger, 1990. Hasses Syracuse-Problem und die Rolle der Basen. In (Heinekamp &al., 1990, pp. 329–336).

Gisbert Hasenjaeger, 1995. Sortenlogik. In (Ritter &al., 1971–2007, Vol. 9, p. 1099).

Gisbert Hasenjaeger, 1997. Very short Curriculum Vitae of Gisbert Hasenjaeger, Aug. 16, 1997. A plain text file `VITA_GH3.TXT` (German Microsoft file) consisting of a table with 14 entries, kindly provided on Jan. 22, 2018, by Rainer Glaschick, printed as an appendix to (Wirth, 2021). A printout was given by Beate Becker (née Hasenjaeger) to the following archive by the end of the year 2018: Legacy of Gisbert Hasenjaeger, Deutsches Museum, München, Archiv: "Nachlässe H, NL 288".

Gisbert Hasenjaeger, 1998. Typentheorie; Typenlogik. In (Ritter &al., 1971–2007, Vol. 10, pp. 1583–1586).

Gisbert Hasenjaeger, Johannes Thyssen, 1968. Oskar Becker 1889–1964. In (Anon, 1968, pp. 111–119). Also as reprint with wrong title page and two extra blank pages, as found in the following archive: Legacy of Gisbert Hasenjaeger, Deutsches Museum, München, Archiv: "Nachlässe H, NL 288".

Jean van Heijenoort, 1971. *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879–1931.* Harvard Univ. Press. 2nd rev. edn. (1st edn. 1967).

Albert Heinekamp, Wolfgang Lentzen, Martin Schneider (eds.), 1990. *Mathesis rationis. Festschrift für Heinrich Schepers.* Nodus-Publ., Münster (Westfalen, Germany). 400 pp.

Leon Henkin, 1949. The completeness of the first-order functional calculus. *J.*

Symbolic Logic, 14:159–166. Received Aug. 6, 1948.

Jacques Herbrand, 1930. *Recherches sur la théorie de la démonstration.* PhD thesis, Université de Paris. Thèses présentées à la faculté des Sciences de Paris pour obtenir le grade de docteurès sciences mathématiques — 1re thèse: Recherches sur la théorie de la démonstration — 2me thèse: Propositions données par la faculté, Les équations de Fredholm — Soutenues le 1930 devant la commission d'examen — Président: M. Vessiot, Examinateurs: MM. Denjoy, Frechet — Vu et approuvé, Paris, le 20 Juin 1929, Le doyen de la faculté des Sciences, C. Maurain — Vu et permis d'imprimer, Paris, le 20 Juin 1929, Le recteur de l'Academie de Paris, S. Charlety — No. d'ordre 2121, Série A, No. de Série 1252 — Imprimerie J. Dziewulski, Varsovie — Univ. de Paris. Also in Prace Towarzystwa Naukowego Warszawskiego, Wydział III Nauk Matematyczno-Fizychnych, No. 33, Warszawa. A contorted, newly typeset reprint is (Herbrand, 1968, pp. 35–153). Annotated English translation *Investigations in Proof Theory* by Warren Goldfarb (Chapters 1–4) and Burton Dreben and Jean van Heijenoort (Chapter 5) with a brief introduction by Goldfarb and extended notes by Goldfarb (Notes A–C, K–M, O), Dreben (Notes F–I), Dreben and Goldfarb (Notes D, J, and N), and Dreben, George Huff, and Theodore Hailperin (Note E) in (Herbrand, 1971, pp. 44–202). English translation of § 5 with a different introduction by Heijenoort and some additional extended notes by Dreben also in (Heijenoort, 1971, pp. 525–581). *(Herbrand's PhD thesis, his cardinal work, dated April 14, 1929; submitted at the Univ. of Paris; defended at the Sorbonne June 11, 1930; printed in Warsaw, 1930.)*

Jacques Herbrand, 1968. *Écrits logiques.* Presses Universitaires de France, Paris. Cortorted edn. of Herbrand's logical writings by Jean van Heijenoort. Review in (Goldfarb, 1970). English translation is (Herbrand, 1971).

Jacques Herbrand, 1971. *Logical Writings.* Harvard Univ. Press. Ed. by Warren Goldfarb. Translation of (Herbrand, 1968) with additional annotations, brief introductions, and extended notes by Goldfarb, Burton Dreben, and Jean van Heijenoort. *(This edition is still an excellent source on Herbrand's writings today, but it is problematic because it is based on the contorted reprint (*Herbrand, *1968). This means that it urgently needs a corrected edition based on the original editions of Herbrand's logical writings, which are all in French and which should be included in facsimile to avoid future contortion.).*

Hans Hermes, Heinrich Scholz, 1952. *Mathematische Logik.* No. I, Algebra und Zahlentheorie, 1. Teil, Heft 1, Teil I in „Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften“. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig. 82 pp.

David Hilbert, 1899. Grundlagen der Geometrie. In (Anon, 1899, pp. 1–92). 1st edn. without appendixes.

David Hilbert, 1905. Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik. In (Krazer, 1905, pp. 174–185). Reprinted as Appendix VII of (Hilbert, 1909) and its following editions. English translation *On the foundations of logic and arithmetic* by Beverly Woodward with an introduction by Jean van Heijenoort in (Heijenoort, 1971, pp. 129–138).

David Hilbert, 1909. *Grundlagen der Geometrie. — Dritte, durch Zusätze und Literaturhinweise von neuem vermehrte und mit sieben Anhängen versehene Auflage. Mit zahlreichen in den Text gedruckten Figuren.* No. VII in „Wissenschaft und Hypothese“. Druck und Verlag von B. G. Teubner, Leipzig, Berlin.

3rd rev. extd. edn. of (Hilbert, 1899), extd. with a bibliography and seven appendixes.

David Hilbert, 1918. Axiomatisches Denken. *Mathematische Annalen*, 78:405–415. Talk given at the Swiss Mathematical Society in Zürich on Sept. 11, 1917. Reprinted in (Hilbert, 1932ff., Vol. 3, pp. 146–156). English translation "Axiomatic Tought" in (Ewald, 1996, pp. 1105–1115).

David Hilbert, 1932ff.. *Gesammelte Abhandlungen*. Springer, Berlin.

David Hilbert, Paul Bernays, 1934. *Grundlagen der Mathematik — Erster Band*. No. XL in „Grundlehren der mathematischen Wissenschaften". Springer, Berlin. 1st edn. (2nd edn.: (Hilbert & Bernays, 1968)). Reprint: J. W. Edwards Publ., Ann Arbor (MI), 1944. Englische Übersetzung: (Hilbert & Bernays, 2017a; 2017b; 2017c).

David Hilbert, Paul Bernays, 1939. *Grundlagen der Mathematik — Zweiter Band*. No. L in „Grundlehren der mathematischen Wissenschaften". Springer, Berlin. 1st edn. (2nd edn.: (Hilbert & Bernays, 1970)). Reprint: J. W. Edwards Publ., Ann Arbor (MI), 1944.

David Hilbert, Paul Bernays, 1968. *Grundlagen der Mathematik I*. No. 40 in „Grundlehren der mathematischen Wissenschaften". Springer, Berlin. 2nd rev. edn. (1st edn.: (Hilbert & Bernays, 1934)). Englische Übersetzung: (Hilbert & Bernays, 2017a; 2017b; 2017c).

David Hilbert, Paul Bernays, 1970. *Grundlagen der Mathematik II*. No. 50 in „Grundlehren der mathematischen Wissenschaften". Springer, Berlin. 2nd rev. extd. edn. (1st edn.: (Hilbert & Bernays, 1939)).

David Hilbert, Paul Bernays, 2017a. *Grundlagen der Mathematik I — Foundations of Mathematics I, Part A: Title Pages, Prefaces, and §§ 1–2*. Web only: `http://wirth.bplaced.net/p/hilbertbernays`. First English translation and bilingual facsimile edn. of the 2nd German edn. (Hilbert & Bernays, 1968), incl. the annotation and translation of all differences of the 1st German edn. (Hilbert & Bernays, 1934). Ed. by Claus-Peter Wirth, Jörg Siekmann, Volker Peckhaus, Michael Gabbay, Dov Gabbay. Translated and commented by Claus-Peter Wirth &al. Thoroughly rev. 3rd edn. (1st edn. College Publications, London, 2011; 2nd edn. `http://wirth.bplaced.net/p/hilbertbernays`, 2013).

David Hilbert, Paul Bernays, 2017b. *Grundlagen der Mathematik I — Foundations of Mathematics I, Part B: §§ 3–5 and Deleted Part 1 (of the 1st edn.)*. Web only: `http://wirth.bplaced.net/p/hilbertbernays`. First English translation and bilingual facsimile edn. of the 2nd German edn. (Hilbert & Bernays, 1968), incl. the annotation and translation of all deleted texts of the 1st German edn. (Hilbert & Bernays, 1934). Ed. by Claus-Peter Wirth, Jörg Siekmann, Volker Peckhaus, Michael Gabbay, Dov Gabbay. Translated and commented by Claus-Peter Wirth &al. Thoroughly rev. 3rd edn. (1st edn. College Publications, London, 2012; 2nd edn. `http://wirth.bplaced.net/p/hilbertbernays`, 2013).

David Hilbert, Paul Bernays, 2017c. *Grundlagen der Mathematik I — Foundations of Mathematics I, Part C: §§ 6(a) – 7(c) and Deleted Parts 2 and 3 (of the 1st edn.)*. Web only: `http://wirth.bplaced.net/p/hilbertbernays`. First English translation and bilingual facsimile edn. of the 2nd German edn. (Hilbert & Bernays, 1968), incl. the annotation and translation of all deleted texts of the 1st German edn. (Hilbert & Bernays, 1934). Ed. by Claus-

Peter Wirth, Jörg Siekmann, Volker Peckhaus, Michael Gabbay, Dov Gabbay. Translated and commented by Claus-Peter Wirth.

Raymond Klibansky (ed.), 1968. *Contemporary Philosophy / La philosophie contemporaine, Vol. I: Logic and Foundations of Mathematics.* La Nuova Italia Editrice, Firenze. xi+387 pp.

KNAW, 1946. *Proc. of the Section of Sciences, Koninklijke Nederlandse Akademie Van Wetenschappen, IL.* North-Holland (Elsevier), Amsterdam.

KNAW, 1950. *Proc. of the Section of Sciences, Koninklijke Nederlandse Akademie Van Wetenschappen, LIII.* North-Holland (Elsevier), Amsterdam.

KNAW, 1951. *Proc. Koninklijke Nederlandse Akademie Van Wetenschappen, Series A, LIV.* North-Holland (Elsevier), Amsterdam.

Julius König, 1914. *Neue Grundlagen der Logik, Arithmetik, und Mengenlehre.* Veit, Leipzig.

A. Krazer (ed.), 1905. *Verhandlungen des Dritten Internationalen Mathematiker-Kongresses, Heidelberg, Aug. 8–13, 1904.* Verlag von B. G. Teubner, Leipzig.

Leopold Löwenheim, 1915. Über Möglichkeiten im Relativkalkül. *Mathematische Annalen*, 76:228–251. English translation “On Possibilities in the calculus of relatives” by Stefan Bauer-Mengelberg with an introduction by Jean van Heijenoort in (Heijenoort, 1971, pp. 228–251).

Paolo Mancosu (ed.), 1998. *From Brouwer to Hilbert: The Debate on the Foundations of Mathematics in the 1920s.* Oxford Univ. Press.

Eckart Menzler-Trott, 2001. *Gentzen's Problem – Mathematische Logik im nationalsozialistischen Deutschland.* Birkhäuser (Springer), Basel. Rev. English translation is (Menzler-Trott, 2007).

Eckart Menzler-Trott, 2007. *Logic's Lost Genius — The Life of Gerhard Gentzen.* American Math. Soc., Providence (RI). Rev. English translation of (Menzler-Trott, 2001).

W. Franz Meyer (ed.), 1898–1935. *Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen.* Verlag von B. G. Teubner, Leipzig.

Jules Monk (ed.), 1904–1919. *Encyclopédie des sciences mathématiques pures et appliquées.* Gauthier-Villars, Paris, and Verlag von B. G. Teubner, Leipzig.

Andrzej Mostowski, 1937. Abzählbare Boolesche Körper und ihre Anwendung auf die allgemeine Metamathematik. *Fundamenta Mathematicae*, 29:34–53. `https://doi.org/10.4064/fm-29-1-34-53`.

Andrzej Mostowski, 1947. Properties of relations. *J. Symbolic Logic*, 12:33–42. Received Dec. 18, 1946.

Günter Patzig, Erhard Scheibe, Wolfgang Wieland (eds.), 1977. *Logik, Ethik, Theorie der Geisteswissenschaften. XI. Deutscher Kongress für Philosophie, Göttingen, 5.-9. Okt, 1975.* Felix Meiner Verlag, Hamburg. 554 pp.

Alfred Pringsheim, 1898. Irrationalzahlen und Konvergenz unendlicher Prozesse. In (Meyer, 1898–1935, Band I: Arithmetik und Algebra, Teil 1, A. Arithmetik, I-A-3, Heft 1 (1898): pp. 47–148). `https://gdz.sub.uni-goettingen.de/id/PPN360504671?tify={%22pages%22:[85,86]}`.

Alfred Pringsheim, 1904/07. Nombres irrationelles et notion de limite. In (Monk, 1904–1919, Tome I: Arithmétique et algébre, Vol. 1: Arithmétique, I-3, fasc. 1 (1904): pp. 133–160, fasc. 2 (1907): pp. 161–328). Largely extended French translation from the German (Pringsheim, 1898) by Jules Molk. `https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k2440f/f75.image.texteImage`.

Constance Reid, 1970. *Hilbert*. Springer, Berlin.

Joachim Ritter, Karlfried Gründer, Gottfried Gabriel (eds.), 1971–2007. *Historisches Wörterbuch der Philosophie*. Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt.

Klaus Schmeh, 2005. Enigma-Schwachstellen auf der Spur – Teil 3: Enigma-Zeitzeugen berichten. TELEPOLIS online magazine, Aug. 29, 2005: `https://www.heise.de/tp/features/Enigma-Schwachstellen-auf-der-Spur-3402290.html`.

Klaus Schmeh, 2009. Enigma's contemporary witness: Gisbert Hasenjaeger. *Cryptologia*, 33:343–346.

Klaus Schmeh, 2013. Why Turing cracked the Enigma and the Germans did not. In (Cooper & Leeuwen, 2013, pp. 432–437).

Heinrich Scholz, 1931. *Geschichte der Logik*. No. 4 in „Geschichte der Philosophie in Längsschnitten“. Junker & Dünnhaupt, Berlin.

Heinrich Scholz, 1932/33. Logistik. Unpublished lecture course winter term 1932/33 (Vol. I) and summer term 1933 (Vol. II). Mimeographed as manuscript (Vol. I) and typoscript (Vol II) by Heti Gaertner, Mathematische Arbeitsgemeinschaft an der Universität Münster. Pages of Vol. I: ii (title + impr.) + ii (corrections) + 1–245 + ii (improvements). Pages of Vol. II: ii (title + impr.) + I–X (preface) + viii (table of contents for both volumes) + 246–530.

Heinrich Scholz, 1950. Report on (Hasenjaeger, 1950c). May 24, 1950. ETH-Bibliothek, Hochschularchiv, Hs 974 (Paul Bernays): 197 (cf. (Bernays, 1986, p. 42)), Swiss Federal Institute of Technology in Zürich (ETH Zurich), Zürich (Switzerland).

Heinrich Scholz, 1951a. Letter to Paul Bernays, Jan. 4, 1951. Legacy of Gisbert Hasenjaeger, Deutsches Museum, München, Archiv: "Nachlässe H, NL 288".

Heinrich Scholz, 1951b. Letter to Gisbert Hasenjaeger, Feb. 1, 1951. Legacy of Gisbert Hasenjaeger, Deutsches Museum, München, Archiv: "Nachlässe H, NL 288".

Heinrich Scholz, 1951c. Letter to Gisbert Hasenjaeger, Feb. 22, 1951. Legacy of Gisbert Hasenjaeger, Deutsches Museum, München, Archiv: "Nachlässe H, NL 288".

Heinrich Scholz, 1951d. Letter to Gisbert Hasenjaeger, May 5, 1951, from Münster. 2 pp. Legacy of Gisbert Hasenjaeger, Deutsches Museum, München, Archiv: "Nachlässe H, NL 288".

Heinrich Scholz, Gisbert Hasenjaeger, 1961. *Grundzüge der mathematischen Logik*. No. 106 in „Grundlehren der mathematischen Wissenschaften“. Springer, Berlin.

Marshall Harvey Stone, 1934. Boolean algebras and their application to topology. *PNAS (Proc. of the National Academy of Sciences of the U.S.A.)*, 20(3):197–202. Read before the Academy, Wednesday, November 22, 1933. `https://doi.org/10.1073/pnas.20.3.197`.

Michael Toepell, 1986. *Über die Entstehung von David Hilberts „Grundlagen der Geometrie“*. Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen.

Friedrich Waismann (ed.), 1967. *Wittgenstein und der Wiener Kreis.* Suhrkamp Verlag, Frankfurt am Main; also (with original copyrights) Basil Blackwell, Oxford. Ed. by Brian Francis McGuinness. 1st edn. as "Ludwig Wittgenstein, Schriften 3" (hardcover 1969, softcover 1973). 2nd edn. as "Ludwig Wittgenstein, Werkausgabe, Vol. 3" (softcover 1984 (ISBN 3518281038), hardcover 1989 (text and paging identical to softcover edn.) (ISBN 3518579916)).

Alfred North Whitehead, Bertrand Russell, 1910–1913. *Principia Mathematica.* Cambridge Univ. Press. 1st edn.

Claus-Peter Wirth, 2004. Descente Infinie + Deduction. *Logic J. of the IGPL*, 12:1–96. `http://wirth.bplaced.net/p/d`.

Claus-Peter Wirth, 2012. Herbrand's Fundamental Theorem in the eyes of Jean van Heijenoort. *Logica Universalis*, 6:485–520. Received Jan. 12, 2012. Published online June 22, 2012, `http://dx.doi.org/10.1007/s11787-012-0056-7`.

Claus-Peter Wirth, 2014. *Herbrand's Fundamental Theorem: The Historical Facts and their Streamlining.* SEKI-Report SR–2014–01 (ISSN 1437–4447). SEKI Publications, Bremen. ii+47 pp., `http://arxiv.org/abs/1405.6317`.

Claus-Peter Wirth, 2017. A simplified and improved free-variable framework for Hilbert's epsilon as an operator of indefinite committed choice. *IFCoLog J. of Logics and Their Applications*, 4:435–526. Received Oct. 23, 2015. Also as SEKI Report SR–2011–01 (ISSN 1437–4447), rev. and extd. edn. Feb. 2017 (1st edn. 2011), ii+82 pp., `http://arxiv.org/abs/1104.2444`.

Claus-Peter Wirth, 2021. *A Most Interesting Draft for Hilbert and Bernays' "Grundlagen der Mathematik" that never found its way into any publication, and two CV of Gisbert Hasenjaeger.* SEKI-Working-PAPER SWP–2017–01 (ISSN 1860–5931). SEKI Publications, Bremen. Full paper &c.: `https://arxiv.org/abs/1803.01386`. The "Draft" mentioned in the title is (Bernays & Hasenjaeger, 1952(?)). 4th edn. of June 25, 2021, revised to be in correspondence with the blog "ETHeritage" `https://etheritage.ethz.ch/2021/06/25/urschriften-zu-hilbert-bernays-grundlagen-der-mathematik/` and the new sub-folder Hs 973:41.1 in the ETH-Bibliothek, Hochschularchiv. ii+60 pp. 1st edn. March 2018; 2nd thoroughly rev. & largely extd. edn. Jan. 2020; 3rd thoroughly rev. & largely extd. edn. June 9, 2021.

Claus-Peter Wirth, Jörg Siekmann, Christoph Benzmüller, Serge Autexier, 2009. Jacques Herbrand: Life, logic, and automated deduction. In (Gabbay & Woods, 2004ff., Vol. 5: Logic from Russell to Church, pp. 195–254).

Claus-Peter Wirth, Jörg Siekmann, Christoph Benzmüller, Serge Autexier, 2014. *Lectures on Jacques Herbrand as a Logician.* SEKI-Report SR–2009–01 (ISSN 1437–4447). SEKI Publications, Bremen. Rev. edn. May 2014, ii+82 pp., `http://arxiv.org/abs/0902.4682`.

Claus-Peter Wirth, Frieder Stolzenburg, 2016. A series of revisions of David Poole's specificity. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, 78:205–258, 2016. Published online, Oct. 20, 2015. `http://dx.doi.org/10.1007/s10472-015-9471-9`.

Ludwig Wittgenstein, 1994. *Manuscripts 105 and 106 ("Philosophische Bemerkungen") of 1929.* Springer, Wien. 1st edn. by Michael Nedo as "Ludwig Wittgenstein, Wiener Ausgabe, Vol. 1". ISBN 3211824995 and ISBN 0387824995.

Methodische Probleme der quantitativ-empirischen Unterrichtsforschung

Oliver Passon und Tassilo von der Twer

Abstract

In den letzten Jahren hat die Forderung nach „Evidenzbasierung“ auch in den Bildungswissenschaften und Fachdidaktiken zu einer vermehrten Anzahl quantitativer empirischer Untersuchungen geführt – etwa Interventionsstudien im Kontrollgruppendesign. Seit vielen Jahrzehnten gibt es jedoch eine Kontroverse darüber, wie so gewonnene Daten statistisch zu deuten seien. Insbesondere unterliegt die Interpretation des sog. p-Wertes beim Hypothesentest zahlreichen Missverständnissen. Das führte jüngst zu einer Empfehlung der Amerikanischen Gesellschaft für Statistik, das Etikett „statistisch signifikant“ nicht mehr zu verwenden. Wir diskutieren einige dieser Schwierigkeiten bzw. Missverständnisse und geben Hinweise auf mögliche Lösungsansätze. [1]

1 Einleitung

Die letzten Jahre haben die Forderung nach einer „evidenzbasierten Praxis“ in der Pädagogik (Tooley und Darby 1998; Coe 1999) und eine „empirische Wende“ der deutschen Bildungspolitik und Bildungsforschung (Buchhaas-Birkholz 2008) erlebt. Robert E. Slavin (2002), ein entschiedener Vertreter der *evidence based*

1. Eine stark gekürzte Fassung dieser Arbeit ist bei der *Zeitschrift für Bildungsforschung* erschienen: https://doi.org/10.1007/s35834-020-00282-3

education, geht so weit, die Evidenzbasierung mit einer „wissenschaftlichen Revolution“ zu vergleichen, die andere Disziplinen (als Beispiele dafür nennt er „medicine, agriculture, transportation, and technology.“ (*ibid.* S. 14)) bereits vor mehr als 100 Jahren vollzogen hätten. Zu leisten sei nicht weniger als die Befreiung der Bildungswissenschaften aus der rückständigen Abhängigkeit von Ideologien und Moden.

Im Zuge dessen kommt es auch in den MINT-Fachdidaktiken zu einer immer größeren Zahl von quantitativen Forschungsarbeiten. Diese folgen häufig dem Muster von Null-Hypothesen Signifikanztests; etwa hinsichtlich der Wirkung einer Intervention im Vergleich mit einer Kontrollgruppe.[2]

Gleichzeitig war und ist diese (quantitativ-)empirische Ausrichtung von einem kritischen Diskurs begleitet. Gerade in den Bereichsdidaktiken der MINT-Fächer gibt es eine traditionell starke Beziehung zum jeweiligen Bezugsfach. Ein Plädoyer für eine Mathematikdidaktik „vom Fach aus“ findet sich etwa bei Wittmann (2015). Jahnke (2009) kritisiert unter anderem das „schleichende Eindringen“ der empirischen Verfahren in die Mathematikdidaktik, die ohne eine Debatte um ihre Legitimation erfolgte.

Ähnliche Kritik klingt auch in der aktuellen Debatte um die „Standortbestimmung und Perspektiven“ der Physikdidaktik an (Schecker et al. 2016). Dort wird die Frage gestellt, „ob das Pendel der Forschungsaktivitäten zu weit in Richtung einer empirischen Bildungsforschung geschwungen ist“. Bedauert wird hier, dass „Fachlichkeit“ sowie das „fachinhaltliche und themenbezogene Lernen“ damit in den Hintergrund gedrängt seien (Schecker et al. 2016, S. 25).[3]

2. Bellmann und Müller (2011, S. 21) weisen darauf hin, dass in dieser Debatte der Evidenzbegriff mehrdeutig ist. Während in der englischsprachigen Diskussion (Coe 1999; Slavin 2002) darunter im Wesentlichen nur Ergebnisse aus randomisierten kontrollierten Studien (randomized controlled trials, kurz: *RCT*) oder Metaanalysen verstanden werden, fasst die deutschsprachige Diskussion auch Untersuchungen mit weniger strengem Design als Beiträge zur Evidenzbasierung auf. Gleichzeitig beanspruchen auch die deutschsprachigen Vertreter, empirische Wirksamkeitsnachweise zu liefern, die Praxis und Politik informieren können. Gerade der Anspruch, „Erklärungs- und Veränderungswissen“ (im Gegensatz zu „bloßem Beschreibungs- und Vorhersagewissen“ – so die verbreiteten Schlagworte in der Diskussion) zu liefern, ist zentral für das Versprechen, die Frage „what works?“ zu beantworten (Bellmann 2016). Auf kuriose Weise werden in der deutschsprachigen Diskussion also die Versprechen der *evidence based education* mit (nach empirischen Maßstäben) schwächeren Methoden (etwa Gelegenheitsstichproben, fehlender Randomisierung) verknüpft. Bellmann und Müller (2011, S. 22) sehen darin eine Diskursstrategie, welche die kritische Auseinandersetzung erschwert. Für unser Argument ist jedoch entscheidend, dass im Zuge dieser komplexen Entwicklung die quantitative empirische Forschung in den Fachdidaktiken und Bildungswissenschaften eine dominierende Rolle eingenommen hat.

3. Für die entsprechende Diskussion in den Bildungswissenschaften sei etwa auf das Sonderheft 31 der *Zeitschrift für Erziehungswissenschaft* (Baumert und Tillmann 2016) hingewiesen. In der Sonderpädagogik wurde vor allem durch Ahrbeck et al. 2016 eine kritische Debatte zur „Evidenzbasierung“ angestoßen. Innerhalb der Soziologie hat (unter anderem) die Frage der theoretischen

In vielen Arbeiten drückt sich die Sorge aus, dass der Zugriff auf Bildung und Erziehung mit den Verfahren der Psychometrie bzw. quantitativen Sozialforschung zu einer Entdifferenzierung des Gegenstandes führe. Berliner 2002 betont die gewaltige Komplexität des erziehungswissenschaftlichen Gegenstandes und sieht in der Evidenzbasierung eine Verwechslung von Ziel und Methode der Wissenschaft. Kritisiert werden ferner ein zu enger Evidenzbegriff (Dollaghan 2007), unangemessene kausale Modelle, mangelnde Übertragbarkeit der Resultate (Joyce und Cartwright 2018) sowie die befürchtete Verquickung mit allgemeinen Ökonomisierungs- und Standardisierungstendenzen in der Bildungspolitik (Koch 2016). Eine offene Frage ist zudem, wie quantitative Forschungsmethoden einen sinnvollen Zugriff auf die kulturelle und ästetische Bildung gewinnen können, da in diesen Bereichen die Messbarkeit wesentlicher beschreibender Begriffe erheblichen Zweifeln ausgesetzt ist (Fuchs 2016).

Diese Debatte zu den konzeptionellen Grundlagen halten wir für äußerst wichtig – sie soll aber an dieser Stelle nicht weitergeführt werden. Stattdessen wollen wir die Evidenzbasierung der Unterrichtsforschung mit dem (weniger ideologisierten) Problemkomplex der statistischen Methodik verknüpfen.

Seit vielen Jahrzehnten gibt es eine anhaltende (und im Wesentlichen unwidersprochene) Kritik am methodischen Vorgehen und der Ergebnisinterpretation von (Null-)Hypothesen Signifikanztests in Psychologie, Medizin, Sozialwissenschaften und Teilen der Bildungsforschung.[4] Das Ziel dieser Arbeit ist es, die Grundlagen dieser Debatte zu beleuchten und sie stärker in die MINT-Fachdidaktiken zu tragen.[5]

Zusätzliche Aktualität hat dieser Diskurs durch die sog. „Replikationskrise“ gewonnen. Dieser Begriff – ursprünglich für die Psychologie geprägt – ist in der

bzw. empirischen Ausrichtung sogar institutionelle Auswirkungen gezeitigt: Im Juli 2017 kam es zur Gründung der sog. „Akademie für Soziologie“, die sich als Plattform der „analytisch-empirisch“ arbeitenden Soziologen versteht. Dies muss als Abgrenzung von der bisherigen Fachgesellschaft DGS (Deutsche Gesellschaft für Soziologie) aufgefasst werden; vgl. hierzu die Debatte in der *Zeitschrift für Theoretische Soziologie* (Renn und Schützeichel 2018). Es entbehrt nicht einer gewissen Ironie, dass das Exportgut „Methoden der empirischen Sozialforschung“ zunächst fremde Fächer entzweit und anschließend auch innerhalb der eigenen Disziplin zu einem Schisma führt.

4. Eine vielzitierte (aber nicht mehr ganz aktuelle) Übersicht findet sich bei Nickerson (2000). In Ziliak und McCloskey (2008) geben die Autoren unter dem Titel „*The cult of statistical significance*“ eine kenntnisreiche aber zuweilen recht redundante und polemische Darstellung der Problematik.

5. Einem ähnlichen Impuls folgt das *Editorial* von Cooper (2018) im *Journal of Chemical Education*. Die Zeitschrift *Physical Review Physics Education Research* hat mit dem aktuellen Sonderheft „*Quantitative Methods in PER: A Critical Examination*“ ebenfalls methodische Fragen der Datenanalyse aufgegriffen (Knaub et al. 2019). Die meisten Beiträge dieser *Focused Collection* zielen jedoch nicht auf die grundsätzlichen Probleme, die wir in der vorliegenden Arbeit thematisieren.

Zwischenzeit zum Synonym dafür geworden, dass sich in immer mehr hypothesentestenden Wissenschaften zahlreiche Forschungsergebnisse nicht replizieren lassen (Pashler und Wagenmakers 2012; Makel und Plucker 2014; Open Science Collaboration 2015).[6]

Noch früher erregte ein Beitrag von John P. A. Ioannidis Aufsehen. Dieser profilierte Medizinstatistiker und Vertreter der evidenzbasierten Medizin veröffentlichte bereits 2005 eine Arbeit mit dem provokanten Titel „Why Most Published Research Findings Are False" (Ioannidis 2005). Dort führt Ioannidis den (eigentlich recht banalen) Nachweis, dass die Wahrscheinlichkeit für korrekte (positive) Forschungsergebnisse in den hypothesentestenden Wissenschaften nicht nur von der Irrtumswahrscheinlichkeit abhängt (in den beiden Varianten: *false positive* (α) und *false negative rate* (β)), sondern natürlich auch von der Rate der „korrekten" Forschungshypothesen.[7] Er diskutiert Beispiele aus der Medizinforschung, bei denen geschätzt werden kann, dass von 1000 sinnvollen Forschungshypothesen nur eine zutrifft (d.h. $r = 0,001$). In diesem Szenario kommt man auf eine Wahrscheinlichkeit von ca. 10^{-3}, dass ein statistisch signifikantes Ergebnis tatsächlich zutrifft (wobei zusätzlich eine Abschätzung des Effekts durch sog. *publication bias* eingeht).

In den Bildungswissenschaften bzw. den Fachdidaktiken ist die Situation vielleicht etwas günstiger. Nimmt man an, dass 10% der Hypothesen zutreffen, die statistische Teststärke („*power*") den für viele psychologische Studien typischen Wert von $1-\beta \approx 50\%$ hat und auf einem Signifikanzniveau von 5% getestet wird, werden aber immer noch ca. 50% der „statistisch signifikanten" Ergebnisse falsch sein.[8] Abhilfe

6. Die *Open Science Collaboration* hat die Replikation von 100 hochrangig publizierten psychologischen Studien durchgeführt. Lediglich 39 konnten erfolgreich repliziert werden. Zudem halbierte sich im Mittel die Effektstärke dieser Resultate. Der Begriff der „erfolgreichen Replikation" ist dabei nicht trivial. Sicherlich wird man nicht erwarten, in einer erneuten Untersuchung die identischen Resultate für alle Kenngrößen gewinnen zu können. Gemeint ist in der Regel ein Resultat mit ähnlicher Signifikanz und Effektstärke; siehe Open Science Collaboration (2015) sowie Goodman et al. (2016) für eine genauere Begriffsdefinition.

7. Bezeichnen wir mit „e" einen tatsächlichen Effekt, mit r den Anteil dieser Effekte unter allen sinnvollen Forschungshypothesen und mit „+" das Ereignis eines positiven Testergebnisses, können wir schreiben: $P(+|\neg e) = \alpha$, $P(+|e) = 1 - \beta$ und $P(e) = r$. Dann gilt für die Wahrscheinlichkeit eines echten Effekts bei positivem Test nach dem Satz von Bayes:

$$P(e|+) = \frac{P(+|e)P(e)}{P(+|e)P(e) + P(+|\neg e)P(\neg e)} = \frac{1-\beta}{1-\beta-\alpha+\frac{\alpha}{r}}. \tag{1}$$

Vor allem bei $r \ll 1$ sind die Ergebnisse kontraintuitiv. Die Missachtung dieses Einflusses wird als „*base rate fallacy*" bzw. „Prävalenzfehler" bezeichnet (Bar-Hillel 1980).

8. Bei dieser Anwendung von Gl. 1 ist der Effekt von *publication bias* noch nicht einmal berücksichtigt. Natürlich gilt: Würden Nullresultate ebenfalls veröffentlicht werden, stiege die Rate von korrekten Forschungsergebnissen sprunghaft an. Aus bekannten Gründen ist dies in der Regel nicht der Fall (Rosenthal 1979). Origineller Weise – und auch um diesem Problem zu begegnen – existiert jedoch mit dem *The Journal of Articles in Support of the Null Hypothesis*

schaffen könnten Maßnahmen wie ausreichende Teststärke, Replikationsstudien, Präregistrierung und die Veröffentlichung der Daten und Analyseprotokolle.

Schließlich ging die *American Statistical Association* sogar so weit, ihre Erklärung zur Verwendung von p-Werten (Wasserstein und Lazar 2016) weiter zu verschärfen und den völligen Verzicht auf den Begriff „statistisch signifikant" zu empfehlen (Wasserstein et al. 2019). Dabei zielt man nicht auf eine bloße Sprachregelung, sondern sieht die Notwendigkeit, die Methodik der wissenschaftlichen Datenanalyse und Ergebniskommunikation grundlegend zu reformieren.

Nach einer knappen Rekapitulation des gewöhnlichen Hypothesentests (Abschnitt 2.1) und seiner Geschichte (2.2) behandeln wir die Missverständnisse in der Interpretation des dabei gewonnenen p-Werts (2.3) und die daraus folgenden unerwünschten Konsequenzen (2.4). In Abschnitt 3 diskutieren wir, welche Alternativen zum Standardverfahren sich bieten. Mit der Bayesschen Statistik betrachten wir einen dieser Vorschläge in Abschnitt 3.1 etwas genauer. Dies erlaubt unter anderem, die falschen p-Wert Interpretationen aus einer anderen Perspektive zu illustrieren. Mit einer knappen Zusammenfassung schließen wir in Abschnitt 4.

2 Geschichte, Probleme und Praxis des Hypothesentests

2.1 Das Standardverfahren des Null-Hypothesen Signifikanztests

Bevor wir das Standardverfahren des Null-Hypothesen Signifikanztests diskutieren, müssen wir eine knappe Bemerkung zum Wahrscheinlichkeitsbegriff vorausschicken. In der üblichen (frequentistischen) Auffassung ist die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A mit der relativen Häufigkeit seines Auftretens verknüpft. Dies setzt also ein (zumindest hypothetisch) beliebig oft wiederholbares Zufallsexperiment voraus, bei dem jeweils ein Wert einer Zufallsvariable gewonnen wird. Die relative Häufigkeit des Auftretens eines Ereignisses A bei n Messungen ($h_n(A) = \frac{n(A)}{n}$) ist ein Schätzwert für seine Wahrscheinlichkeit. Die Güte dieser Schätzung wächst mit zunehmendem n.[9]

seit 2002 ein expliziter Veröffentlichungsort für psychologische Studien, die die Null-Hypothese *nicht* ablehnen (https://www.jasnh.com/about.html).

9. Einige Lehrbücher (etwa Bortz et al. (2008, S. 6)) formulieren prägnant, dass sich die Wahrscheinlichkeit als Grenzwert der relativen Häufigkeit für $n \to \infty$ ergibt: $p_A = \lim h_n(A)$. Hier kann jedoch nicht der analytische Grenzwertbegriff gemeint sein, denn statistische Fluktuationen können die Differenz zwischen relativer Häufigkeit und dem „Grenzwert" immer wieder vergrö-

Diese frequentistische Deutung stellt den Standard in der angewandten statistischen Literatur dar; etwa Azizi Ghanbari (2002), Bortz und Döring (2006) oder das monumentale Werk von Sachs (2004), das bereits in der elften Auflage erschienen ist.[10] In dieser Deutung sind Wahrscheinlichkeiten nur für die Werte von *Zufallsvariablen* erklärt – und nicht etwa für „Hypothesen". Nach dieser frequentistischen Auffassung von Wahrscheinlichkeit sind Hypothesen (etwa: „Intervention A ist wirksamer als Intervention B", oder auch „Es gibt eine durch Menschen verursachte Klimakrise") entweder wahr oder falsch. Da sie keinem wiederholbaren Prozess zugeordnet werden können, sind Wahrscheinlichkeitsaussagen hier nicht bloß falsch, sondern sinnlos. Diese Eigenschaft hat für das Testen von Hypothesen in der frequentistischen Statistik offensichtlich wichtige Auswirkungen. Wenden wir uns nun dem Standardverfahren des Hypothesentests zu.

Für die Anwendung einer statistischen Methode zum Test einer Hypothese muss zunächst ein Kennwert identifiziert werden, der die hypothesenrelevanten Informationen zusammenfasst. Möchte man etwa die erhöhte Lernwirksamkeit einer Intervention im Vergleich zu einer konventionell unterrichteten Kontrollgruppe überprüfen, kann man sich für die Differenz der Erwartungswerte μ_i eines Wissenstests zwischen den beiden Gruppen interessieren.

Die sog. Null-Hypothese (H_0) formuliert die Annahme, dass die Intervention ohne Effekt ist ($\mu_1 = \mu_2$). Die alternative Hypothese ($\mu_1 \neq \mu_2$ bzw. $\mu_1 > \mu_2$) wird in der Regel als H_1 bezeichnet. Um die Null-Hypothese zu testen, untersucht man eine Stichprobe mit n_1 bzw. n_2 Teilnehmenden und betrachtet die folgende Zufallsvariable (in üblicher Notation):

$$T = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{S_{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)}}. \tag{2}$$

Unter bestimmten Bedingungen (etwa der Varianzgleichheit)[11] und unter Vor-

ßern. Man spricht deshalb auch von einer „stochastischen Konvergenz" (Klenke 2006, S. 125f). Diese besagt vereinfachend: Nicht die relative Häufigkeit konvergiert gegen einen Grenzwert p_A, sondern nur die *Wahrscheinlichkeit* einer Abweichung konvergiert gegen Null, oder noch stärker und formal: $P(\lim h_n(A) = p_A) = 1$. Dieser Zusammenhang wird „starkes Gesetz der großen Zahl" genannt und stellt die *Konsistenz* der frequentistischen Wahrscheinlichkeitsauffassung sicher. Da der stochastische Grenzwert jedoch den Begriff „Wahrscheinlichkeit" bereits voraussetzt, kann er nicht zu seiner Definition beitragen (Caticha 2008, S. 27).

10. Diese Auffassung ist so üblich, dass sich unserer Erfahrung nach viele Anwender gar nicht bewusst sind, einer bestimmten „Wahrscheinlichkeitsschule" anzugehören. In Abschnitt 3.1 werden wir mit der Bayesschen Statistik und der subjektivistischen Wahrscheinlichkeit eine konkurrierende Auffassung behandeln. Der Wahrscheinlichkeitsbegriff ist äußerst komplex und hat zu einer reichen philosophischen Literatur Anlass gegeben; siehe etwa Hájek und Edward 2019; Gillies 2000.

11. Es existieren auch Verfahren, um auf diese meist unrealistische Voraussetzung verzichten

aussetzung der Nullhypothese folgt diese Variable der *Student-t*-Verteilung (mit $n_1 + n_2 - 2$ Freiheitsgraden).

Ergibt die Stichprobe die empirische Mittelwertdifferenz t, berechnet sich der zugehörige p-Wert als $p = P(|T| \geq t)$. Es handelt sich also um die Wahrscheinlichkeit dafür, das beobachtete Datum (oder noch extremere) zu erhalten, falls H_0 zutrifft.[12]

Gilt nun $p < 0,05$ (bzw. $p < 0,01$) spricht man von einem „statistisch signifikanten" (bzw. „sehr signifikanten") Ergebnis, bei dem die Stichprobe praktisch nicht mit der Null-Hypothese verträglich ist. In diesem Fall wird H_0 abgelehnt und die Alternativhypothese akzeptiert (Bortz und Döring 2006, S. 494). Dort lesen wir ferner:

> Der Signifikanztest ermittelt die Wahrscheinlichkeit, mit der das gefundene empirische Ergebnis sowie Ergebnisse, die noch extremer sind als das gefundene Ergebnis, auftreten können, wenn die Populationsverhältnisse der Nullhypothese entsprechen. Diese Wahrscheinlichkeit heißt Irrtumswahrscheinlichkeit (als diejenige Wahrscheinlichkeit, mit der wir uns irren würden, wenn wir die H_0 fälschlicherweise zugunsten von H_1 verwerfen). (Bortz und Döring 2006, S. 494)

Hier wird der p-Wert also ausdrücklich mit der Wahrscheinlichkeit identifiziert, einen sog. α-Fehler zu begehen. Die ebenfalls wichtige Wahrscheinlichkeit dafür, die Null-Hypothese irrtümlich *anzunehmen*, wird üblicher Weise mit β bezeichnet. Diese beiden Varianten werden auch Fehler 1. und 2. Art genannt.

Bei der (im Wortsinn) Logik des Hypothesentests handelt es sich also um eine Abwandlung des Widerspruchsbeweises. In der Aussagenlogik gilt, dass aus „$H \to \neg D$" sowie „D" auf „$\neg H$" geschlossen werden kann („modus tollens"). Mit anderen Worten: Man verwirft eine Voraussetzung, wenn ihre Folgerung nicht zutrifft. Im Hypothesentest wird nun die logische Negation ($\neg D$) durch eine Wahrscheinlichkeitsaussage („D ist sehr unwahrscheinlich") ersetzt. Dies ist natürlich keine (logisch) korrekte Schlussfigur – aber die Hoffnung scheint zu sein, dass der Schluss wenigstens mit hoher Wahrscheinlichkeit zutrifft.[13] Im Übrigen wird an dieser Stelle auch deutlich, warum alle Statistiker mit Recht darauf hinweisen,

zu können.

12. Auf den Unterschied zwischen ein- und zweiseitigen Tests gehen wir hier nicht ein.

13. In Cohen (1997, S. 23) wird das Problem dieser Argumentation genauer (und unterhaltsam) erläutert und als weiterer Einwand gegen den Hypothesentest verwendet.

dass eine Null-Hypothese zwar *verworfen* werden kann, aber im Falle eines nicht-signifikanten Ergebnisses nicht angenommen werden darf Bortz und Döring 2006, S. 497.[14] Schließlich darf aus $A \to B$ auch nicht auf $B \to A$ geschlossen werden.

2.2 Zur Geschichte des Standard-Signifikanztests

Das Standardverfahren des Null-Hypothesen Signifikanztests kombiniert Verfahren und Begriffe, die ab der 1920er und 30er Jahre von Ronald A. Fisher sowie Jerzy Neyman und Egon Pearson entwickelt wurden. Auf Fisher geht etwa die Popularisierung des p-Wertes zurück. Allerdings war dieser bei Fisher nicht Teil eines formalisierten Schlussverfahrens (Fisher 1925).

Kurioser Weise wurde das Konzept einer alternativen Hypothese H_1 sowie die Unterscheidung von α- und β-Fehlern von Neyman und Pearson 1933 in *Abgrenzung* von Fishers Methodologie entwickelt.[15] Bei diesem Verfahren wird explizit darauf verzichtet, auf der Grundlage eines *einzelnen* Experiments auf die Gültigkeit bzw. Plausibilität einer Hypothese zu schließen. Stattdessen ist das „Signifikanzniveau" α gar keine Eigenschaft der Daten, sondern des Versuchsdesigns. Diese Autoren äußern explizit:

> We are inclined to think that as a particular hypothesis is concerned, no test based upon the theory of probability can by itself provide any valuable evidence of the truth or falsehood of that hypothesis.(Neyman und Pearson 1933, S. 290f)

Anstatt (wie Fisher) auf ein induktives „Schließen" im Einzelfall zielen Neyman und Pearson auf eine „Handlung", die auf lange Sicht (d.h. im frequentistischen Sinne) eine vorher festgelegte geringe Fehlerrate α und β aufweist (Gigerenzer et al. 1989, Kap. 3.4).[16]

Man erkennt deutlich den Unterschied zwischen dem p-Wert (gewonnen aus einer einzelnen Stichprobe von Werten einer Zufallsvariablen und für die Evidenz gegen

14. Diese Asymmetrie (H_0 kann abgelehnt, aber nie bestätigt werden) stellt eine weitere konzeptionelle Schwäche des Hypothesentests dar, auf die wir im Abschnitt 3.1.2 kurz zurückkommen. Eine luzide Diskussion dieser Frage findet sich auch in Rouder und Morey (2011), die ebenfalls einen einfachen Zusammenhang zur sog. Lindley Paradoxie herstellen.

15. Es sei angemerkt, dass Fisher, Pearson und Neyman alle die frequentistische Auffassung von Wahrscheinlichkeit vertreten haben.

16. Dieses Vorgehen ist vernünftig, wenn man bedenkt, dass die Test- bzw. Entscheidungstheorie von Neyman-Pearson z.B. wichtige Anwendungen in der Qualitätskontrolle der industriellen Massenproduktion hat. Die „Handlung" besteht hier etwa im Stoppen der Produktion, um mögliche Fehlerquellen des Fertigungsprozesses zu beseitigen. Im Einzelfall ist völlig irrelevant, ob tatsächlich ein solcher Fehler vorliegt – man *handelt* auf Grundlage einer Stichprobe lediglich so, als wäre dies der Fall.

eine einschlägige Nullhypothese verwandt) und dem α-Niveau (einem im Untersuchungsdesign festgelegten Fehler-Niveau, das seine frequentistische Bedeutung erst bei häufiger Wiederholung des Testverfahrens erhält). Die im vorangegangenen Abschnitt zitierte Bemerkung aus Bortz und Döring (2006, S. 494) enthält nun eine typische Gleichsetzung bzw. Verwechslung beider Größen. Hier wird (wie in zahlreichen Lehrbüchern, vgl. die Analyse von Hubbard und Bayarri (2003)) der p-Wert gleichzeitig als Evidenz aus der Einzelmessung *und* als (quasi experimentelle) Fehlerrate α aufgefasst.

Zu dieser Verwechslung wird man eingeladen, weil im Kriterium für die „signifikante“ Ablehnung der Null-Hypothese $p < \alpha$ (mit $\alpha = 0,05$ oder $\alpha = 0,01$) beide Größen gemeinsam auftreten. Tatsächlich spielt der p-Wert in der Konzeption von Neyman-Pearson jedoch gar keine Rolle. Stattdessen werden hier durch α- und β-Niveaus Ablehnungs- und Annahmebereiche für die *Teststatistik* vorher festgelegt. Der beobachtete Wert der Teststatistik entscheidet dann über die jeweilige „Handlung“. Aber natürlich kann diese Entscheidungsregel ebenso gut durch eine eineindeutige Funktion der Teststatistik ausgedrückt werden – und der p-Wert ist nichts anderes als eine solche Transformation. Im Sinne von Neyman-Pearson stellt die Befolgung des Kriteriums „$p < \alpha$“ sicher, dass sich bei häufiger Wiederholung die Fehlerrate 1. Art dem Wert α annähert. Der exakte Wert von p spielt dabei jedoch gar keine Rolle, und ein Unterschied zwischen „signifikant“ (z.B. $p = 0,043$) und „sehr signifikant“ (z.B. $p = 0,007$) kann bei einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0,05$ gar nicht begründet werden.

Zahlreiche Autor*innen haben darauf hingewiesen, dass diese inkohärente Kombination von Ideen rivalisierender Statistik-Schulen zu den Missverständnissen beigetragen hat, welche die Interpretation des p-Wertes begleiten (Gigerenzer et al. 1989; Goodman 1993; Lehmann 1993). Gigerenzer et al. (2004) bezeichnen das routinemäßige Testen der Null-Hypothese als „Null Ritual“ und formulieren sarkastisch:

> [...] (T)he null ritual originated neither from Fisher nor from any other renowned statistician and does not exist in statistics proper. It was instead fabricated in the minds of statistical textbook writers in psychology and education.

Wenden wir uns nun also der Frage zu, welche Bedeutung der p-Wert hat und welche weiteren Interpretationen unzulässig sind.

2.3 Was bedeutet der p-Wert (nicht)?

Über die tatsächliche Bedeutung des p-Wertes lässt sich wenig sagen, das über seine technische Definition hinausgeht. Es handelt sich schlicht um die Wahrscheinlichkeit dafür, die beobachteten Daten oder noch extremere Ausfälle (D) zu messen, falls die Null-Hypothese (H_0) zutrifft. Symbolisch ausgedrückt:[17]

$$p = P(D|H_0). \tag{3}$$

Diese Kenngröße quantifiziert die Verträglichkeit der Daten mit der Null-Hypothese. Jede Interpretation des p-Wertes muss dabei berücksichtigen, dass die Gültigkeit von H_0 bei seiner Berechnung *vorausgesetzt* wurde, sowie, dass es sich um eine „Datenwahrscheinlichkeit" (und keine „Hypothesenwahrscheinlichkeit") handelt.

Betont werden sollte jedoch, dass der p-Wert diese Bedeutung nur besitzt, falls alle *Voraussetzungen* für seine Berechnung erfüllt sind. Dazu zählen an erster Stelle die Bedingungen für die Anwendung des zugrunde gelegten statistischen Modells, aber auch die Randomisierung der Stichprobe, die *score* Reliabilität, die Validität der Konstrukte etc. (Kline 2013, S. 13f). In der Praxis werden diese Voraussetzungen nie streng erfüllt sein, woraus bereits eine gewisse Variabilität des p-Wertes folgt.[18]

Aber auch wenn alle diese Bedingungen streng erfüllbar *wären*, gilt natürlich, dass der p-Wert selber eine Zufallsvariable mit zugehöriger Streuung darstellt. Im Falle des Zutreffens der Null-Hypothese sind p-Werte (unabhängig von der Stichprobengröße) gleichverteilt. Hier beträgt die Streuung also $\frac{1}{\sqrt{12}} \approx 0,29$. Falls die alternative Hypothese zutrifft, sind p-Werte bei kleinen Werten konzentriert. Der genaue Verlauf hängt jedoch von der Teststärke $(1-\beta)$ ab. Es gilt: Je geringer die Teststärke (d.h. je kleiner die Stichprobe), desto breiter die p-Wert Verteilung, d.h. je größer ihre Varianz (siehe etwa Colquhoun 2014 für instruktive numerische Simulationen von p-Wert Verteilungen).[19] Boos und Stefanski 2011 diskutieren verschiedene Streumaße für den p-Wert. Ihr Befund lautet, dass in typischen Anwen-

17. Um auszudrücken, dass auch extremere Ausfälle betrachtet werden, findet sich manchmal auch die sinnvolle Schreibweise „D^+" statt „D". Die Hypothese als Argument einer bedingten Wahrscheinlichkeit wird im Bayesschen Rahmen (siehe Abschnitt 3.1) eine präzise Bedeutung erhalten.

18. Vor allem Ziliak und McCloskey (2008, S. 245) bemängeln, dass der übliche Hypothesentest nur den Stichprobenfehler betrachtet (*ibid.* S. 255).

19. Dass die p-Wert-Verteilung für die Null-Hypothese *nicht* vom Stichprobenumfang abhängt ist durchaus bemerkenswert. Intuitiv könnte man erwarten, dass mit wachsender Stichprobe und bei Zutreffen der Null-Hypothese die p-Werte größer werden – also die „Evidenz" für die zutreffende (hier: Null-)Hypothese wächst. Erneut begegnet uns hier die Asymmetrie, dass Nullhypothesen nur verworfen, aber nicht angenommen werden können (vgl. hierzu auch Fußnote 14 sowie Abschnitt 3.1.2).

dungen nur seine Größenordnung geschätzt werden kann. Allein dieser Umstand kompromittiert eine Konvention vom Typ „$p < 0,05 \Rightarrow H_0$ verwerfen“.

Damit sind wir bereits bei der Frage, welche irrigen Annahmen sich mit der Bedeutung des p-Werts verbinden. In der Literatur finden sich zahlreiche Listen mit verbreiteten Missverständnissen. Goodman (2008) identifiziert ein „dreckiges Dutzend“ solcher Fehlschlüsse, und Kline (2013, S. 95) spielt auf die Großwildjagd an, wenn er seine Liste „the big five“ nennt. Unsere Aufzählung trifft hier eine Auswahl, die wir scherzhaft die „Fantastischen Vier“ nennen wollen:[20]

1. **Der inverse-Wahrscheinlichkeits-Fehlschluss:**„$p < 0,05$ bedeutet, dass H_0 weniger als 5% Wahrscheinlichkeit besitzt, wahr zu sein.“

   Da p jedoch unter der Annahme berechnet wurde, dass H_0 wahr ist, kann es nicht gleichzeitig die *Wahrscheinlichkeit* dafür sein, dass H_0 wahr ist. Der Fehler dieser Interpretation lässt sich auch wie folgt erläutern: Diese Deutung identifiziert den p-Wert mit der Wahrscheinlichkeit $P(H_0|D)$. Im Vergleich zu Gleichung 3 haben hier die Daten D und H_0 die Plätze getauscht (hier auch „invertieren“ genannt). Aus zwei Gründen ist dies inkorrekt. Zum einen lehrt der Satz von Bayes, dass $P(A|B) \neq P(B|A)$ gilt. Zum anderen können innerhalb der frequentistischen Statistik keine Wahrscheinlichkeitsaussagen über das Zutreffen von Hypothesen getroffen werden.

2. **Der Zufall-Wahrscheinlichkeits-Fehlschluss:**„$p < 0,05$ bedeutet, dass die Wahrscheinlichkeit des Messergebnisses, bloßer Zufall zu sein, weniger als 5% beträgt.“

   Die nachvollziehbare Intuition hinter diesem Fehlschluss lautet, dass unter der verbreiteten Null-Hypothese („kein Effekt“) jeder Unterschied lediglich dem Stichprobenfehler (vulgo: dem „Zufall“) geschuldet ist. Bei der p-Wert Berechnung wird H_0 (d.h. eine zufällige Verursachung) jedoch *vorausgesetzt.* Wollte man tatsächlich quantifizieren, wie verträglich der Ausgang mit der Annahme einer zufälligen Verursachung ist, müsste man deshalb erneut die Hypothesenwahrscheinlichkeit $P(H_0|D)$ berechnen. Es handelt sich hier also um eine Variante des Fehlschlusses zur inversen Wahrscheinlichkeit (Carver 1978).[21]

20. Der Leserin bzw. dem Leser bleibt hier überlassen, ob er an die deutsche Hip-Hop Gruppe oder die gleichnamigen Helden der Marvel Comics denkt.

21. Natürlich können Nullhypothesen auch die Anwesenheit eines bestimmten Effekts behaupten. In diesem Fall bestünde der analoge Fehlschluss darin, jede *Abweichung von dieser Nullhypothese* als bloß zufällig (mit Wahrscheinlichkeit p) anzusehen.

3. **Der α-Fehler-Fehlschluss:**„$p < 0,05$ bedeutet, dass die Wahrscheinlichkeit, H_0 in einer Studie irrtümlich zu verwerfen (also einen α-Fehler zu begehen), kleiner als 5% ist.“

   Zu diesem Missverständnis wird man aufgrund der formalen Ähnlichkeit zwischen p-Wert und α-Niveau eingeladen. In Abschnitt 2.2 haben wir bereits auf den Unterschied dieser beiden Größen hingewiesen. An dieser Stelle kann jedoch auch wie folgt argumentiert werden: Eine solche Wahrscheinlichkeitsaussage über einen „Fehler 1. Art“ wäre eine Aussage darüber, ob H_0 wahr ist, denn nur dann begeht man ja einen solchen Irrtum. Es handelt sich also erneut um eine Variante des Fehlschlusses zur inversen Wahrscheinlichkeit.

4. **Der Replikations-Fehlschluss:**„$p < 0,05$ bedeutet, dass die Wahrscheinlichkeit, ein solches Ergebnis *nicht* replizieren zu können, bei unter 5% liegt.“

   Hier wird also die Wahrscheinlichkeit der erfolglosen Replikation mit p identifiziert. Dies stellt eine Wahrscheinlichkeitsaussage für das Auftreten von bestimmten Daten dar – ohne jedoch an die Bedingung „H_0 ist gültig“ geknüpft zu sein. Diese Interpretation kann also ebenfalls nicht zutreffen, obwohl tatsächlich unter bestimmten Modellannahmen ein indirekter Zusammenhang zwischen p-Wert, anderen Kenngrößen und der Replikationswahrscheinlichkeit formuliert werden kann (Greenwald et al. 1996).

Interessanterweise führen all diese Fehlschlüsse zu einer systematischen *Überschätzung* der Bedeutung des p-Wertes bzw. zu einer *Unterschätzung* der tatsächlichen Irrtumswahrscheinlichkeit. Dies lässt vermuten, dass p-Werte und Signifikanz-Zuschreibungen nicht fehlinterpretiert werden, *obwohl* sie so verbreitet sind, sondern so verbreitet sind, *weil* sie so oft fehlinterpretiert werden.

Wie verbreitet sind diese Missverständnisse, und welche Folgen haben sie? Wenden wir uns zunächst der ersten Frage zu. Eine Reihe von empirisch-statistischen (*sic*) Untersuchungen habe diese Frage untersucht und sind zu einheitlichen Ergebnissen gelangt. So haben z.Bsp. Haller und Krauss (2001) an sechs deutschen Universitäten eine Umfrage unter Studierenden und Lehrenden in der Psychologie durchgeführt. Sie haben gefunden, dass 100% der befragten fortgeschrittenen Studierenden einer falschen p-Wert Interpretation anhängen, während bei den befragten Lehrpersonen immer noch 80-90% eine unzutreffende Interpretation vertraten (siehe dazu auch Gigerenzer et al. (2004) sowie die dort zitierten Arbeiten). Es kann kaum bezweifelt werden, dass solche Untersuchungen in den MINT-Fachdidaktiken zu ähnlichen Ergebnissen führen würden.[22]

22. Tatsächlich könnte die Situation in den Fachdidaktiken aber auch noch schlechter sein. Während etwa innerhalb der Psychologie in der Regel eine Ausbildung in quantitativen Methoden

So findet man in einem aktuellen Lehrbuch zu Forschungsmethoden der Naturwissenschaftsdidaktik zum Begriff „Signifikanz“ folgenden Eintrag im Glossar:

> Ein Ergebnis ist statistisch signifikant (bedeutsam), wenn die Wahrscheinlichkeit, dass es zufällig zustande gekommen ist, klein ist. Das Signifikanzniveau muss definiert werden. Häufig gelten Aussagen, bei denen mit einem Signifikanztest eine Irrtumswahrscheinlichkeit unter 5% gefunden wird, als signifikant. (Krüger et al. 2014, S. 403)

Die irreführende Gleichsetzung von „statistisch signifikant“ mit „bedeutsam“ wird hier explizit vorgenommen. Die Formulierung von der Wahrscheinlichkeit eines „zufälligen Zustandekommens“ legt nahe, dass hier der „Zufall-Wahrscheinlichkeits-Fehlschluss“ vorliegt (Punkt 2 in der Liste von Abschnitt 2.3). Die Sprechweise von der „Irrtumswahrscheinlichkeit“ verleitet ebenfalls zu dem „α-Fehler-Fehlschluss“ (Punkt 3 in der Liste).

Lehrbücher zur Statistik und Datenauswertung gehen auf die Problematik der p-Werte ebenfalls nur recht oberflächlich oder gar nicht ein. Das bereits zitierte Werk von Bortz und Döring (2006) streift diese Debatte und erwähnt die Forderung von Kline (2013) (Bortz und Döring beziehen sich auf die 1. Auflage von 2004), den Begriff „statistisch signifikant“ nicht mehr zu verwenden. Ihre Replik ist entwaffnend:

> Auch wenn wir diese harsche Kritik im Wesentlichen nachvollziehen können, wird der Begriff der statistischen Signifikanz in diesem Buch nicht gestrichen, zumal so manche Human- oder Sozialwissenschaftler froh sind, diesen Begriff überhaupt erst einmal richtig verstanden zu haben.

Ihre Position sei stattdessen, den traditionellen Signifikanztest durch Betrachtungen von Teststärke, Effektgröße und Konfidenzintervalle zu ergänzen (*ibid.* S. 601).

Dabei ist auch für diese Kenngrößen die Interpretation problematisch (siehe Abschnitt 3.1.3 für eine Diskussion von Vertrauensintervallen). Zahlreiche empirische Studien in der Bildungsforschung und Fachdidaktik berechnen z.B. Cohens d als Maß für die Effektstärke und folgen der Konvention, nach der die Werte von $0,2$, $0,5$ und $0,8$ zwischen kleinen, mittleren und großen Effekten unterscheiden. Dabei weisen auch die vielzitierten Bortz und Döring (2006, S. 626) darauf hin, dass es sich dabei lediglich um eine grobe Orientierungshilfe handele, die dem jeweiligen

erfolgt, haben die Forscher*innen in den Fachdidaktiken typischerweise eine Ausbildung in ihrem jeweiligen Bezugsfach, die ein solches Modul nicht umfasst.

Forschungsfeld angepasst werden müsse. In Bakker et al. (2019) haben Mathematikdidaktiker*innen eine Liste von zwölf Hinweisen formuliert, die bei der Einschätzung von Effektstärkemaßen beachtet werden sollten. Der einfache Schluss vom numerischen Wert von z.B. d_{Cohen} auf die inhaltliche „Stärke" des Effekts ist nicht zu rechtfertigen.[23]

2.4 Konsequenzen aus der Fehlinterpretation des p-Wertes

Unterliegen Autor*innen von quantitativen empirischen Studien einem oder mehreren der oben diskutierten Missverständnisse, setzt dies natürlich nicht automatisch den Wert ihrer Arbeit herab. Ebenfalls gilt, dass die Fehlinterpretation nicht der Methode angelastet werden kann. Aus der Lektüre einer Forschungsarbeit ist in der Regel auch nicht unmittelbar abzulesen, welche p-Wert Interpretation vertreten wird.

Allerdings haben unter anderem Loftus (1996), Sedlmeier (1996) und Gigerenzer et al. (2004) die Frage aufgeworfen, in welchem Sinne die Fokussierung auf das Testen (und Verwerfen) von Null-Hypothesen zu einer unerwünschten Engführung von Forschungsprogrammen führen kann. Diesen Gefahren wollen wir uns nun zuwenden.

2.4.1 Die Verwechslung von „statistisch signifikant" und „bedeutsam"

Ein Ergebnis mit $p < 0,05$ „statistisch signifikant" zu nennen, folgt einer bloßen Konvention. Die Attraktivität der Formulierung rührt wohl auch daher, dass im alltäglichen Sprachgebrauch „signifikant" mit „wesentlich", „bedeutsam" oder „wichtig" konnotiert. Diese Identifikation ist noch nicht einmal gerechtfertigt, wenn man einem oder mehreren der genannten Fehlschlüsse des letzten Abschnitts unterliegt. Denn zum einen erlaubt der p-Wert eben keine weitreichenden Schlussfolgerungen, und zum anderen hängt die Relevanz eines Resultats ganz wesentlich auch von anderen Faktoren ab. Einige davon lassen sich vielleicht sogar quantifizieren (etwa durch die Effektstärke). Andere können gar nicht durch statistische Kenngrößen

23. So zeigen Cheung und Slavin (2016), dass z.B. große Studien (oder solchen mit standardisierten Testinstrumenten) im Mittel nur halb so große Effekte aufweisen wie kleine Studien (oder solche, die eigene Testwerkzeuge verwenden). Diese bemerkenswerte Korrelation zwischen Forschungsdesign und Effektstärke kompromittiert somit die Ergebnisse aller Metaanalysen, die über Studien mit unterschiedlichem Design mitteln. Das vermutlich bekannteste Beispiel für dieses problematische Vorgehen ist die Hattie-Studie (siehe auch Bergeron und Rivard (2017) für eine detaillierte Kritik an den statistischen Methoden der Hattie-Studie).

ausgedrückt werden. Mit anderen Worten: „statistisch signifikant“ und „wissenschaftlich signifikant“ sind zwei unterschiedliche Kategorien.

Die Tendenz, statistische Signifikanz zur notwendigen Bedingung einer Veröffentlichung zu machen, lässt diese erst recht als Gütemerkmal für empirische Studien erscheinen. Umgekehrt wird fehlende Signifikanz als Scheitern einer Untersuchung interpretiert – und in der Regel folgt daraus die Nichtveröffentlichung der Ergebnisse (Rosenthal 1979). Dabei können sorgfältig gewonnene Null-Ergebnisse sehr instruktiv sein (Conlin et al. 2019).

Die Tatsache, dass nicht-signifikante Ergebnisse eine geringere Veröffentlichungswahrscheinlichkeit haben, schafft zudem unerwünschte Forschungsanreize. Auf diese Weise wird provoziert, Freiheiten in der Auswahl von Analyseverfahren so zu nutzen, dass ein signifikanter p-Wert erreicht wird. Die Grenze zum wissenschaftlichen Fehlverhalten ist hier fließend (Head et al. 2015). Werden solche Ergebnisse schließlich in Metaanalysen kombiniert, führt dies zu einer systematischen Überschätzung der Effektstärke (Simonsohn et al. 2014). Dabei werden gerade Metaanalysen als probates Mittel angesehen, die Ergebnisse kleinerer Studien zu einem aussagekräftigeren Resultat zu bündeln.

2.4.2 Stagnation in der Theorieentwicklung und Vernachlässigung von Kontext

Gigerenzer 1998 hat darauf hingewiesen, dass ritualisiertes Testen (und Ablehnen) von Null-Hypothesen der Tendenz Vorschub leistet, die Theorieentwicklung zu vernachlässigen. Dominiert das skizzierte Standardverfahren, reichen relativ unspezifische Hypothesen für die Gewinnung von vorgeblich signifikanten Resultaten.[24]

Goodman (1999, S. 1001) sieht ebenfalls eine Entwicklung zur Verarmung des Diskurses. Er berichtet von der Tendenz, dass Veröffentlichungen mit großen randomisierten und kontrollierten Studien in der Medizin in ihren Einleitungen bzw. Diskussionskapiteln vorherige Studien und den Forschungsstand kaum diskutieren. Er vermutet eine Ursache darin, dass die übliche Methodologie des Signifikantests dem Missverständnis Vorschub leistet, auf der Grundlage *einzelner* Studien bereits Aussagen mit geringer Fehlerwahrscheinlichkeit gewinnen zu können.

24. Einen kleinen Fortschritt könnte man bereits dadurch erzielen, dass man nicht bloß eine Nullhypothese von der Art $\mu_1 - \mu_2 = 0$ (also die Abwesenheit eines Effekts) testet, sondern bereits eine interessierende Effektsstärke in die Hypothesenformulierung aufnimmt.

2.4.3 Das geringe Ansehen von Replikationsstudien

Unterliegt man dem „Replikations-Fehlschluss“, erscheint die Wiederholung einer Studie wenig sinnvoll oder notwendig. Dies könnte eine zusätzliche Erklärung für deren geringe Anzahl sein Kline 2013, S. 269.

Makel und Plucker (2014) haben ca. 160.000 Veröffentlichungen von 100 führenden Zeitschriften in den Erziehungswissenschaften seit 1990 analysiert. Lediglich 0,13% dieser Arbeiten haben eine Replikationsstudie zum Gegenstand.

Interessant ist hier natürlich die Frage, ob die betreffenden Untersuchungen den ursprünglichen Befund bestätigen konnten. Die Beobachtung der letzten Jahre, dass zahlreiche Studien etwa in Psychologie oder Medizin nicht repliziert werden konnten, hat in verschiedenen Forschungsgebieten zur sog. „Replikationskrise“ geführt (siehe Abschnitt 1). Die zitierte Arbeit von Makel und Plucker 2014 findet in den Erziehungswissenschaften, dass 67% der Untersuchungen den ursprünglichen Befund replizieren können (zum Begriff der „Replikation“ vgl. auch Fußnote 6). Dies ist eine viel höhere Rate als im medizinischen Forschungsfeld und in Teilen der Psychologie (Open Science Collaboration 2015). Makel und Plucker (2014) bemerken jedoch, dass häufig die selben Autor*innen an einer Replikation beteiligt sind, die bereits die ursprüngliche Studie veröffentlicht haben. Betrachtet man lediglich Replikationen von *anderen* Autor*innen, sinkt die Quote der erfolgreichen Replikationen auf 54% – bleibt also in jedem Fall deutlich unter $1 - p = 95\%$.

Vor dem Hintergrund unserer Ausführungen kann vermutet werden, dass ein Grund für diese „Krise“ in den verbreiteten Fehlauffassungen des p-Wertes liegt. Dadurch wird die Verlässlichkeit eines einmaligen Ergebnisses zunächst überschätzt und anschließend die fehlende Replizierbarkeit als krisenhaft erlebt (Amrhein et al. 2019). Erinnert sei an dieser Stelle auch an das in Abschnitt 1 diskutierte Argument von Ioannidis 2005, demzufolge eine hohe Fehlerrate erwartbar sei.

3 Konsequenzen für die wissenschaftliche Praxis

Die Hoffnung, dass Mechanismen der wissenschaftlichen Selbstkorrektur die oben geschilderten Probleme (zumindest mittel- oder langfristig) lösen, scheint trügerisch (Pashler und Harris 2012; Ioannidis 2012). In der Psychologie werden stattdessen Reformen der wissenschaftlichen Praxis auf vielen Ebenen diskutiert (Pashler und Wagenmakers 2012). Die *Open Science Collaboration* stellt eine solche Initiative dar. Sie koordiniert Replikationsstudien und setzt sich für die Veröffentlichung der Rohdaten und Analyseprotokolle empirischer Untersuchungen ein

(Carpenter 2012). Auf diese Weise werden empirische Befunde nachvollziehbarer und die Gefahr des wissenschaftlichen Fehlverhaltens geringer. Das Dokument „*A Manifesto for reproducible science*“ enthält ebenfalls zahlreiche Reformvorschläge, die zusätzlich auf die institutionelle Verfasstheit der Wissenschaft abzielen. Einige Stichworte sind hier: Ausbildung, Anreizsysteme und *peer review* (Munafò et al. 2017).

Vor dem Hintergrund unserer Ausführungen erscheint es geboten, die Praxis der Datenauswertung und die Kommunikation der Resultate zu reformieren. Genau in diese Richtung zielt die Empfehlung der *American Statistical Association*, den Begriff „statistisch signifikant“ nicht mehr zu verwenden (Wasserstein et al. 2019). Sie erläutern:

> For example, no *p*-value can reveal the plausibility, presence, truth, or importance of an association or effect. Therefore, a label of statistical significance does not mean or imply that an association or effect is highly probable, real, true, or important. Nor does a label of statistical nonsignificance lead to the association or effect being improbable, absent, false, or unimportant. Yet the dichotomization into „significant“ and „not significant“ is taken as an imprimatur of authority on these characteristics.

Offensichtlich geht es den Autor*innen dabei nicht um eine bloße Redeweise. Vielmehr weisen Wasserstein et al. 2019 darauf hin, dass die daraus abgeleitete Unterscheidung in „relevante“ und „irrelevante“ Ergebnisse zu einer fehlerhaften Veröffentlichungspraxis führt. Die Darstellung des Forschungsstandes, etwa in Übersichtsartikeln, wird auf diese Weise stark verzerrt. Mit drastischen Worten resümieren sie:

> „For the integrity of scientific publishing and research dissemination, therefore, whether a *p*-value passes any arbitrary threshold should not be considered at all when deciding which results to present or highlight.“

Bei all dem stellt sich jedoch die Frage, welche konkreten Alternativen sich zur Bewertung von Hypothesen bieten. Die Arbeit von Wasserstein et al. 2019 ist das *Editorial* zu einem Sonderheft der Zeitschrift *The American Statistician*, das sich genau dieser Frage widmet. Es enthält 43 Beiträge, deren Gemeinsamkeit unter anderem darin liegt, auf das Fehlen einer „Patentlösung“ für dieses Problem hinzuweisen. Kein mechanisch anwendbares Schlussverfahren kann die inhaltliche –

und damit immer auch subjektive – Auseinandersetzung mit dem Forschungsgegenstand ersetzen.[25]

Selbst eine kursorische Diskussion dieser Beiträge würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen. Viele Autor*innen halten es jedoch für wünschenswert (wenngleich für sich genommen noch nicht ausreichend), Schlussfolgerungen auf eine breitere Grundlage zu stellen. Dies umfasst etwa die Angabe von Effektstärken. Erinnert sei hier aber noch einmal an unsere kritischen Anmerkungen zur Effektstärke in Abschnitt 2.3 im Zusammenhang mit der Untersuchung von Cheung und Slavin (2016).

Verschiedene Beiträge empfehlen zudem Vertrauensintervalle als Alternative oder Ergänzung zum Hypothesentest. Jedoch ist auch ihre Interpretation in der frequentistischen Statistik nicht frei von Missverständnissen (Morey et al. 2016). In Abschnitt 3.1.3 werden wir auf dieses Werkzeug noch einmal zurückkommen.

Unstrittig ist in jedem Fall die Notwendigkeit einer ausreichenden Teststärke $1-\beta$, da Effekte sonst systematisch überschätzt werden (Colquhoun 2014). Zahlreiche Arbeiten des Sonderhefts propagieren zudem die Bayessche Statistik als alternativen Theorierahmen, der in zahlreichen Forschungsbereichen bereits gut etabliert ist.[26] Neben den Arbeiten des erwähnten Sonderhefts verweisen wir auf das Buch von Kline 2013 für seine gute Darstellung des gesamten Problemkreises.

Einen alternativen Ansatz wollen wir jedoch genauer erläutern. Es handelt sich dabei um die bereits erwähnte Bayessche Statistik. Auch hier gilt natürlich, dass sie nicht als neues „Standardverfahren“ aufgefasst werden sollte. Unsere Darstellung der Bayesschen Statistik hat dabei die zusätzliche Funktion, die konzeptionellen Besonderheiten bzw. Schwierigkeiten der üblichen (d.h. frequentistischen) Statistik noch einmal von einer anderen Seite zu beleuchten.

3.1 Anmerkungen zur Bayesschen Alternative

Wir haben gesehen, dass fast sämtliche Fehlinterpretationen des p-Wertes darin bestehen, irrtümlich einer Hypothese eine Wahrscheinlichkeit zuschreiben zu wollen – und diese Wahrscheinlichkeit gar mit $1 - p$ (für die Alternative) zu quantifizieren. Selbstverständlich soll Forschung zu Urteilen über die Plausibilität bzw. fast

25. Das Sonderheft ist online verfügbar unter: https://amstat.tandfonline.com/toc/utas20/73/sup1?nav=tocList.

26. Beispiele dafür sind etwa die Hochenergiephysik (D’Agostini 1999), statistische Genomforschung (Wegmann und Leuenberger 2019) oder Teile der Ökonometrie (Greenberg 2008). Bayessche Verfahren sind ebenfalls in einigen Bereichen der (vor allem Wahrnehmungs-)Psychologie verbreitet.

sichere Gültigkeit von Aussagen führen. Aber dazu ist das schematische Hypothesentesten innerhalb des frequentistischen Paradigmas für sich alleine genommen zu schwach.

Aus Arbeiten von Harold Jeffreys, Richard Cox und Edwin Jaynes (sowie auf der Grundlage anderer konzeptioneller Vorarbeiten) hat sich seit den 1950er Jahren ein alternativer Theorierahmen entwickelt, die sog. „Bayessche Statistik". In ihr quantifiziert die Wahrscheinlichkeit den „Grad einer Plausibilität". Der Slogan in der englischen Fachliteratur lautet „probability is degree of belief" bzw. „degree of plausibility" (Jaynes 2003, S. 17). In diesem Sinne vereinbart also der „Bayesianer":[27]

$$P(A) = \text{Grad der Überzeugung, dass das Ereignis } A \text{ eintritt}$$

Dieser *subjektivistische* Wahrscheinlichkeitsbegriff ist (im Gegensatz zum frequentistischen Begriff) nicht an einen wiederholbaren Vorgang geknüpft und kann auch auf Hypothesen angewendet werden. Er bleibt jedoch völlig akademisch, solange man keine Berechnungsvorschrift kennt. Tatsächlich kann in Abwesenheit von Kontextwissen bzw. von Beobachtungen, über deren Ausgang die Hypothese eine Aussage trifft, ihr „Plausibilitätsgrad" lediglich geraten werden. In Anwesenheit von Daten oder sonstigem Hintergrundwissen kann die Berechnung dieser Wahrscheinlichkeit jedoch als Problem der bedingten Wahrscheinlichkeit aufgefasst werden. Zu ihrer Bestimmung verwendet man also den Satz von Bayes:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)} = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{\sum_i P(B|A_i)P(A_i)}. \tag{4}$$

Die zweite Formulierung nutzt aus, dass für eine disjunkte Zerlegung A_i des Ergebnisraums Ω die Beziehung $P(B) = \sum_i P(B|A_i)P(A_i)$ gilt. Für unseren Fall gilt dann („H" bezeichnet hier die Hypothese, über die mit Hilfe der „Daten" eine Aussage getroffen werden soll):

$$\underbrace{P(H|\text{Daten})}_{\text{A-posteriori-Wkt.}} \propto \underbrace{P(\text{Daten}|H)}_{\textit{Likelihood}} \cdot \underbrace{P(H)}_{\text{A-priori-Wkt.}} \tag{5}$$

Die linke Seite der Gleichung wird A-posteriori Wahrscheinlichkeit genannt, und setzt sich aus dem *Likelihood* der konventionellen Statistik $P(\text{Daten}|H)$ und der A-priori-Wahrscheinlichkeit (in der englischsprachigen Literatur als *prior* bezeichnet) $P(H)$ zusammen. Letztere repräsentiert die Kenntnis *vor* der Messung. In

27. In Tschirk 2019, S. 17 wird erläutert, wie aus sog. Plausibilitätsannahmen für $P(A)$ die Kolmogorow-Axiome der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu motivieren sind. Wir folgen im Weiteren einer untechnischeren Argumentation.

diesem Konzept wird also formalisiert, wie neue Informationen den Kenntnisstand modifizieren.

Das Theorem von Bayes und die subjektivistische Interpretation von Wahrscheinlichkeit sind also unmittelbar miteinander verknüpft, da, im Gegensatz zur frequentistischen Deutung, hier keine „Berechnungsvorschrift“ für Wahrscheinlichkeiten unmittelbar aus der Interpretation folgt. Dies erklärt den Namen „Bayessche Statistik“, obwohl bedingte Wahrscheinlichkeiten und der Satz von Bayes natürlich ebenfalls etablierte Inhalte der konventionellen (d.h. frequentistischen) Statistik darstellen.[28]

Offensichtlich kann unsere Darstellung nur sehr skizzenhaft sein, und wir verweisen etwa auf Tschirk 2019 für eine systematische Behandlung. Eine glänzende Einführung bietet die kommentierte Leseliste von Etz et al. (2018), und die Darstellung von Gelman et al. (2014) ist ebenfalls sehr empfehlenswert. Ein Softwarepaket, das auch Bayessche Verfahren unterstützt, wurde an der Universität Amsterdam entwickelt: https://jasp-stats.org/.

Das folgende konzeptionelle Beispiel kann jedoch helfen, sowohl die Grundidee der Bayesschen Statistik besser zu verstehen, als auch den Unterschied zur frequentistischen Statistik zu erläutern.

3.1.1 Ist der Würfel symmetrisch?

Nach dem Bayesschen Schema hängt die Wahrscheinlichkeit immer auch von der A-priori-Wahrscheinlichkeit ab, also dem Kenntnisstand *vor* der Messung. Dieser Punkt erscheint zunächst unbefriedigend. Das folgende Beispiel kann helfen, dieses Unbehagen zu mindern.

Wir planen ein Experiment mit einem „unverdächtigen“ Würfel, d.h. er erscheint vollkommen symmetrisch. Die Wahrscheinlichkeit für den Ausfall „1“ im ersten Wurf schätzen wir somit zu $\frac{1}{6}$. Ebenso natürlich die Wahrscheinlichkeit, eine „1“ im 1000sten Wurf zu erzielen. Wenn jedoch nach 600 Würfen z. Bsp. 189 mal das Ereignis „1“ eingetreten ist, hegen wir einigen Zweifel daran, ob der Würfel wirklich symmetrisch ist, und wir modifizieren unsere Erwartung für die folgenden

28. Für das Verhältnis zwischen Bayesscher und frequentistischer Statistik gilt ganz grundsätzlich, dass die Wahrscheinlichkeitsrechnung dieselbe bleibt. Neu ist die Ausdehnung des (subjektiven) Wahrscheinlichkeitsbegriffes auf Hypothesen; anders ist vor allem das induktive „Lernen aus Daten“ mit dem expliziten Einbau von A-priori-Verteilungen, die das Vorwissen oder auch dessen Fehlen spiegeln. Aus der Kombination dieser Elemente folgt schließlich die gesuchte A-posteriori-Verteilung. Es werden dabei unbekannte *Parameter* als „zufällig“ betrachtet, und nicht die *Daten*.

Würfe. Dies wird aber gerade im Konzept der Bayesschen Statistik formalisiert, dem zufolge die modifizierte Annahme aus dem Schema von Gl. 5 folgt.

Dabei soll in diesem Beispiel nicht irritieren, dass die Wahrscheinlichkeit der ursprünglichen Hypothese ($P(1) = \frac{1}{6}$) mit der Laplaceschen Auffassung zusammenfällt, oder dass die beobachtete relative Häufigkeit von $\frac{189}{600} = 0,315$ Anlass zum Zweifel gibt. Diesen Begriffen wird lediglich ihre herausragende Bedeutung bei der *Interpretation* von Wahrscheinlichkeit abgesprochen.

Es zeigt sich hier, dass *Wahrscheinlichkeit* immer *bedingte Wahrscheinlichkeit* ist, mithin das Theorem von Bayes eine Rolle spielt. Kehrt man dieses Argument um, erscheint das Konzept einer A-priori-Wahrscheinlichkeit unausweichlich.[29]

Es ist instruktiv, die Diskussion dieses Beispiels noch etwas zu vertiefen. Wie modifiziert das gemessene Datum unsere Wahrscheinlichkeitszuschreibung konkret? Für eine realistische Betrachtung ist es zunächst sinnvoll, für die A-priori Wahrscheinlichkeit keine Punktwahrscheinlichkeit, sondern eine Wahrscheinlichkeitsdichte $f(p)$ anzunehmen. Für unseren „unverdächtigen“ Würfel denke man sich diese Verteilung etwa um $p = \frac{1}{6}$ konzentriert. Bei n Würfen soll sich nun x-mal der Wert „1“ ergeben haben (und y-mal ein anderer Ausfall). Die Wahrscheinlichkeit A-posteriori gewinnt man dann aus der Gleichung:

$$f(p|x, n-x) = \frac{p^x(1-p)^y f(p)}{\int_0^1 p^x(1-p)^y f(p)dp}. \tag{6}$$

Dabei handelt es sich um den Satz von Bayes für eine binomialverteilte Zufallsgröße. Der Nenner ist mit Hilfe des Satzes von der totalen Wahrscheinlichkeit umgeschrieben worden. Für eine beliebige A-priori-Verteilung $f(p)$ kann dieses Beziehung numerisch ausgewertet werden. Wählt man jedoch für die A-priori-Wahrscheinlichkeit die sog. $\text{Beta}_{a,b}$-Verteilung, ist das Ergebnis besonders leicht analytisch anzugeben. Die genauen Eigenschaften dieser Verteilung sollen uns an dieser Stelle nicht interessieren (siehe dazu etwa Tschirk (2019, S. 45)). Lediglich die Beziehungen für den Erwartungswert ist zunächst relevant:

$$\mathrm{E}[\text{Beta}_{a,b}] = \frac{a}{a+b}. \tag{7}$$

Wählen wir $a = 10$ und $b = 50$, hat unsere A-priori-Wahrscheinlichkeitsverteilung den Erwartungswert $\frac{10}{10+50} = \frac{1}{6}$ – also gerade den Wert der Punktwahrscheinlichkeit für einen fairen Würfel (siehe Abb. 1 a). Die Beta-Verteilung ist die sog. konju-

29. Man beachte zudem, dass bereits die von Ioannidis (Gl. 1 in Fußnote 7) eingeführte „Rate korrekter Forschungshypothesen“ ($P(e) = r$) im Wesentlichen einer A-priori-Wahrscheinlichkeit entspricht, obwohl das Argument auch frequentistisch aufgefasst werden kann.

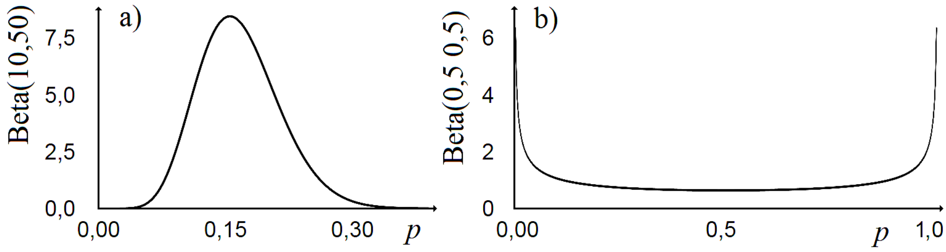


Abbildung 1: Zwei mögliche A-priori-Verteilungen für das „Würfel-Problem". a) Die Beta-Verteilung mit $a = 10$ und $b = 50$ als informative A-priori-Verteilung. Hier entspricht der Erwartungswert $\frac{1}{6}$ gerade der Erwartung für einen symmetrischen Würfel. b) Die Beta-Verteilung mit $a = b = 0,5$. Diese Verteilung ist invariant unter monotonen Abbildungen, also „nicht-informativ" im Sinne von Jeffreys.

gierte A-priori-Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Binomialverteilung. Dies bedeutet, dass hier die A-posteriori-Wahrscheinlichkeit nach Messung von x-mal dem Ereignis „1" (und $n - x = y$ anderen Ausfällen) wieder durch eine Beta-Verteilung gegeben ist, jedoch mit den Parametern $a' = a + x$ sowie $b' = b + y$. Der Erwartungswert der A-posteriori-Verteilung lautet in unserem Beispiel somit:

$$\mathrm{E}[f(p|x, n-x)] = \frac{a'}{a' + b'} = \frac{a + x}{a + b + n} = \frac{10 + 189}{60 + 600} \approx 0,302. \qquad (8)$$

Man erkennt sehr schön, wie der Erwartungswert der A-posteriori-Wahrscheinlichkeit den Erwartungswert der A-priori-Verteilung ($\frac{10}{60}$) sowie die gemessene relative Häufigkeit ($\frac{189}{600} = 0,315$) kombiniert. Rein numerisch dominiert hier der *Likelihood* der konventionellen Statistik und die Wahrscheinlichkeitszuschreibung unterscheidet sich (numerisch) kaum von der relativen Häufigkeit.

Im allgemeinen wird ebenfalls der numerische Wert dieser Größe von demjenigen der frequentistischen Analyse abweichen, etwa wenn ein andere A-priori-Verteilung gewählt wird. Die Auswahl der A-priori-Verteilung stellt ein viel diskutiertes Problem der Bayesschen Statistik dar. Die Subjektivität, die auf diese Weise Einzug hält, zählt vermutlich zu den häufigsten Kritikpunkten an diesem Ansatz (Efron 1986). Gleichzeitig betonen Anhänger der Bayesschen Statistik den Vorteil, dass durch die A-priori-Verteilung das Vorwissen auf kohärente Art in die Analyse einbezogen werden kann (vgl. auch Tschirk (2019, Kap. 6.2)).

Im Falle des Fehlens von solchen Informationen kann eine sog. „nicht-informative" A-priori-Verteilung gewählt werden. In diesem Fall erscheint zunächst sinnvoll, eine *Gleichverteilung* des gesuchten Parameters zu wählen (in unserem Beispiel entspräche das der Beta-Verteilung mit $a = b = 1$). Dies führt jedoch auf eine Reihe von Problemen, die in Tschirk (2019, Kap. 6.2) diskutiert werden. So gibt es z.B. häufig eine gewisse Willkür in der Wahl der Parametrisierung. Will man etwa auf einen Parameter θ schließen, so kann man eine gleichverteilte A-priori-Wahrscheinlichkeit für ihn annehmen. Ist das Messverfahren jedoch auf θ^2 sensitiv, liegt bezüglich *dieser* Größe dann gerade keine Gleichverteilung vor. Sinnvoller ist (nach Jeffreys) deshalb die Charakterisierung von „nicht-informativ“ als Invarianz unter streng monotonen Transformationen des gesuchten Parameters. In unserem Fall erfüllt die in Abb. 1 b) dargestellte Beta-Verteilung mit $a = b = 0,5$ diese Bedingung.

Wenden wir uns nun aber der Frage zu, wie ein Hypothesentest innerhalb der Bayesschen Statistik durchgeführt werden kann, und welcher Zusammenhang zum p-Wert der konventionellen Methode besteht.

3.1.2 Der Hypothesentest in der Bayesschen Statistik

Unter der Annahme, dass der p-Wert einer Irrtumswahrscheinlichkeit entspricht (in Abschnitt 2.3 als „α-Fehler-Fehlschluss bezeichnet“), wird man zu der Vorstellung verleitet, daß bei einem „statistisch signifikanten“ Ergebnis mindestens eine 19 : 1 Wahrscheinlichkeit für die Richtigkeit der alternativen Hypothese im Vergleich zur Null-Hypothese besteht.[30] Warum dies unzutreffend ist, haben wir bereits ausführlich begründet. Innerhalb der Bayesschen Statistik kann eine solche Quote $P(H_1|D) : P(H_0|D)$ jedoch direkt angegeben werden:

$$\underbrace{\frac{P(H_1|D)}{P(H_0|D)}}_{\text{A-posteriori Quote}} = \underbrace{\frac{P(D|H_1)}{P(D|H_0)}}_{\text{Bayes-Faktor}} \cdot \underbrace{\frac{P(H_1)}{P(H_0)}}_{\text{A-priori Quote}} . \qquad (9)$$

Dieses Verhältnis zu bilden, hat technische und konzeptionelle Vorteile. Zum einen verliert man dadurch den Nenner aus Gleichung 4, der in der Regel nur mit Aufwand numerisch berechnet werden kann. Zum anderen ist ein solcher Vergleich *zwischen* Hypothesen inhaltlich viel sinnvoller, als die Betrachtung einer einzelnen Hypothese. Schließlich mögen im Einzelfall die Daten zwar schlecht mit der Null-Hypothese erklärbar sein – aber die alternative Hypothese ist ebenfalls unplausibel.

30. In der englischsprachigen Literatur wird dieses Verhältnis gerne als „odds“ bezeichnet, was hier sinnvoll mit „(Wett-)quote“ übersetzt werden kann.

Das in Gleichung 9 auftretende Verhältnis der *Likelihoods* der Daten unter der Bedingung von H_1 bzw. H_0 wird auch als Bayes-Faktor (BF) bezeichnet.[31] Von der knappen Notation lasse man sich aber nicht täuschen: Die Berechnung des Zählers von BF_{10} ($P(D|H_1)$) ist i. allg. aufwendig und mehrdeutig, wenn die Alternativhypothese die unspezifische Form $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$ hat (Kass und Raftery 1995). In diesem Fall muss schließlich eine Verteilung der Modellparameter angenommen werden.[32] Dies entspricht der Wahl einer A-priori-Wahrscheinlichkeitsverteilung für H_1. Dennoch konnten Bayarri et al. 2016 zeigen, in welchem Sinne diese Größe auch eine rein frequentistische Interpretation besitzt. Auf diese Weise ist die Verwendung des Bayes-Faktors auch im Rahmen der frequentistischen Statistik akzeptabel und liefert ein dem p-Wert überlegenes datenbasiertes „Evidenzmaß" für die Entscheidung, H_0 zugunsten von H_1 zu verwerfen. So kann z.B. ein Wert von $\mathrm{BF}_{10} = 10$ als aus der Messung abgeleitete Quote von 10 : 1 zugunsten der Alternativhypothese aufgefasst werden.[33] Bei einem Wert < 1 drückt der Bayes-Faktor BF_{10} Evidenz *zugunsten* der Null-Hypothese aus.

Die Berechnung des Bayes-Faktors bleibt allerdings aus den angedeuteten Gründen aufwendig, und dies stellt vermutlich ein ganz praktisches Hemmnis für seine weitere Verbreitung dar. Verschiedene Approximationstechniken werden in Kass und Raftery 1995 diskutiert. Es gibt zudem die Möglichkeit, aus dem p-Wert der konventionellen Statistik *obere Schranken* für den Bayes-Faktor abzuleiten. Die Literatur enthält verschiedene Vorschläge, die sich hinsichtlich der Klassen betrachteter Alternativhypothesen unterscheiden (Held und Ott 2018).[34]

31. In der Literatur findet sich auch die Bezeichnungsweise BF_{10} (sprich: Bayes-Faktor Eins Null), wenn das Verhältnis H_1 zu H_0 betrachtet wird. BF_{01} bezeichnet dann gerade den Kehrwert, also $\mathrm{BF}_{01} = \frac{P(D|H_0)}{P(D|H_1)} = \frac{1}{\mathrm{BF}_{10}}$. Man beachte, dass der Bayes-Faktor H_0 und H_1 gleichberechtigt behandelt. Daraus erwächst die Möglichkeit, auch die Evidenz *zugunsten* der Null-Hypothese zu quantifizieren (Kass und Raftery 1995, S. 777). Dies ist im p-Wert basierten Standardverfahren gerade nicht möglich (vgl. auch Fußnote 14).

32. Es gilt dann: $P(D|H_1) = \int P(D|\mu)P(\mu|H_1)d\mu$. Man beachte, dass für die Berechnung des *Likelihood* bezüglich der Null-Hypothese ($\mu_1 = \mu_2$) keine A-priori-Verteilung spezifiziert werden muss.

33. Die Literatur enthält verschiedene Vorschläge für die Interpretation von Bayes-Faktoren. So schlagen z.B. Kass und Raftery 1995 vier Kategorien vor: BF_{10} von 1 bis 3 („Not worth more than a bare mention"), 3–20 („Positive"), 20–150 („Strong") und > 150 („Very strong"). Offensichtlich sind solche Kategorien ebenfalls der Kritik ausgesetzt, die im Falle der p-Werte erhoben wird, nämlich eine willkürliche Klassifizierung von Forschungsresultaten vorzunehmen. Kass und Raftery (1995, S. 777) schränken deshalb ein: „[...] these categories are [...] a rough descriptive statement about standards of evidence in scientific investigation." Allerdings ist die Willkürlichkeit des Kriteriums $p < 0,05$ nicht die einzige (geschweige denn entscheidende) Kritik am Null-Hypothesen Signifikanztest.

34. Ein besonders einfaches Ergebnis dieser Art ist die sog. Benjamin-Berger-*bound* (BBB) für den Bayes-Faktor (Bayarri et al. 2016): $\mathrm{BF} \leq BBB = \frac{1}{-ep\ln p}$. Einige unserer numerischen Analysen zeigen jedoch, dass für viele relevante Fälle die Güte dieser Abschätzung mangelhaft ist. Von ihrer unkritischen Anwendung ist somit abzuraten.

Thomas J. Faulkenberry hat ein besonders einfaches Näherungsverfahren für ANOVA und t-Test Anwendungen entwickelt, das auf dem *Bayesian Information Criterion* (Raftery 1995) basiert. Als Anwendung diskutiert Faulkenberry (2018) eine Studie, bei der die Wirkung von Koffein auf die Merkfähigkeit untersucht wurde. Versuchs- und (Placebo behandelte) Kontrollgruppe bestanden aus zusammen $n = 73$ Probanden. Der t-Test ergab hier $t(71) = 2,0$, was (zweiseitig) einem Wert von $p = 0,049$ entspricht. Auf dieser Grundlage kann also eine „signifikante" Wirkung von Koffein behauptet werden. Die Näherungsformel für den Bayes-Faktor ergibt jedoch (Faulkenberry 2018, S. 38):

$$\begin{aligned} \mathrm{BF}_{10} &\approx \sqrt{\frac{\left(1+\frac{t^2}{n-2}\right)^n}{n}} \\ &\approx 0,87 \end{aligned} \tag{10}$$

Ein Bayes-Faktor $\mathrm{BF}_{10} < 1$ liefert jedoch keinen Hinweis *gegen*, sondern ganz im Gegenteil *für* die Null-Hypothese. Dieses Resultat kann intuitiv verstanden werden, obwohl es in der Literatur als „Lindley Paradoxie" bezeichnet wird (Lindley 1957). Falls die p-Wert-Verteilung unter der *alternativen* Hypothese bei kleinen p-Werten ($p \ll 0,05$) konzentriert ist, ist die Wahrscheinlichkeit für $p \approx 0,05$ bei Zutreffen der Null-Hypothese größer als bei Zutreffen von H_1. Der Bayes-Faktor analysiert genau dieses Verhältnis, während der p-Wert des konventionellen Tests nur von der Null-Hypothese abhängt. Dieses Beispiel illustriert somit ein weiteres Argument gegen den Null-Hypothesen Signifikanztest.

In der Regel führt die Bayes-Faktor Analyse jedoch nicht zu den entgegengesetzten Resultaten, sondern lediglich zu einer *konservativeren* Einschätzung der jeweiligen „Evidenz" für die Ablehnung der Null-Hypothese. Aus dieser Tatsache könnte also gefolgert werden, dass eine Absenkung der Signifikanzschwelle bereits einen wertvollen Beitrag zu einer verbesserten statistischen Praxis liefert. In der Tat ist dieser Vorschlag in der Vergangenheit immer wieder diskutiert worden. Zuletzt haben 72 Forscher*innen in Benjamin et al. (2018) die Forderung der Herabsetzung der Signifikanz-Schwelle von $p < 0,05$ auf $p < 0,005$ erhoben. Für Resultate mit p-Werten zwischen $0,05$ und $0,005$ schlagen sie die Bezeichnung „*suggestive*" vor.

Dieser Vorschlag löst aber offensichtlich nicht die grundsätzlichen Probleme des p-Wertes, und selbst Anhänger des $0,005$-Kriteriums argumentieren, dass ihre Forderung vor allem durch die leichte Umsetzbarkeit motiviert sei und alleine nicht ausreiche (Benjamin und Berger 2019).[35] Diese Forderung bedeutet im Übrigen

35. Immerhin gilt für die Ioannidis-Argumentation: Setzt man in die Gleichung 1 für $\alpha = 0,005$,

nicht, dass die Ergebnisse identischer Studiendesigns nur strenger bewertet werden. Die Herabsetzung der Signifikanzschwelle bei unveränderter Stichprobengröße führt nämlich zu einer drastischen Reduzierung der Teststärke. Soll diese konstant gehalten werden, muss der Stichprobenumfang beträchtlich vergrößert werden – im konkreten Bsp. um ca. 70% (Benjamin et al. 2018). Eine grundsätzliche Kritik an der Herabsetzung der Signifikanzschwelle findet sich bei Trafimow et al. (o.Dat.). Dieser (54-köpfigen) Autor*innengruppe ist der Vorschlag zu halbherzig, und sie argumentieren, dass er in einigen Fällen sogar zu einer Verschlechterung der Situation führen könne.

Man beachte zudem, dass für die Angabe des Verhältnisses der A-posteriori Wahrscheinlichkeiten von H_1 und H_0 (also innerhalb der Bayesschen Statistik) der Bayes-Faktor mit dem Verhältnis der A-priori-Wahrscheinlichkeiten multipliziert werden muss. Am konkreten Beispiel argumentiert: Falls ein parapsychologisches Experiment durchgeführt wird, bei dem die Null-Hypothese die Abwesenheit eines solchen Effektes behauptet, gilt für die meisten wohl $\frac{P(H_1)}{P(H_0)} \ll 1$. Um diesen begründeten Zweifel an der Parapsychologie in eine nennenswerte A-posteriori Wahrscheinlickeit zugunsten von H_1 zu verwandeln, braucht es offensichtlichen einen Bayes-Faktor $BF \gg 1$. In *dieser* Situation könnte etwa eine Messung mit $\mathrm{BF} = 20$ ("strong evidence" in der Taxonomie von Kass und Raftery (1995)) keine ausreichende Evidenz für die Ablehnung der Null-Hypothese stiften. Mit anderen Worten: Der gesamte Kontext, vorherige Studienergebnisse und theoretische Argumente müssen immer in die Bewertung der Daten einfließen.[36]

3.1.3 Bayessche und frequentistische Vertrauensintervalle

In der Literatur findet sich häufig der Hinweis, dass die Angabe von Vertrauens- bzw. Konfidenzintervallen einen wichtigen Beitrag zur Verbesserung der statistischen Praxis darstelle. Aber auch die Interpretation von derartigen Intervallen ist in der frequentistischen Statistik nicht frei von Missverständnissen.

$\beta = 0,5$ und $r = 0,1$ ein, hat die *true positive rate* einen schon recht vertrauenerweckenden Wert von $P(e|+) = 0,92$. Man beachte jedoch, dass der Einfluss von *publication bias* in Gl. 1 nicht eingeht.

36. Dieses Beispiel ist weniger absurd als es zunächst erscheint. Im Jahr 2011 veröffentlichte eine renommierte Fachzeitschrift eine Studie des emeritierten Psychologieprofessors Daryl Bem von der Cornell Universität. In ihr wird behauptet, dass Menschen zur „Präkognition", d.h. der Wahrnehmung zukünftiger Ereignisse, fähig seien. Die Studie belegt ihre These mit einem Null-Hypothesen Signifikanztest mit $p = 0,01$ und einer Effektstärke von $d = 0,25$ (Bem 2011). Versuche einer Replikation sind gescheitert (Ritchie et al. 2012). Eine interessante Re-Analyse der Bem-Daten führen Rouder und Morey 2011 durch.

Weit verbreitet ist etwa die Vorstellung, das Konfidenzniveau gebe die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass sich der Wert des untersuchten Parameters innerhalb des Konfidenzintervalls befindet. In der frequentistischen Statistik lässt sich jedoch eine solche Wahrscheinlichkeitsaussage gar nicht formulieren, da der Parameter (eine unbekannte Größe mit festem Wert) keine Zufallsvariable ist. Deshalb sagt ein Vertrauensintervall auf z.B. dem 95%-Niveau auch nicht, dass 95% der zukünftigen Messungen des Parameters in dieses Intervall fallen (Morey et al. 2016). Was das Konfidenzniveau stattdessen angibt, ist die Rate, mit der bei zukünftigen Messungen die *dann* berechneten Vertrauensintervalle den unbekannten Wert des Parameters enthalten.[37]

Die Wurzeln dieser Missverständnisse sind also dieselben, welche bereits die p-Wert Interpretation beim Null-Hypothesen Signifikanztest erschwert haben. Tatsächlich kann der Hypothesentest auch als Berechnung eines Vertrauensintervalls formuliert werden: Liegt z.B. beim t-Test die Null außerhalb des 95% Vertrauensintervalls der Mittelwertdifferenz, entspricht dies einem „signifikanten" Resultat mit $p < 0,05$. Verwendet man die Vertrauensintervalle also bloß als Umformulierung des Null-Hypothesen Signifikanztests, hat man keinen Fortschritt erzielt. Diese Verwendung ist aber nicht die einzig mögliche, und die Betrachtung von Vertrauensintervallen kann den erwünschten Effekt haben, den Fokus auf den gesamten Bereich der (mit den Daten kompatiblen) Effektstärken zu lenken. Zusätzlich liefern Vertrauensintervalle Informationen über die *Genauigkeit* der Schätzung, die ein p-Wert nicht enthält.

Vielfach stellt sich aber auch gar nicht das Problem, eine statistische Hypothese zu testen, sondern es geht darum, die Parameterwerte eines Modells anhand vorliegender Daten zu schätzen – man denke an Erwartungswerte, Korrelationskoeffizienten oder Koeffizienten eines allgemeineren linearen oder nichtlinearen Modells. Dies führt unmittelbar auf die Berechnung von Vertrauensintervallen für die beteiligten Parameter.

Es gibt nun auch eine naheliegende Bayessche Version der Intervallschätzer, die als „credential intervals" bezeichnet werden. Im Rahmen der A-posteriori-Verteilung (eindimensional für einen einzigen Parameter, mehrdimensional für einen Satz von Parametern) kann man Intervalle bilden (etwa um einen punktuellen Schätzwert), auf die eine gewisse Wahrscheinlichkeit entfällt. Die oben erwähnten Interpretationen, die bei frequentistischen Vertrauensintervallen nicht zutreffen, sind bei Bayesschen „credential intervals" also gerade zulässig.

37. In Hoekstra et al. (2014) wird die Verbreitung solcher Fehlinterpretationen untersucht. Von den ca. 600 befragten Studierenden und Lehrenden der Psychologie vertreten nahezu alle eine inkorrekte Interpretation des Vertrauensintervalls.

Die gute Nachricht in diesem Kontext: Die traditionellen frequentistisch gebildeten Vertrauensintervalle stimmen (für gewisse Standard-A-priori Verteilungen) vielfach *quantitativ* recht gut mit den Bayesschen „credential intervals" überein.

Wieder gilt natürlich, dass die Bayessche Analyse mehr Feindetail verlangt, aber auch ihre Flexibilität bei der Wahl der A-priori-Verteilungen ausspielen kann und am Ende auch detailliertere Resultate gewährt. Es ist bezeichnend, dass eine gute Übereinstimmung beider Versionen an die Bedingung geknüpft ist, dass „suffiziente" Statistiken vorliegen. Dies ist z.B. bei Mittelwerten oder auch Korrelationskoeffizienten erfüllt.[38] Eine genauere Darstellung findet man bei Tschirk (2019, Kap. 7.2). Lesenswert ist in diesem Zusammenhang auch der streitbare Artikel von Jaynes (1976).

Wir schlagen zwar vor, die Bayessche Alternative stärker zu berücksichtigen, wollen aber nicht verhehlen, dass Fehlinterpretationen auch in diesem Rahmen auftreten (Hoijtink et al. 2016; Herrera-Bennett et al. 2020). Ebenfalls sei angemerkt, dass einige Vertreter der Bayes-Schule durch ihre Verbissenheit und Polemik ihrer Sache nicht unbedingt gedient haben (siehe hierzu etwa Jaynes (1976)).

4 Zusammenfassung

Das Paradigma der „Evidenzbasierung" in den Fachdidaktiken und Bildungswissenschaften verlangt empirische Wirksamkeitsnachweise für Programme und Interventionen. Der p-Wert eines Null-Hypothesen Signifikanztests ist jedoch ein wenig geeignetes und dazu mit fehlerhaften Interpretationen behaftetes Maß für diese „Evidenz".

Problematische Eigenschaften des Null-Hypothesen Signifikanztests sind seit langem bekannt, haben jedoch durch die sog. „Replikationskrise" eine erneute Aufmerksamkeit erfahren. Diese Krise hat in der gängigen Praxis der Datenanalyse sicherlich *eine* Ursache, aber diese Praxis muss in einem größeren Zusammenhang gesehen werden. Zahlreiche Reformvorschläge zielen deshalb auf die institutionelle Verfasstheit des gesamten Wissenschaftssystems (Munafò et al. 2017).

Einige Maßnahmen sind jedoch unmittelbar umsetzbar. Wir schließen uns gerne der Empfehlung an, den Begriff „statistisch signifikant" nicht mehr zu verwenden (Wasserstein et al. 2019), da er zu einer unangemessenen Dichotomisierung der Forschungsergebnisse führt. Aus den Befunden leitet sich ebenfalls die Forderung ab,

38. „Suffiziente" bzw. „erschöpfende" Statistiken enthalten grob gesprochen sämtliche Informationen über die zu schätzenden Parameter des Modells (Lehmann und Casella 1998, S. 31).

zumindest zentrale Resultate zum Gegenstand von Replikationsstudien zu machen. Wir glauben ebenfalls, dass der Bayessche Theorierahmen eine sinnvolle Ergänzung des Methodenrepertoires der quantitativen empirischen Bildungsforschung darstellt.

Daneben weisen unsere Argumente auch auf prinzipielle Grenzen in der Anwendbarkeit quantitativer Methoden hin. Die gelegentlich erhobene Forderung, dass fachdidaktische Forschung notwendig „evidenzbasiert“ sein müsse, lässt sich nur dann sinnvoll begründen, wenn der Evidenzbegriff weiter gefasst wird.

In erster Linie verstehen wir diese Arbeit jedoch als Beitrag zu einer hoffentlich breiten Diskussion zur weiteren Steigerung der Qualität der fachdidaktischen Forschung.

Danksagung

Unser besonderer Dank geht an Thomas Zügge (U Wuppertal), der mit dem Hinweis auf die Veröffentlichung Wasserstein et al. (2019) die gesamte Arbeit angestoßen hat. Wir danken ebenfalls Kai Blume, Michael Rochnia, Johannes Grebe-Ellis (alle U Wuppertal), Andy Field (University of Sussex), Ron Wasserstein (American Statistical Association), Nicole Lazar (University of Georgia), Jörn-Steffen Pischke (London School of Economics), Christof Schuster (U Giessen), Thomas J. Faulkenberry (Tarleton State University), Christoph Leuenberger (Université de Fribourg), Andreas Müller (Université de Genève) und Gerd Gigerenzer (MPI für Bidungsforschung, Berlin) für hilfreiche Anmerkungen zu einzelnen Fragen dieser Arbeit.

Literaturverzeichnis

Ahrbeck, B., Ellinger, S., Hechler, O., Koch, K. und Schad, G. (2016) *Evidenzbasierte Pädagogik – Sonderpädagogische Einwände*. Stuttgart: Verlag W. Kohlhammer.

Amrhein, V., Trafimow, D. und Greenland, S. (2019) Inferential Statistics as Descriptive Statistics: There Is No Replication Crisis if We Don't Expect Replication. *The American Statistician* **73**:sup1: 262-270.

Azizi Ghanbari, S. (2002) *Einführung in die Statistik für Sozial- und Erziehungswissenschaftler*. Berlin, Heidelberg: Springer.

Bakker, A., Cai, J., English, L., Kaiser, G., Mesa, V. und Van Dooren, W. (2019) Beyond small, medium, or large: points of consideration when interpreting effect sizes. *Educational Studies in Mathematics* **102**:1–8.

Bar-Hillel, M. (1980) The base rate fallacy in probability judgments. *Acta Psychologica* **44**: 211–233.

Bayarri, M. J., Benjamin, D. J., Berger, J. O. und Sellke, T. M. (2016) Rejection odds and rejection ratios: A proposal for statistical practice in testing hypotheses. *Journal of Mathematical Psychology* **72**: 90–103.

Baumert, J. und Tillmann, K.-J. (Hrsg.) (2016) Empirische Bildungsforschung – Der kritische Blick und die Antwort auf die Kritiker. *Zeitschrift für Erziehungswissenschaften* **19** Sonderheft 31.

Bellmann, J. und Müller, T. (2011) Evidenzbasierte Pädagogik – ein Déjà-vu? In: J. Bellmann und T. Müler (Hrsg.) *Wissen, was wirkt – Kritik evidenzbasierter Pädagogik*. Wiesbaden: VS Verlag, S. 9–32.

Bellmann, J. (2016) Datengetrieben und/oder evidenzbasiert? *Zeitschrift für Erziehungswissenschaften* **19** (Sonderheft 31):147–161.

Bem, D. J. (2011) Feeling the future: Experimental evidence for anomalous retroactive influences on cognition and affect. *J. Pers. Soc. Psychol.* **100**: 407–425.

Benjamin, D. J., Berger, J.O., Johannesson, M. et al. (2018) Redefine statistical significance. *Nat. Hum. Behav.* **2**: 6–10.

Benjamin, D. J. und Berger, J. O. (2019) Three Recommendations for Improving the Use of p-Values. *The American Statistician* **73**: sup1, 186–191.

Bergeron, P.-J. und Rivard, L. (2017) How to engage in pseudoscience with real data: A criticism of John Hattie's argument in *Visible Learning* from the perspective of a statistician. *McGill Journal of Education* **52**(1): 237–246.

Berliner, D. C. (2002) Educational Research:The Hardest Science of All. *Educational Researcher* **31**(8): 18–20.

Boos, D. D. und Stefanski, L. A. (2011) P-Value Precision and Reproducibility. *The American Statistician* **65**(4): 213–221.

Bortz, J. und Döring, N. (2006) *Forschungsmethoden und Evaluation für Human- und Sozialwissenschaftler.* (4., überarbeitete Auflage) Heidelberg: Springer.

Bortz, J., Lienert, G. A., Barskova, T., Leitner, K. und Oesterreich, R. (2008) *Kurzgefasste Statistik für die klinische Forschung.* (3. aktualisierte und bearbeitete Auflage) Heidelberg: Springer Medizin Verlag.

Brassil, C. E. und Couch, B. A. (2019) Multiple-true-false questions reveal more thoroughly the complexity of student thinking than multiple-choice questions: a Bayesian item response model comparison. *International Journal of STEM Education* **6**: 16.

Buchhaas-Birkholz, D. (2008) Die ‚empirische Wende' in der Bildungspolitik und in der Bildungsforschung: Zum Paradigmenwechsel des BMBF im Bereich der Forschungsförderung. *Erziehungswissenschaft* **20**(39): 27–33

Carpenter, S. (2012) Psychology's bold initiative. *Science* **335**: 1558–1560

Carver, R. P. (1978) The Case Against Statistical Significance Testing. *Harvard Educational Review* **48**(3): 378–399.

Caticha, A. (2008) *Lectures on Probability, Entropy, and Statistical Physics.* Invited lectures at MaxEnt 2008, the 28th International Workshop on Bayesian Inference and Maximum Entropy Methods in Science and Engineering (July 8–13, 2008, Boraceia Beach, São Paulo, Brazil) https://arxiv.org/abs/0808.0012.

Cheung, A. C. K. und Slavin, R. E. (2016) How Methodological Features Affect Effect Sizes in Education. *Educational Researcher* **45**(5): 283–292.

Coe, R. (1999) Manifesto for Evidence-Based Education. Abrufbar unter: http://www.cem.org/attachments/ebe/manifesto-for-ebe.pdf (3. 5. 2019).

Cohen, R. (1997) The Earth is Round ($p < .05$). In: L. L. Harlow, S. A. Mulaik und J. H. Steiger (Hrsg.) *What If There Were No Significance Tests?* New York, London: Taylor and Francis 21–35.

Colquhoun, D. (2014) An investigation of the false discovery rate and the misinterpretation of p-values. *R. Soc. open sci.* **1**(3): 1–16.

Conlin, L. D., Kuo, E. und Hallinen, N. R. (2019) How null results can be significant for physics education research. *Physical Review Physics Education Research* **15**: 020104.

Cooper, M. M. (2018) The Replication Crisis and Chemistry Education Research. *Journal of Chemical Education* **95**: 1–2.

D'Agostini, G. (1999) *Bayesian Reasoning in High-Energy Physics: Principles and Applications.* CERN Report 99-03.

Dollaghan, C. A. (2007) *The Handbook for Evidence-Based Practice in Communication Disorders.* Baltimore: Paul H. Brookes Pub.

Efron, B. (1986) Why Isn't Everyone a Bayesian? *The American Statistician* **40**(1): 1–5.

Efron, B. (2005) Modern Science and the Bayesian-Frequentist Controversy. Stanford University, Technical Report No. 2005-21B/236. Abrufbar unter: https://statistics.stanford.edu/sites/g/files/sbiybj6031/f/BIO236.pdf.

Etz, A., Gronau, Q. F., Dablander, F., Edelsbrunner, P. A. und Baribault, B. (2018) How to become a Bayesian in eight easy steps: An annotated reading list. *Psychonomic Bulletin & Review* **25**(1): 219–234.

Faulkenberry, T. J. (2018) Computing Bayes factors to measure evidence from experiments: An extension of the BIC approximation. *Biometrical Letters* **55**(1): 31–43.

Fisher, R.A. (1925) *Statistical Methods for Research Workers.* In: R.A. Fisher (1990) *Statistical Methods, Experimental Design and Scientific Inference.* Oxford: Oxford University Press.

Fuchs, M. (2016) „Wissen, was wirkt" – Anmerkungen zur evidenzbasierten Bildungspolitik im Bereich der kulturellen Bildung. In: *KULTURELLE BILDUNG ONLINE* https://doi.org/10.25529/92552.478 (letzter Zugriff am 29.05.2019).

Gelman, A., Carlin, J. B., Stern, H. S., Dunson, D. B., Vehtari, A. und Rubin, D. B. (2014) *Bayesian Data Analysis.* 3rd Edition, Boca Raton, FL: Taylor & Francis. Siehe http://www.stat.columbia.edu/~gelman/book/ für die Homepage zu diesem Werk.

Gillies, D. (2000) *Philosophical Theories of Probability.* London: Routledge.

Gigerenzer, G., Swijtink, Z., Porter T., Daston, L., Beatty, J., und Krueger, L. (1989) *The empire of chance: How probability changed science and everyday life.* Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Gigerenzer, G. (1998) Surrogates for Theories. *Theory & Psychology* **8**(2): 195–204.

Gigerenzer, G., Krauss, S. und Vitouch, O. (2004) The Null Ritual – What You Always Wanted to Know About Significance Testing but Were Afraid to Ask. In: D. Kaplan (Hrsg.) *The Sage handbook of quantitative methodology for the social sciences* Thousand Oaks, CA: Sage (S. 391–408).

Goodman, S. N. (1993) *p* Values, Hypothesis Tests, and Likelihood: Implications for Epidemiology of a Neglected Historical Debate. *American Journal of Epidemiology* **137**(5): 485–496.

Goodman, S. N. (1999) Toward Evidence-Based Medical Statistics. 1: The P Value Fallacy. *Ann. Intern. Med.* **130**: 995–1004.

Goodman, S. N. (2008) A dirty Dozen: Twelve P-Value Misconceptions. *Seminars in Hematology* **45**(3): 135–140.

Goodman, S. N., Fanelli, D. und Ioannidis, J. P. A. (2016) What does research reproducibility mean? *Science Translational Medicine* **8**: 341ps12.

Greenberg, E. (2008) *Introduction to Bayesian Econometrics*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Greenwald, A. G., Gonzalez, R., Harris, R. J. und Guthrie, D. (1996) Effect sizes and p values: What should be reported and what should be replicated? *Psychophysiology* **33**(2): 175–183.

Hájek, A. (2019) Interpretations of Probability. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Fall 2019 Edition), Edward N. Zalta (Hrsg.) https://plato.stanford.edu/archives/fall2019/entries/probability-interpret/.

Haller, H. und Krauss, S. (2001) Misinterpretations of Significance: A Problem Students Share with Their Teachers? *Methods of Psychological Research* **7**(1): 1–20.

Herrera-Bennett, A. C., Heene, M., Lakens, D. und Ufer, S. (2020) Improving statistical inferences: Can a MOOC reduce statistical misconceptions about p-values, confidence intervals, and Bayes factors? *PsyArXiv* https://doi.org/10.31234/osf.io/zt3g9.

Head, M.L., Holman, L., Lanfear, R., Kahn, A.T. und Jennions, M.D. (2015) The Extent and Consequences of P-Hacking in Science. *PLOS Biology* **13**(3): e1002106.

Held, L. und Ott, M. (2018) On p-Values and Bayes Factors. *Annu. Rev. Stat. Appl.* **5**: 393–419.

Hoekstra, R., Morey, R. D., Rouder, J. N. und Wagenmakers, E.-J. (2014) Robust misinterpretation of confidence intervals. *Psychonomic Bulletin & Review* **21**(5): 1157–1164.

Hoijtink, H., van Kooten, P. und Hulsker, K. (2016) Why Bayesian Psychologists Should Change the Way They Use the Bayes Factor. *Multivariate Behavioral Research* **51**(1): 2–10.

Hubbard, R., and Bayarri, M. J. (2003) Confusion over measures of evidence (p's) versus errors (α's) in classical statistical testing. *The American Statistician* **57**: 171–182.

Ioannidis, John P.A. (2005) Why Most Published Research Findings Are False. *PLoS Medicine* **2** (8): 124.

Ioannidis, J. P. A. (2012) Why Science Is Not Necessarily Self-Correcting. *Perspectives on Psychological Science* **7**(6): 645–654.

Ioannidis, J. P. A. (2019) What Have We (Not) Learnt from Millions of Scientific Papers with P Values? *The American Statistician* **73**: sup1, 20–25.

Jahnke, T. (2009) Kritik empirischer Unvernunft – zur sogenannten Empirischen Bildungsforschung in der Mathematikdidaktik. In M. Neubrand (Hrg.) *Beiträge zum Mathematikunterricht 2009* (S. 671–674). Münster: WTM-Verlag.

Jaynes, E. T. (1976) Confidence Intervals vs. Bayesian Intervals. In: W. L. Harper und C. A. Hooker (Hrsg.) *Foundation of Probability Theory, Statistical Inference, and Statistical Theories of Science* Dordrecht, Holland: D. Reidel Publishing Company.

Jaynes, E.T. (2003) *Probability Theory. The Logic of Science.* New York: Cambridge University Press.

Joyce, K. E. und Cartwright, N. (2018) Meeting our standards for educational justice: Doing our best with the evidence. *Theory and Research in Education* **16**(1): 3–22.

Kass, R. E. und Raftery, A. E. (1995) Bayes Factors. *Journal of the American Statistical Association* **90**(430): 773–795.

Klenke, A. (2006) *Wahrscheinlichkeitstheorie.* Berlin, Heidelberg: Springer.

Kline, R. B. (2013) *Beyond significance testing – statistics reform in the behavioral sciences.* Baltimore: United Book Press.

Knaub, A. V., Aiken, J. M. und Caballero, M. D. (2019) Editorial: Focused Collection: Quantitative Methods in PER: A Critical Examination. *Phys. Rev. Phys. Educ. Res.* **15**: 020001.

Koch, K. (2016) Ankunft im Alltag – Evidenzbasierte Pädagogik in der Sonderpädagogik. In: Ahrbeck et al. 2016, 9–41.

Krell, M., und Vierarm, A. (2016). Analyse schwierigkeitserzeugender Aufgabenmerkmale bei einem Multiple-Choice-Test zum Experimentieren. In M. Hammann und U. Gebhard (Hrsg.), *Lehr- und Lernforschung in der Biologiedidaktik.* Band 7 (S. 283–298) Innsbruck: Studienverlag.

Krüger, D., Parchmann, I. und Schecker, H. (Hrsg.) (2014) *Methoden in der naturwissenschaftsdidaktischen Forschung.* Heidelberg: Springer.

Lehmann, E. L. (1993) The Fisher, Neyman-Pearson Theories of Testing Hypotheses: One Theory or Two? *Journal of the American Statistical Association* **88**(424): 1242–1249.

Lehmann, E. L. und Casella, G. (1998) *Theory of Point Estimation* (2nd ed.) New York: Springer.

Lindley D.V. (1957): A statistical paradox. *Biometrika* **44**(1-2): 187–192.

Loftus, G. R. (1996) Psychology will be a Much Better Science When We Change the Way We Analyze Data. *Current Directions in Psychological Science* **5**(6): 161–171.

Makel, M. C. und Plucker, J. A. (2014) Facts Are More Important Than Novelty: Replication in the Education Sciences. *Educational Researcher* **43**(6): 304–316.

Morey, R. D., Hoekstra, R., Rouder, J.N., Lee, M. D. und Wagenmakers, E.-J. (2016) The fallacy of placing confidence in confidence intervals. *Psychon. Bull. Rev.* **23**: 103–123.

Munafò, M., Nosek, B., Bishop, D., Button, K., Chambers, C., Percie du Sert, N., Simonsohn, U., Wagenmakers, E.-J., Ware, J. and Ioannidis, J. (2017) A manifesto for reproducible science. *Nat Hum Behav* **1**: 0021.

Neyman, J. und Pearson, E. (1933) On the problem of the most efficient tests of statistical hypothesis. *Philosophical Transactions of the Royal Society* Series A **231**: 289–337.

Nickerson, R. S. (2000) Null hypothesis significance testing: a review of an old and continuing controversy. *Psychol Methods* **5**(2): 241–301.

Open Science Collaboration (2015) Estimating the reproducibility of psychological science. *Science* **349**(6251): aac4716.

Pashler, H. und Harris, C. R. (2012) Is the Replicability Crisis Overblown? Three Arguments Examined. *Perspectives on Psychological Science* **7**(6): 531–536.

Pashler, H. und Wagenmakers, E. (2012) Editors' Introduction to the Special Section on Replicability in Psychological Science: A Crisis of Confidence? *Perspectives on Psychological Science* **7**(6): 528–530.

Raftery, A. E. (1995) Bayesian model selection in social research. In P. V. Marsden (Hrg.) *Sociological methodology* (S. 111–196) Cambridge, MA: Blackwell.

Renn, J. und Schützeichel, R. (2018) Noch einmal: Einheit der Soziologie in der Vielfalt ihrer Paradigmen? *Zeitschrift für Theoretische Soziologie* **7**(1): 129–131.

Ritchie, S. J., Wiseman, R. und French C. C. (2012) Failing the Future: Three Unsuccessful Attempts to Replicate Bem's 'Retroactive Facilitation of Recall Effect'. *PLoS ONE* **7**(3): e33423.

Rosenthal, R. (1979) The file drawer problem and tolerance for null results. *Psychological Bulletin* **86**(3): 638–641.

Rouder, J. N. und Morey, R. D. (2011) A Bayes factor meta-analysis of Bem's ESP claim, *Psychon. Bull. Rev.* **18**: 682–689.

Sachs, L. (2004) *Angewandte Statistik.* (11. überarbeitete und aktualisierte Auflage) Heidelberg: Springer.

Schecker, H., Parchmann, I. und Starauschek, E. (2016) Fachlichkeit der Fachdidaktik - Standortbestimmung und Perspektiven. In: C. Maurer (Hrsg.) *Authentizität und Lernen – das Fach in der Fachdidaktik.* Universität Regensburg, 25–27.

Sedlmeier, P. (1996) Jenseits des Signifikanztest-Rituals: Ergänzungen und Alternativen. *Methods of Psychological Research* **1**(4): 41–63.

Simonsohn, U., Nelson, L. D. und Simmons, J. P. (2014) P-Curve and Effect Size: Correcting for Publication Bias Using Only Significant Results. *Perspectives on Psychological Science* **9**(6): 666–681.

Slavin, R. E. (2002) Evidence-Based Education Policies: Transforming Educational Practice and Research. *Educational Researcher* **31**(7): 15–21.

Trafimow, D. et al. (2018) Manipulating the Alpha Level Cannot Cure Significance Testing. *Front. Psychol.* **9**: 699.

Tschirk, W. (2019) *Bayes-Statistik für Human und Sozialwissenschaften.* Berlin, Heidelberg: Springer.

Tooley, J. und Darby, D. (1998) *Educational Research: A critique.* London: Office for Standards in Education.

Wegmann, D. und Leuenberger, C. (2019) Statistical Modeling and Inference in Genetics. In: David Balding Ida Moltke John Marioni (Hrg.) *Handbook of Statistical Genomics: Two Volume Set* (Fourth Edition) New York: Wiley.

Wasserstein, R. L. und Lazar, N. A. (2016) The ASA Statement on p-Values: Context, Process, and Purpose. *The American Statistician* **70**(2): 129–133.

Wasserstein, R. L., Schirm, A. L. und Lazar, N. A. (2019) Moving to a World Beyond „$p < 0.05$“. *The American Statistician* **73**: sup1, 1–19.

Wittmann, E. Ch. (2015) Strukturgenetische didaktische Analysen – empirische Forschung „erster Art“ *mathematica didactica* **38**: 239–255.

Ziliak, S. T. und McCloskey, D. N. (2008) *The Cult of Statistical Significance: How the Standard Error Costs Us Jobs, Justice and Lives.* Ann Arbor: University of Michigan Press.

Wurzeln des Markscheidewesens im Spiegel gelehrter Schriften: Eine mathematikhistorisch-bibliographische Analyse

Toni Reimers

Motivation und Problemaufriss

Noch im 18. Jahrhundert wurde das Markscheidewesen zur sogenannten *Angewandten Mathematik* adjungiert; die noch zu Beginn dieses Jahrhunderts usuelle Bezeichnung als *Geometria Subterranea* – also unterirdisch betriebener Geometrie – zeugt davon.

Die Markscheidekunde befasst sich unter anderem mit Messungen, Kalkulationen und Illustrationen für bergbauliche Zwecke über und unter Tage. Bei den Messungen geht es primär um die Aufnahme bestehender oder Angaben geplanter Anlagen; Aufnahmeergebnisse nützen primär der Illustration, während durch Angaben in Karten oder Plänen eingezeichnete Entwürfe in die Örtlichkeit übertragen werden. Bei Kalkulationen werden einerseits Messergebnisse für das Fertigen von Rissen zweckkonform transformiert, andererseits Flächen und Massen dem Inhalt nach eruiert. In Illustrationen werden die Tagesoberfläche, Grubenbaue und Lagerungsrelationen sowie juristische, kontraktliche und sicherheitliche Grenzen der Grubenfelder visualisiert. Die drei (auch) **mathematischen Tätigkeiten** – messen, berechnen und darstellen – sind vorrangige Aufgaben des Markscheidens.

Die Markscheidekunst respektive *Geometria Subterranea* als Disziplin zwischen Wissenschaft und Technik, Theorie und Praxis hat in Form historischer Untersuchungen zu drei Geschichtsschreibungen geführt: 1. die Geschichte der Markscheider als Berufsstand, welche Fragen der sozialen Stellung nachging, 2. die Geschichte der Instrumente als Technikgeschichte, welche die Entwicklung der Messgeräte und das Streben nach Präzision studiert, und 3. die Geschichte der Grubenrisse als Teil der Kartographiegeschichte.[1] Der Bergbauhistoriker Hans Baumgärtel stellt in seiner Dissertation 1964 zur Entstehung der Bergbauwissenschaften richtig fest, dass „die Markscheidekunde, obwohl sie – im Gegensatz etwa zur Geologie und Mineralogie – vollständig in den Bereich der Bergbauwisschenschaften gehört, eine Sonderstellung" einnimmt, „indem sie sich von der Landvermessung nicht prinzipiell, sondern nur teilweise durch besondere Arbeitsmethoden und Instrumente unterscheidet", wobei Markscheider nicht nur reine Vermessungstechniker waren, mussten sie doch neben berg*männisch*en auch über mathematische Fähigkeiten verfügen.[2] Ein neuer Blickwinkel wird unter anderem in der Dissertation *Mathématiques et Politiques Scientifiques en Saxe (1765–1861)* des Mathematikhistorikers Thomas Morel eingenommen: er wendet sich der Markscheidekunst aus dem Blickwinkel ihrer unterrichtlichen Einbeziehung im exemplarisch-typischen Kontext einer Bergbau-Schule zu. Morel widmet sich dabei der Markscheidekunst als Teil der Ausbildung an der Bergakademie Freiberg und zeichnet umfangreich die Geschichte von Agierenden und Institutionalisierungen ab der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts nach. Eine bibliographische Untersuchung bergbaulicher Literatur vom Altertum bis nach der *Wissenschaftlichen Revolution* allgemein lieferte Manfred Koch in seiner Dissertation: Eine Darstellung vor*wissenschaft*licher markscheiderischer Schriften gibt es bislang nicht.[3]

Dass die (geometrischen) Kenntnisse unserer Vorfahren im Kontext unterirdischer Grab-, Bau- und Messtätigkeiten weiter zurückreichen, als es uns schriftliche Relikte beweisen lassen, bezeugen archäologische Befunde. Jene stehen allerdings am Anfang einer jeden Wissenschaftsgenese und sind daher für die Wissenschaftsgeschichte im allgemeinen und die mathematikhistorische Forschung von besonderem Interesse: Das Schrifttum fixiert Wissen, das „Voraussetzung und Ergebnis wissenschaftlicher Tätigkeit" ist.[4] Ein Problem, was die Geschichte der Markscheidekunde mit der anderer praktischer *Künste* beziehungsweise Wissenschaften teilt, ist eben der oft erst spätere Einsatz von Verschriftlichung: Kenntnisse und Fertigkeiten wurden durch Mund und Tat weitergegeben. Die folgenden Seiten sollen insofern auch eine gewisse Synopse des vor*wissenschaft*lichen Schrifttums und seiner Entwicklung bieten.

Im Folgenden werden – ohne Anspruch auf Vollständigkeit – gelehrte Schriften

1. Morel 2013, 210.
2. Baumgärtel 1965, 93.
3. Koch 1960.
4. Klaus und Buhr 1974, s. dort „Wissenschaft".

von der Antike bis zum ersten Druck mit Anhangstitel *Markscheidekunst* im Europa des 16. Jahrhundert unter mathematischem Gesichtspunkt analysiert. An ihrer Auswahl lassen sich wesentliche wissenschaftspropädeutische Entwicklungen nachvollziehen. Dabei werden die Feldvermessung als überirdische Mutter der *Geometria Subterranea* tangiert und bei Bedarf knapp auf Geräte- und Technikhistorische Aspekte eingegangen, die allerdings kein Fokus dieser Darstellung sind.[5] Baryzentrum der untersuchten Schriften sind solche mit gelehrter Autorenschaft: Auf die Manuskripte der *Praktiker*[6] wird eher am Rande eingegangen, da jene zeitlich schon die Etablierung der Markscheidekunst als Wissen(schaft)sgebiet ankündigt und somit einen anderen Abschnitt der Genese dieser Disziplin darstellt.

Provenienz der Markscheidekunst in der Feldmesskunst: Antike und mediävale Schriften

Messen, Berechnen und Darstellen sind insbesondere Tätigkeiten der Geometrie:

> „῾Η πρώτη γεωμετρία, ὡς ὁ παλαιός ἡμᾶς διδάσκει / λόγος, περὶ τὰς έν τῇ γῇ μετρήσεις καὶ διανομὰς / κατησχολεῖτο [...].“[7]

Die Geometrie beschäftigte sich also in ihren Anfängen mit den Landvermessungen und -teilungen, wie es in einem Prooimion des griechischen *Mechanicus* Heron von Alexandria (* ca. 10, † ca. 70)[8] heißt. In diesem Satz spiegelt sich die bis heut landläufige These wider, wonach sich mathematische Theorien *ex praxi* heraus entwickeln. „Auch in umgekehrter Richtung wirkt die Beeinflussung; das hat die mathematikhistorische Forschung nicht immer ausreichend wahrgenommen. Bruchstücke aus der mathematischen Theorie können den Weg zurück in die Praxis finden.“[9] Dieser Transfer im Allgemeinen war und ist Forschungsgegenstand der Wissenschaftsgeschichte. In diesem Abschnitt soll gezeigt werden, wie sich schon vor der Renaissance – retrospektiv – markscheiderischen Problemen gewidmet wurde und Unterschiede zum *reinen* Feldvermessen analysiert werden. Heron stand bisher noch nicht im Fokus mathematikhistorischer Untersuchungen unter diesem Aspekt.

5. s. hierzu Wunderlich 1977b; Vollrath 2013.
6. s. hierzu Morel 2020a; Morel 2018.
7. Heron 1903, 2.
8. Drachmann 1972.
9. Scriba und Schreiber 2010, 86.

Herons *Rationes Dimetiendi* und *Commentatio Dioptrica*

Der ostdeutsche Mathematik- und Wissenschaftshistoriker Hans-Ludwig Wußing (* 1927, † 2011) taxierte „das von Heron hinterlassene Werk als eine Art Gegenstück zu den *Elementen* von Euklid“: liegt doch dessen Fokus auf der Deskription mathematischer Inhalte zum praktischen Gebrauch, was in Anbetracht der damaligen (?) Einstellung der Eliten zu leiblichen Tätigkeiten für sich schon notabel ist.[10]

Herons Μετρικῶν (*Rationes Dimetiendi*) und Περὶ Διόπτρας (*Commentatio Dioptrica*) wurden nicht nur von morgenländischen *Allamaht*[11] und abendländischen *Scholares* reflektiert, sondern bildeten darüber hinaus den Untersuchungsgegenstand intensiver wissenschaftshistorischer Forschungen:[12]
Der Mathematikhistoriker Jens Egede Høyrup greift eine These des österreichischstämmigen Mathematikers und Wissenschaftshistorikers Otto Eduard Neugebauer (* 1899, † 1990) auf und ordnet diese beiden Arbeiten Herons auch in den Kontext praktischer Geometriebezüge babylonischer und orientalischer Mathematik ein.[13] Für ihn ist Heron auch ein „transformer of theoretical into applied mathematics“[14] und seine sowie die pseudo-heronischen Werke teilen eine gemeinsame Tradition mit alt-babylonischen quasi-algebraischen Problemen:[15] Ersteres beruht maßgeblich auf der Tatsache, dass Heron aus euklidischen Propositionen neue (anwendungsbezogene) Aussagen herleitet; zweiteres auf der Art, wie Heron mit *Formeln* arbeitet: unterscheidet er doch (bewusst ?) – im Gegensatz zu den meisten anderen *Griechen* – selten zwischen Zahl und Seite(nlänge).[16]
Der englische Mathematikhistoriker und klassische Philologe Thomas Little Heath (* 1861, † 1940) meinte zu Μετρικῶν: Sie sei „ein populäres und unvermeidbares Kompendium wie die Elemente, das – obwohl mehrfach geändert und erweitert – in Rom, Byzanz und Bagdad jahrhundertelang regulären Gebrauch in der Mathematikausbildung fand“.[17]

Die Περὶ Διόπτρας des Heron enthalten unter anderen drei geodätische Vermessungsprobleme, die genuin markscheiderisch sind. Zum einen folgende altimetrische Aufgabe:

10. Wußing 2013, Bd. I, S. 205.
11. Pl. v. *Allamah*: (arab.) Gelehrter.
12. z. B. Neugebauer 1969 u. Heath 1921.
13. Høyrup 2019.
14. Høyrup 2019, 231.
15. Høyrup 2002, 227 ff., s. auch Herrmann 2019, 24 f.
16. Høyrup 2019, 220 ff.
17. Herrmann 2014, 258.

> „Δύο σημείων ὁρωμένων εὑρεῖν τὴν ἀπὸ τοῦ / ἑνὸς αὐτῶν κάθετον ἀγομένην ἐπὶ τὸ διὰ τοῦ ἑτέρου / ἐπίπεδον ἐκβαλλόμενον παράλληλον τῷ ὁρίζοντι μὴ / προσεγγίσαντα τοῖς εἰρημένοις δύο σημείοις τοῖς A, B.“[18]

Wenn also zwei Punkte A und B sichtbar sind, die Höhe zu finden, die von dem einen derselben auf die durch den anderen gelegten Horizont gefällt wird, ohne sich diesen zu nähern. Heron spricht hier also von einer nivellitischen Höhenmessung mit der Dioptra und konkretisiert:

> „[...] Ὄρος ὑπάρχοντος, εὑρεῖν τὴν ἀπὸ τῆς κορυφῆς / αὐτοῦ κάθετον ἀγομένην ἐπί τό δι᾿ ἡμῶν ἐκβαλλόμενον / ἐπίπεδον παράλληλον τῷ ὁρίζοντι [...]“,[19]

dass ergo so ein Berg vorhanden, die Höhe zu finden, die von der Spitze desselben auf den durch [die Dioptra] gelegten Horizont gefällt wird. Eine ähnliche Aufgabe bezieht sich auf die Tiefenmessung eines Grabens.[20] Alle diese altrimetrischen Aufgaben sind naturgemäß relative Höhenmessungen: Stellt doch für Heron intuitiverweise stets die Position der Dioptra den Absolutpunkt dar. Es ist in diesem Kontext generell davon auszugehen, dass – auch wenn es nicht an jeder Stelle explizit geschrieben steht – die Dioptra, deren Konstruktion Heron eingangs mehrere Seiten widmet,[21] vielfach für Messungen und Ausrichtungen bei der Lösung der Probleme zum Einsatz kommt.

Die zweite markscheiderische Aufgabe ist diese:

> „Ὄρος διρύξαι ἐπ᾿ εὐθείας τῶν στομάτων τοῦ / ὀρύγματος ἐν τῷ ὄρει δοθέντων“,[22]

ein Berg ist also in gerader Linie zu durchstechen, wenn an diesem die Grabenmündungen gegeben sind. Eine evidente Anwendung wäre folglich der Bau eines geraden Tunnels durch einen Berg bei gegebenen Tunnelmündungen.

Die Lösung ist so intuitiv wie genial: Wie in der Abb. 1 zu sehen, wird vom Punkt B der einen geplanten Tunnelmündung nach Heron mittels Dioptraeinsatz' ein rechtwinkliger Transversalzug um den Berg zum Punkt Δ der anderen Mündung beschrieben. Durch Konstruktion ähnlicher Dreiecke

$$\mathrm{BO\Xi} \sim \mathrm{BN\Delta} \sim \mathrm{\Delta P\Pi}$$

18. Heron 1903, 230.
19. Heron 1903, 234.
20. Heron 1903, 234.
21. Heron 1903, 190 ff.
22. Heron 1903, 238.

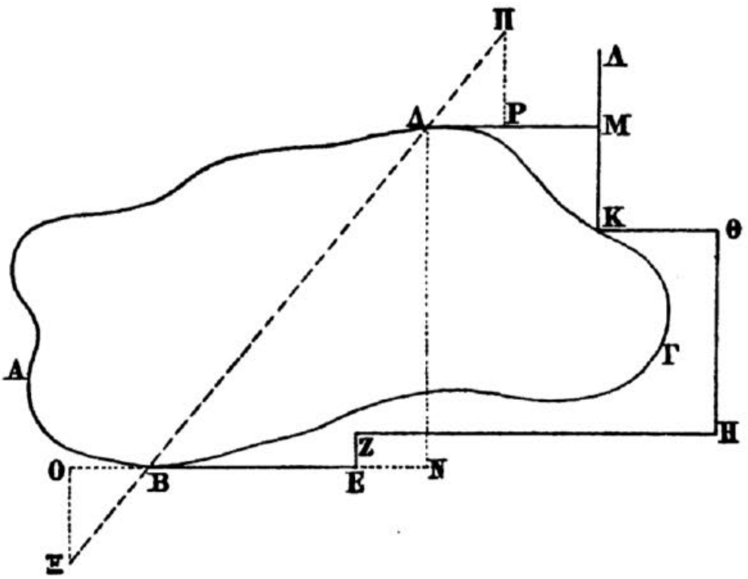


Abbildung 1: Illustration aus der Heron-Edition Commentatio Dioptrica *zur Lösung der Bergdurchstechungsaufgabe, S. 238.*

wird schließlich die Richtung garantiert. Dabei wird verschwiegen, dass Dreiecke zueinander ähnlich sind, wenn sie in einem Winkel – hier einem rechten – und im Verhältnis der anliegenden Seiten übereinstimmen. Für eine erfolgreiche Realisierung ist ferner Komplanarität Prämisse.

Einer Theorie nach, die auch von dem US-amerikanischen Mathematiker Tom Mike Apostol (* 1923, † 2016) vertreten wurde,[23] ist Herons Beschreibung die Manifestation der Konstruktion eines gewissen Eupalinos', der laut Herodots (* ca. 480 v. u. Z., † ca. 420 v. u. Z.)[24] *Historien* als Architekt des Tunnels auf der ostägäischen Insel Samos gilt:

> „ἀρχιτέκτων δέ τοῦ ορύγματοσ τούτου / ἐγένετο Μεγαρεὺς Εὐπαλῖνος“.[25]

Eupalinos' Tunnel, der noch vor Ende des 6. Jahrhunderts vor der Zeitenwende entstanden sein muss,[26] gilt als einer der ersten, der nach dem Verfahren des Gegenortvortriebs realisiert wurde.[27] Dabei wird der Richtstollen von beiden Enden

23. Apostol 2004, 33 ff.
24. Herodot 2007, S. 1290 ff. (Bd. II).
25. Herodot 2007, S. 414 f. (Bd. I).
26. Kienast 1995, 182.
27. Apostol 2004, 32.

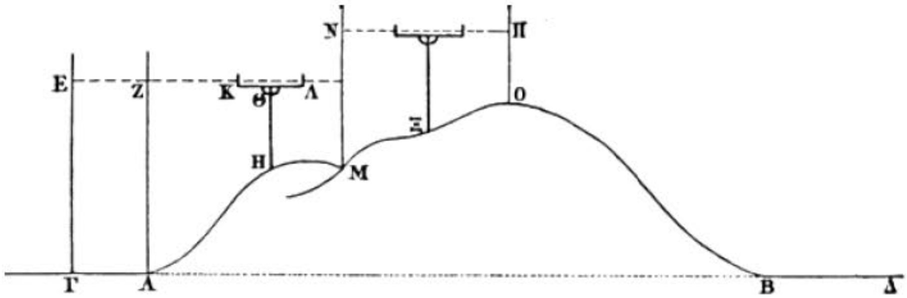


Abbildung 2: Modifizierte Illustration aus der Heron-Edition Commentatio Dioptrica *zur Lösung der Schachtaufgabe, S. 243.*

des zu erstellenden Tunnels aufgefahren. Der fast waagerecht durch den Berg Kastro getriebene Tunnel diente offenbar der Anlage einer Wasserleitung, die mehr als eintausend (!) Jahre lang die Versorgung des heutigen Pythagorio sicherte.[28] Der Bauforscher Hermann Josef Kienast, der in seiner Habilitationsschrift die archäologischen Studien zu Eupalinos Tätigkeit architekturhistorisch analysiert, weist auch auf die epigraphischen Zeugnisse hin, die im Tunnel aufgefunden wurden: Die Buchstabenmarkierungen interpretiert er als Zahlzeichen; offenbar haben sie der Kennzeichnung bau- und messtechnischer Prozesse gedient,[29] womit sie insbesondere markscheiderische Zeichen sind.

Die dritte markscheiderische Aufgabe in Herons *Commentatio Dioptrica* soll hier nur kurz skizziert werden:

> „Φρεατίας ὑπονόμῳ είς ὄπος διορύξαι κατὰ / κάθετον οὔσας τῷ ὑπονόμῳ.“[30]

Es sind also in einen Berg hinein (senkrecht) zu einem [geraden] unterirdischen Kanal, Schächte zu treiben.[31] Die Lösung der Aufgabe ist durch extensiven Gebrauch von Dioptra und Richtlatten sowie deren detaillierter und anwendungsfreundlicher Deskription eminent: mit ihnen werden – ähnlich wie in der Bergdurchstechungsaufgabe – iterativ rechtwinklige Transversalzüge ausgehend vom Punkt A des Kanalmunds beziehungsweise dem Hilfspunkt Γ über den Berg hinüber konstruiert, so wie in Abb. 2 zu sehen ist. Perspektivisch ist diese Aufgabe technisch anspruchsvoller, da es sich um einen vertikalen Transversalzug handelt und altrimetrische Aufgaben – für welche die Dioptra im speziellen entwickelt wurde – besonders akkurates Arbeiten erfordern.

28. Kienast 1995, 11 ff.
29. Kienast 1995, S. 193 f., s. auch S. 151 ff.
30. Heron 1903, 240.
31. Diese Aufgabe stellt einen Spezialfall des sogenannten *Abziehens* dar.

Die drei Aufgaben lösen – bis auf verschiedene Bezeichnungen: speziell Kanal statt allgemeiner Querstollen – nicht nur solche des Tiefbaus, sondern genuin markscheiderische Probleme. Zwar wird bei diesen Aufgaben stets oberirdisch agiert, doch dienen sie der Realisierung unterirdischer Projekte, dabei sind sie im Bereich der exemplarisch-konkreten anwendungsbezogenen Geometrie als Teil der konstruktiven Geometrie zu verorten.

*Agrimensor*en, *Corpus Gromaticorum* und montanistische Beschreibungen im Mittelalter

Nachdem zuvor diverse Berufsgruppen im Römischen Reich Messtätigkeiten regelten – beispielsweise waren Priester mit Abmessungsvorgaben von Tempeln oder Soldaten mit der Bereitung einer *castra* betraut –, entwickelte sich gegen Ende der Frühen Kaiserzeit der Stand der *Agrimensor*en.[32] Diese Genese kann als Professionalisierung verstanden werden, bildete sich mit ihr doch eben auch eine eigene Fachliteratur – genannt *Corpus Gromaticorum* – heraus, welche insbesondere auf praxisorentierte Euklid-Modifikationen sowie Heron-Rezeptionen fußt und dabei auf anwendungsbezogene Sprache und Termini setzt.[33]

Der Terminus *Corpus Gromaticorum* suggeriert die Illusion einer Totalität, die es nach dem Wissenschaftshistoriker Lucio Toneatto und dem Mathematikhistoriker Menso Folkerts nicht gegeben hat, daher wird im folgenden von gromatischen Schriften zu lesen sein.[34] Sie umfassen Texte von der Spätantike (noch vor Heron) bis ins Frühmittelalter hinein.[35] In diesem Kontext soll und kann auch unmöglich umfänglich auf die Thematik, die bereits ab der Mitte des 19. Jahrhunderts von Altphilologen und Wissenschaftshistorikern detailliert beleuchtet wurde,[36] eingegangen werden.[37]

Für die Entwicklung der Markscheidekunde sind im Kontext der gromatischen Schriften zwei Punkte wesentlich: 1. liegen in diesen die Wurzel der berechnenden Geometrie (wie noch gezeigt wird) und 2. der juristische Aspekt, der jeder Landbesitzfrage – wie beispielsweise schon im alten Ägypten –[38] innewohnt, denn „[j]edes Ungleichheitsregime, jede Ungleichheitsideologie beruht [. . .] auf einer Theorie der

32. Gericke 1990, 37 ff.
33. Scriba und Schreiber 2010, 86 ff.
34. Toneatto 1994 f.
35. Folkerts 1992.
36. Z. B. Cantor 1875; Lachmann 1848–52.
37. Colognesi 1992.
38. wo es unter anderem um die Besitzzuordnung von Feldern nach einer Überschwemmung ging.

Grenze und einer Theorie des Eigentums.“[39] Im deutschen[40] Bergbau findet sich (spätestens) um die Mitte des 14. Jahrhunderts im *Freiberger Bergrecht*[41] im *§ 17 Von bergmessunge* sowie in *§ 19* und *§ 20 Vom marscheyden recht* und *Vom marscheyde*.[42] Die Etymologie des Kompositums *markscheiden* geht schließlich auf das Konkretum *Mark(e)*, im Sinne von Markierung, Kennzeichnung, und das Verbum *scheiden*, im Sinne von separieren/trennen, zurück.[43]

Während die Lösung von Messaufgaben mit der Entwicklung von Messutensilien korreliert, hängt die Flächenberechnung von der Güte der Modellierung – Zerlegung in Grundflächen – ab. Hier geben die gromatischen Schriften Lösungen für sehr unterschiedliche Probleme, ohne sie – im modernen Sinne – allgemein zu lösen: „Vielmehr werden einzelne Aufgaben mit speziellen Zahlenwerten formuliert, und die Rechenoperationen, die durchgeführt werden müssen, werden für die jeweiligen Werte angegeben. An ihnen kann man aber das allgemeine Vorgehen erkennen.“[44]

Wo sich im mediävalen Europa – zu nennen ist hier insbesondere die nordfranzösische Abbaye Saint-Pierre de Corbie –[45] das Wissen der gromatischen Schriften konserviert und teilweise neu arrangiert wird, lassen sich keine Quellen hinsichtlich des Vermessens untertage recherchieren.[46] Zwar finden sich einzelne Schriften zu Mineralien, so beispielsweise in den Werken des Schutzpatrons der Naturwissenschaftler Albertus Magnus (* ca. 1200, † 1280),[47] nicht aber zum Bergbau, geschweige denn zur *Geometria Subterranea*.[48] In Kochs technikhistorischen-bibliographischen Dissertation zeigt sich, wie spärlich doch die Quellen zur bergbaulichen Literatur im Mittelalter sind. Der Fokus liegt in dieser Zeit besonders auf Predigten, Gedichten, *Steinbüchern* und einzelnen juristischen Urkunden: „Der technische Teil wurde dabei kaum berücksichtigt [...]“.[49] In Anbetracht mangelnder schriftlicher Überlieferung anderer *Hand*werke mag dies allerdings wenig wundern – besonders, wenn man dem böhmisch-mitteldeutschen Pädagogen und Humanisten Paulus Niavis (× * ca. 1460, † 1517)[50] glauben möchte: in seiner auf 1475 datierten, aber vermutlich zehn Jahre später entstandenen, in Latein verfassten, humorvollen Schrift *Iudici-*

39. Piketty 2020, 18.
40. Im transalpinen Raum, s. auch Gautier Dalché 2015.
41. *Das jüngere Freiberger Bergrecht (B).*
42. Ermisch 1886, 290 ff.
43. Veith 1870 f., 334.
44. Folkerts 2014, 140.
45. Ullman 1964.
46. Baumgärtel 1965, 23.
47. Magnus 1890.
48. Baumgärtel 1965, 23.
49. Koch 1960, 20.
50. Knape und Kocher 1999.

um Iovis – die lange als erste literarische Deskription des deutschen Bergbaus galt –[51] lässt der Autor nach römischen Vorbild einen Eremiten eine Vision erleben, in welcher jener eine Apologie des Bergbaus und eine Unterweisung in altsprachliche Philologie liefert, aber auch auf die negative Haltung der Bergleute seiner Zeit zur *Wissenschaft* hinweist.[52] Es mag gleichsam ein Indiz dafür sein, dass bis zu seiner Zeit der Bergbau nur handwerklich-empirisch betrieben und Wissen mündlich innerhalb eines Gewerks kommuniziert wurde. Insbesondere für die Relation von Theorie und Praxis der *Messkunst* fässt der Geographiemediävist Patrick Gautier Dalché zusammen: „[F]ossé épistémologique existait entre les mathématiciens et les arpenteurs."[53]

Erste Drucke zur Markscheidekunst: Das 16. Jahrhundert

„In den aus dem Fall von Byzanz geretteten Manuskripten, in den aus den Ruinen Roms ausgegrab[e]nen antiken Statuen ging dem erstaunten Westen eine neue Welt auf"[54] – in der Kunsthistorik ist von der *Renaissance* die Rede. Als Epoche der Geometriegeschichte zeichnet sie sich, den beiden west- beziehungsweise ostdeutschen Mathematikhistorikern Christoph Joachim Scriba (* 1929, † 2013) und Peter Schreiber nach, durch die Kombination zweier Charakteristika aus: 1. Praxisorientierung und Eruierung neuer Anwendungsfelder, 2. Initialisierung von Fortschritten oft durch Amateurschaft und Praktizierende.[55] Naturgemäß laufen solche Prozesse zwar nicht gleichmäßig, aber meist kontinuierlich ab, womit sie transepochal sind; so auch im Falle der Markscheidekunst.

Der spätmittelalterlichen Hochphase des Bergbaus folgte, aufgrund von Pest, Klimawandel, Missernten und Hungerkatastrophen, eine gesamtökonomische Depression, die zu einer langanhaltenden Stagnation im Silber- und Kupferbergbau.[56] Eine Reaktion auf die auch geologisch und technisch bedingte Krise des europäischen Bergbaus am Ende des 15. Jahrhunderts waren sprunghafte Entwicklungen in der Fördertechnik – wie das Kehrrad, das Kunstgezeug und das Nasspochwerk –[57] sowie – beflügelt vom Buchdruck mit beweglichen Lettern – die ersten überlieferten

51. Wesentlich älter (Ende 13. Jahrhundert) ist: Kirnbauer und Schubert 1955.
52. Klenkel 1953.
53. Gautier Dalché 2015, 138.
54. Engels, o.Dat., 311.
55. Scriba und Schreiber 2010, 245.
56. Bluma et al. 2018, 59 ff.
57. Börner et al. 1990, 70.

literarische Darstellungen beziehungsweise die ersten mathematischen Spezifikationen von Methoden des Feldvermessens auf unterirdische Messsituationen.

Rülein von Calws *Ein nützlich Bergbüchlin*

Im Gegensatz zu handschriftlichen Manuskripten stellen erste Buchdrucke zumeist besser überlieferte literarische wissenschaftliche Quellen dar. Die erste überlieferte deutschsprachige Druckschrift über den Bergbau überhaupt ist *Ein nützlich Bergbüchlin* des Ulrich Rülein von Calw (* 1465, † 1523)[58]. Infolge der Anonymität seiner Schriften blieb das Wirken und Leben dieser „bedeutende[n] Persönlichkeit im Gemeinwesen der Stadt Freiberg“[59] fast vier Jahrhunderte lang wenig beachtet, was sich (in Europa)[60] erst durch die historischen Untersuchungen des schließlich in Magdeburg dozierenden Bergbauwissenschaftlers Wilhelm Ludwig Pieper (* 1886, † 1956) mit seinem Faksimiledruck 1955 änderte.

Rülein von Calw studierte in Leipzig Medizin und vermutlich intensiv die *Artes liberales*, zumindest wird er „von den alten Chronisten als guter Mathematiker bezeichnet“,[61] so Pieper. Dieser geht noch weiter und argumentiert, dass jener identisch mit einem gewissen Leipziger Mathematikprofessor Ulrich Kalb sei, dem das Rechenbuch *Algorithmus Linealis* des Balthasar Licht gewidmet ist.[62] Außerdem sei „als sicher anzunehmen, daß“ der mitteldeutsche Rechenmeister Johannes Widmann (* ca. 1460, † 1505)[63] „Rüleins Lehrer in [. . .] Mathematik gewesen ist.“[64] In einer Reihe von Rechenmeistern bis hin zu Adam Ries (* 1492, † 1559)[65] hätte „also die Lehrtätigkeit von Ulrich Kalb als Schüler Widmanns und als Lehrer Lichts eine beachtenswerte Rolle gehabt“.[66] Dass Rülein von Calw sicherlich über elementararithmetische Kenntnisse verfügte und diese anwenden konnte, ist unabhängig davon evident: erlebt er doch gerade die revolutionäre Entwicklung von der Linien- zur Federrechnung mit.

Der Autor leitet mit einem kurzen Dialog zwischen dem Bergexperten Daniel und dessen Lehrling Knappius ein, wobei jener auf den folgenden Seiten diesen und den Rezipienten in deutscher, volkstümlicher Sprache über Lagerstättenräume und Gangarten belehrt. Die einfache Sprache zeigt: Rülein „richtete sich an die Berg-

58. Jentsch 2005.
59. Pieper 1955, 5.
60. Folgende Dissertation kannte Pieper augenscheinlich nicht inhaltlich: Mendels 1953.
61. Pieper 1955, 31.
62. Licht 1500, 2.
63. Prinz 2011, 105.
64. Pieper 1955, 35.
65. Wußing 2013, 334.
66. Pieper 1955, 36.

Abbildung 3: Illustration des Bergkompass aus Rüleins Bergbüchlin*, S. 27.*

und Hüttenleute",[67] die seinerzeit in der Regel über keine akademische Bildung verfügten.[68]

Hans Baumgärtel stellt fest, dass schon *Ein nützlich Bergbüchlin* bereits markscheiderische Elemente enthalte, geht allerdings wenig ins Detail.[69] Das dritte Kapitel von Rüleins Büchlein widmet sich der Orientierung unterirdischer Gänge, insbesondere dem Streichen[70] und der Erklärung eines Anlege- oder Berg*kompass*es – entwickelt aus einer Reisesonnenuhr – (Abb. 4) zur Messung von Winkeln in Stunden, worin die eigentliche vermessungskundliche Leistung steckt:

> „Also magst{n} [du] haben ein[e] gewi⟨ss=ß⟩[e] ⟨E=e⟩rken[n]tn⟨iss=yß⟩ von den ⟨Ö=o⟩rte{re}n der ⟨W=w⟩e{r}l⟨t=d⟩ ⟨u=v⟩nd von dem ⟨S=s⟩treichen[,] ⟨F=f⟩al-/ len ⟨u=v⟩n{n}d ⟨Au=av⟩ßg[e]hen{d} der ⟨Gä=ge⟩ng[e,] so das[s] [der] ⟨K=c⟩ompas[s] also / abgeteilt [a]⟨u=v⟩f{f} den ⟨G=g⟩ang gehalten wir⟨d=t⟩."[71]

Es ist die erste überlieferte Deskription eines *Kompass*es respektive einer mit Magnetnadel versehenen Reisesonnenuhr zur Winkelmessung im bergbaulichen – und damit markscheiderischen – Kontext. Die Sonnenuhr als Schattenwerfer diente

67. Paehr 2018, 150.
68. Long 1991.
69. Baumgärtel 1965, 27 u. 94.
70. räumliche Orientierung der Längsachse mittels Schnittlinie der geologischen Fläche mit einer gedachten Horizontalen.
71. „Du wirst nun die Himmelsrichtungen und das Streichen, Fallen und / Ausgehen der Gänge genau erkennen, wenn der mit mit dieser zusätzlichen / Richtungskreisteilung sersehene Kompass an den Gang gehalten wird.", Pieper 1955, 91 u. 126.

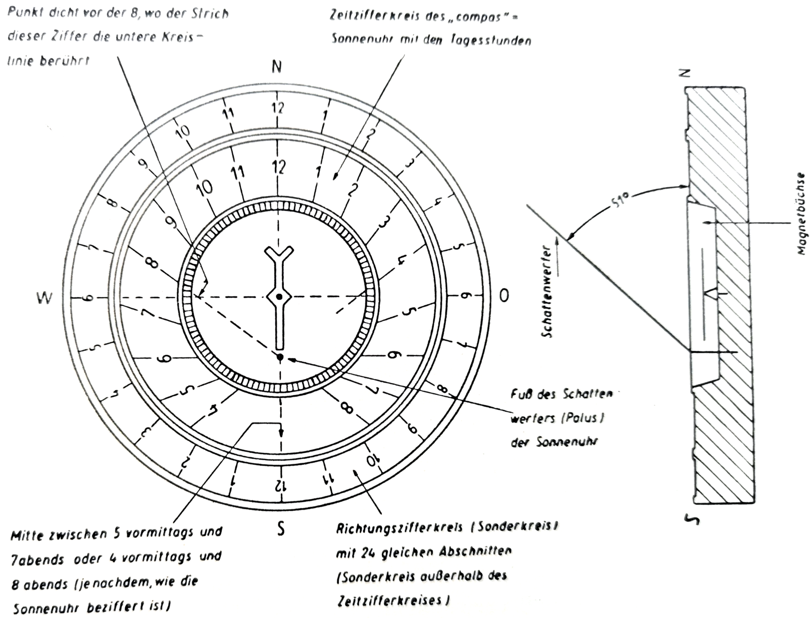


Abbildung 4: Piepers Interpretation des Rülein'schen Bergkompasses, S. 125.

der quantitativen Messung der Streich- und Fallrichtung; durch die Magnetnadel „hatte man für waagerechte Winkelmessung eine Orientierung“.[72] Ansonsten finden sich in den 48 Seiten umfassenden Büchlein keine geometrischen Inhalte. Rülein bezieht sich explizit auf Albertus Magnus sowie den sagenhaften *Philosophen* Hermes Trismegistos bei der Metallogenese und nennt außerdem die Bücher „der alten ⟨W=w⟩e⟨i=y⟩sen“[73], was durchaus einen gewissen humanistischen Habitus beweist.

Indirekt findet sich – im Vergleich zu Herons *Commentatio Dioptrica*, bei dem oberirdisch gemessen wird – in Rüleins *Bergbüchlin* erstmalig eine Beschreibung unterirdischer Messung, denn der Berg*kompass* wird zur Messung der Orientierung eines Ganges[74] gegenüber einer (festen) Horizontalen unter Tage genutzt. Es ist also Rüleins Verdienst, erstmalig als Druck – wenn auch implizit – die unterirdische Anwendung einfachster messender Geometrie im montanistischen Kontext didaktisch zu beschreiben. Diese mathematischen Beschränkungen korrespondieren mit dem Kenntnisstand der von Rülein mutmaßlich ins Auge gefassten Leserschaft.

72. Vollrath 2013, 85.
73. Pieper 1955, S. 3, 8 u. 39.
74. Womit laut Pieper auch Flöze gemeint sind; vgl. Pieper 1955, 187 f.

Agricolas *Liber Quintus*

In der zweiten Hälfte des *Liber Quintus*' seiner *De Re Metallica* macht sich Georg Agricola (* 1494, † 1555)[75] als erster um die literarische Deskription der Markscheidekunst beziehungsweise der *Ars mensorum* – wie er sie nennt –[76] verdient.[77]

Der sächsische Gelehrte Georg Agricola, der seinen Lebensunterhalt hauptsächlich als *Medicus* bestritt, kam – nach seinem Studium in Leipzig – in Zwickau mit dem Bergbau in Berührung. 1523 begann er eine Italienreise, auf der er im renommierten Verlagshaus der venezianischen Familie Manuzio[78] arbeitete und mit zahllosen Werken antiker Autorenschaft in Berührung kam.[79] Über das Studium der Mineralien ging er „mit vollem Bewu⟨ss=ß⟩tsein in einen Berg- und Hüttenort"[80] – Chemnitz und das heutige Jáchymov – und publizierte mehrere *montanwissenschaft*liche Bücher.[81] Postum erscheint 1556 in Basel sein opulentes Werk *De Re Metallica*.

Die Wichtigkeit des juristischen Aspekts markscheiderischer Tätigkeit sowie das damit verbundene oberirdische Abstecken von Fundgruben und Lehen als Spezialfall der *Feldmesskunst*, zeigt sich in Agricolas Behandlung im vierten Buch seiner *De Re Metallica*.[82] Im fünften Buch rückt er,[83] nach detaillierter Deskription der Richtung von Gängen und Eigenschaften von Metallen, das Messen in den Fokus der Markscheidekunst, die er daher eben als *Ars mensorum* bezeichnet.[84] Die Arten der Vermessungen beruhen auf Dreiecksmessungen, bei welchen

> „Par⟨v=u⟩s [...] dimetie(n)dus est, atq(ue) / ex eo existimandum de maiori",[85]

ein kleines Dreieck also ausgemessen und so auf die größeren geschlossen werde; ein Schluss der Ähnlichkeits- und Proportionslehre, das simpel-exemplarisch das Kondensat typischen Vorgehens seinerzeitlicher *Geometria Practica* demonstriert.[86] Weiter im Fließtext werden Dreiecke anhand seigerer beziehungsweise tonnlägiger Gänge in griechischer Sprache klassifiziert: „ὀρθογώνιον", „ἰσοσκελέσ", „σκαληνόν"

75. Hartmann 1953.
76. Agricola 1556, 88.
77. Baumgärtel 1965, 94.
78. Infelise 2007.
79. Hartmann 1953, 15 ff.
80. Hartmann 1953, 21.
81. Hartmann 1953, 23 ff.
82. Agricola 1556, 55 ff.
83. Agricola 1556, 80 ff.
84. Agricola 1556, 88.
85. Agricola 1556, 88.
86. Scriba und Schreiber 2010, 223 ff.

sowie „ὀξυγάνιον“, „ἀμβλυγανιον“ und „ἰσόπλευρον“.[87] Hier zeigt sich Agricola einmal mehr als Vertreter der Renaissance. „Die Wiederbelebung des Altgriechischen als Wissenschaftssprache gehörte [...] zum Programm der Humanisten [...]“.[88] Namentlich werden Philon von Byzanz (2. Jahrhundert v. u. Z.), Caius Plinius Secundus Major (* 23/24, † 79 u. Z.)[89], Straton von Lampsakos († 269/68 v. u. Z.)[90] und Marcus Vitruvius Pollio (frühaugusteische Zeit)[91] als antike naturphilosophische oder technische Autoritäten erwähnt, wobei ersterer Heron stark beeinflusste.[92]

Die Mathematik bei Agricola reduziert sich auf Termini und die (verschwiegene) Anwendung der Strahlensätze auf ähnliche, als rechtwinklig angenommene Dreiecke:

> „Si prima mensura fuerit longa pedes septem, secunda itemq(ue) tertia pedes / quinq(ue), funiculus ⟨v=u⟩ero secundus centies ⟨et=&⟩ semel pedes septem, id est passus / centum decem ⟨et=&⟩ septem, ac pedes quinq(ue) [...] centies pedes quinq(ue) colli-/get, qui efficiunt passus tres ⟨et=&⟩ octoginata atq(ue), pedes duos“;[93]

wenn also das erste Maß 7 Fuß und die anderen beiden je 5 Fuß sind, die Schnur aber $(100 + 1) \cdot 7$ Fuß (das heißt $110 + 7 = 117$ Lachter und 5 Fuß) lang ist, ist die gesuchte Entfernung $100 \cdot 5$ Fuß (das heißt $3 + 80 = 83$ Lachter und 2 Fuß); Agricola scheint also ganz frei nach Pythagoras, (in Fuß)[94]

$$\begin{aligned} 5^2 + 5^2 &\stackrel{!}{=} 7^2 \\ (100 \cdot 5)^2 + (100 \cdot 5)^2 &\stackrel{!}{=} (101 \cdot 7)^2 \end{aligned}$$

zu rechnen, was wegen des Rekompens' zwar in grober Näherung befriedigt, aber je nach zugrundegelegter Maßeinheit meterlange Abweichungen provozieren kann. Die folgenden Kalkulationen befassen sich mit anderen Maßangaben und sind durch teilweise zusammenhangslos wirkende Abbildungen von verschiedenartigen Dreiecken unterbrochen; die Rechnungen beinhalten aber meist vom Rekompens unabhängige geometrische und arithmetische Fehler insbesondere bei der Anwen-

87. Ergo: rechtwinklig, gleichseitig, ungleichseitig sowie spitzwinklig, stumpfwinklig und gleichseitig.
88. Scriba und Schreiber 2010, 248.
89. Sallmann 1972.
90. Dörrie 1975.
91. Sallmann 1975.
92. Rance 2013.
93. Agricola 1556, 91.
94. Für kursächsische Längen- u. Flächenmaße s. Wunderlich 1977b, 32 ff.

Iugum A. *Iugi pertica* B. *Puteus* C. *Primus funiculus* D. *Primi funiculi pondus* E. *Secundus funiculus* F. *Idem in terram infixus* G. *Caput primi funiculi* H. *Os cuniculi* I. *Tertius funiculus* K. *Tertij funiculi pondus* L. *Menſura prima* M. *Menſura ſecunda* N. *Menſura tertia* O. *Triangulus* P.

Abbildung 5: Illustration aus Agricolas De Re Metallica*, S. 90.*

dung der Grundrechenarten, die aber vermutlich durch die Textsetzung entstanden sein könnten.[95]

Der letzte Part des Buches beschreibt – wieder mit detaillierten Holzschnitten des sogenannten Rudolf Manuel Deutsch (* 1525, † 1571)[96] – Messinstrumente, ohne kohärenter Weise (mathematische) Gründe für deren Funktionalität zu liefern. Es bleibt aber zu konstatieren, dass Agricola im montanistischen Kontext die messende mit der berechnenden Geometrie in einfachster Weise, aber dennoch initial verknüpft.

Deutschs plastische Holzschnitte, die in weiteren Auflagen stets weiter genutzt wurden, dienen bei Agricola nicht nur der lebendigen Deskription, sondern auch der Instruktion, die beide durchaus didaktischen Charakter haben. Abb. 5 zeigt eine idealisierte markscheiderische Situation. Die Bildüberschrift zeigt in eminenter Weise den Konnex von Symbol (große lateinische Buchstaben) und Objekt. Zwar sind mathematische Termini auch hier auf *Triangulus* limitiert, dafür wird die Situation hier umso praxisorientierter präsentiert und enthält gleichsam durch *Mensura prima*, *secunda* und *tertia* Messdirektiven für die Längen der Seiten des *Triangulus*', womit einmal mehr die Essenz der *Ars mensorum* – nämlich das Messen – akzentuiert wird. Thomas Morel kritisiert hier die unrealistische Darstellung eines allein arbeitenden Markscheiders – im Gegensatz zu anderen Holzschnitten – und verweist auf eine Abbildung im *Schwazer Bergbuch*,[97] welche die Arbeitsorganisation markscheiderischer Tätigkeit lebensechter zeigt.[98]

Trotz repetitiven Exponierens von Präzision und Akribie finden sich eher primitive Approximationen zur Längenrechnung, die auch an keiner Stelle begründet werden. Es finden sich daher auch weder Beweise noch (verbalisierte) Formeln. Gerade die letzte Tatsache ist, in Anbetracht der sogenannten volkstümlichen Euklid-Literatur des 16. bis 18. Jahrhunderts,[99] welche auch von Universitätsprofessoren verfasst wurde und die Agricola sicher bekannt war, aber die Beweise oft zugunsten detaillierter Beispiele und Anwendungen aussparte, wenig verwunderlich. Bemerkenswert ist, dass Agricola sich der Anwendung der *Geometria* für seine *Ars mensorum* offensichtlich schon bewusst war; zwar ist das Abstraktum *Geometria* nur an einer Stelle in den zwölf Büchern zu finden – nämlich im Index – dort aber wie folgt:

> „Geometri⟨ae=æ⟩ usus in metallicis",[100]

95. Agricola 1556, 92 ff.
96. Rösner 1990.
97. Bartels et al. 2006, 62.
98. Morel 2020a, 32.
99. Scriba und Schreiber 2010, 249.
100. Agricola 1556, unpag.

der Nutzen also der Geometrie im Bergbau, wobei die Referenz leider ins Leere geht.

Was die Markscheidekunst bei Agricola insgesamt angeht, so urteilt Morel, sie sei „une activité d'observation, parfois seulement assistée par le calcul".[101] Baumgärtel meint zu Agrocolas Darstellung der Markscheidekunde, dass „praktische Erfahrung dabei gewiß nicht Pate gestanden haben".[102] Diese Einschätzung untermauert Morel mit einem Vergleich einer zeitgenössischen Predigt, die an *Praktiker* – also Bergleute, -beamte und Markscheider – gerichtet ist und eine detaillierte Beschreibung des *Abziehen*s beinhaltet: Die „major operations of *geometria subterraneae*" sucht man bei Agricola vergebens, „he presented subterranean geometry as a variation of the Latin tradition of *geometria practica*."[103] Die Darstellung der mathematischen Inhalte in Agricolas *De Re Metallica* – Rückzug auf einfachste, exemplarische Prinzipien – unterstützt Morels These, wonach jener seine markscheiderischen Informationen nicht unbedingt *frei von jedweder Spekulationen* war:[104] Agricolas Präsentation markscheiderischer Inhalte, kombiniert mit mathematischem Wissen, spiegelt – vor dem Hintergrund der Diskretion der Praktiker ihrer *Kunst* – vielleicht mehr seine eigene gelehrte Rekonstruktion markscheiderischer Tätigkeiten unter Anwendungen von Geometrie und Arithmetik wider.

Reinholdus' *Vom Marckscheiden, kurtzer vnd gründlicher vnterricht*

Die erste speziell markscheiderische Schrift stammt von dem Sohn (* 1538, † 1592)[105] des gleichnamigen Wittenberger Mathematikprofessors Erasmus Reinholdus (× * 1511, † 1553)[106]. Das 1574 herausgegebene Buch *Gründlicher vnd Wahrer Bericht. Vom Feldmessen* mit dem Anhang *Vom Marckscheiden, kurtzer vnd gründlicher vnterricht* basiert auf zwei Manuskripten Reinholdus' des Älteren. Er war ein Zeitgenosse Agricolas und Kollege Melanchthons. Von 1536 bis 1553 hatte er die *Professio Mathematum Superiorum* an der Leucorea inne und war somit sechs Jahre Fachgenosse von Georg Joachim Rheticus (* 1514, † 1574)[107], bevor dieser – nach Reisen unter anderen auch zu seinem Praecursor Nikolaus Kopernikus (× * 1473, † 1543)[108] – 1542 einen Ruf nach Leipzig annahm. Rheticus gilt wegen

101. Morel 2013, 214.
102. Baumgärtel 1965, 94.
103. Morel 2020a, 37 ff.
104. Morel 2020a, 25.
105. Kühne 2003a.
106. Kühne 2003a.
107. Kühne 2003b.
108. Schmauch 1957.

seines *Canon Doctrinae Triangulorum*[109] als einer der Erzväter der Trigonometrie im *Sacrum Imperium Romanum Nationis Germanicae*. Über Reinholdus den Jüngeren ist wenig bekannt: Er war wohl Stadtmedicus beziehungsweise -physikus und „Bergwerksbefehlshaber“ im thüringischen Saalfeld und pflegte offensichtlich seine Kontakte zur Wittenberger Universität Leucorea,[110] von deren besonderer Atmosphäre nicht nur sein Vater profitierte.

Während sich Hans Baumgärtel in seiner Dissertation Reinholdus' Schrift weniger detailliert widmet, würdigte der Kurator des Mathematisch-Physikalischen Salons zu Dresden Herbert Wunderlich (* 1905) diese besonders als Lehrbuch der Feldmesskunst,[111] „[d]a es zu den wissenschaftlich am besten fundierten Werken dieser Gattung gehört [. . .]“.[112] Dabei stützt sich dieser (vermutlich maßgebend)[113] auf die mathematikhistorische Rezeption durch Abraham Gotthelf Kästner (* 1716, † 1800) sowie die Analyse des westdeutschen Markscheiders Wilhelm Wilkening (* 1924).[114] Dass Reinholdus bei Morel überhaupt Erwähnung findet, ist stupend –[115] wirkt jenes Leistung doch bagatellisiert dargestellt:[116] In Agricolas *De Re Metallica* „[. . .] actual practices are only mentioned infrequently and in passing. This could be extended to other works [. . .], such as Erasmus Reinhold's book [. . .]“.[117] Tatsächlich ist es jedoch mathematisch deutlich anspruchsvoller und vermeidet die Makel, die zuvor bei Agricola ausgemacht wurden.

Der Inhalt des Buches widmet sich in erster Linie dem Feldmessen und steht somit in gewisser Tradition der Agrimensoren,[118] wobei es auch für andere Traditionen der angewandten Geometrie spätmediävaler Epoche Anknüpfungspunkte gibt. Es reiht sich in eine ganze Schar (Tab. 1)[119] sogenannter *Feldmessberichte*, die Wunderlich als „Anleitung zur Lösung von bestimmten Aufgaben der Feldmeßkunst oder Beschreibungen von Feldmeßinstrumenten“[120] klassifiziert. Besonders zu erwähnen sind nach Wunderlich die Werke des rheinischen Humanisten Walther Hermann Ryff (* 1500, † 1548)[121] wegen seiner Deskription der Messinstrumente sowie der Reinnovation der Heron'schen Dioptra.[122]

109. Rheticus 1551.
110. Kühne 2003a.
111. Weißflog rezipierte Wunderlich, s. hierzu Weißflog 2011.
112. Wunderlich 1977b, 25.
113. Kästner 1796, 699 ff.
114. Wilkening 1960.
115. Vgl. Morel 2013, 33 f.
116. Vgl. Morel 2020b.
117. Morel 2020a, 42.
118. Scriba und Schreiber 2010, 86 ff.
119. Schillinger 1990, 14.
120. Wunderlich 1977b, 24.
121. Keil 2005.
122. Wunderlich 1977a, 22 ff.

[123]

Tabelle 1: Feldmessberichte des 16. und frühen 17. Jahrhunderts

Autor	(Kurz-)Titel	Ort, Jahr
Gregor Reisch	*Margarita Philosophicae*	Strasbourg, 1504
Georg Burbach	*Quadratum Geometricum*	Nürnberg, 1515
Jacob Köbel	*Von Ursprung der Teilung*	Oppenheim, 1522
	Vom Feldmessen	Frankfurt, 1531
	Geometrej	ibid., 1563
Sebastian Münster	*Erklärung des neuen Instruments*	Oppenheim, 1528
	Cosmographei	Frankfurt, 1544
	Rudimenta Mathematica	Basel, 1551
Gemma Frisius	*Libellus de Locorum*	Antwerpen, 1533
Peter Apian	*Instrument Buch*	Ingolstadt, 1533
Johannes Stöffler	*Von Künstlicher Abmessung*	ibid., 1536
Joachim Rheticus	*Chorographia*	Wittenberg, 1541
Sebastian Schmidt	*Unterrichtung [...] landschaft*	Nürnberg, 1544
Walter Ryff	*Perspectiva*	ibid., 1547
Erasmus Reinholduns	*Bericht vom Feldmessen*	Erfurt, 1574
Paul Pfinzing	*Methodus Geometrica*	Nürnberg, 1598
Levin Hulsius	*Tract. I. Intrument. Mechan.*	Frankfurt, 1604
	Tract. IV. Intrument. Mechan.	ibid., 1604
Daniel Schwenter	*Geometriae Practicae Novae II.*	Nürnberg, 1617
	Geometriae Practicae Novae III.	ibid., 1617
Willebrord Snellius	*Erastosthenes batavus, de Terrae*	Leiden, 1617
Benjamin Bramer	*Trigonometria Planorum*	Marburg, 1617
Wilhelm Schickard	*Kurze Anweisung [...] Landtafeln*	Tübingen, 1629

Die beiden Reinholdi schreiben nichts über das Bergwesen, die Darbietung demonstriert aber Familiarität mit dem berg*männisch*en und markscheiderischen Modus Procedendi.[124] In Anbetracht der Tatsache, dass Reinholdus etwa um die Zeit der Veröffentlichung seines *Berichts* schließlich zum *Bergvogt* ernannt wird, kann jedoch davon ausgegangen werden, dass er umfassend mit der Thematik vertraut war. Der Titel – *Wahrer Bericht* – wird vom Autor in seiner *Vorrhede* damit gerechtfertigt, dass man sich

> „derma⟨ß=ss⟩en auf{f} die *fundamenta Geometrica* [...] verlassen ⟨u=v⟩nd darauf{f} fu⟨ß=ss⟩en“[125]

123. Schillinger 1990, 14.
124. Baumgärtel 1965, 95.
125. Reinholdus 1574, s. dort *Vorrhede*, unpag.

Taffel zu dem streichen der genge vnd örther.

Die zahl der unterschiedenen streichen.	Die lenge als weit ein streichen wehret.	Das streichen an jhme selbest.	Der Weiser.	Das Erste Ecke.	Seine zahl aus der Taffel.	Das Productum des ersten Ecks.	Die erste Eck gibt.	Die andere Eck.	Seine zahl aus der Taffel.	Das Product des andern Ecks.	Das andere Eck gibt.	Die lenge zu Addirn.	Die lenge zu Subtrahirn.	Die breite zu der rechten handt.	Die breite zu der lincken handt.
1.															
2.															
3.															
4.															
5.															

Abbildung 6: Reinholdus' Tabellenvorlage zur Aufnahme von Messwerten aus Das Eilffte Capittel*, unpag.*

dürfe.

Im Arrangement seines Buches setzt Reinholdus für die Markscheidekunst als Disziplin neue Maßstäbe: Er stellt seinen eigentlichen Themata mehrere *Capitel* über grundlegende Arithmetik und Geometrie voran, die vermutlich (auch) auf Manuskripten, die sein Vater für seine Vorlesungen zur Geometrie, Arithmetik, Geographie und Proportionenlehre nach Euklid nutzte,[126] basieren; gibt seitenweise Tabellen und Vorlagen mit und nutzt Abbildungen geometrischer Figuren mit Maßangaben, die auf das Wesentliche reduziert, dafür aber weniger eidetisch als die Holzschnitte bei Agricola sind.

Die Tabellen, welche auf 69 Seiten unter anderem die Quadratzahlen von 1 bis 4.000 enthalten, und die Vorlagen (Abb. 6) – in Form unausgefüllter Tabellen,[127] um Messwerte planvoll aufzunehmen und zu dokumentieren – belegen Reinholdus' Anliegen der praktischen Applikabilität und bereiten gewisse Tendenzen in den Anleitungen der Manuskripte des 18. Jahrhunderts vor.[128] Es ist damit nicht nur die erste speziell markscheiderische Schrift, sondern auch die erste, die im

126. Kathe 2002, 116.
127. Z. B. Reinholdus 1574, s. dort *Das Eilffte Capittel*, unpag.
128. Vgl. Morel 2018.

markscheiderischen Kontext Tabellen nutzt und das *Trigonometrische Verfahren* einführt, dem sich nachfolgend intensiver gewidmet werden soll.

Abb. 7 zeigt eine Illustration aus Reinholdus' Buch,[129] die eine analoge Situation wie zuvor bei Agricola visualisiert, aber aufgrund ihres Minimalismus keinen Anspruch auf Realismus suggeriert. Die Beschriftung ist systematischer als Agricolas: Die kleinen lateinischen Buchstaben bezeichnen geometrische Punkte und ihre Komposition Seiten eines Dreiecks. Dadurch sind mathematische Aussagen über die Längengleichheit gegenüberliegender Seiten eines Rechtecks plausibel:

> „Da{r}nach mi⟨ss=ß⟩ [...] eine jede ⟨Lä=le⟩nge des Triangels, als n⟨ä=e⟩mlich *a.b.* der ⟨S=s⟩eiten ⟨$f.o. = f.c.$⟩ gleich ist: ⟨$b.o. = b.c.$⟩, so der ⟨S=s⟩eiten *a.f.* gleich ist [...]"[130]

Besonders ostensiv ist, durch die Ikonisierung eines Winkelmessers, dass in Reinholdus' Methode eben nun auch trigonometrische Tafeln – insbesondere Winkelgrößen und nicht nur Seitenlängen wie bei Agricola – zur Lösung der Aufgaben herangezogen werden.

In einem rechtwinkligen Dreieck gehört bei fester Hypothenusenlänge zu einem bestimmten Winkel eine gewisse Sinusstrecke als Halbsehne, wie es seit der Spätantike usell war.[131] Die altertümliche Kommodidät, statt den Sehnen die Halbsehnen zu nutzen, ist auch bei Regiomontanus (* 1436, † 1476)[132] zu finden, von welchem Reinholdus offenbar auch inspiriert wurde. Die Relation von Sehnen- zur Sinusgeometrie ergibt sich aus:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{s}{2} \ : \ r = \frac{s}{2r}$$

und ist in Abb. 8 visualisiert.[133]

Um Dreiecke auszumessen, empfiehlt Reinholdus Messstangen oder Draht, um rechte Winkel zu generieren, rechtwinklige Dreiecke oder Seile, die auf Basis des pythagoräische Zahlentripels $(3, 4, 5)$ geknüpft wurden. An der Stelle der Kreisberechnung und Bogenlängeermittlung taucht Reinholdus' wichtigste Leistung auf: seine Sinustafeln,[134] die bei ihm nur A- und B-*Tabelle* heißen, wobei nach Wunderlich A Winkel-wertig und B Sinus-wertig ist.[135] Im rechtwinkligen Dreieck ABC mit fester Hypothesusenlänge r gehört zu einem bestimmten Winkel α eine gewisse

129. Reinholdus 1574, s. dort *Das erste Theil*, *Das Erste Capitel*, unpag.
130. Reinholdus 1574, s. dort *Das erste Theil*, *Das Erste Capitel*, unpag.
131. Scriba und Schreiber 2010, 78 f.
132. Folkerts und Kühne 2003.
133. Scriba und Schreiber 2010, 79.
134. Reinholdus 1574, s. dort *Volget die Taffel, so zu den Circkeltrumen gehöret*, nach *Das 19. Capittel*, unpag.
135. Wunderlich 1977b, 26.

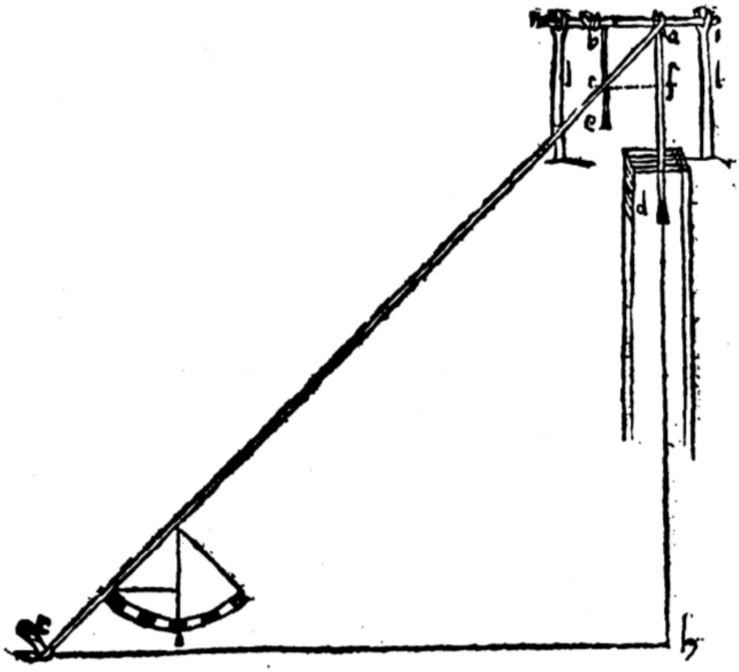


Abbildung 7: Illustration aus Reinholdus' Vom Marckscheiden, *s. dort* Das erste Theil, Das Erste Capitel, *unpag.; sie zeigt eine analoge Messsituation wie Abb. 5.*

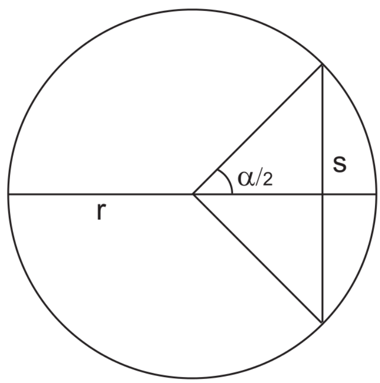


Abbildung 8: Relation von Sehnen- und Sinusgeometrie nach Scriba u. a., S. 79

Sinusstrecke BC. Diese Strecke wird in r-Einheiten gemessen und ist Maß für den zugehörigen Winkel. Reinholdus wählte als Fundamentalgröße $r = 10.000$. In der A-Spalte sind die Winkel in Minuten von $0'$ bis $5.400'$, also $\frac{\pi}{2}$ beziehungsweise $90°$, mit Anstiegen von je $10'$, angegeben. Beispielsweise ergibt sich so für $\mathsf{A} = 3.180'$ beziehungsweise $\alpha = 53°$ nach B-Spalte die Sinusstrecke 7.986 auf r beziehungsweise $\sin\alpha \approx 0{,}7986$. Durch die C-Spalte sind auch die B-Werte für Einzelminuten ermittelbar: Sei $\mathsf{A} = 3.187'$ also $3.180' + 7'$, dann ergibt sich der Zuschlag x zum B-Wert $7.986 + x$ aus der Proportion

$$\frac{x}{17} = \frac{7}{10}$$

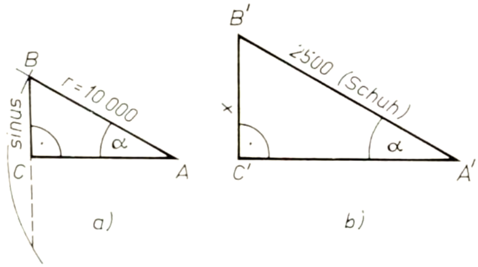
anhand des C-Wertes 17, also

$$x = \frac{17 \cdot 7}{10} \approx 12,$$

ergo $\mathsf{B} = 7.998$.[136] Abb. 9 gibt Wunderlichs moderne Interpretation eines Auszuges von Reinholdus' AB-Tabellen wieder.[137] Die AB-Tabellen sind für die Feldmessung respektive das Markscheiden adaptierte Sinustabellen, wie sie beispielsweise auch schon 1554 im astronomischen Buch *Primus Liber Tabularum Directionum* Reinholdus' des Älteren zu finden sind.[138] 1584 gab sein Sohn aus dessen Nachlass gemeinsam mit dem Wittenberger Professor der *Mathematica inferior* Andreas Schato (* 1539, † 1603)[139] die trigonometrischen Tabellen von Regiomontanus neu heraus.[140] Unter Assistenz der AB-Tabellen können nun die Hauptaufgaben am rechtwinkligen Dreieck gelöst werden.

Abb. 10[141] gibt Wunderlichs moderne Interpretation nach Kästner eines Auszuges von Reinholdus' RV-Tabellen wieder.[142] Eine simplere Version, die *nur* nach vollem Grad – dafür aber zur Fundamentalgröße 10.000 – den Tanges liefert, finden sich auch wieder in Reinholdus' Regiomintan-Tabellen.[143] Nach Kästner sind in den zwei R-Spalten die Winkel α in Grad und Minute angegeben und werden sowohl dem *umbra*-Wert u – das heißt $u = 1.200 \cdot \tan\alpha$ –, als auch dem V-Wert – also dem Komplementwinkel $\beta = 90° - \alpha$ zugeordnet.[144] Die Gebrauch der RV-Tabellen soll an einem kurzen Beispiel illustriert werden:

136. Wunderlich 1977b, 26 f.
137. Wunderlich 1977b, 26.
138. Reinholdus 1554, Bl. 17 ff.
139. Kathe 2002, 455.
140. Reinholdus 1584, Bl. 31 ff.
141. Wunderlich 1977b, 30.
142. Kästner 1796, 704.
143. Reinholdus 1584, Bl. 31 ff.
144. Kästner 1796, 703.



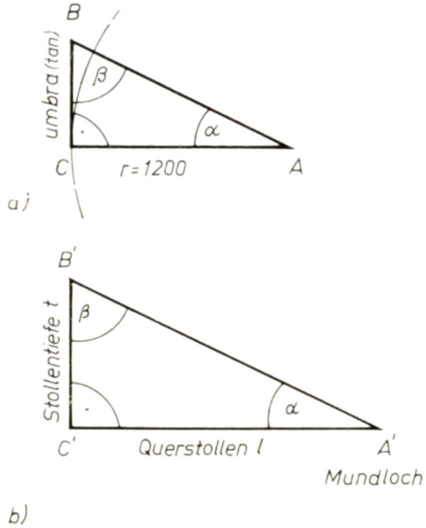
A	B	C
⋮	⋮	⋮
3180	7986	
		17
3190	8003	
		18
3200	8021	
⋮	⋮	⋮

c)

α	sin α
⋮	⋮
53°	0798636
53°10'	0,800383
53°20'	0,802123
⋮	⋮

d)

Abbildung 9: Wunderlichs Interpretation von Reinholdus' AB-Tabellen, S. 27



R °	R '	umbra r=1200	V °	V '
0	0	0	90	0
0	10	3	89	50
0	20	7	89	40
0	30	11	89	30
⋮		⋮	⋮	
6	0	126	84	0
6	10	130	83	50
⋮		⋮	⋮	
39	10	978	50	50
⋮		⋮	⋮	
44	40	1186	45	20
44	50	1193	45	10
45	0	1200	45	0

c)

tan/cot Reinhold	tan/cot modern
0,0000	0,0000
0,0025	0,0029
0,0058	0,0058
0,0092	0,0087
⋮	⋮
0,1050	0,1051
0,1083	0,1080
⋮	⋮
0,8150	0,8146
⋮	⋮
0,9883	0,9884
0,9942	0,9942
1,0000	1,0000

d)

Abbildung 10: Wunderlichs Interpretation von Reinholdus' RV-Tabellen, S. 30

Gesucht sei die Stollentiefe $t = |\overline{B'C'}|$ bei gegebener Querstollenlänge $l = |\overline{A'C'}| =$ 2.400 Schuh ($\approx$ 672 Meter) sowie der am Stolleneingang B' gemessene Tiefenwinkel $\beta = 83°50'$.
Aus der RV-Tabelle ergibt sich als Komplementwinkel $\alpha = 6°10'$ und ein *umbra*-Wert $u = 130$.

$$\frac{t}{l} = \frac{u}{1.200} \Leftrightarrow t = \frac{l \cdot u}{1.200} \Rightarrow t = 260 \text{ Schuh } (\approx 73 \text{ Meter}).$$

Es war also nur noch das Produkt aus Querstollenlänge l und *umbra*-Wert u aus der Tabelle durch 1.200 zu dividieren, um die Stollentiefe t zu ermitteln.

Auf mehreren Seiten widmet sich Reinholdus außerdem einem *Compast* zur Selbstmonage. Der Uhrmacher Egon Weißflog würdigt die von Reinholdus beschriebenen Instrumente und speziell den „erste[n] uns bekannte[n] Visierkompass. Die Gradteilung erlaubte ein Ablesen in halbe, bei guter Schätzung in Viertelgrad.“[145] Wunderlich, der auch zum *Quadratum Geometricum* – einem initial von Georg Peuerbach (* 1423, † 1461)[146] angepassten Messquadrat zur Lösung altrimetrischer Aufgaben – publizierte,[147] urteilt, dass insbesondere auch durch die Tabellen, „im Grunde das Schicksal des Jahrhunderte benutzten Messquadrats zur mittelbaren Streckenmessung besiegelt“ war.[148]

Die gesteigerte Relevanz der Markscheidekunde für den kommerziellen Bergbau und dessen Wissenschaften wird in der Vorrede *An den Leser* des Buches exponiert:

> „[. . .] damit die ⟨G=g⟩ewer{c}ke{n} ihre ⟨R=r⟩echnu(n)g machen kön(n)ten, was auf{f} die ⟨S=s⟩tollen gehen, ⟨u=v⟩nd was die dagegen von den ⟨A=a⟩nbrüchen der Er{t}ze{n} zugewarten haben möchten, [. . .] wie bald auf{f} ⟨D=d⟩urchschläge zu hoffen se⟨i=y⟩ [. . .]“.[149]

Nach Baumgärtel wurde also die Markscheidekunde „in der Agricola-Zeit – man wird sagen können: spätestens um 1500 – aus einem Hilfsmittel der juristischen Fragestellung von Eigentumsrechten zu einem Instrument der ökonomischen und technischen Planung und Betriebsführung im Bergbau.“[150] Reinholdus’ Veröffentlichungsmotiv, welches sich in derselben Vorrede findet, ist,

145. Weißflog 2011, 268.
146. Haupt 2001.
147. Wunderlich 1977a.
148. Wunderlich 1977b, 31.
149. Reinholdus 1574, s. dort *An den Leser*, unpag.
150. Baumgärtel 1965, 95.

> „[...] da⟨ss=ß⟩ bi⟨s=ß⟩her solche Kunst fast heimlich und verborgen gehalten worden, ⟨a=A⟩lso, da⟨ss=ß⟩ niemand{t}, so auch das geringste davon verstehen möchte, hat d⟨ü=ö⟩rf{f}en zusehen, ⟨u=v⟩nd also geschehen, da⟨ss=ß⟩ of{f}t ein 200{.} oder mehr ⟨G=g⟩ewer{c}ken, einem allein haben glauben müssen [...]“[151]

Reinholdus' Intention war also weniger ein Lehrbuch für Markscheider, als vielmehr den *Gewerken* die Option zu verschaffen, in Eigenregie Messungen zu vollziehen, damit sie „auch ihre Proba mögen neben dem gemeinen Mar(k)scheiden haben“.[152] Trotz dieses Trachtens blieb die Markscheidepraxis auf die Markscheider selbst limitiert, deren Messergebnisse und Aufzeichnungen damals[153] wie heute[154] Urkundencharakter hatten beziehungsweise haben: ein archivarischer Begleitumstand, der ein wahrer Freudenbecher für die (technik)historische Forschung ist. Zwar mögen auch die Agrimensoren gewisse ökonomische Aspekte berücksichtigt haben, sollten doch beispielsweise die auf dem *Ager* platzierten Kolonisten oder pensionierte Soldaten von den Felderträgen in der Regel auch leben können,[155] doch bildeten hier juristische Motive das Baryzentrum ihrer Tätigkeit.[156]

Die Art der Illustrationen und die systematische Verwendung von Buchstaben zur Bezeichnung von Punkten sind eminent und erinnern an die Tradition der Bauhüttenbücher der zweiten Hälfte des 15. Jahrhunderts. Zwar finden sich Buchstaben auch bei Agricola, allerdings eher im Sinne von Situationsdeskription und nicht für Punkte, aber gelegentlich für Seiten.[157] Bei Reinholdus ist beides zu finden.[158] Allerdings sind beide weit davon entfernt, dies im Sinne algebraischer Formeln zu nutzen: ist dies doch erst eine Entwicklung der Aufklärung.[159] Sehr wohl ist Reinholdus' Buch aber ein Repräsentant der Renaissance:[160] Denn ähnlich wie auch der fränkische Maler und Graphiker Albrecht Dürer (* 1471, † 1528)[161] in seiner *Underweysung der messung*, scheint auch Reinholdus, durch seine knappe Initiierung arithmetischer und geometrischer Fertigkeiten, gewisse mathematische Begründungen zumindest ansatzweise zu vermitteln.

151. Reinholdus 1574, s. dort *An den Leser*, unpag.
152. Reinholdus 1574, s. dort *An den Leser*, unpag.
153. Ermisch 1886, 290 ff.
154. Bundesberggesetz (BBergG), o.Dat., §§ 63, 64.
155. Bringmann 2003, 25 ff.
156. Scriba und Schreiber 2010, 87.
157. Agricola 1556, 93 ff.
158. Reinholdus 1574, *Das erste Theil*, *Das erste Capitel* bzw. *Das Siebende Capittel*, unpag.
159. Wußing 2013, Bd. I, S. 379 f.
160. Scriba und Schreiber 2010, 245 ff.
161. Woltmann 1877.

Resümee und Ausblick

Probleme, denen sich das Markscheidewesen widmet, versuchen Menschen zu lösen, seit sie ihrem monanistischen Interesse nachgehen. In Herons *Commentatio Dioptrica* sind Aufgaben identifiziert worden, die dieser Disziplin zugeordnet werden können. Es ist dargestellt worden, wie sich schon Heron um die Lösung von Problemen der – retrospektiv – Markscheidekunst verdient gemacht hat. Als einer der grundlegenden Autoritäten, auf denen die in den gromatischen Schriften dargelegten Inhalte der Agrimensoren fußen, reicht sein Erbe bis in die Renaissance und darüber hinaus. In dieser Epoche widmet sich Rühlein von Calw als Humanist der literarischen Darstellung der Orientierung und dem Streichen und Fallen von Gängen als einer initialen Aufgabe der Markscheidekunst. Agricola beschreibt die *Ars Mensorum* in einem Teil einer seiner zwölf Bücher. Kästner resümiert über Aricola: in *De Re Metallica* steht „nur einiges vom Markscheiden, ohne diese Kunst umständlich zu lehren, die seiner Darstellung gemäß, noch sehr unvollkommen war.“[162] So opulent das *Opus Magnum* dieses eminenten Renaissance-Gelehrten und Humanisten in toto zweifellos ist, so sind die *Geometriae usus in metallicis* bei ihm doch nicht der Fokus seiner Betrachtungen und infolgedessen auch weniger detailliert beschrieben. Es wundert nicht, dass ein ausgesprochener *Mathematicus* einen seinem Fach entsprechenden Aspekt bei der Behandlung wählt. Reinholdus ist gewissermaßen für die Markscheidekunst das, was Peuerbach für die Astrometrie ist: Beide beschreiben innovative Messinstrumente – Reinholdus seinen Visier*compast*, Peuerbach sein *Quadratum Geometricum* – und beide führen trigonometrische Tabellen in ihre jeweilige Disziplin ein. Der Makel der Praxisdistanz, den Morel für die Anwendung der *Geometria Subterranea* bei Agricola demonstriert, mag Reinholdus vor dem Hintergrund seiner Intention nicht anhaften. Es wäre daher etwas eilfertig, diese beiden Gelehrten unter dem Aspekt der Ausführung der *Geometria Subterranea* über *ein und denselben Leisten zu schlagen.*[163]

Ziel war natürlich nicht eine Evaluation der Gelehrtenleistung auf dem Gebiet der *Geometria Subterranea* im Sinne einer Hierarchiesierung – das wäre weder inhaltlich angebracht oder seriös durchzuführen, noch auch generell adäquat –, sondern das Herausarbeiten, dass jeder der Humanisten seinen spezifischen Beitrag zur Genese des Markscheidewesens als wissenschaftlicher Disziplin beigetragen hat, und die Analyse dessen, was kontinuierlich weiterentwickelt wurde und sich etabliert hat: Während also Rühlein durch seinen Berg*kompass* die Winkelmessung zur

162. Kästner 1796, 698.
163. Eine Redewendung, die sowohl Agricola als auch Reinholdus schon verstanden hätten.

räumlichen Orientierung einbringt, liegt bei Agricola der Fokus auf Längenmessung und -ermittlung. Quantitative Winkelmessung und Längenberechnung durch trigonometrische Verfahren sind die Synthese aktuellster geometrischer Innovationen seiner Zeit und *agrimensor*ischer Tradition, die der Leucoreaner Reinholdus für den mathematischen Aspekt der Markscheidekunst adaptiert.

Nach Reinholdus dominieren Manuskripte[164] das markscheiderische Schrifttum: Eine Entwicklung, die diese Disziplin mit vielen anderen während des Dreißigjährigen Krieges teilt.[165] Mit Ausnahme von Nikolaus Voigtels[166] (* 1658, † 1714)[167] *Geometria Subterranea oder Markscheide-Kunst*[168] (und Balthasar Rößlers (× * 1605, † 1673)[169] *Speculum Metallurgiæ Politissimum*,[170] der die Thematik aber nur tangiert) geht erst wieder 1726 ein Buch in Druck, das sich der Markscheidekunst (mathematisch) widmet: die wissenschaftlich noch nicht umfassend erschlossenen *Institutiones Geometrieae Subterraneae*.[171] Es ist wieder ein Wittenberger Mathematikprofessor – Johann Friedrich Weidler (* 1691, † 1755)[172] als einer der herausragenden Mathematikprofessoren der mitteldeutschen Aufklärung, der an der *Mathematisierung* seiner Epoche aktiv mitgewirkt hat.[173]

Seine wissenschaftliche Etablierung findet das Markscheidewesen als Teil der Institutionalisierung praktischer Mathematik schließlich in der Gründung der Kurfürstlich-Sächsischen Bergakademie zu Freiberg 1765.[174]

Literaturverzeichnis

Agricola, Georgius. 1556. *De Re Metallica Libri XII.* Basel: Hieronymus Frobenius / Nicolaus Episcopius. https://doi.org/https://doi.org/10.5962/bhl.title.30117.

Alexandrinus, Heron. 1903. Rationes Dimetiendi et Commentatio Dioptrica. In *Opera quae supersunt omnia,* herausgegeben von Hermann Schöne, Bd. III. Leipzig.

164. S. hierzu Morel 2018, 2020b.
165. Koch 1960, 67 ff.
166. Markscheider u. kurfürstlich sächsische Zehntner.
167. Vgl. Günther 1896a.
168. Voigtel 1686.
169. Vgl. Meixner et al. 1980.
170. Rößler 1700.
171. Weidler 1726.
172. Günther 1896b.
173. Reimers 2020.
174. Morel 2013, 141 ff.

Apostol, Tom Mike. 2004. The Tunnel of Samos. *Engineering & Science (E&S),* Nr. 1, 30–40.

Bartels, Christoph, Andreas Bingener und Rainer Slotta, Hrsg. 2006. Der Buchumer Entwurf von 1554 – Faksimilie. In *1556 Perkwerk etc. – Das Schwazer Bergbuch,* Bd. I. Bochum.

Baumgärtel, Hans. 1965. Vom Bergbüchlein zur Bergakademie – Zur Entwicklung der Bergwissenschaften zwischen 1500 und 1765/1770. *Freiberger Fortschungshefte (FFH)* D 50.

BBergG. Vom 13. August 1980 (BGBl. I S. 1310), das zuletzt durch Artikel 2 Absatz 4 des Gesetzes vom 20. Juli 2017 (BGBl. I S. 2808) geändert worden ist.

Bluma, Lars, Michael Farrenkopf und Stefan Przigoda. 2018. *Geschichte des Bergbaus.* (= *Schriften des Bergbau-Archivs*, Nr. 31). Berlin.

Börner, Herbert, Gisela Buchheim, Thomas Hänseroth, Alfred Kirpal, Klaus Krug, Peter Lange, Klaus Mauersherger et al. 1990. *Geschichte der Technikwissenschaften.* Herausgegeben von Gisela Buchheim und Rolf Sonnemann. Berlin.

Bringmann, Klaus Karlwilli. 2003. *Krise und Ende der römischen Republik (133–42 v. Chr.)* Berlin.

Cantor, Moritz Benedikt. 1875. *Die Römischen Agrimensoren und ihre Stellung in der Geschichte der Feldmesskunst – Eine historisch-mathematische Untersuchung.* Leipzig.

Colognesi, Luigi Capogrossi. 1992. I Gromatici nella Storiografia dell'Ottocento. *Die römische Feldmeßkunst – Interdisziplinäre Beiträge zu ihrer Bedeutung für die Zivilisationsgeschichte Roms* (Göttigen), 9–25.

Dörrie, Heinrich. 1975. Straton (3). *Der Kleine Pauly (KlP)* V:Sp.393.

Drachmann, Aage Gerhardt. 1972. Hero of Alexandria. In *Dictionary of Scientific Biography (DSB),* herausgegeben von Charles Coulston Gillispie, VI.310–15. New York.

Engels, Friedrich. o.Dat. Dialektik der Natur. In *Marx–Engels–Werke (MEW),* Bd. 20.

Ermisch, Hubert Maximilian, Hrsg. 1886. Urkundenbuch der Stadt Freiberg in Sachsen – Zweiter Band. In *Codex Diplomaticus Saxoniae Regiae (CDS),* Bd. II. Tom. 13. Leipzig.

Folkerts, Menso. 1992. Mathematische Probleme im Corpus Agrimensorum. *Die römische Feldmeßkunst – Interdisziplinäre Beiträge zu ihrer Bedeutung für die Zivilisationsgeschichte Roms* (Göttigen), 311–36.

———. 2014. In den Gefilden der römischen Feldmesser – Juristische, wissenschaftsgeschichtliche, historische und sprachliche Aspekte. Kap. *Die Mathematik der Agrimensoren – Quellen und Nachwirkung*, herausgegeben von Eberhard Knobloch und Cosima Möller, 131–48. Berlin.

Folkerts, Menso, und Andreas Kühne. 2003. Regiomontanus, Johannes. *Neue Deutsche Biographie (NDB)* 21:270 f.

Gautier Dalché, Patrick. 2015. Mesure du Sol et Géométrie au Moyen Âge. *Archives d'Histoire Doctrinale et Littéraire du Moyen Âge (AHDLMA)* 82:97–139.

Gericke, Helmuth Fritz Paul. 1990. *Mathematik im Abendland – Von den römischen Feldvermessern bis zu Descartes.* Berlin.

Günther, Adam Wilhelm Siegmund. 1896a. Voigtel, Nikolaus. *Allgemeine Deutsche Biographie (ADB)* 40:212.

———. 1896b. Weidler, Johann Friedrich. *ADB* 41:453 ff.

Hartmann, Hans. 1953. Georg Agricola (1494 – 1555) – Begründer dreier Wissenschaften: Mineralogie–Geologie–Bergbaukunde. In *Große Naturforscher,* herausgegeben von Hans Walther Frickhinger, Bd. 13. Stuttgart.

Haupt, Hermann Franz. 2001. Peu(e)rbach (auch Purbach), Georg von. *NDB* 20:281 f.

Heath, Thomas Little. 1921. *A History of Greek Mathematics.* Oxford.

Herodot. 2007. *Historien.* Herausgegeben von Josef Feix. Düsseldorf.

Herrmann, Dietmar. 2014. *Die antike Mathematik – Eine Geschichte der griechischen Mathematik, ihrer Probleme und Lösungen.* Berlin.

———. 2019. *Mathematik im Vorderen Orient – Geschichte der Mathematik in Altägypten und Mesopotamien.* Berlin.

Høyrup, Jens Egede. 2002. Lengths, Widths, Surfaces – A Portrait of Old Babylonian Algebra and Its Kin. In *Studies and Sources in the History of Mathematics and Physical Sciences,* herausgegeben von Jed Zachary Buchwald, Jesper Lützen und Gerald James Toomer. Boca Raton.

———. 2019. Heron, Ps-Heron, and near Eastern Practical Geometry – An Investigation of Metrica, Geometrica, and other Treatises. In *Selected Essays on Pre- and Early Modern Mathematical Practice,* herausgegeben von Jens Egede Høyrup, 229–55. Cham.

Infelise, Mario. 2007. Manùzio, Aldo, il Vecchio. *Dizionario Biografico degli Italiani (DBI)* 69.

Jentsch, Frieder. 2005. Rülein von Calw, Ulrich. *NDB* 22:222.

Kästner, Abraham Gotthelf. 1796. *Die Geschichte der Mathematik seit der Wiederherstellung der Wissenschaften bis an das Ende des achtzehnten Jahrhunderts.* Bd. I. Göttingen: Johann Georg Rosenbusch.

Kathe, Heinz. 2002. *Die Wittenberger Philosophische Fakultät 1502–1817.* (= *Mitteldeutsche Forschungen.* Bd. 117). Böhlau.

Keil, Gundolf. 2005. Ryff, Walther Hermann. *NDB* 22:310 f.

Kienast, Hermann Josef. 1995. Die Wasserleitung des Eupalinos auf Samos. In *Samos,* Bd. XIX. Bonn.

Kirnbauer, Frank, und Karl Leopold Schubert, Hrsg. 1955. Die Maere vom Feldbauer. *Leobener grüne Hefte* (Wien), Nr. 18.

Klaus, Georg, und Manfred Buhr, Hrsg. 1974. *Philosophische Wörterbuch.* Bd. II. Leipzig.

Klenkel, Paul. 1953. Paul Niavis Iudicium Iovis oder Das Gericht der Götter über den Bergbau – Ein literarisches Dokument aus der Frühzeit des deutschen Bergbaus. *FFH* D 3.

Knape, Joachim, und Ursula Kocher. 1999. Niavis, Paul. *NDB* 19:195 f.

Koch, Manfred. 1960. Geschichte und Entwicklung des bergmännischen Schrifttums. Diss., Bergakademie Clausthal.

Kühne, Andreas. 2003a. Reinhold, Erasmus. *NDB* 21:367 f.

———. 2003b. Rheticus, Georg Joachim. *NDB* 21:496 f.

Lachmann, Karl Konrad Friedrich Wilhelm. 1848–52. *Die Schriften der römischen Feldvermesser.* Herausgegeben von Karl Konrad Friedrich Wilhelm Lachmann, Friedrich Bluhme, Christian Matthias Theodor Mommsen und Adolf August Friedrich Rudorff. Bd. I & II. Berlin: Georg Reimer.

Licht, Balthasar. 1500. *Algorithmus Linealis cum Conditionibus Regulae de tri, septem Fractionum, Regulis Socialibus et semper Exemplis Idoneis.* Leipzig: Melchior Lotter.

Long, Pamela Olivia. 1991. The Openness of Knowledge: An Ideal and Its Context in 16th-Century Writings on Mining and Metallurgy. *Technology and Culture (T & C)* 32, Nr. 2 (April): 318–55.

Magnus, Albertus. 1890. Mineralia. In *Opera Omnia,* herausgegeben von Auguste Borgnet, V:1–116. Paris.

Meixner, Heinz, Rudolph Walter Schellhas und Peter Schmidt. 1980. *Balthasar Rösler: Persönlichkeit und Wirken für den Bergbau des 17. Jahrhunderts.* Leipzig.

Mendels, Judica. 1953. Das Bergbüchlein: A Text Edition. Diss., Johns Hopkins University.

Morel, Thomas. 2013. Mathématiques et Politiques Scientifiques en Saxe (1765–1861) – Institutions, Actuers et Enseignements. Diss., Université de Bordeaux.

———. 2018. Five Lives of a Geometria Subterranea (1708-1785). Autorschip and Knoledge Circulation in Practical Mathematics. *Revue d'Histoire des Mathématiques (RHM)* 24:207–58.

———. 2020a. De Re Geometrica – Writing, Drawing, and Preaching Mathematics in Early Modern Mines. *Isis* 111 (1): 22–45.

———. 2020b. Markscheidekunst und die Anwendung der Mathematik im frühneuzeitlichen Bergbau. In *Die Entwicklung der Mathematik in der frühen Neuzeit,* herausgegeben von Rainer Gebhardt, 301–12. Annaberg-Buchholz: Adam-Ries-Bund.

Neugebauer, Otto Eduard. 1969. *Vorlesungen über Geschichte der antiken mathematischen Wissenschaften.* Bd. I. Berlin.

Paehr, Sabine. 2018. Kupfer-, Blei- und Silbergewinnung – Mitteleuropäisches Hüttenwesen in der Frühen Neuzeit – Eine vergleichende Darstellung wissenschaftlicher Fachliteratur. Diss., Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover.

Pieper, Wilhelm Ludwig. 1955. Ulrich Rülein von Calw und sein Bergbüchlein. *FFH* D 7.

Piketty, Thomas. 2020. *Kapital und Ideologie.* München.

Prinz, Ina. 2011. Als Mathematiker noch rechneten. *Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung (MDMV)* 19:105–9.

Rance, Philip. 2013. Philo of Byzantium. Herausgegeben von Roger Shaler Bagnall. *The Encyclopedia of Ancient History,* Sp.5266–8.

Reimers, Toni. 2020. Der Beitrag des Wittenberger Mathematikers Johann Friedrich Weidler zur Begriffsgenese der *Angewandten Mathematik. Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik (SieB)* 13:33–55.

Reinholdus, Erasmus. 1554. *Primus Liber Tabularum Directionum. Discentibus Prima Elementa Astronomiae Necessarius & Utilissimus.* Tübingen: Ulrich Morhard.

———. 1574. *Gründlicher vnd Wahrer Bericht. Vom Feldmessen [. . .] Vom Marckscheiden, kurtzer vnd gründlicher vnterricht.* Erfurt: Georg Baumann.

———. 1584. *Ioannis de Monteregio Mathematici Clarissimi, Tabulae Directionum Profectionumque, non tam Astrologiae Iudiciariae, quam Tabulis Instrumentisque Innumeris Fabricandis Utiles ac Necessariae.* Wittenberg: Matthäus Welack.

Rheticus, Georg Joachim. 1551. *Canon Doctrinae Triangulorum.* Leipzig: Wolphgang Gunterus.

Rösner, Corinna. 1990. Manuel, Hans Rudolf. *NDB* 16:67 f.

Rößler, Balthasar. 1700. *Speculum Metallurgiæ Politissimum. Oder: Hell-polierter Berg-Bau-Spiegel.* Dresden: Johann Jacob Winckler.

Sallmann, Klaus Günther. 1972. Plinius (1). *KlP* IV:Sp.928–37.

———. 1975. Vitruvius (2). *KlP* V:Sp.1309–13.

Schillinger, Klaus. 1990. *Entwicklung des Vermessungswesens im 16. Jahrhundert.* Herausgegeben von Fritz Bönisch, Hans Brichz, Klaus Schillinger und Werner Stams. (= *Veröffentlichungen des Staatlichen Mathematisch-Physikalischen Salons.* Bd. VIII), *Kursächsische Kartographie bis zum Dreißigjährigen Krieg* (Heidelberg) Bd. I:11–36.

Schmauch, Hans. 1957. Copernicus, Nicolaus. *NDB* 3:348–55.

Scriba, Chrisoph Joachim, und Peter Schreiber. 2010. *5000 Jahre Geometrie: Geschichte – Kulturen – Menschen.* 3. Aufl. Berlin.

Toneatto, Lucio. 1994 f. *Codices Artis Mensoriae i Manoscritti degli Antichi Opuscoli Latini d'Agrimensura (V–XIX sec.)* Bd. I–III. Spoleto.

Ullman, Berthold Louis. 1964. Geometry in the Mediaeval Quadrivium. *Studi di bibliografia e di storia in onore di Tammaro de Marinis* IV:263–85.

Veith, Heinrich. 1870 f. *Deutsches Bergwörterbuch mit Belegen.* Breslau: Wilhelm Gottlieb Korn. http://digital.slub-dresden.de/id346588987.

Voigtel, Nicolaus. 1686. *Geometria subterranea, oder Marckscheide-Kunst.* 1. Aufl. Eisleben: Johann Dietzel.

Vollrath, Hans-Joachim. 2013. *Verborgene Ideen – Historische mathematische Instrumente.* Wiesbaden.

Weidler, Johann Friedrich. 1726. *Institutiones Geometriae Subterraneae.* 1. Aufl. Wittenberg: Christian Gerdes' Witwe.

Weißflog, Egon. 2011. Erasmus Reinhold: „Von dem Marscheiden". In *Kaufmanns-Rechenbücher und mathematische Schriften der frühen Neuzeit,* herausgegeben von Rainer Gebhardt, 261–76. Annaberg-Buchholz: Adam-Ries-Bund.

Wilkening, Wilhelm. 1960. Erasmus Reinholdt – Der Verfasser der ersten deutschen Markscheidekunde. *Mitteilungen aus dem Markscheidewesen,* Nr. 67, 13–74.

Woltmann, Alfred. 1877. Dürer, Albrecht. *ADB* 5:475–85.

Wunderlich, Gotthelf Ernst Herbert. 1977a. *Das Dresdner „Quadratum geometricum" aus dem Jahre 1569 von Christoph Schißler d. Ä.* Herausgegeben von Camillo Herbert Grötzsch. (= *Veröffentlichungen des Staatlichen Mathematisch-Physikalischen Salons.* Bd. I). Berlin.

———. 1977b. *Kursächsische Feldmesskunst, artilleristische Richtverfahren und Ballistik im 16. und 17. Jahrhundert.* Herausgegeben von Camillo Herbert Grötzsch. (= *Veröffentlichungen des Staatlichen Mathematisch-Physikalischen Salons.* Bd. VII). Berlin.

Wußing, Hans-Ludwig. 2013. *6000 Jahre Mathematik: Eine kulturgeschichtliche Zeitreise.* Berlin.

Die astrologischen, astronomischen und komputistischen Studien des Nikolaus von Kues

Andreas Kirchartz

Abstract

In den astronomischen, astrologischen und komputistischen Studien des Nikolaus von Kues verbinden sich 'naturwissenschaftliche' mit philosophischen Überlegungen zu einer kreativen Gesamtsicht auf den Kosmos. Im folgenden Aufsatz soll durch eine chronologische Aufarbeitung dieser Werke der Wandel aufgezeigt werden, der sich im Weltbild des Kueser Kardinals im Laufe der Zeit vollzogen hat.

Die Wurzel allen Philosophierens ist das Staunen.[1] So hat es Nikolaus von Kues bereits im Prolog zu seinem ersten Buch der *Docta Ignorantia* formuliert[2] und dabei eine beachtenswerte und eigentlich erst im Renaissancezeitalter aufkommende Parallelisierung von Lebenserhalt durch Nahrung und Vollendung des Intellekts angestellt.[3] So wie der Hunger uns antreibt zu essen, was unser physisches Überleben ermöglicht, führt uns das Staunen zur Wahrheitssuche, die wiederum den Geist zu seiner Vollendung bringt. In seinem Spätwerk *De venatione sapientiae* (1463) - *von der Jagd nach der Weisheit* - wird diese Parallele sogar im Titel verknüpft.[4] Der Blick zum (Sternen-) Himmel hat in Nikolaus vermutlich schon sehr früh eben

1. Mit diesem Gedanken greift Nikolaus bekanntlich auf Aristoteles zurück. Vgl. Aristoteles, Metaphysik, A2, 982^{b} 12ff.
2. De doct. ign. I, h I, Prolog, p. 2, 18-20 (n. 1): „Ita recte puto admirari, propter quod philosophari, sciendi desiderium praevenire, ut intellectus, cuius intelligere est esse, studio veritatis perficiatur."
3. Vgl. Leinkauf, Grundriss, 1066.
4. Vgl. ebd. Die Metapher von der Jagd nach Weisheit zeigt auch sehr treffend die bei Nikolaus immer wieder zu beobachtende Verknüpfung physikalischer Prozesse (Nahrungsaufnahme bzw. Jagd) und philosophischer Erkenntnisse (Weisheitsgewinn).

jenes Staunen angeregt. Die Hospitals-Bibliothek von Kues zeugt von einem reichen Schatz an verschiedenen astronomischen Gerätschaften sowie astrologischen und astronomischen Handschriften[5], die der Kardinal im Laufe seines Lebens erworben hat.[6] Bemerkenswert ist hierbei aus heutiger Perspektive vor allem seine Begeisterung für die Astrologie, die Ulli Roth folgendermaßen begründet:

> „Die Astrologie offenbart einen komplexen Zusammenhang von allem mit allem, von den Fixsternen zu den Planeten bis zu den Körperorganen. Die Gesamtsicht des Universums, des Ineinanderwirkens von Makrokosmos und Mikrokosmos und besonders die Nachvollziehbarkeit dieses Wissens faszinierte Cusanus.“[7]

Zu dieser Faszination an genuin astrologischen und astronomischen Fragestellungen gesellt sich bei Nikolaus von Anfang an ein Interesse daran, die Erkenntnisse über ‚physikalische‘ Prozesse im Universum auch mit philosophischen und theologischen Betrachtungen zu verbinden. Cusanus ist kein Astronom und Astrologe im engeren Sinne und erst recht kein Kepler oder Kopernikus.[8] Dennoch sind seine *fachwissenschaftlichen* Studien kein reines Hobby, sondern ernsthafte Versuche, sich der Frage nach dem Kosmos, dem Weltganzen, auf methodisch unterschiedlichen Pfaden anzunähern. Dabei ist es oftmals nicht leicht einzuordnen, inwiefern die philosophischen und theologischen Erwägungen den ‚naturwissenschaftlichen‘ vorausgehen oder ob sie sich gegenseitig – gewissermaßen auf Augenhöhe - vorantreiben.

Nicht unerwähnt bleiben darf an dieser Stelle, dass in der Kosmologie im Allgemeinen und für Nikolaus im Besonderen die Mathematik eine wesentliche Rolle spielt, und zwar sowohl in der Beschreibung als auch in der Deutung des Kosmos.[9] Die Mathematik, wie Gregor Nickel zurecht betont, bekleidet sogar eine

> „Schlüsselrolle, insofern ein experimenteller Zugang wegen der intrinsischen Einmaligkeit des Universums und der prinzipiellen Unkontrollierbarkeit des Phänomenbereiches (räumlich wie zeitlich) problematisch ist.“[10]

5. Vgl. hierzu besonders Roth, Das astrologische Wissen, 67f.
6. Vgl. Müller, Der junge Cusanus, 18.
7. Roth, Cusanus‘ Weltgeschichte, 9.
8. Vgl. Meurers, Nikolaus von Kues, 396.
9. Vgl. hierzu bspw. Nagel, Nicolaus Cusanus und die Entstehung der exakten Wissenschaften, besonders 12-17 und Meurers, Nikolaus von Kues, 397.
10. Nickel, Nec finitum nec infinitum, 173.

Diese Schlüsselrolle verdiente es eigens thematisiert zu werden, was in diesem Aufsatz jedoch nicht versucht werden kann.[11] Hier soll vielmehr der Fokus auf die Forschungen des Cusanus im Rahmen der Astronomie, der Astrologie und der Komputistik gerichtet werden und davon ausgehend ihre philosophischen Implikationen, insbesondere für das Weltbild des Kueser Kardinals, bedacht werden.

Bevor dies eingehend getan werden kann, sollen zunächst die wesentlichen Termini geklärt werden. Obwohl nämlich Astronomie und Astrologie im Mittelalter nicht immer streng voneinander abgegrenzt werden, hat sich dennoch folgende von Ulli Roth vorgeschlagene Unterscheidung als hilfreich erwiesen: Die *Astronomie* ist die mathematisch *beschreibende* Disziplin der Sternenbilder, Planetenbahnen, etc. und als solche auch Teil des (mathematischen) Quadriviums.[12] Die *Astrologie* dagegen ist die *deutende* Disziplin, die sich mit den Planeten- und Sternenkonstellationen insofern auseinandersetzt, als sie einen Einfluss auf die Welt und den Menschen ausüben.[13] In gewisser Weise ist die Astrologie also die Verbindungswissenschaft zwischen der Astronomie und dem konkreten Geschehen auf der Erde. Da hierbei durch die damit verbundenen physikalischen Prozesse das reine Gebiet der Mathematik überschritten wird, ist die Unterscheidung zwischen Astronomie und Astrologie nachvollziehbar. Um an dieser Stelle gleich einem Missverständnis vorzubeugen, sei erwähnt, dass die sogenannte Nativitätsastrologie, also der Versuch mittels eines Geburtshoroskops genaue Aussagen über den Verlauf eines konkreten Menschenlebens zu machen, im Mittelalter verboten war und keineswegs die Richtung der Astrologie war, für die sich Nikolaus erwärmen konnte,[14] wenngleich er sie definitiv gekannt hat.[15]

Welche Sicht vom Kosmos hatte eigentlich Nikolaus Cusanus im frühen 15. Jahrhundert? Die Verbindung von Elementen griechischer Philosophie (besonders des Timaios) und des (christlichen) Schöpfungsglaubens wurde im 12. Jahrhundert dank der lateinischen Übersetzungen aristotelischer Werke durch dessen Naturphilosophie ergänzt und erweitert.[16] An den langsam entstehenden Universitäten

11. Zur Bedeutung der Mathematik bei Nikolaus vgl. v. a. Nagel, Nicolaus Cusanus und die Entstehung der exakten Wissenschaften sowie Velthoven, Gottesschau und menschliche Kreativität.

12. Vgl. De doct. ign. II, h I, cap. I und cap. XIII.

13. Vgl. Roth, Cusanus‘ Weltgeschichte, 5.

14. Cusanus hatte durchaus Vorbehalte gegenüber bestimmten Ausprägungen der Astrologie, die er z.T. auch biblisch motiviert zurückweist. Vgl. Kol 2,8-23, sowie Roth, Die astronomisch-astrologische „Weltgeschichte“, 4.

15. Vgl. Roth, Das astrologische Wissen, 72.

16. Naturphilosophische und theologische Weltbilder werden im Mittelalter zunehmend unterschieden, wenngleich ihr gegenseitiger Bezug nie ganz aufzulösen ist. Zugleich förderten die Spannungen zwischen philosophischen Autoritäten wie Aristoteles, der die Ewigkeit des Sublunaren als alternativlos darlegt und des Schöpfungsglaubens, der einen zeitlichen Anfang postuliert, kreative Weiterentwicklungen der bestehenden Weltbilder. Vgl. Sparn, Welt/Weltanschauung/Weltbild,

wurde somit ein aristotelisch-ptolemäisches Weltbild gelehrt.[17] Ein klassisches Bild dieser Zeit kann man sich wie folgt vorstellen: Die kugelförmige Erde (bzw. der Mensch[18]) befindet sich feststehend im Mittelpunkt, umgeben von den drei weiteren Elementen Wasser, Luft und Feuer. Es folgen die Sphären der sieben damals bekannten Planeten (Mond, Merkur, Venus, Sonne, Mars, Jupiter, Saturn[19]). Jenseits der sieben Planeten befand sich als 8. Sphäre die der Fixsterne, die die Tierkreiszeichen abbildet.[20] Darüber folgen die Kristallsphäre, die das biblische Wasser repräsentiert[21] und die Sphäre des Primum Mobile. Das Weltbild schließen die Sphäre der Engel und der Seligen ab, das sogenannte Empyreum, ein Gedanke, der noch von den Kirchenvätern abgelehnt wurde, den das Mittelalter jedoch wieder aufgriff, um den nicht lokalisierbaren ‚Wohnort' Gottes von den lokalisierbaren Sphären der Engel und Seligen zu unterscheiden.[22]

Auf Aristoteles zurückgehend wurde zudem der sub- und supralunare Bereich streng voneinander unterschieden, insofern präzise und vollkommene Bewegungen nur in den Sphären oberhalb des Mondes zu beobachten seien (und somit auch mathematisch beschreibbar waren), während alles Darunterliegende dem permanenten Wandel unterworfen und daraus resultierend nicht präzise mathematisch beschreibbar sei.[23]

Die Basis jeder Astrologie ergab sich aus der Vorstellung, dass die Fixsternsphäre als erstes Bewegte einen physikalischen Prozess der gegenseitigen Beeinflussung auslöst, der über die Planeten und die drei bzw. vier Elemente bis hin zur Erde reicht. Dabei stehen die einzelnen Tierkreiszeichen den vier Elementen unterschiedlich nahe und repräsentieren dadurch einzelne Elemente stärker (z.B. Fische, Skorpion und Krebs das Wasser). Gleiches gilt für die Planeten (z. B. steht der Saturn dem Wasser oder Merkur dem Feuer näher).

Wenngleich die Grundsätze der Astrologie aus heutiger Sicht nicht mehr als wissenschaftlich akzeptiert werden, so darf dennoch davon ausgegangen werden, dass Nikolaus die Astrologie als Wissenschaft betrachtet und als solche auch betrieben hat, und die sein Weltbild und das seiner Zeit maßgeblich geprägt hat.[24]

Die Kosmologie wiederum darf in gewisser Weise als eine der ältesten geistigen Auseinandersetzungen der Menschheit gelten, insofern sie versucht, über die „Welt

590 u. 592.

17. Vgl. Neunschwander, Weltbild, Sp. 2160ff.
18. Vgl. Roth, Cusanus' Weltgeschichte, 8.
19. Sonne und Mond wurden als Planeten angesehen. Vgl. ebd.
20. Vgl. ebd.
21. Vgl. Gen 1,7.
22. Vgl. Sparn, Welt/Weltanschauung/Weltbild, 591.
23. Vgl. ebd. Vgl. außerdem Nickel, Nec finitum nec infinitum, 173f.
24. Vgl. hierzu auch Roth, Die astronomisch-astrologische „Weltgeschichte", 1.

im Ganzen“ und ihre „globalen Struktureigenschaften“ nachzudenken.[25] Während sich also die Astronomie mit den einzelnen Objekten des Alls und ihren Bewegungen beschäftigt, fragt die Kosmologie nach dem Gesamt des Universums, wobei Naturphilosophie wie moderne Physik mit ihren je eigenen Methoden Kosmologie betreiben.[26] Wenngleich die Physik als (Natur-) Wissenschaft zu Zeiten des Cusanus noch nicht existierte, ergänzen sich bei Nikolaus‘ kosmologischen Schriften sowohl physikalische als auch philosophische (und genuin mathematische) Betrachtungen zu einem Gesamtbild des Kosmos.

Der folgende Überblick hat die Werke im Blick, die sich mit dem „Weltbild“ des Kueser Kardinals befassen, das aus seinen astronomischen, astrologischen und ergänzend einigen komputistischen[27] Studien und seinen daraus folgenden philosophischen Erkenntnissen bestehen, die sein Weltbild, d. h. seine Vorstellung vom Universum, besonders geprägt haben.[28]

Die astronomischen, astrologischen & komputistischen Studien des Nikolaus von Kues

Die astronomisch-astrologische Weltgeschichte im Codex Cusanus 212 (1425)

Cusanus hat sich Zeit seines Lebens mit astrologischen Themen auseinandergesetzt und diese Wissenschaft besonders in ihren Resultaten sehr ernst genommen. Seine intensive Beschäftigung offenbart v. a. ein Blick in seine eigene Handbibliothek.[29] 1444 kauft er in Nürnberg 16 astronomisch-astrologische Handschriften und auch in seinen Predigten Mitte der 50er Jahre des 15. Jahrhunderts greift er immer wieder auf astrologische Themen zurück.[30] Die erste (bekannte) Frucht aus der

25. Kanitscheider, Kosmologie. 14.
26. Vgl. Mittelstraß, Kosmologie, 483.
27. Die Komputistik ist die Wissenschaft von der Kalenderberechnung. Nikolaus verwendet sie nicht nur in seiner Kalenderschrift, sondern auch zur Errechnung des Datums der Apokalypse in seinem Werk „De ultimis diebus“.
28. Dabei verdanke ich die Auswahl der Schriften besonders der hier mehrfach zitierten Arbeit von Tom Müller, „Ut reiecto“, 29-54.
28. Berühmt geworden ist seine Aussage vom Oktober 1438, der Konzilsort Basel sei aufgrund einer Planetenkonstellation ungeeignet. Vgl. Roth, Cusanus‘ Weltgeschichte, 3.
29. Siehe Krchnak, Herkunft, 109-180. Besonders die vielen Bemerkungen, die Cusanus in den verschiedenen Schriften an den Rand notiert hat, belegen seine tiefgehende Beschäftigung mit astrologischen und astronomischen Themen und Fragestellungen. Vgl. hierzu u. a. Roth, Die astronomisch-astrologische „Weltgeschichte“, 3f.
30. Vgl. Roth, Cusanus‘ Weltgeschichte, 3.

Beschäftigung mit der Astrologie stammt vermutlich aus dem Jahr 1425. In dieser Zeit entsteht sein einziges genuin astrologisches Werk und gleichzeitig auch seine erste, längere Schrift, die sogenannte „astronomisch-astrologische Weltgeschichte“, die im Codex 212 enthalten ist.[31]

Neben dieser von Cusanus höchstselbst verfassten Schrift enthält der Codex 212 noch weitere Handschriften, die Nikolaus erworben hat, und die er mit einigen eigenen Notizen versehen hat. In einer solchen Schrift[32] heißt es:

> „Wenn Mars dort in einem feurigen Zeichen ist, werden viele Gegenden und Ortschaften verbrannt und es werden viele Todesfälle und Zerstörungen geschehen wegen des Feuers.“[33]

Hier liegt eine ‚physikalische‘ Erklärung vor für das Hereinbrechen von Umweltkatastrophen und somit einem Phänomen, das die Menschen damals wie heute vor enorme Herausforderungen gestellt hat. Dadurch, dass Mars in Verbindung steht mit einem feurigen (Tierkreis-) Zeichen (z. B. dem Widder), kommt Feuer auf die Erde, was zu all den genannten Katastrophen führt.

Ulli Roth verweist auf eine weitere Stelle im Codex 212, die Cusanus markiert und kommentiert hat. Da ist zu lesen:

> „Wenn der [Saturn, UR] in den Skorpion tritt, wird es viel Streit unter den Völkern geben und verschiedene Hemmnisse und gefährliche Krankheiten [. . .] es wird viel Blutvergießen und Gewalttätigkeit geben, es gibt gutes Vieh, die Wölfe werden herumziehen, es gibt wenig Regen, im Winter gibt es viele Stürme usw.“

Hierzu bemerkt Nikolaus am Rand:

> „Beachte: Das Horoskop ist wahr, was die Wölfe betrifft und überhaupt alles, wie es da behauptet wird.“

Das Erleben der damaligen Gefahren und Umweltkatastrophen (besonders der Pest) sowie die damals weit verbreiteten, herumziehenden Wolfsrudel verfestigen in Cusanus die Überzeugung, dass astrologische Studien Vorhersagen über Weltereignisse ermöglichen können.

31. Vgl. ebd.
32. Zur genaueren Herkunft dieser Schriften sowie ihrer Autoren vgl. Marx, Verzeichnis, 203-208, sowie Krchnak, Herkunft, 115ff.
33. Dieses und auch die folgenden Zitate sind entnommen aus Roth, Cusanus‘ Weltgeschichte, 9ff.

Für Nikolaus ist es aber keineswegs ausreichend einzelne Phänomene der Geschichte zu betrachten, sondern ihm geht es um das große Ganze, um „*die* Geschichte" schlechthin, wie Ulli Roth schreibt[34], und so nennt er sein Werk ambitioniert die „astronomisch-astrologische Weltgeschichte". Das Ziel dieses Werkes ist die Verknüpfung der Weltgeschichte auf der Erde mit den Planeten- und Sternenkonstellationen am Himmel, mit anderen Worten die Verbindung von Mikrokosmos und Makrokosmos. Dies versucht er mithilfe von vier rein rationalen Betrachtungsebenen:

> „Die Mathematik gibt die Struktur dieser Weltsicht, die Astronomie verdeutlicht diese Struktur im Sternenlauf, die Astrologie stellt die Verbindung zum irdischen Geschehen her, die Geschichtsschreibung zeigt die letzte Konkretion."[35]

Es ist nicht der Anspruch dieses Aufsatzes die in dieser kleinen Schrift angestellten Berechnungen bspw. zum Weltanfang nachzuvollziehen.[36] Es soll vielmehr um die Intention gehen, die Nikolaus mit dieser kleinen Schrift hatte. Cusanus versucht das Entstehen der Welt sowie die großen Weltereignisse wie Auf- und Niedergang von Großreichen anhand astrologischer Beobachtungen plausibel zu machen. Meist liegt der Untergang dieser Reiche an „feurigen" Einflüssen der Planeten in Kombination mit den Tierkreiszeichen.[37]

Selbstredend werden auch die Geburt und der Tod Christi als die für das Christentum alles entscheidenden Daten der Weltgeschichte von Nikolaus erwähnt. Allerdings hält er sich hier mit seiner Deutung der Planeten- und Tierkreiszeichenkonstellationen stark zurück. Woran das lag, darüber kann auch Ulli Roth nur mutmaßen. Das Verbot ein Geburtshoroskop Christi zu erstellen, mag sicher ein Grund gewesen sein.[38]

Was auch immer man von diesen Beschäftigungen des Nikolaus halten mag, sie zeigen deutlich, dass Nikolaus immer ein Interesse daran hatte, die verschiedenen Wissensgebiete miteinander in Beziehung zu bringen. Während die Historiker seiner Zeit wenig Interesse an der Astrologie hatten und umgekehrt die Astrologen lieber ihre Berechnungen verfeinert haben als sich mit vergangenen Ereignissen

34. Ebd. 11.
35. Roth, astronomisch-astrologische „Weltgeschichte", 11.
36. Für eine genauere Auseinandersetzung zu Aufbau und Inhalt der Schrift und auch welche Fehler er anfangs gemacht hat und später korrigieren musste, vgl. Roth, Die astronomisch-astrologische „Weltgeschichte", 10ff.
37. Vgl. z. B. Roth, Die astronomisch-astrologische „Weltgeschichte", 25, Z. 29 – 26, Z. 1: „[...] et incepit sub sagiptario priamas regnare troye/ et in illa triplicitate troya destructa est quando venit ad arietem et propter dominium martis in coniunctione cum saturno in cancro. igne consumitur". Vgl. direkt zu dieser Stelle Roth, Das astrologische Wissen, 78.
38. Vgl. Roth, Cusanus' Weltgeschichte, 13.

zu beschäftigen, ist Nikolaus einer der wenigen Gelehrten seiner Zeit, der durch fundierte Kenntnisse auf beiden Gebieten eine niveauvolle (wenn auch nicht fehlerfreie) Verknüpfung beider Bereiche unternommen hat.[39]

De concordantia catholica (1433)

In einer kurzen Passage im zweiten Kapitel des ersten Buches seines frühesten Hauptwerks[40] widmet sich Nikolaus auch der Kosmologie und der Frage, welche Stellung dem Menschen im Kosmos zukommt. Tom Müller hat dieses Weltbild als „ein sehr traditionelles“[41] beschrieben. Hans Gerhard Senger sieht hier eine Kombination aus der Hierarchienlehre des Dionysius Areopagita und des bereits erwähnten geozentrischen Weltbildes.[42]

Nikolaus bezeichnet den Kosmos als eine Schöpfung Gottes[43], die von Cusanus als *universum* oder *mundus* bezeichnet wird. Gut neuplatonisch gibt es eine Hierarchie des Seins, die vom ‚lux aeternae‘[44] (dem dreieinen Gott) bis zur „ultima umbra“[45] (der Erde) reicht. Cusanus‘ Welt besteht aus 9 Sphären der sichtbaren Welt. Die oberste bzw. 9. Sphäre gilt ihm als das *primum mobile* und grenzt an die unterste Ordnungsstufe der Engelswelt, die analog zur sichtbaren Welt ebenfalls aus 9 Sphären besteht. Das Universum wiederum ist durchwirkt von den beiden Prinzipien des Geistigen und des Körperlichen sowie ihrer gegenseitigen Durchmischung.[46] Diese Trennung impliziert die graduelle Abstufung, die der Teilhabe an den Prinzipien entspricht. Wenngleich diese Unterscheidung nicht im selben Sinne zu verstehen ist, wie die Trennung zwischen Schöpfer und Geschöpf, da sowohl die Körper- als auch die Geisteswelt Schöpfungen sind, so gibt es dennoch eine Hierarchie des Seins. Daneben existiert aber auch eine „unitas hierarchica“[47], wie Nikolaus es ausdrückt, d. h. bei aller graduellen Abstufung gibt es ein verbindendes

39. Vgl. hierzu Roth, Die astronomisch-astrologische „Weltgeschichte“, 17f.
40. Vgl. zum seiner Ansicht nach problematischen Gebrauch des Wortes ‚Hauptwerke‘, zu denen er *De concordantia catholica, De docta ignorantia, De coniecturis* und *De mente* zählt, Flasch, Entwicklung, 288.
41. Müller, „Ut reiecto“, 35.
42. Vgl. Senger, Philosophie, 26ff.
43. Vgl. De conc. I, h XIV, cap. II, p. 34, 4-5 (n. 9): „[...] sicut a deo unico, aeterno, simplicissimo fluunt per creationem cuncta [...]”
44. Vgl. ebd. 9 (n. 9).
45. Ebd. p. 36, 12 (n. 11).
46. Vgl. De conc. I, h XIV, cap. II, p. 35, 1-2 (n.11): „Hoc generali ordine trinitatis figuram gestant cuncta creata, quae aut spiritualia aut corporalia aut mixta sunt.” Vgl. zur trinitarischen Struktur der einzelnen hierarchischen Stufen Haubst, Das Bild des Einen, 52-59.
47. Vgl. De conc. I, h XIV, cap. II, p. 35, 2-5 (n. 11): „Deinde spiritualia triplici ordine distinguuntur et quilibet ordo triplici choro, ut per omnes caelestium angelicorum spirituum choros sit unitas hierarchica et signaculum trinitatis et unitatis in trinitate et trinitatis in unitate.”

Element, das allerdings nur von oben nach unten geht, höhere Stufen schließen also die jeweils niederen ein.[48] Die Sonderstellung des Menschen begründet sich damit, dass er sowohl an der geistigen als auch an der körperlichen Seinsweise teilhat. Die Erde als „ultima umbra" dagegen steht in der Hierarchie ganz unten, hat somit am Wenigsten teil an Gottes ewigem Licht.[49]

Zweierlei ist also wesentlich für das Weltbild, das Nikolaus in der Konkordanz vertritt: Es gibt in der Welt eine Hierarchie des Seins, in der die Erde die unterste Sphäre, die „ultima umbra" darstellt und es gibt eine Verbindung all jener Stufen, d. h. alle Seinsstufen sind durch den Gedanken der Teilhabe miteinander verbunden. Beide Aspekte werden in der *Docta Ignorantia* von Nikolaus neu bewertet.

De reparatione kalendarii (1436/1460)

De reparatione kalendarii kann in gewisser Weise als die „praktischste" philosophische[50] Schrift des Nikolaus bezeichnet werden. Grund für die Abfassung dieser Schrift ist ein konkretes Problem seiner Zeit, nämlich die notwendig gewordene Überarbeitung des bestehenden Julianischen Kalenders, der nicht optimal mit dem Sonnenjahr synchronisiert war, was für die Kirche den besonders großen Nachteil hatte, dass sich der Termin des Osterfestes nicht mehr im Einklang mit dem Mondzyklus bestimmen ließ. Die komputistischen und astronomischen Anstrengungen, die Cusanus unternommen hat, sind zu detailliert und komplex um hier konzis wiedergegeben zu werden. Wesentlicher an dieser Stelle ist ein Gedanke, den Nikolaus zu Beginn seiner Kalenderschrift formuliert und der bereits das bedenkt, was später in *De docta ignorantia* ausgefaltet werden soll. Nikolaus fragt sich nämlich, ob die himmlischen Bahnen und der menschliche Verstand (ratio) überhaupt kommensurabel seien, d.h. ob Maßgeber und Gemessenes notgedrungen auseinanderfallen und dementsprechend nicht präzise erkannt werden können. [51]

Zwar bietet die Kalenderschrift keine weitere Vertiefung dieser Frage, allerdings zeigt allein die Tatsache, dass Nikolaus sich 1460 noch einmal an eine Überarbeitung der Kalenderschrift gemacht hat, dass er nicht zu einem befriedigenden

48. Vgl. Senger, Philosophie, 22.
49. Vgl. De conc. I, h XIV, cap. II, p. 36, 10-13 (n. 11): „Et sicut suprema sphaera est ut umbra ultimi angeli, ita huius hierarchiae, cuius primum mobile sive nona sphaera principium est, terra ultima umbra et faex elementorum."
50. Vgl. Müller, „Ut reiecto", 13. In erster Linie ist das Werk neben dem astronomisch-komputistischen Anlass eine kirchenpolitische Schrift.
50. Für eine detailliertere Beschreibung der Problemlage vgl. ebd., 115ff.
51. Vgl. De rep. kal., cap. II, p. 18, 13-16 (n. 11): „[...] quidam compulsi fuerunt dicere omnem motum supercaelestium incommensurabilem esse rationi humanae et in quadam irrationali proportione habente surdam et innomnabilem radicem cadere [...]." Vgl. hierzu auch Böhlandt, Verborgene Zahl, 43.

Ergebnis gekommen ist, was nicht zuletzt daran lag, dass es eine perfekte - im Sinne einer präzisen - Lösung für das Kalenderproblem nicht gibt. Maß und Gemessenes können nicht in einen genauen Einklang gebracht werden. Diese praktische Erfahrung bereitet vermutlich für Nikolaus die philosophischen Gedanken vor, die er besonders in *De docta ignorantia* formulieren wird.

De docta ignorantia II (1440)

Es war

> „Nikolaus von Kues, der letzte große Philosoph des ausgehenden Mittelalters, der als erster die mittelalterliche Kosmos-Vorstellung verwarf und dem oft genug das Verdienst – oder das Verbrechen – zugeschrieben wird, er habe die Unendlichkeit des Universums behauptet.“[52]

Mit diesem Zitat von Alexander Koyré ist die in gewisser Weise ‚kopernikanische Wende‘ benannt, die im Wandel des Weltbilds oft Nikolaus zugeschrieben wird. Aber es gilt genauer hinzuschauen, was der Kueser Kardinal tatsächlich behauptet hat und inwiefern er in der Tat ein neues Weltbild in der *Docta Ignorantia* vertritt. Die These, Cusanus habe ein unendliches Universum behauptet, stützt sich auf verschiedene Aussagen aus *De docta ignorantia*, in der das „All“, das Nikolaus nun definiert als alles, was nicht Gott ist, „infinitum“ sei. Besonders aber stützt es sich auf die Überschrift des ersten Kapitels des zweiten Buches: „Ergänzende Bemerkungen als Einleitung zum Erweis des einen unendlichen Universum“[53]. Hier scheint Nikolaus das Programm für sein zweites Buch der *Docta Ignorantia* vorzugeben, in dem er die ‚Unendlichkeit‘ des Universums aufzuzeigen versucht. Aber man darf an dieser Stelle nicht zu vorschnell über sein erstes Buch hinweglesen. Gott wird dort als „maximum absolutum“[54] bezeichnet. Das meint keineswegs, dass Gott einfachhin das Größte ist, weil er alles andere, was ist, in jeder möglichen und denkbaren Weise überragt, sondern er ist dem Wortsinn nach „absolutum“, d. h. losgelöst von jeder Vergleichbarkeit. An mehreren Stellen spricht er deshalb auch vom „maximum absolute“[55]. Dabei ist sein Charakteristikum besonders *interminatum*, das bedeutet ohne jede Grenze zu sein.[56] Da es also nicht um ein

52. Koyré, Universum, 16.
53. De doct. ign. II, h I, cap. I, 2-4 (n. 91): „Correlaria praeambularia ad inferendum unum infinitum universum.”
54. Vgl. z. B. De doct. ign. I, h I, cap. II, p. 7, 8-9 (n. 5): „Maximum itaque absolutum unum est quod est omnia.”
55. Vgl. u. a. De doct. ign. II, h I, cap. IV, p. 10, 12 (n. 11); ebd., 10f., 27,1 (n. 12); cap. V, p. 11, 25 (n. 13).
56. Vgl. hierzu Nagel, Nicolaus Cusanus, 10.

Überragen geht, sondern darum, dass Gottes Größe nicht vergleichbar mit weltlichen Dingen ist, ist Gott zugleich auch das absolut Kleinste.[57] Das Universum dagegen bezeichnet Nikolaus als „maximum contractum“[58], als verschränktes Maximum. Die Übersetzung des lateinischen Partizips *contractum* mit *verschränktes* kann dabei als sehr treffend angesehen werden, weil hier deutlich wird, dass das Universum aus all dem besteht, was in einem gegenseitigen Zusammenhang steht und somit zu der wortwörtlichen Übersetzung *Zusammengezogenes* noch eine weitere Bedeutungsnuance anführt, die m. A. n. den Gedanken des Nikolaus sehr gut auf den Punkt bringt. Während Gott außerhalb jeder Vergleichbarkeit steht, ist das Universum durch Vergleichbarkeit und einer Beziehung von allem mit allem gekennzeichnet (alles ist miteinander *verschränkt*). Der Terminus *Verschränktes* bringt aber noch eine andere Eigenschaft des Universums zum Ausdruck, die erst bei einer eingehenderen Lektüre einer Passage im ersten Kapitel des zweiten Buches deutlich wird:

> „Nur das absolut Größte [absolute maximum] ist also in negativer Weise unendlich [infinitum]. Darum ist es allein das, was es nach all seinen Möglichkeiten sein kann. Das Universum dagegen kann, obgleich es alles umfasst, was nicht Gott ist, nicht negativ unendlich sein, obschon es ohne Grenze [sine termino] ist und somit privativ unendlich. In dieser Sicht ist es weder endlich noch unendlich [nec finitum, nec infinitum]. Es kann ja nicht größer sein als es ist. [...] Obgleich demnach mit Rücksicht auf die unendliche göttliche Macht, die ohne Grenze [interminabilis] ist, das All größer sein könnte, so kann es doch nicht größer sein, da sich die Möglichkeit des Seins oder die Materie dem widersetzt, denn diese lässt sich in Wirklichkeit nicht ins Unendliche erweitern. Und somit ist das All ohne Grenze [interminatum], da sich ein tatsächlich Größeres nicht geben lässt, gegen das es abgegrenzt [terminetur] würde. Und somit ist es privativ unendlich. Das Universum ist nur in eingeschränkter Weise [contracte] wirklich, um dadurch auf die beste Weise zu sein, welche die Bedingung seiner Natur zulässt.“[59]

57. Vgl. De doct. ign. I, h I, cap. IV, p. 10, 2-3 (n. 11): „Maximum absolutum incomprehensibiliter intellegitur; cum quo minimum coincidit.“

58. Vgl. z. B. die Überschrift zum vierten Kapitel des zweiten Buches der Docta Ignorantia: „Quomodo universum, maximum contractum tantum, est similitudo absoluti“ (De doct. ign. II, h I, cap. IV, p. 72, 24-25 (n. 112)).

59. De doct. ign. II, h I, cap. I, p. 64,14 – 65,7 (n. 97): „Solum igitur absolute maximum est negative infinitum. Quare solum illud est id, quod esse potest omni potentia. Universum vero cum omnia complectatur, quae deus non sunt, non potest esse negative infinitum. Et hac considerationenec finitum nec infinitum est. Non enim potest esse maius quam est. [...] Quare licet in respectu infinitae die potentiae, quae est interminabilis, universum posset esse maius, tamen resistente possibilitate essende aut materia, quae in infinitumnon est actu extendibilis, universum maius esse nequit. Et ita interminatum, cum actu maius eo dabile non sit, ad quod

Cusanus differenziert hier zwischen zwei verschiedenen „Unendlichkeiten". Gott selbst ist negativ unendlich, d. h. in ihm sind Wirklichkeit und Möglichkeit eins. Das Universum dagegen ist in Nikolaus' Worten privativ unendlich, es umfasst nicht alles, was es sein kann, denn nach seiner *Möglichkeit* könnte es durchaus größer sein, in *Wirklichkeit* ist es jedoch nicht größer. Die Welt ist folglich *prinzipiell* grenzenlos, *tatsächlich* hat sie aber Grenzen. Es sind jedoch keine Grenzen im Sinne einer Umrandung der Welt gemeint, sondern Grenzen im Sinne eines Endes, d. h. die Welt erstreckt sich nicht weiter, obwohl sie es von ihrem Potenzial ausgehend könnte. Oder wie Heinrich Rombach die Paradoxie aufgreifend formuliert: „Die Welt hat notwendig ein Ende, aber sie hat nicht ein notwendiges Ende."[60] Man könnte zusammenfassend – sprachlich etwas holprig – sagen: Das Universum ist schrankenlos beschränkt um damit auf die dritte Bedeutungsebene der Übersetzung von *contractum* mit *Verschränktes* hinzuweisen.

Diese Grundthese über das Universum führt dann zu folgenden wesentlichen Konsequenzen:

Da für Nikolaus evident ist, dass nur das *maximum absolutum* in allen Dingen Größtes und Kleinstes zugleich ist, nichts im All jedoch absolut Größtes oder absolut Kleinstes sein kann, kommt man auch in der Bewegung nicht zu einem absolut Kleinsten und somit kann es keinen unbeweglichen Mittelpunkt geben, was wiederum bedeutet, dass die Erde nicht Mittelpunkt der Welt ist, da es einen solchen Punkt ohnehin gar nicht geben kann. Gäbe es einen solchen Punkt, so folgert Nikolaus, müsste die Welt auch einen Umfang haben und somit wäre die Welt gegen etwas anderes abgegrenzt. Noch einmal Nikolaus:

> „Da deshalb ein Eingeschlossensein der Welt zwischen einem körperlichen Mittelpunkt [centrum corporale] und einem Umfang [circumferentiam] unmöglich ist, so lässt sich die Welt nicht verstehend begreifen, deren Mittelpunkt und Umfang Gott ist. Und obwohl die Welt nicht unendlich [infinitus] ist, so lässt sie sich dennoch nicht als endlich [finitus] begreifen, da sie der Grenzen entbehrt [terminis careat], innerhalb deren sie sich einschließen ließe."[61]

Somit schließt Nikolaus seine Überlegungen mit der Erkenntnis, dass die Erde nicht Mittelpunkt der Welt sein kann und auch die Fixsternsphäre nicht ihr Umkreis,

terminetur. Et sic privative infinitum. Ipsum autem non est actu nisi contracte, ut sit meliori quidem modo, quo suae naturae patitur condicio."

60. Rombach, Substanz, 159.

61. De doct. ign. II, h I, cap. XI, p. 100, 10-14 (n. 156): „Cum igitur non sit possibile mundum claudi intra centrum corporale et circumferentiam, non intelligitur mundus, cuius centrum et circumferentia sunt Deus. Et cum non sit mundus infinitus, tamen non potest concipi finitus, cum terminis careat, intra quos claudatur."

> „obwohl auch wieder im Vergleich der Erde zum Himmel die Erde dem Mittelpunkt [centro] näher zu stehen *scheint* [meine Hervorhebung] und der Himmel dem Umkreis.“[62]

Es gilt hier die ontischen und die epistemologischen Aspekte fein zu trennen. Aus erkenntnistheoretischer Perspektive will Nikolaus sagen, dass aus irdischer Sicht die Erde dem Mittelpunkt näher zu sein scheint als bspw. der Mond. Noch einmal Nikolaus zum Ende dieses Kapitels:

> „Befände sich nämlich jemand oberhalb der Erde und unter dem Nordpol und ein anderer am Nordpol, so erschiene dem, der sich auf der Erde befände, der Pol ebenso im Zenit wie dem, der sich am Pol befände, der Mittelpunkt im Zenit befindlich erschiene. [. . .] Wo auch immer einer sich befindet, er glaubt sich im Mittelpunkt.“[63]

Unabhängig von jeder denkbar einnehmbaren Perspektive gibt es folglich auch nirgends einen präzisen Mittelpunkt, weder des Universums noch der Erde, weil ein immer genauerer bestimmt werden kann.

Die erkenntnistheoretische Problematik liegt vermutlich an den Grenzen der *ratio*, die immer einen festen Bezugspunkt benötigt, von dem aus sie ihre Urteile trifft. Einen absolut festen Bezugspunkt gibt es aber nicht. Nikolaus, so fasst Tom Müller treffend zusammen,

> „betrachtet die Konzepte von Polen oder Mittelpunkten als reine mathematische Hypothesen, welche im Endeffekt lediglich eine Orientierungshilfe für den menschlichen Geist bilden und so nur sehr eingeschränkt mit der Wirklichkeit zu tun haben.“[64]

Aus der prinzipiellen Unmöglichkeit einen absoluten und bewegungslosen Mittelpunkt des Universums zu benennen, folgert Cusanus zudem die Möglichkeit der Existenz außer-irdischen Lebens. Da kein Planet gegenüber dem anderen aufgrund seiner Stellung im Universum einen Vorrang für sich beanspruchen kann, ist grundsätzlich jeder Planet gleichrangig, wenngleich – und auch hier merken

62. Ebd., 18-20 (n. 157): „quamvis etiam comparando terram ad caelum, ipsa terra videatur centro propinquior et caelum circumferentiae.”

63. Ebd., p. 102f., 29-34 (n. 161): „Nam si quis esset supra terram et sub polo arctico et alius in polo arctico, – sicut existenti in terra appareret polum esse in zenith, ita existenti in polo appareret centrum esse in zenith. [...] et ubi cumque quis fuerit, se in centro esse credit.”

63. Vgl. hierzu ebd., 2-8 (n. 159): „Et quoniam nos motum non nisi comparatione ad fixum, scilicet polos aut centra, deprehendere possumus et illa in mensuris motuum praesupponimus: hinc in coniecturis ambulantes in omnibus nos errare comperimus et admiramur, quando secundum regulas antiquorum stellas in situ non reperimus concordare, quia eos recte de centris et polis et mensuris credimus concepisse.”

64. Müller, „Ut reiecto“, 40.

wir seine astrologischen Gedanken noch deutlich – er die Unterschiedlichkeit der verschiedenen Planetenbewohner hervorzuheben weiß:

> „Wir dürfen nur annehmen, es gebe in der Sonnenregion mehr sonnenhafte, klarsichtige und erleuchtete, geistbegabte Bewohner, geistiger auch als auf dem Mond, wo sie mehr mondhaft sind, und auf der Erde mehr materiebehaftet und dumpf, so dass jene sonnenhaften Geistnaturen wesentlich aktuell und wenig potenziell sind, die irdischen dagegen mehr in Potenz und allzuwenig aktuell, während die mondhaften die Mitte halten.“[65]

Nikolaus bleibt also seinem astrologischen Denken treu. Die Sterne bzw. Planeten stehen in einer direkten Verbindung zu ihren Bewohnern und wirken auf diese.

Deutlich aufgegeben scheint jedoch die Sicht der Erde als „ultima umbra“. Im 12. Kapitel setzt sich Nikolaus mit der Beschaffenheit der Erde auseinander und widerlegt Schritt für Schritt alle Argumente, die dafür sprechen, dass die Erde geringer oder weniger edel als die anderen Planeten sei. Am deutlichsten kommt seine Sicht (nicht seine Argumentation) in folgender Passage zum Ausdruck:

> „Und da es das Größte und Kleinste in den Vollkommenheiten, Bewegungen und Gestalten in der Welt nicht gibt, wie aus dem eben Gesagten hervorgeht, so stimmt es auch nicht, dass diese Erde das Schlechteste und Unterste ist. Denn wenn sie auch im Verhältnis zur Welt ziemlich im Mittelpunkt [centralior] zu stehen scheint, so ist sie doch, wie gesagt, auch wieder aus dem gleichen Grunde dem Pole benachbart. Auch ist die Erde nicht ein in (mathematischer) Proportion ausdrückbarer, d. h. so und so großer Teil der Welt; denn da die Welt kein Größtes und Kleinstes besitzt, hat sie auch keine Mitte [medium] und keine proportional bestimmten Teile, wie das auch für den Menschen und das Tier gilt.“[66]

65. De doct. ign. II, h I, cap XII, p. 108, 14-19 (n. 171): „[...] suspicantes in regione solis magis esse solares, claros et illuminatos intellectuales habitatores, spiritualiores etiam quam in luna, ubi magis lunatici, et in terra magis materiales et grossi; ut illi intellectuales naturae solares sint multum in actu et parum in poten tia, terrenae vero magis in potentia et parum in actu, lunares in medio fluctuantes.”

66. Ebd., p. 104,17 – p. 105,1 (n. 164): „Et quia maximum aut minimum in perfectionibus, motibus et figuris in mundo non est, ut ex statim dictis patet, tunc non est verum, quod terra ista sit vilissima et infima; nam quamvis videatur centralior quoad mundum, est tamen etiam eadem ratione polo propinquior, ut est dictum. Neque est ipsa terra pars proportionalis seu aliquota mundi. Nam cum mundus non habeat nec maximum nec minimum, neque habet medium neque partes aliquotas sicut nec homo aut animal”.

Die Hierarchie des Seins ist im Vergleich zur Konkordanz also deutlich modifiziert. Ob sie komplett aufgegeben ist, wird man anhand dieser Stellen (noch) nicht seriös sagen können.

Coniectura de ultimis diebus (1446[67])

Während die „astronomisch-astrologische Weltgeschichte“ sich mit der Vergangenheit der Welt auseinandersetzt, weist die kurze Schrift von den letzten Tagen auf die Zukunft und das Weltende hin.[68] Nikolaus versucht einen Zeitrahmen zu bestimmen innerhalb dessen die Welt untergehen wird. Dabei stützt er seine spekulativen Überlegungen auf biblische Passagen. Schon durch den Titel wird die Anknüpfung an das dritte große Hauptwerk des Cusanus, *De coniecturis*, deutlich.

Es gehört zum christlichen Glauben und zum Zeugnis der Schrift, dass Christus wiederkommen wird und dass dieses Kommen von so manchen welterschütternden Ereignissen begleitet ist.[69] Besonders die alttestamentlichen Bücher Daniel[70] und Ezechiel[71] enthalten Zukunftsvisionen vom Weltende, die mit dem Kommen des Herrn bzw. des Menschensohnes verbunden sind und sie fanden deshalb häufig in ähnlichen Endzeitschriften wie der des Nikolaus Verwendung. Während Nikolaus in der „astronomisch-astrologischen Weltgeschichte“ die Deutung der (vergangenen) Ereignisse aus astrologischen Aspekten heraus plausibel gemacht hat, versucht er in dieser Schrift mittels biblischer Texte (zukünftige) Ereignisse, allerdings dem Titel des Werkes gemäß mutmaßend, vorherzusagen.

67. Die Jahreszahl ergibt sich daraus, dass Cusanus von 34 irdischen Lebensjahren Jesu ausgeht und seiner Geburt im „Jahr 0“. Da 1412 Jahre seitdem vergangen sind, ergibt sich das Jahr 1446. Vgl. Coni. ult. die., h IV, p. 94, 10-13 (n. 127): „[. . .] cum a Christi ascensione 1412 anni hoc tempore numerentur effluxi.“

68. Erstmals hat Nikolaus sich wohl in der Schrift „Libellus inquisitionis veri et boni“ mit dem Weltende beschäftigt. Diese Schrift ist leider verschollen und von ihrer Existenz weiß man lediglich durch eine kurze Bemerkung aus der Konkordanz (vgl. De conc. I, h XIV, cap. 12, p. 72, 7-9 (n. 54): „Haec alibi latissime in Libello inquisitionis veri et boni prosecutus sum concludens plus 600 annis de tempore superesse, ac hoc tempore ad reformationem mundum disponi debere“).

69. Vgl. Mt 24, 29-30: „Sofort nach den Tagen der großen Drangsal *wird die Sonne verfinstert werden und der Mond wird nicht mehr scheinen; die Sterne werden* vom Himmel *fallen* und die Kräfte des Himmels werden erschüttert werden. Danach wird das Zeichen des Menschensohnes am Himmel erscheinen; dann werden alle Völker der Erde wehklagen und man wird *den Menschensohn auf den Wolken des Himmels* kommen sehen, mit großer Kraft und Herrlichkeit.“ (EÜ 2016)

70. Vgl. Dan 7.

71. Vgl. Ez 7, ebenso Jes 2,4 und Offb 20 u. 21.

Wie geht Nikolaus vor? Die Grundlage seiner Mutmaßungen bildet die Aussage des Paulus aus Kol 2,3, dass in Christus „alle Schätze der Weisheit und Erkenntnis“ verborgen sind. Da die Kirche sein Leib ist und dem Herrn wie das Bild seinem Urbild ähnelt (bei aller noch größeren Unähnlichkeit), sieht Nikolaus als Folgerung im Leben Christi das Leben der Kirche dargestellt.[72] Aufgrund dieser Parallelisierung des Lebens Jesu mit dem Leben der Kirche hängt auch die Lebensdauer der Kirche von der Lebensdauer Jesu ab. Da Christus die Vollendung der Schöpfung ist, ist sein Tag der Sabbat und sein Jahr das Sabbatjahr bzw. das Jubeljahr, das gemäß Lev 25,10-11 alle 50 Jahre ausgerufen wird. Nikolaus nimmt an, dass Jesus 34 Jahre lebte, und folgert daraus, dass dementsprechend auch die Kirche 34 Jubeljahre durchleben wird. Somit ergibt sich ein Weltende 50×34 Jahre nach Jesu Tod, also zwischen 1700 und 1734. Der Kueser Kardinal stellt noch eine weitere Berechnung vor, die sich auf das Buch Daniel bezieht und die als Weltende den Zeitraum von 1700 bis (vor) 1750 ermittelt.[73]

Die kurze Schrift *De ultimis diebus* zeigt eine zumindest in seinen philosophischen Schriften nicht so häufig explizite anzutreffende, für Nikolaus‘ Denken jedoch zentrale Christozentrik, die auch in der *Docta Ignorantia* anzutreffen ist, wenngleich sie häufig übersehen wird.[74]

Der Codex Cusanus 211 (nach 1446)

Kein Geringerer als Alexander von Humboldt hat in seinem Werk „Kosmos“ von der „Geistesfreiheit und de[m] Muth“[75] des Kueser Kardinals gesprochen und dabei auf das Fragment des Folio 55v des Codex Cusanus 211 Bezug genommen.[76] Es wurde erstmals 1843 von Franz Jakob Clemens in der Kueser Bibliothek entdeckt und ediert[77] und ist von Tom Müller erstmalig ins Deutsche übersetzt worden.[78]

72. Vgl. Coni. ult. die., h IV, p. 93, 1-2 (n. 126): „Unde com ad veritatem exemplarem inspicere necesse sit, Christi peregrinationem in ecclesia explicari recte coniectamus.”

73. Harald Schwaetzer hat in seinem in dieser Reihe erschienenen Artikel den Zeitbegriff dieser Schrift untersucht und die Eigenzeitlichkeit des Menschen als Thematik bei Nikolaus benannt. Auch hier zeigt sich wieder deutlich die immer wiederkehrende Verknüpfung makrokosmologischer Gedanken, die Rückschlüsse auf den Mikrokosmos Mensch erlauben. Vgl. Schwaetzer, Mathematik und Anthropologie am Ende der Tage. Die Entwicklung eines Begriffs von Eigenzeitlichkeit in der Schrift „Coniectura de ultimis diebus“ des Nikolaus von Kues, in SieB 7 (2016), 131-143.

74. Die Verbindung zwischen Welt (maximum contractum) und Gott (maximum absolutum) wird im 3. Buch der *Docta Ignorantia* in Jesus Christus begründet, der „[m]aximum contractum [. . .] et absolutum“ ist. Vgl. De doct. ign. III, h I, cap. II, p. 123, 11 (n. 190).

75. Humboldt, Kosmos, 140.

76. Ebd., 468 und 503.

77. Vgl. Clemens, Giordano Bruno und Nicolaus von Cusa, 98f. Ebenso hat Klibansky einen Kommentar inklusive des Textes verfasst (s. Hoffmann, Das Universum des Nikolaus von Cues, 41-45).

78. Vgl. Müller, „Ut reiecto“, 33f.

Die Handschrift erwarb Nikolaus vermutlich 1444 bei dem bereits erwähnten Kauf mehrerer Handschriften in Nürnberg, die er neben einigen astronomischen Instrumenten, einem Astrolab, einem scheibenförmigen Messinstrument, mit dem man den sich drehenden Himmel nachbilden kann und somit Sternpositionen berechnen kann, sowie einem Torquetum, mit dem man u. a. die Koordinaten eines Himmelskörpers bestimmen kann, und die beide noch heute in der Kueser Hospitals-Bibliothek besichtigt werden können.[79]

Nikolaus referiert hier zunächst bereits aus *De docta ignorantia* Bekanntes: Es gibt keine exakt kreisförmige Bewegung auch nicht die Bahn der Sterne. Zudem ist die Erde bewegt genauso wie die anderen Sterne.[80] Dann geht er allerdings näher auf die Sonnenbahn ein und verweist wieder einmal auf die Ungenauigkeiten in den Umlaufbahnen der Erde und der Sonne, die letztlich auch zu den ihm bereits bekannten Kalenderproblemen führen. Die Erklärungen des Cusanus sind etwas verworren, weil er die Bewegung der Fixsterne von der Bewegung der achten Sphäre unterscheidet, während für alle Astronomen seiner Zeit die achte Sphäre die Sphäre der Fixsterne ist.[81]

Die astronomischen Betrachtungen und auch die Fehler, die Nikolaus hier macht[82], sollen aber nicht weiter interessieren. Wesentlicher ist in diesem Zusammenhang die Tatsache, dass Nikolaus nach der Erstabfassung der Kalenderschrift nun mit den philosophischen Grunderkenntnissen der *Docta Ignorantia* sich erneut der Problematik der Kalenderberechnung stellt. Nikolaus‘ praktische und auch größtenteils korrekte Erkenntnisse über die Problematik der Kalenderberechnung entstammen allerdings letztlich keinen naturwissenschaftlichen Erkenntnissen, sondern seinen philosophischen Erwägungen über die Bewegung der Erde sowie die Unmöglichkeit jeder präzisen Bewegung.

De venatione sapientiae (1463)

In *De venatione sapientiae* findet sich im 23. Kapitel eine Bemerkung über eine Schrift, von der Cusanus selbst sagt, er habe sie in Orvieto geschrieben und sie

79. Vgl. Klibansky, Textbeilage, 42. Anhang zu Hoffmann, Universum. Vgl. ebenso, Müller, Der junge Cusanus,

80. Cod. Cusan. 211, 1-8 aus Klibansky, Textbeilage, 44: „Consideravi, quomodo non est possibile, quod aliquis motus sit precise circularis. Unde nulla stella describit circulum precisum ab ortu ad ortum. [...] Secundo consideravi, quod terra ista non potest esse fixa, sed movetur ut alie stelle.”

81. Vgl. Duhem, le système, 315.

82. Vgl. ebd. 315ff.

handle von der Gestalt der Welt (*figura mundi*)[83]. Die Schrift, die vermutlich 1462 von Cusanus geschrieben wurde, ist aber bis zum heutigen Tag verschollen.[84]

De venatione sapientiae passt vermutlich am wenigsten in diese bisherige Reihe, da weder Kosmologie noch Astronomie oder Astrologie darin einen großen Raum zugewiesen bekommen. Sie muss aber dennoch erwähnt werden, weil hier eine Passage zu finden ist, die auf den ersten Blick Cusanus' Rückkehr zum traditionellen, geozentrischen Weltbild vermuten lässt:

> „Offenbar verbirgt sich in diesem Felde die göttliche Weisheit und lässt sich durch behutsames Jagen finden. [...] Sie hat der Erde ihren Platz in der Mitte [in medio] angewiesen, hat ihr ihre Schwere und Bewegung zum Mittelpunkt [ad centrum] der Welt als umgrenzende Bestimmung gegeben, damit sie so immer in der Mitte [in medio] feststehe [subsisteret] und weder nach oben noch nach der Seite abweiche."[85]

Kann dies als ein Rückfall in ein altes geozentrisches Weltbild verstanden werden? Tom Müller hat diese Vermutung verneint. Zum einen sei das lateinische Verb „subsistere" zwar in der deutschen Übersetzung mit „feststehen" wiedergegeben, es könne jedoch auch „verweilen" bedeuten, was eine Bewegung der Erde nicht ausschließen würde. Zum anderen weist Müller auf die Unterscheidung zwischen „Mitte" (medium) und „Mittelpunkt" (centrum) hin.

Zudem ist Müller der Meinung, dass die hier vorliegende Passage weniger kosmologisch-physikalisch als vielmehr schöpfungstheologisch zu deuten sei:

> „Gott möchte sich seiner Schöpfung offenbaren und nimmt deshalb diejenigen, die im Stande sind ihn zu erkennen und die daraufhin lobend zu ihm hin streben sollen in den Fokus seines Blicks, in die Mitte seines Sehens, seiner Aufmerksamkeit."[86]

Die Inkommensurabilität zwischen Endlichem und Unendlichem

83. De ven. sap. h XII, cap. XXIII, p. 65, 17-18 (n. 67): „Supra de his atque in libello, quem de figura mundi nuperrime in Urbe Veteri compilavi."
84. Vgl. Müller, „Ut reiecto", 50f.
85. De ven. sap., h XII, cap. XXVIII, n. 79, 3-9 (n. 83): „Palam igitur divinam sapientiam in hoc campo latere et diligenti venatione reperiri. [...] Posuit terram in medio, quam gravem esse et ad centrum mundi moveri determinavit, ut sic semper in medio subsisteret et neque sursum neque lateraliter declinaret."
86. Müller, „Ut reiecto", 53.

> „Diese naturwissenschaftliche und philosophische Revolution – es ist in der Tat unmöglich, die philosophischen von den rein naturwissenschaftlichen Aspekten dieses Prozesses zu trennen: beide hängen von einander ab und sind eng verknüpft – kann grob als Ursache für die Zerstörung des Kosmos bezeichnet werden, das heißt dafür, dass die Vorstellung von der Welt als endliches, geschlossenes und hierarchisch geordnetes Ganzes (ein Ganzes, in dem die Hierarchie der Werte die Hierarchie und Struktur des Seins bestimmte, aufsteigend von der dunklen, schweren und unvollkommenen Erde zur immer höheren Vollkommenheit der Sterne und himmlischen Sphären) aus den philosophisch und wissenschaftlich gültigen Auffassungen schwand und dass sie abgelöst wurde durch ein grenzenloses und sogar unendliches Universum, das durch die Identität seiner fundamentalen Bestandteile und Gesetze zusammengehalten wird und in dem alle diese Bestandteile auf derselben Stufe des Seins stehen.“[87]

Koyré spricht hier von der „geistige[n] Revolution“ des 17. Jahrhunderts[88], deren Folgen für das mittelalterliche Weltbild er zugespitzt zum Ausdruck bringt. Liest man diesen Text, so wirkt er auf den ersten Blick, wie eine gelungene Zusammenfassung des Umdenkens, das bei Cusanus in der Folge von *De concordantia catholica* eingesetzt und in der *Docta Ignorantia* seinen Höhepunkt gefunden hat. Es überrascht dementsprechend wenig, dass Koyré seine Betrachtungen zur Entwicklung dieses Wandels mit Nikolaus von Kues beginnt. Allgemein wird Nikolaus in der Forschung zugesprochen zwei wesentliche Charakteristika des mittelalterlichen Weltbilds abgelöst zu haben: „die Analogie alles Seienden und die geschlossene Endlichkeit der Welt“[89]. Wendet man sich zuerst letzterem zu, so ist bereits gezeigt worden, dass die Unendlichkeit der Welt bei Nikolaus keine simple Unendlichkeit darstellt, sondern eine von Gott unterschiedene Unendlichkeit. Das Universum ist alles, was nicht Gott ist. Es hat so gesehen keine physische Grenze, sondern allein (in einem metaphysischen Sinne) Gott ist seine Grenze, sein Umfang und sein Mittelpunkt.[90] Ebenso einsichtig ist, dass er den aristotelischen Gedanken zwischen einer sublunaren, dem Wandel unterworfenen Welt und dem Supralunaren mathematisch exakt Bestimmbaren verabschiedet. Somit wird auch die Abgeschlossenheit im Sinne einer starren Trennung zweier unterschiedlich zu bewertender Räume des Universums aufgehoben. Die Trennlinie zieht Nikolaus

87. Koyré, Universum, 12.
88. Ebd., 11.
89. Sparn, Welt/Weltanschauung/Weltbild, 593.
90. Vgl. De doct. ign. II, h I, cap. XI, p. 100, 10-13 (n. 156): „Cum igitur non sit possibile mundum claudi intra centrum corporale et circumferentiam, non intelligitur mundus, cuius centrum et circumferentia sunt Deus.“

nämlich nicht zwischen Sub- und Supralunarem, sondern zwischen Unendlichem und Endlichem:

> „[...] manifestum est infiniti ad finitum proportionem non esse [...]“[91]

In der Tat scheint mir diese These, die entscheidende zu sein für das Neue, das sich in Nikolaus‘ Denken zumindest anbahnt. Nikolaus‘ Weltbild trägt auch nach *De docta ignorantia* an manchen Stellen hierarchische Züge und wie Koyré betont, hat Nikolaus nicht die Gleichförmigkeit alles Seienden behauptet und die Existenz einer zentralen Region im Universum nie geleugnet.[92] Aber es ist jener Gedanke der Inkommensurabilität zwischen Endlichem und Unendlichem, zwischen Gott und Welt, zwischen Geschöpf und Schöpfer, der sein weiteres Denken (und das seiner von ihm inspirierten Nachfolger) erst ermöglicht. So lobt Ernst Cassirer, der sein Werk über „Individuum und Kosmos in der Philosophie der Renaissance“ ebenfalls mit Cusanus beginnen lässt, den Kueser Kardinal für dessen kreativen und fortschrittlichen Geist in den höchsten Tönen[93]:

> „Cusanus ist der einzige Denker der Zeit, der das Ganze ihres Grundprobleme von einem methodischen Prinzip aus erfasst, und der es kraft dieses Prinzips meistert. Sein Denken umspannt noch, gemäß dem mittelalterlichen Ideal der Totalität, die Gesamtheit des geistigen und des physischen Kosmos und macht vor keiner Besonderung Halt.“[94]

Cassirer referiert im weiteren Verlauf das Erbe, dass die Scholastik dem Christentum hinterlassen hat, und das besonders durch den von Nikolaus hochgeschätzten Dionysius Areopagita in die Theologie Einzug gehalten hat, nämlich die Vorstellung eines Stufenkosmos.[95] Vom Endlichen zum Unendlichen hinauf und wieder herab sind die einzelnen Stufen zwar streng voneinander unterschieden, sie alle verbindet aber ein gemeinsames Band:

> „Von dem einen Pol zum andern, von dem Über-Sein und Über-Einen, von dem Reich der absoluten Form bis hinab zur Materie als dem Absolut-Formlosen, führt ein stetiger Weg der Vermittlung. Das Unendliche geht auf diesem Weg in das Endliche über; das Endliche kehrt auf ihm zum Unendlichen zurück.“[96]

91. Ebd., cap. III, p. 8, 20-23 (n. 9).
92. Vgl. Koyré, Universum, 27.
93. Für eine deutlich kritischere Beurteilung vgl. Krafft, Das kosmologische Weltbild.
94. Cassirer, Individuum und Kosmos, 7.
95. Vgl. ebd., 9f.
96. Ebd., 9.

Dieses Bild hat, so Cassirer, Cusanus nie bestritten und in der Tat ist mir keine Passage aus seinen Schriften bekannt, in der mit diesem Weltbild explizit gebrochen wird.[97]

Auch die mittelalterliche Weltsicht hat durch ihre Wiederbelebung des Empyreums die bleibende Unterschiedenheit zwischen (einem nicht lokalisierbaren) Gott und der Welt hervorgehoben. Die Unterscheidung, die Nikolaus zwischen Gott und Welt einführt, geht aber nach Cassirer noch tiefer. Die völlige Unvergleichlichkeit von Unendlichem und Endlichem kappt endgültig die Verbindung zwischen Gott und der Welt. Es kann nun keine Stufenleiter mehr geben, zumindest keine, die die Kluft zwischen Schöpfer und Geschöpf überbrücken kann. Das Widerspruchsprinzip des Aristoteles kann nur auf die endliche Welt angewandt werden, nicht jedoch auf ihren Grund. Somit liegen Welt und Gott epistemologisch wie ontologisch auf zwei nicht mehr vergleichbaren Ebenen.

Es sind also vornehmlich die philosophischen Gedanken, die das Weltbild des Kueser Kardinals geprägt haben und zu den entscheidenden Umwälzungen in seiner Vorstellung vom Kosmos geführt haben. Gleichwohl – und das sollte dieser kurze Artikel zeigen – sind diese philosophischen Überlegungen angeregt und bedingt durch die fachspezifischen Studien in den Bereichen der Astronomie, Astrologie und Komputistik (nicht zu vergessen der Mathematik), die für Nikolaus erst die entscheidenden Fragestellungen ermöglicht haben. Besonders die Kalenderreform hat Nikolaus sowohl das enorme Potenzial, das in den Disziplinen der Mathematik, Astronomie und Komputistik liegt, entdecken lassen als auch die prinzipielle Unmöglichkeit aufgezeigt, mithilfe ihrer Methoden mittels der *ratio* absolute Genauigkeit zu erreichen. Diese Grunderkenntnis seines frühen Schaffens, die Inkommensurabilität zwischen Unendlichem und Endlichem und dadurch auch zwischen Maß und Gemessenem, zwischen *ratio* und Welt, bereitet den Gedanken zur *docta ignorantia* und der *coincidentia oppositorum* den frucht- und ertragreichen Boden.

97. Vgl. ebd., 19: „Nikolaus Cusanus ist im Ganzen seines Denkens und seiner Schriften noch aufs stärkste in dieser Gesamtanschauung des mittelalterlichen Geistes und des mittelalterlichen Lebens verwurzelt. Viel zu eng war das Band, das die Denkarbeit der Jahrhunderte zwischen dem Glaubensinhalt des Christentums und dem theoretischen Gehalt des Aristotelischen und Neuplatonischen Systems geknüpft hatte, als dass sich dieses Band für einen Denker, der so fest und sicher in diesem Glaubensinhalt stand, mit einem Schlage hätte lösen lassen.“

Literatur

NICOLAI DE CUSA, opera omnia iussu et auctoritate Academiae Litterarum Heidelbergensis ad codicum fidem edita. Leipzig / Hamburg 1932 ff.

Schriften des Nikolaus von Kues in deutscher Übersetzung: Bormann, K., Hoffmann, E., Wilpert, P., Hamburg / Leipzig 1936ff.

ARISTOTELES, Metaphysik. In der Übersetzung von Friedrich Bassenge, Berlin 1990.

BÖHLANDT, M., Verborgene Zahl, Verborgener Gott. Mathematik und Naturwissen im Denken des Nicolaus Cusanus (1401-1464), Stuttgart 2009.

CASSIRER, E., Individuum und Kosmos in der Philosophie der Renaissance. Darmstadt 1963.

CLEMENS, F. J., Giordano Bruno und Nicolaus von Cusa. Eine philosophische Abhandlung, Bonn 1847.

DUHEM, P., Le système du monde. Histoire de doctrines cosmologiques de Platon a Copernic, Band 10, Kapitel 3, Paris 1959, S. 247-351.

HAUBST, R., Das Bild des Einen und Dreieinen Gottes in der Welt nach Nikolaus von Kues, Trier 1952.

HOFFMANN, E., Das Universum des Nikolaus von Cues. In: Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften (1929/30), Heidelberg 1930 mit einer kommentierten Textbeilage von KLIBANSKY, R., Cod. Cusan. 211, fol. 55v, 41-45.

HUMBOLDT, A.v., Kosmos. Entwurf einer physischen Weltbeschreibung, Stuttgart / Tübingen 1847.

KANITSCHEIDER, B., Kosmologie. Geschichte und Systematik in philosophischer Perspektive, Stuttgart 2002.

KOYRE, A., Von der geschlossenen Welt zum unendlichen Universum. Übers. v. Rolf Dornbacher, Frankfurt 1969.

KRAFFT, F., Das kosmologische Weltbild des Nikolaus von Kues zwischen Antike und Moderne. In: MFCG 28 (2001), 249-290.

KRCHNAK, A., Die Herkunft der astronomischen Handschriften und Instrumente des Nikolaus von Kues, in: MFCG 3 (1963) 109-180

LEINKAUF, T., Grundriss Philosophie des Humanismus und der Renaissance (1350-1600). Band 2, Hamburg 2017, S. 1061-1164.

MARX, J., Verzeichnis der Handschriften-Sammlung des Hospitals zu Cues, Trier 1905.

MEURERS, J., Nikolaus von Kues und die Entwicklung des astronomischen Weltbildes. In: MFCG 4 (1964), 395-419.

MITTELSTRASS, J., Art. Kosmologie. In: EPhW, Bd. 2, Mannheim 1984.

MÜLLER, T., Der junge Cusanus. Ein Aufbruch in das 15. Jahrhundert, Münster 2013.

MÜLLER, T., „ut rejecto paschali errore veritate insistamus". Nikolaus von Kues und seine Konzilsschrift „De reparatione kalendarii", Münster 2010.

NAGEL, F., Nicolaus Cusanus und die Entstehung der exakten Wissenschaften, Münster 1984.

NICKEL, G., Nec finitum nec infinitum. Überlegungen zur Rolle der Mathematik in der Kosmologie des Nikolaus Cusanus, in SieB 11 (2019), 171-190.

ROTH, U., Cusanus' Weltgeschichte im Codex Cusanus 212. In: Litterae Cusanae 1,1 (2001)

ROTH, U., Das astrologische Wissen des Nicolaus Cusanus. In: MFCG 29 (2005), 65-79.

ROTH, U., Die astronomisch-astrologische „Weltgeschichte" des Nikolaus von Kues im Codex Cusanus 212. Einleitung und Edition, in: MFCG 27 (2011), 1-29.

SCHWAETZER, H., Mathematik und Anthropologie am Ende der Tage. Die Entwicklung eines Begriffs von Eigenzeitlichkeit in der Schrift „De ultimis diebus" des Nikolaus von Kues, in: SieB 7 (2016), 131-143.

SENGER, H. G., Die Philosophie des Nikolaus von Kues vor dem Jahre 1440. Untersuchungen zur Entwicklung einer Philosophie in der Frühzeit des Nikolaus (1430-1440), in: Beiträge zur Geschichte der Philosophie und Theologie des Mittelalters, Neue Folge Band 3, Münster 1971.

SPARN, W., Art. Welt/Weltanschauung/Weltbild IV/4 (kirchengeschichtlich). In: TRE 35, Berlin 2003.

VELTHOVEN, T. v., Gottesschau und menschliche Kreativität. Studien zur Erkenntnislehre des Nikolaus von Kues, Leiden 1977.

Auf den Schultern von Riesen – „Geschichte der Mathematik“ für Lehramtsstudierende.

Susanne Spies

Prof. Dr. Wolfgang Hein, dem Initiator und Pionier der Siegener Mathematikgeschichte zum 80. Geburtstag

Veranstaltungen zur Geschichte und Philosophie der Mathematik haben im Rahmen der Lehrerbildung an der Universität Siegen eine lange Tradition. Von einem anfänglich freiwilligen Wahlpflichtangebot, das sich nicht zuletzt auf Grund des großen Engagements und der Begeisterungsfähigkeit des Initiators dieser Veranstaltungen Prof. Dr. W. Hein wachsender Beliebtheit erfreute, hat sich die Mathematikgeschichte inzwischen zu einem Teil des Pflichtkanons entwickelt. Ein besonderes Augenmerk lag von Beginn an auf den besonderen Bedürfnissen der Studierenden im Lehramt an Haupt-, Real- und Gesamtschulen (HRGes) (ehemals Sekundarstufe I), die aufgrund der fehlenden Erfahrungen mit Hochschulmathematik häufig einzig an historischen Beispielen authentische, über das Schulwissen hinausgehende Mathematik erleben können. Dass auch ein solch traditionsreiches Angebot kontinuierlicher Weiterentwicklung bedarf, versteht sich von selbst. In folgendem Artikel soll daher die konzeptionelle Gestaltung der aktuell an der Universität Siegen durchgeführten Veranstaltung zur Geschichte der Mathematik für das Lehramt HRGes skizziert werden. Unter der Frage, wie sich die Beschäftigung mit Mathematikgeschichte auf Auffassungen von Studierenden auswirkt, werden im Anschluss im Rahmen der Veranstaltung entstandene Reflexionstexte der Studierenden ausgewertet und damit die Ergebnisse hin und wieder hilfreicher Begleitforschung präsentiert.

Das erstmals bei Bernhard von Chartre (um 1120) bezeugte Gleichnis[1] im Titel des Artikels hat in diesem Sinne eine zweifache Bedeutung: Einerseits ist die Entwicklung des Veranstaltungskonzepts nur auf den Schultern der vorausgehenden Pionierarbeit zu verstehen. Andererseits wird gezeigt, dass die Begegnung mit den Riesen der Mathematikgeschichte zu sehr unterschiedlichen Auffassungen bezüglich der Schulmathematik und ihrer Geschichte bei angehenden Lehrerinnen und Lehrern führt.

1 Konzeptionelle Vorüberlegungen

> „Studierende aller Lehrämter sollen der Mathematik als Kulturleistung und den für sie charakteristischen Wissensbildungsprozessen begegnen. Daher gehört zur Vermittlung mathematischer Inhalte grundsätzliche auch, ihren Beitrag zur mathematischen Bildung auszuweisen und sie in der historischen Genese zu verorten.“ (DMV et al. 2008)

Wenn wie hier in einer gemeinsamen Stellungnahme der einschlägigen Verbände gefordert wird, im Rahmen der Universitätslehre für das Lehramt die Mathematik in „ihrer historischen Genese zu verorten“, hat das viele sehr verschiedene Gründe.[2] Neben der Geschichte des eigenen Unterrichtsfachs als Bildungsinhalt eigenen Rechts und der Möglichkeit in der Beschäftigung mit historischen Herangehensweisen zu einem vertieften inhaltlichen Verständnis zu gelangen gehört dazu auch, den Grundstein für eine etwaige Integration historischer Bezüge im zukünftigen Mathematikunterricht zu legen und nicht zuletzt ein tragfähiges Mathematisches Weltbild bei den Studierenden anzubahnen. Dabei ist insbesondere der letztgenannte Punkt von besonderer Bedeutung, da das Mathematische Weltbild einerseits Auffassungen, epistemologische Überzeugungen oder beliefs von Mathematik, ihrer Genese und dem Lehren- und Lernen integriert und damit Einfluss auf Erwartungen, Haltungen und inhaltliche Zugänge einer Person hat. Andererseits wird es von Erfahrungen und dem Umgang mit den Gegenständen geprägt.[3] Somit werden Auffassungen als übergreifendes Element von Kognition, Affektion und Konation verstanden (3-komponenten-Ansatz), das den Lernzielen vorausgeht, indem

1. Zitiert von Johannes von Salisbury in seinem Werk Metalogicon (1159): „Dicebat Bernardus Carnotensis nos esse quasi nanos gigantum umeris insidentes, ut possimus plura eis et remotiora videre, non utique proprii visus acumine, aut eminentia corporis, sed quia in altum subvehimur et extollimur magnitudine gigantea“

2. Für eine recht umfassende Zusammenstellung mit spezifischem Blick auf das Lehramtsstudium (vgl. Nickel 2013).

3. (Vgl. Schönfeld 1985) Bezüglich der Terminologie besteht derzeit in der didaktischen wie lernpsychologischen Literatur keine Einigkeit. Im Folgenden soll der Begriff „Auffassungen“ verwendet werden, der wohl als Übersetzung den Schönfeldschen „beliefs“ am nächsten kommt.

es den Umgang mit den Lerngegenständen prägt und andererseits von diesem geprägt wird und damit selbst als Ziel gedacht werden muss. Dass die Auffassungen zur Mathematik und erst Recht zur Mathematikgeschichte und deren unterrichtlichem Einsatz geprägt durch die eigenen Schulerfahrungen der Studierenden eher als einseitig beschrieben werden können und die Beschäftigung mit Mathematikgeschichte hier zu einer Veränderung beitragen kann, liegt nahe und konnte auch im Rahmen empirischer Untersuchungen bestätigt werden (vgl. Bütüner 2015). Dies soll daher in die konzeptionellen Überlegungen zur Weiterentwicklung der Veranstaltung „Geschichte der Mathematik“ für Studierende im Haupt-, Real- und Gesamtschullehramt explizit einfließen.

1.1 Ziele der Veranstaltung

Aus den sehr allgemeinen Forderungen und potentiellen Möglichkeiten, lassen sich zunächst etwas konkretere Ziele[4] formulieren, an denen sich im Sinne eines „Constructive Alignment“ (vgl. Biggs, 1996) die Inhalte, die Lehr-Lern-Methoden wie auch die Prüfungsmodalitäten orientieren sollen. Die folgende Auflistung basiert auf Literaturstudien wie auch auf Vorerfahrungen in der Durchführung mathematikhistorischer Lehrveranstaltungen und Unterrichtseinheiten zur Mathematikgeschichte. Demnach sollen die Studierenden …

… einen Überblick über die Geschichte ihres Faches erwerben, und dieses Wissen an ausgewählten Beispielen vertiefen (d.h. z.B. konkrete historische Rechenverfahren kennen, datieren und durchführen können).

… Mathematik (exemplarisch) in ihrer kulturellen Eingebundenheit erleben.

… exemplarische Einblicke in mathematikhistorisches Arbeiten erlangen.

… Beziehungen historischer Mathematik zu aktuellen (schul-)mathematischen Inhalten, Vorgehensweisen und Denkstrukturen herstellen können und diese mit Blick auf das Lehren und Lernen von Mathematik reflektieren.

Mit Blick auf das übergeordnete Studienziel eines tragfähigen mathematischen Weltbildes rücken außerdem folgende affektive Lernziele in den Fokus: Die Studierenden sollen …

4. Da gerade mit Blick auf die Rolle der Auffassungen dem (nicht prüfbaren) affektiven Teil der angestrebten Kompetenz eine wichtige Rolle zukommt, werden die Zielsetzungen nicht im Sinne von Affektives integrierenden Komptenzen oder „learning outcomes“ formuliert, sondern die traditionelle Unterscheidung in kognitive und affektive Lernzielen genutzt.

... darauf aufmerksam werden, dass auch die vermeintlich ‚gottgegebene' Schulmathematik das Ergebnis langer Forschungsprozesse, curricularer Entscheidungen und genialer Einfälle ist. (Mathematik als Kulturleistung)

... auf die Zeit- und Kulturabhängigkeit mathematischer Darstellungsformen einerseits und historische Konstanten andererseits aufmerksam werden. (Prozess vs. Produktsicht)

... auf die mögliche Beziehungen zum Mathematikunterricht reagieren, in dem sie diese in ihre Auffassung vom Lehren und Lernen einordnen.

... auf den Bildungswert der Mathematikgeschichte aufmerksam werden und eine erste individuelle Wertung vornehmen.

Die genannten Ziele zeigen einerseits, dass hier die Mathematikgeschichte als Inhalt eigenen Rechts im Vordergrund steht. Andererseits besteht aber auch die Hoffnung mathematikhistorische Inhalte als Werkzeug zu einem vertieften Verständnis der Schulmathematik und darüber hinaus auf dem Weg zu einem tragfähigen mathematischen Weltbild zu verwenden und mit der Veranstaltung die Auffassungen der zukünftigen Lehrerinnen und Lehrer zu einem Einsatz historischer Inhalte im Mathematikunterricht positiv zu beeinflussen.[5]

Für das Erreichen der kognitiven Lernziele (bzw. ihrer entsprechenden themenabhängigen Konkretisierung) bilden entsprechend angepasste Aufgaben- und Prüfungsformate (s. 1.3) einen guten Indikator. Um aber auch die für eine gelungene Lehrerbildung so wichtigen affektiven Lernziele zu erheben, ist gelegentliche Begleitforschung zu Lehrveranstaltungen, wie die unter 2 vorgestellte Auswertung der Abschlussreflexionen, nötig.

1.2 Situiertes Lernen einer Schulmathematik vom historischen Standpunkte aus

Als inhaltliche Leitlinie zur Auswahl der Veranstaltungsinhalte aus „6000 Jahren Mathematik" soll in erster Linie die konsequente Orientierung an den Inhalten der Mittelstufenmathematik (Zielgruppenorientierung) dienen. D.h. die Veranstaltung soll der Siegener Tradition folgend eine „Schulmathematik vom historischen Standpunkte aus" sein. Um dies zu gewährleisten und für die Studierenden nachvollziehbar zu machen, wird für die Darstellung ein eher ideengeschichtlicher Ansatz gewählt.

5. Insofern ist hier die von (Jankvist 2009) vorgeschlagene Unterscheidung „history as a goal" vs. „history as a tool" mit einem erweiterten Anwendungsbereich des Werkzeugs Mathematikgeschichte wirksam.

Die Organisation ebenso wie Wahl der Methoden folgt den Ideen des „situierten Lernens“ nach Wildt und Wildt:

> „Kompetenzorientiertes Lernen wird demnach [im Sinne des situierten Lernens] in solchen Kontexten gefördert, in denen das Studium sich auf komplexe Problem- bzw. Aufgabenstellungen bezieht, die möglichst einem authentischen Realzusammenhang entnommen und zum Lerngegenstand gemacht werden und deren Bearbeitung aus unterschiedlichen Perspektiven gefordert wird. Förderlich ist es, wenn das Lernen in sozialer Interaktion stattfindet, artikuliert und reflektiert wird.“ (Wildt und Wildt 2011, S. 15)

Der „authentische Realzusammenhang“ wird hier durch eine (mindestens kursorische) Vorstellung des jeweiligen historischen Hintergrundes und eine Einordnung der behandelten historischen Techniken in den kulturellen Zusammenhang erreicht. Außerdem sollen immer wieder auch „authentische Erfahrungen mit Mathematik“ (vgl. Habdank-Eichelsbacher und Jahnke 1999) anhand der Bearbeitung von Originalquellen ermöglicht werden. Die Arbeit mit historischen Quellenauszügen kann dabei auf Grund des immer wieder betonten Verfremdungsaspektes (vgl. Jahnke 2000) hier durchaus als dem Realzusammenhang entnommene „komplexe Problem- bzw. Aufgabenstellung“ beschrieben werden, wie sie Wildt und Wildt fordern. Auch hier schließt die Gestaltung der Veranstaltung an vorhergehende Erfahrungen im Rahmen verschiedener Lehramtsveranstaltungen an der Universität Siegen an (vgl. z.B. Allmendinger et al. 2015 und Spies und Witzke 2018). Außerdem wird mit diachronen Vergleichen über die verschiedenen Kulturen hinweg zur Ausschärfung gearbeitet und Wert auf den Rückbezug zum heutigen schulmathematischen Vorgehen gelegt (Anregung zur fachdidaktischen Reflexion). Es wird also immer wieder ein Perspektivwechsel zwischen einer mathematischen, einer historischen und einer mathematikdidaktischen Perspektive auf die behandelten Gegenstände der Mittelstufenmathematik vollzogen und so „unterschiedliche Sichtweise auf Geschichte der Mathematik [thematisiert]“ (S. 14), wie es Buchholz und Schorcht 2019 auf der Grundlagen ihrer empirischen Ergebnisse empfehlen.

Auch die Veranstaltungsorganisation orientiert sich an der Idee des situierten Lernens.[6] Dahinter steht die Haltung einer für gelingende Lernprozesse zwingend notwendigen Eigenaktivität durch die Lernenden und demnach einer anzustrebenden Balance von Instruktion und Konstruktion sowie einer sinnvollen Passung zwischen Veranstaltungsinhalten und Prüfungsformaten („Constructive Alignement“). Dies

6. Für eine ausführliche Darstellung der hochschuldidaktisch-organisatorischen Vorüberlegungen siehe (Spies, vorr. 2021).

wird zum einen dadurch gewährleistet, dass die Wissensdarstellung im Vorlesungsblock und damit die passive Rezeption immer wieder durch Präsenzaufgaben in Partnerarbeit unterbrochen wird. Diese werden insbesondere dazu genutzt, die vorher dargestellten historischen Verfahren und Darstellungsformen an weiteren Beispielen durchzuführen und so die Besonderheiten der historischen Mathematik bereits im Verlauf der Vorlesung zu erleben und vertieft zu verstehen. Die so entstehende Atmosphäre ermöglicht es darüber hinaus auch während instruktiver Phasen etwa bei Rückfragen im Plenum ins Gespräch zu kommen.[7]. Die flankierenden Prüfungsanlässe sollen ebenso den Gedanken des situierten Lernens aufgreifen: Zur Erlangung der Studienleistung erstellen die Studierenden in Kleingruppen ein Portfolio. Die Einträge orientieren sich an den Inhalten der Vorlesung und sind parallel zu dieser zu erstellen. Sie greifen jeweils die unterschiedlichen Perspektiven auf (historisch, mathematisch und fachdidaktisch) und sollen auf eigene geführte Quellenstudien oder Reflexionen mit Bezug zum Unterricht vorbereiten. Die verwendeten Arbeitsaufträge können dabei im Sinne des Constructive Alignment als prozessintegrierende „Lernaufgaben“ bezeichnet werden. Mit der Vorbereitung durch die Lernaufgaben in der Vorlesung und der ausführlicheren historischen Vertiefung im Rahmen der Portfolios können dann auch der geforderten Kohärenz entsprechend die Aufgaben für die Modulabschlussklausur gestellt werden. Das bedeutet, dass auch im Rahmen der Prüfungsleistung Aufgabenformate gewählt werden, die die verschiedenen Perspektiven integrieren. Im Folgenden sollen exemplarisch am Beispiel des Themenbereichs „Algebra im islamischen Mittelalter“ das Vorgehen sowie die unterschiedlichen Aufgabentypen verdeutlicht werden.

1.3 Constructive Alignement – Ein Beispiel aus der Geschichte der Algebra

Die Vorlesung gliedert sich in zwei große Themenbereiche: Teil I – Geschichte der Zahldarstellung und der Arithmetik und Teil II – Geschichte der (Schul-)Algebra.[8]

7. Im Rahmen der coronabedingten digitalen Umstellung in den Sommersemestern 2020 und 2021 wurde dies durch Videoaufgaben, die die Vorlesungsvideos an geeigneten Stellen unterbrechen sowie wöchentliche Arbeitstutorien via zoom umgesetzt.)

8. Die Geschichte der Geometrie wird dabei in den Ausführungen zur griechischen Mathematik zwar mit angesprochen, ist aber aus Zeitgründen kein eigenes Themenfeld. Die Stochastik als weiterer Inhaltsbereich der Sekundarstufenmathematik wird dagegen in dieser Vorlesung ganz ausgespart. Dies ist einerseits der beschränkten Semesterzeit geschuldet. Andererseits würde die Veranstaltung, die hauptsächlich die Zeitspanne der alten Hochkulturen bis ins islamische Mittelalter umfasst, dadurch eine deutlich größere historische Zeitspanne umfassen müssen. Im Rahmen eines regelmäßig angebotenen historisch-philosophischen Masterseminars „Geschichte der Stochastik“ können interessierte Studierende diese Lücke jedoch schließen.

Im Sinne der Zielsetzung, Einblicke in die Geschichte der heutigen Mittelstufenmathematik zu erhalten, beinhaltet Teil I die Entstehung verschiedener Zahlsysteme (erste Zahldarstellungen der Steinzeit, frühe Hochkulturen, Umgang mit Zahlen im antiken Griechenland und antiken Rom, Indisches Zahlsystem, Arabische Tradition) bis hin zum heute noch gebräuchlichen indisch-arabischen Zahlsystem und folgt damit in weiten Teilen den Inhalten der ersten „Geschichte der Mathematik"-Veranstaltungen an der Universität Siegen. Neben den Zahlzeichen und der mathematischen Einordnung der Zahlsysteme werden auch die daraus resultierenden Möglichkeiten des arithmetischen Umgangs (Grundrechenarten, Bruchrechnung, Systematischer Aufbau, Umfang der Zahlbereiche) diskutiert sowie Allgemeines zur jeweiligen Kultur, mögliche Gründe der Entstehung und weitere Wechselbeziehungen behandelt. Teil II enthält Aspekte aus der Geschichte der Mittelstufenalgebra (Lösungsmethoden für lineare und quadratische Gleichungen, Umgang mit Variablen), wobei hier noch konsequenter als in Teil I ideengeschichtlich vorgegangen wird (II.1 Lösungsmethode des „falschen Ansatzes": ägyptische Hau-Rechnung, Babylonische Methoden, II.2 Umgang mit nichtlinearen Gleichungen: Babylonische Normalform, geometrische Lösungsmethoden nach Al Khwarizmi). Hier kann nun jeweils der allgemeine historische Hintergrund aus Teil I vorausgesetzt werden. Selbstverständlich kann im Rahmen einer einzelnen Veranstaltung in beiden Bereichen nur exemplarisch vorgegangen werden. Umso wichtiger ist der vertiefende Quellenbezug an ausgewählten Stellen.

Nachdem der kulturelle Hintergrund des islamischen Mittelalters im allgemeinen sowie Al'Khwarizmis Rolle für die Verbreitung des indisch-arabischen Zahlsystems im Besonderen bereits im Arithmetik Kapitel skizziert wurde, werden mit Blick auf die Geschichte der (Schul-)Algebra die Lösungsverfahren Al'Khwarizmis, wie er sie in seinem Werk *Al-kitāb al-muhtasar fi hisāb al-ğabr wa 'l-muqābala* („Ein kurzgefasstes Buch über die Rechenverfahren durch Ergänzen und Ausgleichen") beschreibt, behandelt. Dazu wird neben einer kurzen Inhaltsangabe der Rekonstruktion Gerickes folgend (vgl. Gericke 2005, S. 198) auf die Unterscheidung sechs verschiedener Formen quadratischer Gleichungen und die Notwendigkeit dieser Unterscheidung durch das Fehlen negativer Zahlen eingegangen (mathematische Perspektive). Für die konkrete Rekonstruktion von Al'Khwarizmis Vorgehen erfolgt dann zunächst das operative Vorgehen am Beispiel des Gleichungstyps $ax^2 = c+bx$ entlang einer geführten Quellenstudie zu einer Übersetzung zur Aufgabe „māl und 21 gleich 10 Wurzeln" (vgl. Berggren 2011, S. 115). Auf dieser Grundlage wird dann zuerst die allgemeine Formulierung Al'Khwarizmis betrachtet und dann am Beispiel des Gleichungstyps $ax^2 + bx = c$ die geometrische Begründung nachvollzogen, um so den Bezug zum Vorbild des griechischen Vorgehens herzustellen (historische Perspektive). Zur Festigung des Vorgehens folgt die folgende Präsenzbzw. Videoaufgabe:

Vorlesungsaufgabe

Führen Sie Al'Khwarizmis geometrische Argumentation an folgendem Beispiel durch:

Ein Quadrat und vier Wurzeln ergibt 32.

Für den zugehörigen Portfolioeintrag wird durch die folgenden Arbeitsaufträge ein vertiefter Blick in Al'Khwarizmis Werk angeleitet. Die Textgrundlage ist die englische Übersetzung von Frederic Rosen (vgl. Al'Hwarizmi 1986).

Aufgabe 1 (Kultureller Hintergrund)

Im Vorwort zu Al'Khwarizmis Algebra lässt sich in besonderer Weise die Verwobenheit von Mathematik und ihrem kulturellen und gesellschaftlichen Hintergrund erkennen. Betrachten Sie dazu zunächst die Zeilen 5-50.

a) Unterteilen Sie den Anfang des Vorworts in Sinnabschnitte und finden Sie für jeden Abschnitt eine passende Überschrift.

b) Was unterscheidet Al'Khwarizmis Vorwort von den Vorreden heutiger Mathematikbücher. Wählen Sie ein aktuelles Algebra-Buch und vergleichen Sie.

Aufgabe 2 (Mathematische Rekonstruktion)

Ab Zeile 52 finden Sie Al'Khwarizmis Unterscheidung der 6 Fälle quadratischer Gleichungen, von denen er die Lösung von drei Fällen am Beispiel vorrechnet und anschließend geometrisch beweist.

a) Warum gab Al'Khwarizmi keine allgemeine Lösungsformel für quadratische Gleichungen an, wie wir sie heute kennen?

b) Welche Fälle unterscheidet Al'Khwarizmi? Warum gibt er nur die Lösung von dreien der Fälle an?

c) Betrachten Sie den dritten Fall (Zeile 84ff), übersetzen Sie das Vorgehen in heutige Terminologie und rekonstruieren Sie den geometrischen Nachweis (Zeile 196ff).

d) Verallgemeinern Sie die geometrische Demonstration des 1. Falls mittels Variablen. In welchem Zusammenhang könnte man dieses Verfahren im Mittelstufenunterricht behandeln?

In Aufgabe 1a) wird zunächst eine Inhaltssicherung des Vorwortes angeleitet. Dass dies in der gesamten Aufgabe eher kleinschrittig angegangen wird, ist nicht zuletzt der Tatsache geschuldet, dass es sich hier in der Regel nicht um Studierende der Geschichte als weiterem Unterrichtsfach handelt, sondern im Gegenteil viele als weiteres Unterrichtsfach eher weniger textorientierte, naturwissenschaftliche Fächer oder Sozialwissenschaften studieren. In der Abgrenzung zu heutigen Werken (1b) sollen dann die Besonderheiten der islamischen Mathematik heraustreten und auch Anregung zur Standortbestimmung der Quelle, aber auch der Rezipienten geben (historische Perspektive). Dabei kann dann wiederum die generelle Abhängigkeit der kulturellen Eingebundenheit der Wissenschaft Mathematik zum Gegenstand werden.
Die Aufgaben 2a) und 2b) fordern zunächst dazu auf, das in der Vorlesung Gehörte erneut zu aktivieren und die mathematische Einordnung zu reformulieren. 2c) fordert dann zur Inhaltssicherung für den dritten Fall auf. Auch hier wurde das Vorgehen ähnlich in der Vorlesung für einen anderen Fall vorgenommen, dennoch unterscheidet sich die geometrische Argumentation der Fälle so stark, dass hier schon fast von einer eigenständigen Quellenarbeit zu sprechen ist. In Aufgabe 2d) ist neben einem Verständnis des historischen Inhalts eine schulalgebraische Perspektive einzunehmen, um den Zusammenhang zwischen der geometrischen Zeichnung Al'Khwarizmis und den Inhalten der Schulmathematik (Zusammenhang zwischen erster binomischer Formel und quadratischer Ergänzung) zu erkennen. Sowohl diese letzte Frage als auch die ersten Fragen bieten über den historischen Einzelfall hinaus Gelegenheit, schulmathematische Inhalte zu reflektieren und einen höheren oder auch vertiefenden Standpunkt zu diesen einzunehmen.[9]

Als Klausuraufgabe in der anschließenden Modulabschlussklausur kann dann z.B. folgende Aufgabe erneut den Zusammenhang von algebraischem/ algorithmischem Vorgehen und geometrischer Beweisführung aufgreifen und auf historischer Ebene den Einfluss griechischer Mathematik auf die Mathematiker des islamischen Mittelalters herausstellen.

9. Das reflexionsanregende Potential dieser Quelle auch bei Schülern konnte bereits Glaubitz 2010 nachweisen. Darüber hinaus regt der Vergleich bzw. die Vernetzung von algebraischem und geometrischem Lösen auch zur ästhetischen Reflexion im Mathematikunterricht an (vgl. Allmendinger und Spies 2015 anhand dieser Quelle).

Klausuraufgabe Arabische Mathematik

In den Werken arabischer Mathematiker des 8. und 9. Jahrhunderts finden sich neben Anleitungen zu Zahldarstellung und Rechenmethoden nach indischer Art auch Ausführungen zur babylonischen Mathematik. Deutlich zu erkennen sind aber auch Einflüsse der griechischen Mathematik.
Erläutern Sie, wie sich dieses Phänomen erklären lässt und was es für den Charakter der Mathematik im arabischen Mittelalter bedeutet, indem Sie

a) einen historischen Umstand nennen, der dieses Phänomen begünstigt hat, (1 Punkt)

b) Besonderheiten der griechischen Auffassung von Mathematik beschreiben (2 Punkte)

c) am Beispiel der Algebra kurz darstellen, wie sich dadurch das arabische Vorgehen vom babylonischen unterscheidet. (1 Punkt)

2 Abschlussreflexionen als Auffassungszeugnisse

Um der Portfolioarbeit einen sinnvollen Abschluss zu geben und dazu anzuregen, die thematisch isolierten Einträge zu verknüpfen, sollte das Portfolio mit einem abschließenden Reflexionstext abgerundet werden. Im Arbeitsauftrag zu dieser Abschlussreflexion wurden die Studierenden zu einem reflektierenden Rückblick aufgefordert. Im Sommersemester 2018 ging diesem Abschluss eine Tutoriumssitzung voraus, in der Scribas Thesen in *Die Rolle der Geschichte der Mathematik in der Ausbildung von Schülern und Lehrern* (Scriba 1983) diskutiert wurden, so dass diese auch in den Arbeitsauftrag zur Abschlussreflexion einflossen. Ein Ziel war dabei auch, den Blick der Studierenden auf verschiedene Einflussbereiche der Mathematikgeschichte auf Lernende zu lenken, um so den Gegenstandsbereich der Reflexion zu öffnen. Zusätzlich wurde im Arbeitsauftrag explizit zur persönlichen Stellungnahme zum Umgang mit Mathematikgeschichte im Unterricht aufgefordert. Die Texte sollten einen Umfang von ein bis zwei Seiten haben.

Wie eingangs beschrieben, sind Auffassungen vielschichtige mentale Konstrukte, deren Ausprägung nicht wie ein Wissensbestand oder eine kognitive Kompetenz abprüfbar sind. Da sie jedoch Einfluss auf den Umgang mit den betreffenden Gegenständen haben und sich auf das Denken über die Inhalte auswirken, zeigen Sie sich einerseits implizit in der inhaltlichen Performanz und treten andererseits ebenfalls nicht immer explizit in Aussagen über die Gegenständen zu Tage. Da die

Studierenden im Rahmen der Abschlussreflexion explizit zu solchen Aussagen über die Geschichte der Mathematik und ihre Anwendung im zukünftigen Unterricht aufgefordert wurden, versprechen diese Texte Aufschluss über die Auffassungen der Studierenden zur Mathematikgeschichte und deren Einsatz im Mathematikunterricht zu geben. Insofern eignen sich die Abschlussreflexionen als Grundlage der angedachten Begleitforschung, um ein etwas spezifischeres Bild über das Erreichen der oben beschriebenen affektiven Lernziele zu erhalten.
So boten sich im Sommersemester 2018 die schließlich abgegebenen 31 Reflexionstexte an, sie unter der Fragestellung, welche Auffassungen von Mathematikgeschichte die Studierenden direkt im Anschluss an die Veranstaltung zeigen und welche Vorstellungen zum Einsatz von Mathematikgeschichte im Unterricht sie teilen, mittels theoriegeleiteter qualitativer Inhaltsanalyse nach Mayring 2002 zu untersuchen. Als Analyseeinheiten wurden Sinnabschnitte in den Texten identifiziert, wobei reine Aufzählungen der Vorlesungsinhalte sowie Wiederholungen der Aufgabenstellung nicht beachtet wurden. Um im Anschluss einen Überblick über Häufigkeiten und Zusammenhänge der identifizierten Kategorien zu erhalten wurden die Texte in RQDA kodiert.
Im Folgenden soll zunächst ein Überblick über die verwendeten Kategorien gegeben werden, um dann im Anschluss eine vorsichtige Beschreibung und Einordnung erster Ergebnisse zu geben.

2.1 Auffassungskategorien und Ankerbeispiele

Den Ausgangspunkt der Analyse bilden die von Buchholz und Schorcht 2019 im Rahmen des Projekts ÜberLegMa herausgearbeiteten Faktoren. Diese bieten sich an, da sie einerseits aus einer ausführlichen theoretischen Zusammenführung bekannter Ansätze zu den Auffassungen bzw. Überzeugungen bezüglich Geschichte der Mathematik und ihres Unterrichtseinsatzes resultieren. Andererseits wurden sie im Rahmen einer quantitativen Studie unter Teilnehmern von Veranstaltungen zur Mathematikgeschichte für das Lehramt an verschiedenen Deutschen Universitäten empirisch ausgeschärft, was eine besondere Passung auf die hier untersuchten Materialien verspricht.[10]
Bezüglich der Überzeugungen zur Geschichte der Mathematik unterscheiden Buchholz und Schorcht eine „Protagonisten-Sicht“, die „Perfektionistische Sicht“, die „Lebensweltliche Sicht“, eine „Prozesshafte Sicht“ sowie eine „Statische Sicht“ auf die

10. Darüber hinaus waren die Teilnehmerinnen und Teilnehmer auch aufgerufen an einer followup Studie teilzunehmen, so dass hier ggf. ein Vergleich der quantitativen und qualitativen Ergebnisse in Zusammenarbeit mit Nils Buchholz und Sebastian Schorcht angedacht war. Leider waren die Rückläufe so gering, dass dies nicht zu aussagekräftigen Ergebnissen führen konnte.

Genese. Auch in den Texten der Veranstaltungsteilnehmerinnen und -teilnehmer konnten Aussagen gefunden werden, die auf diese Auffassungen schließen lassen:

Kategorie und Beschreibung (vgl. Buchholz und Schorcht 2019)	**Ankerbeispiel aus den Reflexionstexten**
Protagonisten-Sicht: Die Mathematikgeschichte handelt von den Leistungen besonderer Persönlichkeiten und dem Umgang der Menschen mit Mathematik in der Vergangenheit.	„Die Geschichte der Mathematik zeigt uns das Wirken besonderer Persönlichkeiten“und „Wie Menschen Mathematik zu ihrer jeweiligen Zeit angewendet haben, zeigt die Geschichte der Mathematik“
Perfektionistische Sicht: Die Genese der Mathematik ist ein stetiger Prozess der Perfektionierung.	„Die Methoden für das Rechnen von Aufgaben haben sich mit der Zeit modernisiert und erleichtert. Früher waren sie umständlicher und anspruchsvoller.“
Lebensweltliche Sich: Betonung des Nutzens der Mathematik in der Lebenswelt, ihrer „kulturellen Bedeutsamkeit“ sowie mathematischer Erfindungen ausgelöst durch außermathematische Problemstellungen.	„Mathematik hat sich insbesondere aus dem Grund entwickelt, Alltagsprobleme einfach und schnell lösen zu können“ „. . . nutzen die Ägypter bereits die Mathematik, vor allem das Teilgebiet der Geometrie um die Felder neu vermessen zu können. Des Weiteren wurde die Geometrie genutzt um den Pyramidenbau zu planen und durchzuführen. Außerdem nutzten die Ägypter die Mathematik um Steuerpachten berechnen zu können.“
Prozesshafte Sicht: Die Mathematik unterliegt einem „ständigen Wandel“. Somit ist es denkbar, dass heutige mathematische Erkenntnisse hinterfragt und weiterentwickelt werden müssen.	„dass Mathematik nie aufhört. Das durch den immer weiter Ausbau der Mathematik Rechenwege und Zahlensysteme gebildet werden die eventuell in ein paar hundert Jahren als selbstverständlich gesehen werden. Wir diese aber heut zu Tage noch gar nicht nutzen.“
Statische Sicht: Die Mathematik ist ein statisches Konstrukt ohne zeitlich oder kulturell bedingte Veränderungen.	„Dabei gilt es besonders hervorzuheben, dass Mathematik die einzige Wissenschaft ist, welche sich durch einen konsequent deduktiven Aufbau auszeichnet, somit keinen Moden, Strömungen oder grundlegenden Umbrüchen ausgesetzt ist.“

Mit Blick auf die Überzeugungen der angehenden Lehrkräfte zum Einbezug mathematikgeschichtlicher Inhalte in den Unterricht werden außerdem zunächst zwischen eher ablehnenden und eher zustimmenden Haltungen unterschieden und hier jeweils bezüglich des gegebenen Begründungshintergrundes weiter differenziert. So können die Haltungen „affirmativ-Vertiefung“, „affirmativ-Motivation“ und „affirmativ-Anwendung“ einerseits sowie „ablehnend-Zeit“, „ablehnend-Relevanz“ und „ablehnend-Komplexität“ andererseits unterschieden werden. Auch diese Kategorien konnten in den Abschlussreflexionen identifiziert werden:

Kategorie und Beschreibung (vgl. Buchholz und Schorcht 2019)	**Ankerbeispiel aus den Reflexionstexten**
Affirmativ-Vertiefung: Historische Inhalte bieten sich als Vertiefung und Vernetzung von Konzepten an.	„Um den Schülerinnen und Schülern die Wichtigkeit der 0 in einem Zahlenstellenwertsystem zu verdeutlichen, kann man ihnen andere Zahlensysteme zeigen, die keine 0 hatten und darstellen, wie das Problem des Stellenwertes von den Indern oder Babyloniern gelöst wurde. Somit wird den Schülerinnen und Schülern klar, dass etwas für sie heute selbstverständliches in der Mathematik sich im Laufe der Zeit erst entwickelt hat und heute noch verwendet wird.“
Affirmativ-Motivation: Geschichte der Mathematik eignet sich gut als methodisches Mittel z.B. zur Motivation wenig interessierter Schüler oder zum Einstieg.	„Meiner Meinung nach würde es die Schülerinnen und Schüler interessieren und Spaß machen die ägyptische Multiplikation und Division zu behandeln und mit diesen Rechenwegen zu rechnen“ „Es ist wichtig ein intensives Lernen bei SuS zu unterstützen, indem man die ‘trockenen’ Formeln auch mit ‘Geschichte’ füllt.“
Affirmativ-Anwendung: Im historischen Kontext kann die Anwendbarkeit von Mathematik deutlich werden und so sinnstiftend wirken.	„Ansonsten ist bei jedem Thema ein kurzer geschichtlicher Hintergrund immer gut, sodass die SuS merken, dass Mathematik kein Konstrukt ist, was man nicht braucht, sondern dass es sich über Jahrtausende entwickelt hat und dazu dient, alltägliche Probleme zu lösen.“
Ablehnend-Zeit: „Im Mathematikunterricht fehlt die Zeit für über das Curriculum Hinausgehendes, wie etwa historische Themen.“	„jedoch glaube ich, dass meistens die Zeit fehlt um diese Quellengenauer zu erklären da der Lehrplan genau durchgeplant ist“

Ablehnend-Relevanz: Das Wissen um die Genese des Stoffs ist nicht relevant für die Lernenden.	„Das Erlernen von mathematischen Formeln und das Berechnen dieser Formeln ist auch ohne die Kenntnis der Geschichte der Mathematik möglich. In der Schule und auch an der Uni wird es hauptsächlich so praktiziert. Informationen, wie das der Gelehrte Adam Ries die Mathematik für das allgemeine Volk zugänglich gemacht hat oder wie die Ägypter gerechnet haben, sind in der Regel eher nebensächlich“
Ablehnend-Komplexität: Der Zugang zu historischer Mathematik mit ihren Fehlern und Irrwegen ist zu schwierig für die Lernenden.	„Jedoch würde ich die rote Hilfszahl überhaupt nicht aufgreifen, denn es könnte die Schülerinnen und Schüler verwirren und dazu führen, dass sie hinterher die heutigen Rechenmethoden nicht mehr ganz hinbekommen.“

Nach einem ersten Kodierdurchgang fielen jedoch Aussagen auf, die keiner der ÜberLegMa-Kategorien zugeordnet werden konnten. Daher wurde der Kategorienkatalog mit Blick auf die Haltungen zur Geschichte um den Aspekt „Phylogenese = Ontogenese“ erweitert und bezüglich der Haltungen zum Unterrichtseinsatz um die Aspekte „Affirmativ-Hilfestellung“ und „fächerübergreifender Unterricht“. Diese induktiv entwickelten Kategorien wurden dann in einem weiteren Iterationsschritt ebenfalls zur Kodierung herangezogen.

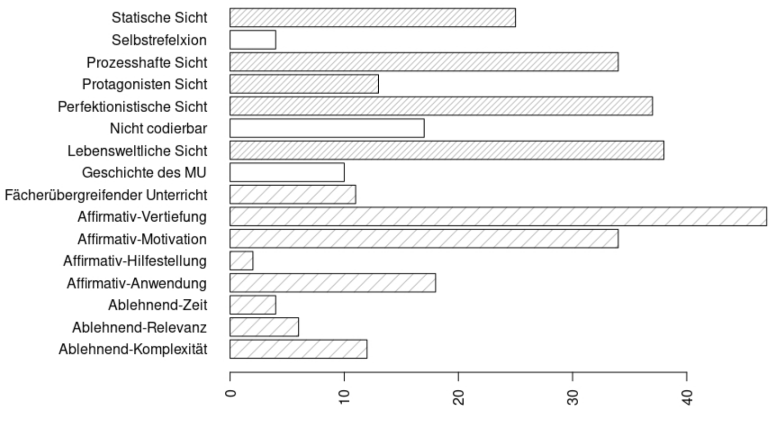
Kategorie und Beschreibung	**Ankerbeispiel aus den Reflexionstexten**
Phylogenese = Ontogenese: Der historische Entwicklungsprozess und der Lernprozess eines Menschen laufen bezüglich der Mathematik parallel.	„denn wir erarbeiten uns noch heute mathematische Fähigkeiten in der gleichen Reihenfolge wie sie auch entdeckt wurden“
Affirmativ-Hilfestellung: Historische Herangehensweisen können für schwache Lernende leichter umsetzbar sein und als Hilfestellung vorgeschlagen werden.	„Weiter werde man mit Sicherheit die Verfahren zur Berechnung verwenden, die für SuS einfacher sind als die heutigen. Wenn die SuS Probleme beim multiplizieren haben, können sie doch auch fortgesetzt verdoppeln, wenn ihnen das leichter fällt. Wir werden also versuchen die Geschichte der Mathematik an den Stellen einzubringen, wo die alten Methoden den SuS das Leben mit der Mathematik vereinfachen können.“

Fächerübergreifender Unterricht: Im historischen und kulturellen Hintergrund der Mathematik bieten sich Möglichkeiten zu fächerübergreifendem Arbeiten insbesondere mit den Geisteswissenschaften.	„Obwohl es für Schülerinnen und Schüler kompliziert sein könnte, würden wir ein Bezug auf den Islamunterricht das indisch-arabische Zahlensystem behandeln.“

Zusätzlich zu diesen neugebildeten Kategorien, beschäftigten sich einige Textabschnitte nicht mit Themen, die Rückschlüsse auf die Auffassung zur Mathematikgeschichte oder zum Unterrichtseinsatz zuließen. Diese konnten wiederum unterschieden werden in Überlegungen zur Geschichte des Mathematikunterrichts, Selbstreflexionen zum eigenen Arbeitsverhalten oder eigenen Lernfortschritten in der Veranstaltung sowie ein kleiner Teil nicht weiter unterschiedener Aussagen etwa zur Organisation der Veranstaltung usw., die weiterhin nicht kodierbar genannt werden. Diese Zuordnungen werden unten mit aufgeführt, sollen hier aber nicht weiter beachtet werden.

2.2 Erste Einordnung der erhobenen Auffassungen

Insgesamt konnten so 284 Textabschnitten eine der beschriebenen Überzeugungen zugeordnet werden. Das Balkendiagramm zeigt eine Zusammenstellung der Häufigkeitsbeobachtungen der oben skizzierten Kategorien.



Bezogen auf die Auffassung zur Mathematikgeschichte (starkschraffierte Balken) zeigt sich zunächst eine große Bandbreite von Auffassungen, die sich in den Texten finden lassen. Auffällig ist hier insbesondere, dass die Protagonisten-Sicht sehr selten kodiert wurde. Dies ist vermutlich eine Folge des Ideengeschichtlichen Ansatzes und der Konzentration des ersten Teils der Vorlesung auf die alten Hochkulturen, ein Themenbereich, in dem die mathematischen Errungenschaften eher dem 'anonymen Schreiber' zugeordent werden können als einer explizit vorgestellten Mathematikerpersönlichkeit. Offenbar waren hier die behandelten Protagonisten der griechischen und islamischen Mathematik nicht so sehr im Erinnerungsvordergrund. Auch der relativ hohe Anteil der lebensweltlichen Sicht lässt sich mit einem (Erinnerungs-)Schwerpunkt der Studierenden auf den alten Hochkulturen erklären, ist es doch gerade ein Charakteristikum der griechischen Mathematik, den Anwendungsbezug abgestreift zu haben und die Mathematik als Wissenschaft eigenen Rechts zu etablieren.

Der Kontext, in dem Aussagen der Perfektionistischen-Sicht zugeordnet wurden, lässt häufig erahnen, dass den Studierenden die historischen Herangehensweisen schwierig, umständlich und in gewissem Sinne unzulänglicher vorkamen als die ihnen bekannten zeitgenössischen Vorgehensweisen. Dies verweist einerseits auf die sehr starke syntaktische Prägung auf die Verfahren der heutigen Schulmathematik (wie etwa Rechenverfahren, Lösungsformeln für Gleichungen) der Studierenden und andererseits auf einen stark wirkenden Verfremdungseffekt durch die historischen Quellen. Diese Beobachtung hat wohl auch zur Folge, dass die historischen Inhalte im Unterricht häufig im Rahmen von Vertiefungen und ergänzenden Inhalten für besonders gute Schülerinnen und Schüler verortet werden (Affirmativ-Vertiefung) und für schwächere Schüler eher als Hemmnis wahrgenommen werden. Neben der Vertiefung wurde jedoch auch der funktionale Aspekt der Mathematikgeschichte im Unterricht häufig hervorgehoben etwa in Einstiegssituationen (hier wohl eher anekdotisch gemeint) als auch zur Motivation der sonst eher sprachlich oder geisteswissenschaftlich interessierten Schülerinnen und Schüler. Diese Erweiterung des Unterrichts über das rein Mathematische hinaus ist dann wohl auch Ursache dafür, dass über ein Drittel der Reflexionstexte den Vorschlag enthielt, durch die Einbindung der Mathematik in historische und kulturelle Zusammenhänge auch eine Möglichkeit zum fächerübergreifenden Arbeiten zu schaffen. Besonderen Eindruck hat hier offenbar der kurze Ausflug in die Mathematik des islamischen Mittelalters gemacht, denn auffallend häufig wurden Kooperationsmöglichkeiten mit dem Islamunterricht genannt. Dass die ablehnenden Argumente nicht so häufig vorkommen, wie die affirmativen liegt sicher auch daran, dass im Kontext der Studienleistung und ohne Anonymisierung sozial erwünscht geantwortet wurde. Hervorzuheben ist jedoch, dass auch die Argumente gegen den Geschichteeinsatz durchaus deutlich vertreten werden und gegen die affirmativen Argumente abgewogen werden. Hier zeigt sich bereits ein durchaus kritisch reflektiertes Verhalten der Studieren.

Bei der Analyse der Texte fällt auf, dass immer wieder sich inhaltlich zunächst ausschließende Auffassungen von Geschichte (z.B. Perfektionistische und Statische Sicht) im gleichen Text vorkommen. Hier wird der Doppelcharakter der Mathematik als zeitunabhängiges, logischen Gesetzen folgendes, abstraktes Gedankenkonstrukt, das eindeutig als Mathematik zu identifizieren ist, einerseits und Wegen und Irrwegen unterliegender menschlicher Kulturleistung andererseits deutlich. Diese Erfahrung blieb jedoch in den Texten implizit und wurden von den Studierenden zunächst nicht weiter aufgegriffen.

Insgesamt ist natürlich das gemeinsame Auftreten von Auffassungen in ein und dem selben Reflexionstext besonders aufschlussreich, da dies auch Wechselwirkungen etwa zwischen der Auffassung von Mathematikgeschichte und ihrem Unterrichtseinsatz ermöglicht. Auch wenn wegen der kleinen Zahlen Vorsicht bei der Interpretation von Korrelationen geboten ist, sollen einige auftretende Zusammenhänge hier wenigstens benannt werden. Zusammenhänge, die im Rahmen der Auffassung zum Unterrichtseinsatz auftreten entsprechen den auch außerhalb der Studie häufig berichteten Argumentationsmustern (vgl. etwa Arcavi 2002). Das Argument, die historischen Inhalte seien viel zu schwer und außerdem nicht prüfungsrelevant zeigt sich etwa in dem starken Zusammenhang zwischen Ablehnend-Relevanz und Ablehnend-Komplexität.[11] Ein solcher Befund könnte aber auch Anlass zu einer weiteren Metareflexion über mögliche hinter dem Curriculum liegenden Gründe für die notwendigen Einsatz kognitiver Ressourcen auf historische Inhalte im Unterricht sein. Dies gilt ebenso für das Argumentationsmuster, das sich in der Kombination aus Prozesshafter Sicht und Ablehend-Zeit ergibt: Für das Nachzeichnen der langen Entwicklungslinien und Irrwege besteht keine Zeit im Unterricht, es geht schneller direkt das ‘fertige’ Produkt zu präsentieren.

Der in den Texten zu beobachtende Zusammenhang zwischen Affirmativ-Vertiefung und Ablehnend-Zeit hingegen verweist auf das ebenfalls bekannte Argumentationsmuster, dass für den Geschichtseinsatz im Standardunterricht die Zeit fehle, sich historische Inhalte dann aber für die schnellen Lernenden als Vertiefung anbieten würden. Dies gilt ähnlich für die Ansicht, dass die Geschichte die Mathematik „vermenschlicht“ und nicht zuletzt dadurch eine motivierende Funktion

11. Mithin ein auch in Bezug auf die eigene Anstrengungsbereitschaft nicht nur in Geschichte der Mathematikveransatltungen von Lehramtsstudierenden gerne angeführtes Muster: „Die Inhalte sind zu schwer und zu viel und außerdem brauche ich das für meinen späteren Lehrerberuf auch gar nicht“. Inwiefern hier ein Zusammenhang besteht zu den Antworten in der Reflexion bleibt natürlich vorerst reine Spekulation.

im Unterricht einnehmen kann, was der Zusammenhang Protagonisten-Sicht und Affirmativ-Motivation nahelegt. Der Aspekt der „Vermenschlichung“ von Mathematik durch Geschichte zeigt sich auch in der Korrelation von Protagonisten- und Prozesssicht. Bei diesen, wie auch bei anderen dem Geschichtseinsatz im Unterricht gegenüber grundsätzlich positiven Haltungen zeigen die Formulierungen in den Reflexionen jedoch auch, dass die Vorstellung wie dies tatsächlich umgesetzt werden könnte, eher vage sind. Hier könnten mathematikdidaktische Masterseminare oder Fortbildungen später gut ansetzen.

Die Kodierungen mit der neu konstruierten Kategorie Argumentationsmuster weisen dagegen einige nicht so einfach einem Argumentationsmuster zuzuordnende Korrelationen auf. So gibt es etwa einen negativen Zusammenhang zu Affirmativ-Anwendung, obgleich der Anwendungsbezug der Mathematik in der Literatur immer wieder als Ansatzpunkt für die Möglichkeiten fächerübergreifenden Arbeitens genannt wird. Ebenso wenig zu erwarten ist der Zusammenhang zwischen Ideen, historische Inhalte für fächerübergreifendes Arbeiten zu nutzen und der Perfektionistischen Sicht auf die Genese der Mathematik. Hier wäre eine Wiederholung der Untersuchung in einer anderen Kohorte interessant ggf. flankiert mit einzelnen Interviews, um zufällige Effekte auszuschließen und weitere Hinweise auf die hinterliegenden Muster zu erhalten.

3 Folgerungen für die Weiterentwicklung der Veranstaltung

Die Auswertung der Abschlussreflexionen gibt Einblicke in einen Bereich, der als Lernziele und Begründungsgrundlage für mathematikhistorische Elemente im Lehramtsstudium zwar immer wieder genannt wird, in klassischen Prüfungsverfahren jedoch kaum erfassbar ist. Dabei geben die Untersuchungsergebnisse durchaus Hinweise zur Weiterentwicklung der Veranstaltung:
Offenbar haben die alten Hochkulturen und ihre Mathematik einen besonderen Reiz auf die Studierenden ausgeübt, was jedoch vermutlich die Lebensweltliche Sicht in den Vordergrund und die Protagonisten Sicht in den Hintergrund treten ließ. Da die Identifikation mit einzelnen Persönlichkeiten jedoch ein Mittel ist, die Mathematik als menschliche Leistung und ihren Prozesscharakter stärker herauszustellen, könnte es hier hilfreich sein, insbesondere der griechischen Mathematik einen noch größeren Raum im Rahmen der Veranstaltung einzuräumen und dort ggf. mit Hilfe von „StoryTelling“-Elementen (vgl. etwa die Ansätze von Heering 2016 oder Allchin 2011) einzelne Persönlichkeiten stärker hervortreten zu lassen

als bisher. Einen Beitrag könnte auch die (erneute) Ausweitung des Zeitrahmens etwa auf die Mathematik des christlichen Mittelalters und ihren Protagonisten sein.
Um den Verfremdungseffekt der historischen Verfahren insbesondere in der Quellenarbeit etwas besser aufzufangen und zu einer *fruchtbaren* Irritation werden zu lassen, ist es sicher hilfreich die Quellenstudien noch kleinschrittiger zu begleiten und durch geeignete Arbeitsaufträge immer wieder den Wechsel zwischen historischem und eigenem Standpunkt im Sinne eines hermeneutischen Lesens vollziehen zu lassen. Hier bieten Erfahrungen aus der Arbeit mit Schülerinnen und Schülern (vgl. Junker und Spies 2020) einen auch in Bachelorveranstaltungen hilfreichen Rahmen.
Zusätzlich könnte die didaktische Perspektive stärker hervortreten, indem immer wieder dazu angeregt wird, eine Metaperspektive auf den eigenen Lernzuwachs im Umgang mit den historischen Inhalten einzunehmen. So könnte mindestens eine gute Grundlage für anschließende historisch-didaktische Seminare zum Geschichtseinsatz im Mathematikunterricht gelegt werden, in denen wiederum den Fragen nach Legitimation und methodischer Umsetzung nachgegangen wird. Ein Beitrag zu einer solchen Metaperspektive könnte auch die Diskussion der Reflexionsergebnisse im Rahmen der Veranstaltung selbst leisten, um so durch das Explizieren ggf. problematischer Argumentationsmuster zur Selbstreflexion anzuregen.

Die Ergebnisse geben außerdem Anlass zu weiterer (Begleit-)Forschung: So wäre es sicher spannend in einem weiteren Veranstaltungsdurchgang beispielsweise mit Hilfe eines standardisierten Fragebogens vor Veranstaltungsbeginn ein Bild von den Auffassungen zu erheben, um ggf. eine Entwicklung feststellen zu können.
Auch eine Triangulation mit den Klausurergebnissen wäre interessant, um Anhaltspunkte zu erhalten, inwiefern bestimmte Auffassungen als Erfolgsindikator gelten können. Dies wäre jedenfalls im Rahmen von Aufgabenstellungen zu erwarten, die die historische Perspektive in den Vordergrund stellen. Darüber hinaus wäre ein Vergleich mit den Abschlussreflexionen der digitalen Durchgänge interessant, die bisher lediglich kursorisch durchgeschaut wurden. So könnte herausgefunden werden, inwiefern die dort (zwangsläufig) vorgenommenen Änderungen zu Unterschieden führen.

Eine curricular und kulturell verankerte Pflichtveranstaltung zum Untersuchungsgegenstand zu machen, ist ein doppeltes Wagnis: Es gilt einerseits Althergebrachtes begründet zu hinterfragen und wo notwendig Veränderungen vorzunehmen. Andererseits sollten erfolgreiche Konzepte bewahrt und weiterentwickelt werden. In diesem Spannungsfeld stehen die beschriebenen konzeptionellen Veränderungen der Veranstaltung „Geschichte der Mathematik“ für Lehramtsstudierende an der Universität Siegen: Die komfortable Lage, die Neuausrichtung auf den Schultern der Vorgängerveranstaltungen vornehmen zu können, wirkt sich insbesondere bei der inhaltlichen Auswahl aus, während die hauptsächlichen Veränderungen in der hochschuldidaktischen Gestaltung der Prüfungsformate, der Umorganisation von Inhalten und der expliziten Integration der Quellenarbeit liegt. Die vorgestellten Ergebnisse zeigen dabei mindestens, dass sich interessante Einblicke eröffnen und es sich lohnt auch bei Veranstaltungen mit langer Tradition häufig implizit wirkende Zielsetzungen offen zu legen, Prüfungsformate explizit zu überdenken und auch über Prüfungsergebnisse hinaus Ergebnisse auf der Auffassungsebene gezielt hervortreten zu lassen.

Literaturverzeichnis

Al'Hwarizmi, Muhammad Ibn-Musa. 1986. *The algebra of Mohammed ben Musa.* Nachdr. d. Ausg. London 1831. Herausgegeben von Frederic Rosen. Hildesheim: Olms.

Allchin, D. 2011. The Minnesota Case Study Collection: New Historical Inquiry Case Studies for Nature of Science Education. *Science and Education.*

Allmendinger, H., G. Nickel und S. Spies. 2015. Original sources in teachers training - possible effects and experiences. In *History and Epistemology in Mathematics Education. Proceedingsof ESU 7,* herausgegeben von E. Barbin, U. Jankvist und T. Hoff Kjeldsen, 551–564.

Allmendinger, H., und S. Spies. 2015. Alte Bekannte aus persönlicher Sicht. Quadratische Gleichungen ästhetisch reflektiert. *mathematik lehren* 193:24–31.

Arcavi, C. Tzanakis & A. 2002. Integrating history of mathematics in the classroom: an analytic survey. In *History in mathematics education: the ICMI study,* herausgegeben von J. Fauvel & J. van Maanen, 201–240. Dordrecht: Kluwer.

Berggren. 2011. *Mathematik im mittelalterlichen Islam.* Heidelberg: Springer.

Buchholz, N., und S. Schorcht. 2019. Welche Überzeugungen haben Lehramtsstudierende zur Geschichte der Mathematik? – Ergebnisse der Studie ÜberLeG-Ma. *Mathematica didactica* 42 (1): 1–19.

Bütüner, S. Ö. 2015. Impact of Using History of Mathematics on Students' Mathematics Attitude: A Meta-Analysis Study. *European Journal of Science and Mathematics Education* 3 (4): 337–349.

DMV, GDM und MNU. 2008. Standards für die Lehrerbildung im Fach Mathematik. Empfehlungen von DMV, GDM und MNU an die KMK. http://madipedia.de/images/2/21/Standards_Lehrerbildung_Mathematik.pdf.

Gericke, Helmuth. 2005. *Mathematik in Antike, Orient und Abendland.* 9. Auflage. Wiesbaden: Marix Verlag.

Glaubitz, M. 2010. Mathematikgeschichte lesen und verstehen. Eine theoretische und empirische Vergleichsstudie. Diss., Universität Duisburg-Essen.

Habdank-Eichelsbacher, B., und H.N. Jahnke. 1999. Authentische Erfahrung mit Mathematik durch historische Quellen. In *Mathematikdidaktik als design science.* Herausgegeben von Selter und Walter, 95–104. Leipzig: Klett.

Heering, P. 2016. Geschichten erzählen im naturwissenschaftlichen Unterricht. *MNU Journal* 3:171–176.

Jahnke, H.N. et. al. 2000. The use of original sources in the mathematics classroom. In *History in mathematics education, the ICMI study4,* herausgegeben von J. Fauvel und J. van Maanen, 235–261. Kluwer.

Jankvist, U. 2009. A categorization of the 'whys' and 'hows' of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics* 71:235–261.

Junker, R., und S. Spies. 2020. „Hochverehrter Herr Bernoulli . . . " – Ein Digitalprojekt zur Quellenarbeit im Analysisunterricht. *SieB* 13:175–200.

Mayring, P. 2002. *Einführung in die qualitative Sozialforschung.* Weinheim Basel: Beltz.

Nickel, G. 2013. Vom Nutzen und Nachteil der Mathematikgeschichte für das Lehramtsstudium. In *Mathematik verständlich unterrichten.* Herausgegeben von H. Allmendinger et al., 253–266. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Schönfeld, A. H. 1985. *Mathematical Problem Solving.* Orlando: Academic Press.

Scriba, Ch. 1983. Die Rolle der Geschichte der Mathematik in der Ausbildung von Schülern und Lehrern. *Jahresberichte der DMV* 85:113–128.

Spies, S. vorr. 2021. Die Mathematik als Kulturleistung erleben. Neustrukturierung von Veranstaltung und Prüfungen zur „Geschichte der Mathematik" für Haupt-, Real- und Gesamtschullehramtsstudierende. In *Hochschuldidaktik 6: Neues Lernen - forschungsnah und digital. Siegen: universi.*

Spies, S., und I. Witzke. 2018. Making Domain-Specific Beliefs Explicit for Prospective Teachers: An Example of Using Original Sources. In *Education and History. Towards a Harmonious Partnership.* Herausgegeben von K. u.a. Clark, 283–304. Springer.

Wildt, J., und B. Wildt. 2011. Lernprozessorientiertes Prüfen im Constructive Alignment. In *Neues Handbuch Hochschullehre, Teil H: Prüfungen und Leistungskontrollen. Weiterentwicklung des Prüfungssystems in der Konsequenz des Bologna-Prozesses,* herausgegeben von B. Berendt / H.-P. Voss / J. Wildt, 1–46. Berlin.

Ansichten der Geometrie - Plastische Modelle in der Forschung von Julius Plücker und Felix Klein

Hannes Junker

Noch immer finden sich an vielen Instituten für Mathematik in Deutschland Sammlungen geometrischer Modelle, deren Geschichte bis in das 19. Jahrhundert zurückreicht. Die meisten Objekte sind nach 1877 von Verlagen bezogen worden, die sie als Lehrmittel für den höheren Unterricht im In- und Ausland vertrieben. Vor der Etablierung gewerbsmäßiger Vertriebsstrukturen gab es allerdings eine lange Tradition des Modellbaus im Umfeld der technischen Hochschulen, wie Klaus Volkert an derselben Stelle nachgezeichnet hat.[1] Ab 1860 entstanden auch gehäuft Entwürfe im Zusammenhang mit geometrischen Studien.[2] In diesem Artikel werden die Modelle der Jahre 1865–1870 des Mathematikers und Physikers Julius Plücker (1801–1868) und seines Assistenten Felix Klein (1849–1925) betrachtet. Noch heute befinden sich Kopien der Entwürfe in den Sammlungen der Institute in Göttingen und Tübingen.[3] Interessant sind sie nicht nur, weil sie einen Einblick in die (rein) wissenschaftliche Verwendung von Anschauungsmitteln während einer Periode geben, in der sie noch nicht im größeren Stil hergestellt und vertrieben worden sind. Die Modelle spiegeln auch die Veränderungen wider, welche die Geometrie um 1870 herum durchlief. Nach dem Tod seines Lehrers 1868 verfolgte Felix Klein neue Ansätze beim Studium und der Darstellung geometrischer Flächen. Der

1. Volkert 2018.
2. Auf die wissenschaftliche Bedeutung und Verwendung der Modelle hat David E. Rowe in mehreren Artikeln hingewiesen: (Rowe 2013).
3. Zur Tübinger Modellsammlung ist vor wenigen Jahren ein Band mit zahlreichen Fotografien und historischen Beiträgen erschienen. (Seidl et al. 2018)

vorliegende Beitrag zeichnet nach, wie seine Suche nach der richtigen Modellform mit der Frage nach dem Gegenstand der Geometrie zusammenhing, der damals immer abstraktere Züge annahm.

Plückers *Neue Geometrie*

Beim 36. Treffen der *British Association for the Advancement of Science* (BAAS) in Nottingham im August 1866 hielt Julius Plücker einen Vortrag unter dem Titel „On Complexes of the Second Order". Der Professor für Experimentalphysik aus Bonn besaß sehr enge Verbindungen nach England, wo er große Bekanntheit genoss. In dem Jahr seines Vortrages bekam er die Copley-Medaille von der *Royal Society* verliehen. In der Begründung wird Plückers Forschung auf den Gebieten der analytischen Geometrie, des Magnetismus und der Spektralanalyse von Gasen angeführt. In Nottingham sprach der gebürtige Elberfelder zu einem vorrangig mathematischen Thema, mit dem er sich seit einigen Jahren intensiv beschäftigte. Er knüpfte damit an den Gegenstand einer Abhandlung an, die ein Jahr zuvor in den *Philosophical Transactions* der *Royal Society* unter dem Titel „On a New Geometry of Space" erschienen war (Plücker 1865). In dem Artikel beschrieb Plücker die Grundzüge einer neuartigen Geometrie, in der Linien anstelle von Punkten die zentralen Elemente sind. Er führte außerdem verschiedene Liniengebilde wie Komplexe ein, die den Flächen der gewöhnlichen Punktgeometrie entsprechen. Sie waren auch das Thema seines Vortrages.

Die Wenigsten im Publikum waren mit diesen Gebilden vertraut. Plücker war deswegen bedacht darauf, den Zuhörern etwas zum besseren Verständnis an die Hand zu geben. In dem Bericht über den Vortrag heißt es:

> Dr. Plücker showed a series of models executed with great accuracy by Mr. Epkens of Bonn, calculated to illustrate his theory of complexes of the second degree.[4]

Die erwähnten Holzmodelle hatte Plücker in der Werkstatt von Johannes Epkens angefertigt lassen, einem Bonner Handwerker, über den nur wenig bekannt zu sein scheint. Sie erregten großes Interesse bei den Anwesenden. Auf Bitten von Thomas Archer Hirst (1830–1892), dem damaligen Vizepräsidenten der 1864 gegründeten *London Mathematical Society* (LMS), übersandte Plücker nach seiner Ankunft in

4. Anonym 1866, S. 6.

Abbildung 1: Die Fotografie zeigt das Modell einer Äquatorialfläche aus der Tübinger Modellsammlung. Die Charakteristiken sind Hyperbel und Ellipse, wobei die Scheitelpunkte der Hyperbel zwischen den Schnittpunkten der Ellipse mit dem vertikalen Durchmesser liegen. Flächenpartien mit Hyperbeln und Ellipsen als Breitenkurven werden von Doppelgeraden getrennt. © Museum der Universität Tübingen MUT / V. Marquardt

Bonn insgesamt vierzehn Modelle ins Vereinigte Königreich.[5] In vier Briefen an Hirst erläuterte Plücker die Theorie der quadratischen Komplexe, die mit den Modellen in engem Zusammenhang stand (Plücker 1866a). Auf Nachfrage beschrieb er außerdem in groben Zügen, was die verschiedenen Entwürfe seiner Serie im Einzelnen zeigen.

Komplexflächen

Julius Plücker definierte die Grundgebilde seiner neuen Geometrie mit algebraischen Methoden. Er verwendete Linienkoordinaten, worunter er die Koeffizienten r, ρ, s, σ in den beiden Gleichungen

$$x = rz + \rho, \quad y = sz + \sigma$$

einer Geraden im Raum verstand.[6] Einen Komplex der zweiten Ordnung definierte er als die Menge aller Linien, die einer quadratischen Gleichung $\Omega(r, \rho, s, \sigma) = 0$ genügen. In ergänzenden Bemerkungen zu seiner Abhandlung bemühte Plücker sich

5. Sie befinden sich noch heute im Besitz der Gesellschaft. Die Abb. 1 zeigt ein fast baugleiches Modell aus Metall, das später hergestellt worden ist und sich heute in der Tübinger Sammlung befindet.

6. Plücker 1865, S. 726.

auch um eine geometrische Charakterisierung dieser Linienmengen.[7] In jeder Ebene des Raumes liegen unendlich viele Linien eines quadratischen Komplexes, die dort eine Kurve der zweiten Ordnung umhüllen. Durch jeden Punkt des Raumes wiederum gehen unendlich viele Komplexlinien, die einen quadratischen Kegel bilden.

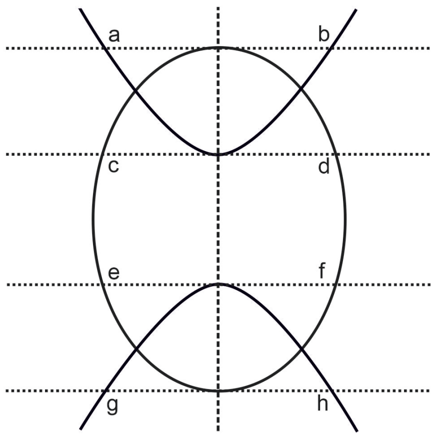


Abbildung 2: Die Zeichnung zeigt schematisch die Charakteristiken für das Modell der Abb. 1. Die gestrichelte vertikale Linie stellt den Durchmesser der Fläche dar, der durch die Mittelpunkte aller Breitenkurven geht. Die vier horizontalen Linien geben den Verlauf der Geraden durch die acht Doppelpunkte a−h wieder.

Es ist alles andere als leicht, sich von dem Aussehen dieser Objekte eine genaue Vorstellung zu machen. Diese Schwierigkeiten empfand auch Julius Plücker, der als Geometer nach einem anschaulichen Zugang zu den abstrakten Gebilden suchte. Um die unübersichtliche Situation zu vereinfachen, beschränkte er sich in seinen Betrachtungen deshalb frühzeitig auf gewisse Teilmengen der quadratischen Komplexe. Die Gesamtheit aller Komplexlinien, die durch eine feste Gerade des Raumes gehen, umhüllen wie Lichtstrahlen eine bestimmte Brennfläche. Das Aussehen dieser Komplexflächen hängt natürlich von der Lage der Geraden ab, die von Felix Klein später Leitlinie genannt worden ist. Nach dem, was Plücker jedoch über quadratische Komplexe herausgefunden hatte, haben all diese Flächen eine Sache gemein. Eine Ebene durch die Leitlinie trifft den Komplex in Linien, die eine Kurve der zweiten Ordnung umhüllen. Demnach setzten sich die Komplexflächen

7. Plücker 1865, S. 779.

aus Kegelschnitten zusammen, die im Grenzfall zu einer Doppelgeraden entarten können (vgl. die Abb. 1). Wie sich dem Vortragsbericht entnehmen lässt, bewies Plücker dem Nottinghamer Publikum, dass es sich im Allgemeinen um Flächen der vierten Ordnung und Klasse handelt, auf denen sich acht Doppelpunkte befinden.[8] Sie liegen wiederum auf acht Ebenen, welche die Fläche entlang von Kegelschnitten berühren. Je nach Lage der Leitlinie unterschied er zwischen zwei Arten von Komplexflächen. Wenn sie sich im unendlich Fernen befindet, so liegen alle Kegelschnitte notwendigerweise auf *parallelen* Ebenen. Plücker bediente sich des Bildes der geographischen Breitenkurven auf der Erde und sprach in diesem Fall von Äquatorialflächen. Wenn die Leitlinie indes im Endlichen liegt, so bildet sie eine gemeinsame Achse für die Ebenen mit den Kegelschnitten, weswegen Plücker diese Formen Meridianflächen nannte. Die Londoner Holzmodelle zeigen ausschließlich verschiedene Arten von Äquatorialflächen.

Abbildung 3: Anzeige aus den Mathematischen Annalen, Band 17 (1880)

Plücker gewann unabhängig von der Theorie der quadratischen Komplexe Interesse an den Flächen, die er bis zu seinem Tod im Jahr 1868 studierte. Er ließ in dieser Zeit auch eine weitere Serie von Zinkgussmodellen herstellen, die 27 verschiedene Äquatorial- und Meridianflächen veranschaulicht. Wie schon bei den Holzformen, wendete er sich dafür an Johannes Epkens, einem Bonner Handwer-

8. Anonym 1866, S. 6.

ker. Plückers Arbeiten zur *Neuen Geometrie* sind in einem zweibändigen Werk veröffentlicht. Er redigierte noch die Fahnen für den ersten Band seines Werkes, der von dem Mathematiker Alfred Clebsch (1833–1872) herausgegeben worden ist. Mit der Niederschrift des verbleibenden Teils betraute er jedoch seinen Assistenten, der ihm auch schon bei den Berechnungen für die Holz- und Zinkgussmodelle geholfen hatte. Felix Klein war zu diesem Zeitpunkt noch keine 20 Jahre alt, genoss jedoch Plückers Vertrauen. Ihm gelang die Fertigstellung des zweiten Bandes ein Jahr nach dem Tod seines Lehrers im Mai 1869.[9]

Innere Anschauung

Die Publikation der *Neuen Geometrie* stieß auf großes Interesse unter den deutschen Mathematikern. Julius Plücker hatte vorher nur wenige Artikel zu dem Thema veröffentlicht, die meisten davon waren in englischen Periodika erschienen. Die Leser des zweibändigen Werks mussten jedoch feststellen, dass sich der Autor über weite Strecken nicht mit den neuartigen Liniengebilden befasste, die er zuvor eingeführt hatte. Stattdessen diskutierte Plücker über Seiten hinweg die Geometrie der Komplexflächen.

In einer Rezension, die 1869 in den *Göttingische Gelehrte Anzeigen* anlässlich der Herausgabe des zweiten Bandes erschienen ist, schreibt Alfred Clebsch:

> Die bei den Complexen zweiter Ordnung entstehenden Complexflächen interessirten Plücker überhaupt sowohl ihren allgemeinen Eigenschaften als ihrer Gestalt nach. Eine grosse Anzahl Modelle, welche er ausführen liess, und welche seitdem öfters reproducirt wurden, sind ebenso an sich von hohem Interesse, als sie insbesondre auch Plückers geometrische Art zu denken und zu arbeiten in prägnantester Weise characterisiren.[10]

Nach Clebsch sind die Modelle in Verbindung mit Plückers Arbeits- und Denkweise zu sehen. Die Entwürfe waren für den Autoren der *Neuen Geometrie* gewiss ein wichtiges Mittel, um sich von dem Aussehen der verschiedenen Arten von Komplexflächen ein Bild zu verschaffen. Die Entwicklung einer passenden Anschauung war für Plücker von großer Bedeutung. Der „erste Spezialist der analytischen Geometrie“ (Carl B. Boyer) verließ sich weitaus mehr auf sein Vorstellungsvermögen und die Anschauung, als es spätere Darstellungen seiner Person und seines Werkes

9. Tobies 2019, S. 33.
10. Clebsch 1869, S. 1577.

vermuten lassen.[11] In jungen Jahren orientierte sich der Rheinländer stark an den Arbeiten der französischen Mathematiker im Umfeld der *École polytechnique*, die von Gaspard Monge (1746–1818) geprägt waren. Plücker war 1823 für einige Monate in Paris gewesen, wo er verschiedene Vorlesungen besucht und die Sichtweise der projektiven Geometrie kennengelernt hatte.[12] Der Aufenthalt hinterließ einen bleibenden Eindruck bei ihm. In einer Rezension schrieb er 1833, dass Monge eine neue Geometrie geschaffen hätte:

> So wie die Figur auf dem Papier eine Darstellung der Curve giebt, so thut es ihm auch eine Gleichung. Er sieht einen vollständigen Parallelismus zwischen Construction und Rechnung, allen geometrischen Beziehungen entsprechen algebraische. Eine algebraische Rechnung bildet sich ab in der Construction, eine geometrische Construction wird ausgedrückt durch die Sprache der Algebra.[13]

An einer anderen Stelle schreibt Plücker mit Bezug auf die Arbeiten des französischen Mathematikers: „Hier ist es, wo ich gelernt habe und wo sich die Richtung, welche meine mathematischen Bestrebungen genommen haben, bestimmt hat.“[14] Später bestätigte sein Assistent Felix Klein in seinen *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert*, dass das Wechselspiel von analytischen Entwicklungen und geometrischen Erwägungen die Arbeiten seines Lehrers prägte:

> In der Plückerschen Geometrie wird die bloße Kombination von Gleichungen in geometrische Auffassung übersetzt und rückwärts durch letztere die analytische Operation geleitet. Rechnung wird nach Möglichkeit vermieden, dafür aber eine bis zur Virtuosität gesteigerte Beweglichkeit der inneren Anschauung, der geometrischen Ausdeutung vorliegender analytischer Gleichungen ausgebildet und in reichem Maße verwendet.[15]

Grafiken und Modelle

Diese Arbeitsweise schlägt sich auch in Plückers *Neuer Geometrie* nieder. Das gesamte letzte Kapitel ist einer Klassifikation der Äquatorialflächen gewidmet.

11. Boyer 1956, S. 244.
12. Plump 2014, S. 30 ff.
13. Plücker 1895, S. 617.
14. Plücker 1839, S. vii.
15. Klein 1926, S.122.

Plücker konzentriert sich dabei auf jene Flächen, bei denen alle Hauptachsen der parallelen Breitenkurven gleich gerichtet sind. Zur Einführung schreibt er:

> Wir gehen zu der Discussion dieser Äquatorialflächen und zunächst einer beschränkten Familie derselben über. Es leitet uns dabei die doppelte Absicht, einmal, an leicht und übersichtlich construirbaren Flächen eine Bestätigung der bisherigen Resultate zu finden; dann aber besonders, durch diese Flächen etwa eine *Anschauung* von der Vielgestaltigkeit der Complexflächen überhaupt und dadurch von der Vertheilung der geraden Linien in einem Complexe des zweiten Grades zu gewinnen.[16]

Mit seiner Klassifikation der Äquatorialflächen und der Konstruktion von Modellen verknüpfte Plücker die Hoffnung, anhand der einfachen Flächen Zugang zu den komplizierteren Arten von Komplexflächen zu finden. Mehr noch, er wollte so eine Anschauung von der Gestalt eines Komplexes gewinnen. In wie weit ihm dies gelang, lässt sich nur schwer ermessen. Die Einteilung der Flächen vollzieht Plücker jedenfalls anhand geometrischer Merkmale. Er zeigt, dass die Gestalt der Flächen vollständig durch zwei quadratische Kurven bestimmt wird.[17] Sie liegen in einem Paar orthogonaler Ebenen, welche sich in dem Durchmesser der Fläche schneiden, der die Mittelpunkte aller Breitenkurven miteinander verbindet (vgl. Abb. 1). Die beiden Kegelschnitte nennt er Charakteristiken der Äquatorialfläche. Da es alleine auf die Art dieser beiden Kurven und ihre Lage zueinander ankommt, zeichnet Plücker sie in einer gemeinsamen Ebene. Diese schematischen Darstellungen halfen ihm während der Ausarbeitung der Klassifikation dabei, alle möglichen Formen von Äquatorialflächen systematisch abzuleiten. Um eine vollständige Aufzählung zu erhalten, musste er nur alle denkbaren Kombinationen und Lagen der beiden Kurven durchgehen. Mit ihnen teilte er die Äquatorialflächen in 78 Arten ein. Durch die Umformulierung als geometrisches Problems blieben ihm langwierige und diffizile Fallunterscheidung erspart, die mit einer systematischen Untersuchung der allgemeinen Gleichung einer Äquatorialfläche verbunden gewesen wären.

Das Beispiel zeigt, dass Grafiken und Modelle ein wichtiges Arbeitsmittel für Julius Plücker waren. Ihre Anfertigung gab ihm eine innere Anschauung der unbekannten Gebilde und physikalischen Vorgänge, auf die er bei seiner Arbeit stieß.[18] Die Herstellung verlangte zahlreiche Vorüberlegungen. Für die Konstruktion der Holz-

16. Plücker 1869, S. 344.
17. Plücker 1869, S. 346f.
18. In einem Artikel über Johann W. Hittorf (1824–1914), der bei Julius Plücker promoviert hat und zu Gasentladungen geforscht hat, wirft Falk Müller auch Licht auf die geometrische und experimentelle Arbeitsweise des Physikers Plücker (Müller 2011).

und Zinkgussmodelle ging Plücker von einer impliziten Gleichungen der Komplexflächen aus, wofür er freie Parameter festlegen musste. Anschließend berechnete er eine hinreichende Anzahl an Schnitten durch die ausgezeichnete Leitlinie. So ließ sich dann die gesamte Form nachbilden. Während der Konstruktion erhielt Plücker Einblicke in den inneren Aufbau der jeweiligen Fläche. Für das Publikum seiner Vorträge dürfte es indes schwierig gewesen sein, sich anhand der fertigen Entwürfe Aufschluss über die dargestellten Gebilde zu verschaffen. Gleichzeitig war die Zuhörer jedoch auf Anschauungsmittel angewiesen. Die Schwierigkeiten, welche sie mutmaßlich bei dem Versuch empfanden, Plückers Ausführungen an den Modellen nachzuvollziehen, sind grundsätzlicher Natur. Im Unterschied zu der Gestalt von Objekten, die während jener Zeit von den beobachtenden Naturwissenschaften studiert worden sind, ist die Form eines geometrischen Modells nichts schlechthin Gegebenes. Stattdessen zeigt sie *eine* mögliche Gestalt der dargestellten Fläche. Das Aussehen des Modells hängt maßgeblich von bewussten Entscheidungen des Konstrukteurs ab. Plücker musste die unbestimmten Koeffizienten in seiner Gleichung festlegen. Ein naiver Betrachter weiß indes nichts von den Möglichkeiten, die bei dieser Wahl ausgeschlossen worden sind. Er sieht allein das ausgeführte Modell, von dem er Rückschlüsse auf die Eigenschaften der nachgebildeten Fläche ziehen muss. Erschwerend tritt hinzu, dass viele dieser Merkmale im Verborgenen bleiben. Imaginäre Größen entziehen sich ebenso dem Blick wie die Vielfachheit einzelner Elemente. Von dem Verlauf der Fläche im unendlich Fernen lässt sich allerhöchsten eine vage Vorstellung bilden. Plastische Modelle stützen die Gedanken. Mit ihnen lassen sich Vorstellungen schärfen, Ideen überprüfen und auch neue Überlegungen entwickeln. Sie können den Betrachter aber auch in die Irre führen. Das Problem der richtigen Darstellung und falschen Wahrnehmung beschäftigte später auch Felix Klein, wie wir sehen werden.

Lehrer und Schüler

Mit der *Neuen Geometrie* betrat Plücker eine Terra incognita. Er stieß dabei mehrfach an die Grenzen seiner Methoden. Eine systematische Aufzählung aller möglichen Gestalttypen von Äquatorial- und Meridianflächen erwies sich als eine Sisyphusarbeit. In einem der Briefe an Thomas Archer Hirst berichtet Plücker davon, dass er über eine Klassifikation von ungefähr 800 verschiedenen Arten verfüge.[19] Ob darin überhaupt alle enthalten waren, ist nicht klar. Aber nicht nur der Umfang lässt an der Sinnhaftigkeit des Unterfanges zweifeln. Plücker war auf die Komplexfläche nur auf Umwegen gestoßen. Das ursprüngliche Ziel seiner Arbeit

19. Hirst hat zwischen 1850 und 1853 mehrere Jahre in Marburg, Göttingen und Berlin studiert und u.a. Vorlesungen bei Jakob Steiner (1796–1863) besucht (Gardner und Wilson 1993).

war eine Diskussion der quadratischen Komplexe gewesen. Dass er dabei gewissermaßen vom Weg abkam, war nicht nur seiner „Freude an der Gestalt“ geschuldet, von der Clebsch in seinem Nachruf an Plücker sprach.[20] Vielmehr gelang es ihm nicht, eine rechte Anschauung von den verworrenen Liniengebilden zu entwickeln. Eine Theorie der quadratischen Komplexe, die an Tiefe und Breite seiner Diskussion der Äquatorial- und Meridianflächen entsprechen würde, fehlt in seinem Werk. Als Julius Plücker am 22. Mai 1868 in Bonn verstarb, waren noch zahlreiche Fragen offen.

Felix Klein erinnerte sich später an die folgenden Monate, in denen er Plückers Manuskript für den Druck des zweiten Bandes ausarbeitete und nach einem geeigneten Thema für seine eigene Dissertation suchte (Klein 1922c).[21] Über die Arbeit an der *Neuen Geometrie* kam er in Kontakt mit Alfred Clebsch, der zu jener Zeit in Gießen Professor war. Clebsch machte Klein auf Arbeiten des italienischen Mathematikers Giuseppe Battaglini (1826–1894) aufmerksam, die in seinem *Giornale di Matematiche* erschienen sind (Battaglini 1868). In dem Artikel gab der Neapolitanische Professor für höhere Geometrie eine einfache Gleichung für den allgemeinen Komplex zweiten Grades an. Sie umfasste jedoch nicht alle Fälle, wie Klein beim Lesen von Battaglinis Arbeit erkannte. Er entschied sich, die Herleitung einer allgemeinen kanonische Form zu dem Gegenstand seiner Dissertation zu machen. Klein verwendete dafür sechs (redundante) homogene Koordinaten zur Beschreibung einer Linie, was sich an vielen Stellen als vorteilhaft erwies. Sie waren über ein quadratische Gleichung miteinander verbunden. Anschließend betrachtete er quadratische Komplexe als verallgemeinerte Quadriken in diesen Koordinaten, nicht als Gebilde von Linien im dreidimensionalen Anschauungsraum. Von Rudolf Lipschitz (1832–1903), der Professor für Mathematik in Bonn war, erhielt Klein die Korrekturbögen zu einem Artikel von Karl Weierstraß (1815–1897) über quadratische und bilineare Formen.[22] Die dort entwickelte Theorie der Elementarteiler konnte Klein für sein Problem verwenden. Seine Dissertation enthielt nicht nur eine allgemeine Gleichung für quadratische Komplexe. Anhand der Vielfachheiten ihrer Elementarteiler konnte er sie außerdem in elf verschiedene Arten einteilen. Felix Klein entwickelte so mit algebraischen Methoden eine systematische Klas-

20. „Seine ganze Denkweise, mehr producirend als analysirend, gewährte ihm die volle Freude an dem Reichthum neuer Gestalten und Gebilde, welche die Fruchtbarkeit seiner Phantasie unerschöpflich ihm zuführte. Und wie die Freude an der Gestalt im höheren Sinne es ist, welche den Geometer macht, so war sie auch die Quelle seiner physikalischen Untersuchungen.“(Clebsch 1871, S. 5f.)

21. Renate Tobies schildert diese Episode in Kleins Leben in ihrer Biographie:Tobies 2019, S. 33ff.

22. Die Abhandlung ist in den 1869 veröffentlichten Monatsberichten der *Preußischen Akademie der Wissenschaften* enthalten (Weierstrass 1868). Weierstraß hatte im Mai 1868 darüber bei einer Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse vorgetragen.

sifikation und Theorie der Linienkomplexe zweiter Ordnung. Er verteidigte seine Dissertation noch im Dezember 1868.

Felix Klein schlug bei der Erforschung der Liniengebilde einen völlig anderen Weg ein als sein Lehrer. Plücker wollte die Gestalt der Komplexe ergründen. Der Schlüssel zu ihrem Verständnis lag für ihn in der Ausbildung einer inneren Anschauung. Sein Schüler indes wählte einen abstrakten Zugang über die Formen- und Invariantentheorie, indem er die Arbeit Weierstrass' für seine Zwecke anpasste. Er gelangte so zu einer Klassifikation, die einem allgemeinen Prinzip genügte. Demgegenüber blieben Plückers Kriterien, nach denen er die Einteilung der Äquatorialflächen vornahm, weitestgehend undurchsichtig. Er ließ sich von der Anschauung leiten. Felix Klein wiederum gab erst am Ende seiner Dissertation eine geometrische Interpretation der Ergebnisse. In der jeweiligen Arbeitsweise von Schüler und Lehrer spiegelt sich auch ihre unterschiedliche Auffassung über die Geometrie wider. Trotz der abstrakten Züge seiner *Neuen Geometrie* betrachtete Plücker sein Fach als eine empirische Wissenschaft, deren Gegenstand der Natur entnommen ist. In seinem Artikel zur *New Geometry of Space* von 1865 begann er mit einer Erläuterung, dass der Raum auf zweifache Weise von Linien durchzogen werde.[23] Einmal erscheine er aus Strahlen zu bestehen, auf denen unendlich viele Punkte liegen. Das andere mal wirke es, als sei der Raum von Achsen durchkreuzt, in denen sich jeweils unendlich viele Ebenen schneiden. Um die beiden Sichtweisen physikalisch zu verorten, führt Plücker die Strahlen- und Wellenoptik an. Ein Jahr später sprach er in einem anderen Artikel von Kräftekomplexen.[24] Diese gedanklichen Verbindungen waren für den Bonner Experimentalphysiker wichtig. Die Linienkomplexe waren für ihn nicht nur abstrakte Formen, sondern greifbare Gebilde, die reale Phänomene beschrieben.

Während Julius Plücker in seinem Denken stets im Anschauungsraum verblieb und die vier Linienkoordinaten r, ρ, s, σ allein als beschreibende Größen interpretierte, entfernte sich sein Schüler von dieser Vorstellung. Klein betrachtete die Komplexe des zweiten Grades in seiner Dissertation als Schnittmenge zweier Quadriken im projektiven fünfdimensionalen Raum. Eine Sichtweise, mit der sein Lehrer nichts anfangen konnte.[25] Obwohl Plücker selbst die homogenen Koordinaten in seinen jungen Jahren eingeführt hatte, womit sich die Ideen der projektiven Geometrie analytisch fassen ließen, machte er nur selten Gebrauch von ihnen. Zwar dachte er das unendlich Ferne bei seinen geometrischen Betrachtungen immer mit, etwa

23. Plücker 1865, S. 725f.
24. Plücker 1866b.
25. Später äußerte Felix Klein bei einem Vortrag, den er anlässlich der Weltausstellung 1893 in Chicago hielt, über die Vorstellungen seines Lehrers: „Plücker, indeed, rejected any other idea of a space of more then three dimensions as too abstruse.“ Klein 1893, S. 10.

als den Ort, an dem sich parallele Linien schneiden. Zugleich aber war es für ihn beispielsweise nicht unerheblich, ob zwei Geraden parallel sind. Diese Sicht äußert sich auch in seiner Diskussion der Komplexflächen. Obwohl die Lage ihrer Leitlinien in Bezug auf das unendlich Ferne für die Auffassung der projektiven Geometrie nicht maßgeblich ist, gibt sie ihm Anlass für eine Unterscheidung. In seiner Besprechung der *Neuen Geometrie* berichtet Alfred Clebsch:

> Der Fall, wo die gegebene feste Gerade im Unendlichen liegt, wird von Plücker wegen der Anschaulichkeit seiner Eigenschaften immer noch besonders behandelt, und durch den Namen „Aequatorialfläche“ von dem allgemeinen Fall („Meridianfläche“) unterschieden.[26]

Anstatt die Komplexflächen im Allgemeinen zu diskutieren, wie es der projektiven Sichtweise entspricht, betrachtete Plücker zuerst den Sonderfall, dass die Gerade ins unendlich Ferne rückt. Er war einfacher, weil die Komplexkurven bei Äquatorialflächen dann parallel zueinander liegen. Dies half ihm dabei, sich eine Vorstellung von dem generischen Fall zu machen. Aber abgesehen davon, macht es für das Aussehen der Flächen einen erheblichen Unterschied, ob die Leitgerade im unendlich Fernen liegt oder nicht. Die Trennung zwischen Äquatorial- und Meridianflächen entsprach seiner Arbeit, die sich das Allgemeine über die Betrachtung des Besonderen erschloss. Sie war in Plückers Augen auch nur natürlich, war es ihm doch an der Gestalt gelegen.

Neue Modelle

Die unterschiedlichen Vorgehensweisen und Auffassungen, die bei dem Vergleich von Julius Plücker und Felix Klein auffallen, spiegeln sich auch in ihrer Arbeit mit Modellen wider. Nach der Fertigstellung seiner Dissertation vertiefte sich Klein weiter in die Liniengeometrie. Im März 1870 präsentierte er bei der *Physikalischen Gesellschaft zu Berlin* ein Modell der Plückerschen Komplexfläche, bei dessen Herstellung ihm sein Schulfreund Alfred Wenker geholfen hatte. Insgesamt entwarfen die beiden Düsseldorfer vier verschiedene Zinkmodelle, die nach Wenkers frühem Tod 1871 die Kölner Werkstätten von Joh. Eigel Sohn vertrieb.[27] Ein Entwurf zeigt die Singularitätenfläche eines allgemeinen Komplexes des zweiten Grades. Darunter verstanden Plücker und Klein die Menge aller Punkte, in denen die quadratischen Kegel, die aus den Linien des Komplexes gebildet werden, die durch

26. Clebsch 1869, S. 1577.
27. Tobies 2019, S. 50.

diese Punkte hindurchgehen, in ein Paar von Ebenen zerfallen. Es war bereits bekannt, dass es sich dabei um dieselbe Art von Quartik handelt, die Ernst Eduard Kummer (1810–1893) Mitte der 1860er Jahre entdeckt hatte.[28] Neben diesem Modell umfasst die Serie drei Darstellungen unterschiedlicher Komplexflächen. Die Entwürfe waren auch 1893 bei einer berühmten Ausstellung in München zu sehen, die anlässlich der Jahresversammlung der *Deutschen Mathematiker-Vereinigung* stattfand. Für einen Katalog verfasste Felix Klein eine neue Beschreibung seiner Modelle. In seinem Beitrag kommt er auch auf die Gründe zu sprechen, die ihn zwanzig Jahre zuvor zur Anfertigung der Objekte veranlasst haben:

> Bekanntlich hat Plücker in den letzten Jahren seines Lebens bei seinem Studium der Liniencomplexe zweiten Grades zahlreiche auf deren Theorie bezügliche Modelle anfertigen lassen. Das allgemeine Interesse an den wirklichen Gestalten auch complicirterer Flächen war ihm aus seiner physikalischen Beschäftigung erwachsen [Fußnote im Zitat, Anm. H. Junker]; die nähere Gliederung seiner Ansätze habe ich hernach, so gut das unter Benutzung des Nachlasses gelingen wollte, in der 1869 erschienenen zweiten Abteilung der „Neuen Geometrie des Raumes“ zur Darstellung gebracht. Die so auf Plücker selbst zurückgehenden Modelle bildeten indess keine vollständige Serie, waren auch im einzelnen ungleichwertig, und es lag gewiss nicht im Sinne ihres Urhebers, wenn dieselben später trotzdem verschiedentlich als zusammengehörige Collection verbreitet worden sind. Ich habe deshalb im Herbst 1871, um das Wesentliche der Sache herauszuheben, von mir aus vier neue Modelle der hauptsächlichen in Betracht kommenden Flächentypen veröffentlicht, wobei ich die Verhältnisse so wählte, dass die jedesmal in Betracht kommenden singulären Punkte und Ebenen sämtlich reell ausfielen.[29]

In der Fußnote, die hier nicht wiedergegeben worden ist, erwähnt Felix Klein, dass Plücker ihm einmal erzählt habe, dass er durch den Verkehr mit Michael Faraday (1791–1867) zur Herstellung von Modellen angeregt worden sei. In dem Zitat teilt Klein mit, dass er die Serie seines Lehrers als unvollständig empfunden habe, als er sich zur Veröffentlichung neuer Entwürfe entschloss. Sowohl die 14-teilige Holz- als auch die 27-teilige Reihe von Zinkgussmodellen wirken tatsächlich wie eine lose Sammlung von Einzeldarstellungen. Sie betonen weniger die Gemeinsamkeiten der nachgebildeten Komplexflächen als die Unterschiede ihrer möglichen Formen, was den Eindruck des Unzusammenhängenden befördert. Es erschließt sich nicht,

28. Klein 1870, S. 213.
29. Klein 1892, S. 283 f.

warum ausgerechnet *diese* Typen von Äquatorial- und Meridianflächen nachgebildet worden sind, während andere Typen in der Serie fehlen. Diesen Missstand empfand auch Felix Klein, der sich 1871 wohl auch deshalb dazu entschied, eine gänzlich neue Serie von Modellen herauszubringen. Er verfolgte dabei ein anderes Ziel als sein Lehrer. Anstatt die Gestalt interessanter Flächen zu zeigen, wie es Plücker mit seinen Entwürfen getan hatte, wollte Klein verschiedene Typen von Komplexflächen zur Anschauung bringen. Neben einen Modell der allgemeinen Komplexfläche, bei der die Leitlinie in keinem besonderen Verhältnis zum Linienkomplex steht, konstruierte er noch zwei besondere Fälle. Einmal den einer Fläche, deren Leitlinie dem Komplex angehört. Ein anderes Modell veranschaulicht wiederum den Fall, bei dem die Leitlinie zusätzlich noch die Singularitätenfläche des Komplexes in einem Punkt berührt. Klein achtete dabei darauf, dass die Leitlinie bei allen drei dargestellten Komplexflächen ansonsten keine Besonderheiten aufweist. Sie befindet sich jedes Mal im sichtbaren Bereich und demnach in keiner ausgezeichneten Lage gegenüber der unendlich fernen Ebene. Die drei Modelle Kleins zeigen alle Meridianflächen.

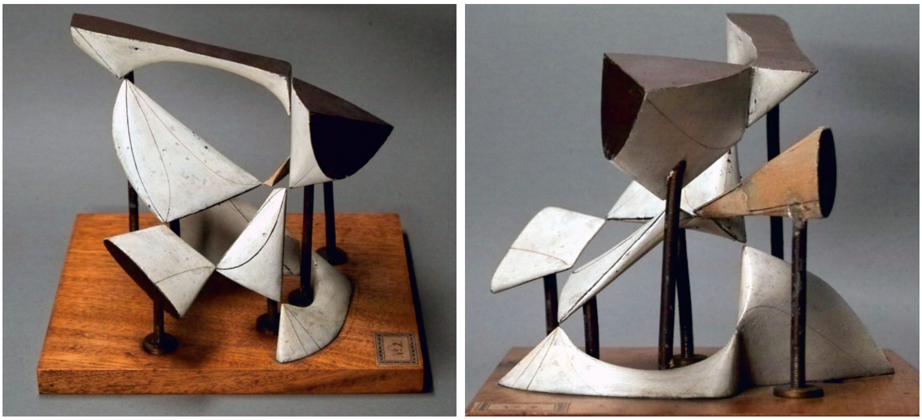


Abbildung 4: Zwei Ansichten des Kleinschen Modells einer allgemeinen Komplexfläche aus der Göttinger Sammlung. Die Leitlinie liegt hier im Endlichen. Auf dem rechten Foto ist sie als vertikale Gerade zu erkennen, in der sich verschiedene Teile der Fläche durchkreuzen. Außerdem lassen sich die acht verschiedenen Doppelpunkte erkennen, die paarweise auf vier Geraden liegen, die auf der Fläche verlaufen und sich in der Leitlinie treffen. Fotos: © Modellsammlung des Mathematischen Instituts, Göttingen

Geometrische Konstruktion

Im zweiten Band seiner *Gesammelten Schriften* beschreibt Felix Klein in einer Vorbemerkung zu seinen Arbeiten zur *Anschaulichen Geometrie*, wie er und Wenker bei der Konstruktion vorgegangen waren (Klein 1922b). Nachdem er die Herstellung der Plückerschen Modelle geschildert hat, die mithilfe einer impliziten Gleichungen angefertigt worden wären, schreibt er:

> Im Gegensatz dazu sind die (...) 1871 von mir herausgegebenen Zinkmodelle geometrisch konstruiert worden, indem ich die Ebenen benutzte, welche die Flächen nach Erstreckung ganzer Kegelschnitte berühren.[30]

Klein belässt es bei dieser Bemerkung zum generellen Vorgehen. Er bestimmte zuerst die acht Ebenen, auf denen im allgemein Fall vier Doppelpunkte entlang quadratischer Kurven liegen (vgl. Abb. 4). Ausgehend von diesem Gerüst ließ sich dann der Verlauf aller Flächenteile erahnen und die gesamte Form modellieren.[31] Über die gemeinsame Arbeit mit seinem Freund Wenker berichtet er:

> Wir haben dabei insbesondere auf das Modell der allgemeinen Komplexfläche eine ganz außerordentliche Mühe verwandt, indem wir uns einen Fall aussuchten, welcher keinerlei besondere, den Überblick und gleichzeitig die Konstruktion erleichternde Symmetrie besaß. Bei den anderen Modellen ist dieses Prinzip, welches sich weiterhin als nicht zweckmäßig erwies, bereits verlassen.[32]

Obwohl es der Übersichtlichkeit abträglich und mit zusätzlichem Aufwand verbunden war, vermied Klein jede Symmetrie in seinem Entwurf. Auch wenn es sich nicht mit letzter Gewissheit sagen lässt, was ihn dabei bewog, so liegt doch die Vermutung nahe, dass er so hoffte, der Gestalt einer generischen Fläche am nächsten zu kommen. Er wollte eine Form finden, die gerade keine irreführenden Eigen- und Besonderheiten aufweist. Interessanterweise gab es zu jenem Zeitpunkt bereits ein Modell der allgemeinen Komplexfläche in Plückers Zinkgussserie, das sich von Kleins Entwurf tatsächlich nur durch den spiegelsymmetrischen Aufbau unterscheidet.

---

30. Klein 1922b, S. 3.
31. Diese Vorgehensweise erscheint auch deshalb als wahrscheinlich, weil Kleins Doktorand Karl F. W. Rohn (1855–1920) später beschrieb, wie er sie zur Herstellung von Modellen Kummerscher Flächen verwendet hat (Rohn 1877).
32. Klein 1922b, S. 3.

Neue Sichtweisen

Julius Plückers und Felix Kleins Entwürfe der Jahre 1865–1871 zeigen exemplarisch, welchen Wert plastische Modelle für die damalige Forschung besaßen. Lange bevor sie als Anschauungsmittel für Lehrzwecke vertrieben und verwendet worden sind, waren sie bei Zusammenkünften von Mathematikern allgegenwärtig. Für die Gelehrten waren sie in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts ein wichtiges Mittel, um sich eine klare Vorstellung von der Gestalt unbekannter Flächen zu verschaffen.

Die unterschiedlichen Ansätze Plückers und Kleins verdeutlichen aber auch, dass die Herstellung der Modelle nicht nur ein konstruktives und handwerkliches Problem war. Die Gestalt einer projektiven Fläche ist nirgendwo festgeschrieben. Im Gegensatz zu dem kartographischen Relief einer Landschaft sind die Modelle keine bloßen Nachbildungen unveränderlicher Formen. Ihre Qualität lässt sich dementsprechend auch nicht allein an der Genauigkeit ihrer Ausführung bemessen. In den meisten Fällen sollten die Modelle der damaligen Zeit nur bestimmte Typen von Gebilden veranschaulichen. Selbst Julius Plücker wollte mit seinen Entwürfen mehr als die Gestalt der dargestellten Fläche wiedergeben. Sie sollten auch Rückschlüsse auf geometrische Merkmale verwandter Formen zulassen. Plücker besaß dabei jedoch einen relativ engen Begriff von Verwandtschaft. Als ähnlich betrachtete er, was von affinen Transformationen ineinander überführt wird. Hyperbeln, Ellipsen und Parabeln waren für ihn grundverschiedene Dinge, und eben nicht nur unterschiedliche affine Gestalten ein und desselben projektiven Kegelschnitts, wie sie es für seinen Schüler waren. Felix Klein besaß dagegen einen viel weiter gefassten Begriff der Verwandtschaft. Er orientierte sich an der Äquivalenzrelation, die durch projektive Kollineationen gestiftet wird. Sie ist wesentlich gröber, was eine Klassifikation geometrischer Figuren erheblich erleichtert. Gleichzeitig verliert die Gestalt einer Fläche jedoch an Bedeutung, wenn alleine solche Eigenschaften untersucht werden, die bei solchen Transformationen invariant bleiben. Während unter Affinitäten parallele Geraden wieder auf parallele Geraden abgebildet werden, hat der Begriff der Parallelität in der projektiven Geometrie jede Bedeutung verloren. Die Gestalt zweier kollinearer Figuren kann erheblich variieren, wie das Beispiel von Hyperbel, Ellipse und Parabel zeigt. Für die Form einer projektiven Fläche gibt es demnach einen großen Spielraum. Um ein Modell einer allgemeinen Komplexfläche herstellen zu können, musste sich Felix Klein zuerst auf eine Gestalt festlegen. Er tat dies, indem er die Lage verschiedener Kegelschnitte bestimmte, die auf der Fläche verlaufen.

Die Modelle können immer nur einen begrenzten Ausschnitt der Fläche zeigen. Ihre Gestalt im unendlich Fernen lässt sich zwar erahnen, jedoch nicht mehr sehen. Gänzlich im Verborgenen bleiben die imaginären Partien, die zur Lösungsmenge einer algebraischen Gleichung gehören. Während auch Plücker durchweg die komplexen Zahlen in seine Untersuchungen miteinbezog, etwa wenn er vom Grad einer Gleichung auf die Anzahl ihrer Lösungen schloss, ließen sie sich nicht darstellen. In den 1860er Jahren waren die Realitätsverhältnisse Gegenstand eigenständiger Betrachtungen. Der Schweizer Ludwig Schläfli (1814–1895) ging etwa in seiner berühmten Abhandlung zur Klassifikation der Flächen dritter Ordnung der Frage nach, wie viele der 27 Linien reell sein können, die auf einer allgemeinen Kubik liegen. Ob sich überhaupt alle wichtigen Merkmale einer Fläche mit einem Modell veranschaulichen lassen, war ein offenes Problem.

Ende des Parallelismus

Felix Klein ist sich in den Jahren nach seiner Assistenzzeit bei Plücker nach und nach der Schwierigkeiten bewusst geworden, die mit der Veranschaulichung projektiver Flächen untrennbar verbunden sind. Während jener Zeit entwickelte er eine klare Vorstellung davon, dass die Geometrie nicht an der Gestalt eines Objektes hängt. Es gibt geometrische Gebilde, die sich schlichtweg nicht darstellen lassen. Andere wiederum verändern ihre Gestalt wie ein Vexierbild mit dem Blick des Betrachters.

In den Jahren 1870–72 hat sich mit anderen Worten sein Bewusstsein dafür geschärft, dass es einen „vollständigen Parallelismus zwischen Konstruktion und Rechnung“ nicht gibt, wie er Plücker vor Augen stand. Plücker selbst hatte in seinen jungen Jahren den Gedanken geprägt, dass der Dualismus von Punkten und Ebenen im Raum letztendlich auf die Anzahl an Koordinaten zurückzuführen ist, die für ihre eindeutige Darstellung notwendig sind. Ob eine Geometrie auf Punkte oder Ebenen aufgebaut wird, ändert nichts an ihrem Inhalt. Eine Fläche lässt sich sowohl als Menge von Punkten auffassen, oder aber als die Gesamtheit aller Ebenen betrachten, die sie umhüllen. Um 1870 herum gewann dieser Dualismus eine neue Facette. Der Norweger Sophus Lie stieß 1871 in Gegenwart von Klein, der mit ihm gemeinsam ein paar Monate in Paris verbrachte, auf eine Transformation, welche eine vollständige Korrespondenz zwischen der Plückerschen Liniengeometrie und einer Kugelgeometrie stiftete, wobei sich schneidende Geraden auf sich berührende Kugeln abgebildet werden. Unter ihr verwandelt sich ein Hyperboloid in eine Dupinsche Zyklide. Die doppelte Schar an erzeugenden Geraden der Quadrik wird dabei auf die beiden Familien von Kugeln abgebildet, welche die ringförmigen Fläche umhüllen. Spätestens diese Entdeckung seines Freundes hat Felix Klein endgültig davon überzeugt, dass sich die Rede vom Parallelismus nicht aufrecht erhalten lässt. Die Erkenntnisse flossen mit in sein berühmtes Erlanger Programm ein, das 1872 veröffentlicht worden ist. In seiner Schrift äußerte er in nie dagewesener Klarheit den Gedanken, dass es der Inhalt aller geometrischen Untersuchungen sei, die Eigenschaften von Gebilden in Mannigfaltigkeiten zu untersuchen, die unter bestimmten Transformationen invariant bleiben. Solange die jeweilige Transformationsgruppe angepasst werde, sei es völlig gleichgültig, welches Raumelement der Betrachtung zugrunde gelegt wird. Der mathematische Kern bleibt von der Wahl unberührt. Mit diesen Gedanken, die heute allen Mathematikern geläufig sind, bestimmte Felix Klein seiner Zeit den Gegenstand der Geometrie neu, dessen Konturen sich zunehmend verloren. Er führte damit nicht nur die verschiedene, teils divergierende Zweige der Wissenschaft unter ein Dach zusammen. Er widersprach damit auch der damals immer noch vorherrschenden, wenn auch angegriffenen Auffassung, dass die Geometrie Raum- und Gestaltenlehre wäre. Felix Klein war sich der Folgenschwere seiner Gedanken bewusst, wie eine nachgestellte Bemerkung zeigt:

> Wenn wir im Texte die räumliche Anschauung als etwas Beiläufiges bezeichnen, so ist dies mit Bezug auf den rein mathematischen Inhalt der zu formulirenden Betrachtungen gemeint. (...) Ganz anders stellt sich aber die Frage nach dem Werte der räumlichen Anschauung überhaupt. Ich stelle denselben als etwas Selbstständiges hin. Es gibt eine eigentliche Geometrie, die nicht, wie die im Texte besprochenen Untersuchungen, nur eine veranschaulichte Form abstrakter Untersuchungen sein will. In ihr gilt es, die räumlichen Figuren nach ihrer vollen gestaltlichen Wirklichkeit aufzufassen, und (was die mathematische Seite ist) die für sie geltenden Beziehungen als evidente Folgen der Grundsätze räumlicher Anschauung zu verstehen. Ein Modell – mag es nun ausgeführt und angeschaut oder nur lebhaft vorgestellt sein – ist für diese Geometrie nicht ein Mittel zum Zwecke, sondern die Sache selbst.[33]

Dass Felix Klein an dieser Stelle auf Modelle zu sprechen kommt, ist natürlich kein Zufall. Es ist deutlich geworden, wie sehr ihn selbst die Frage nach der richtigen Darstellung bei seinen eigenen Entwürfen beschäftigt hatte. Beim Schreiben musste er gewiss auch an seinen Lehrer denken, für den Modelle alles waren, aber gewiss kein Mittel zur schematischen Versinnlichungen abstrakter Zusammenhänge.

33. Klein 1922a, S. 491.

Zusammenfassung

Anhand der plastischen Modelle, die Julius Plücker und Felix Klein in den Jahren 1866–1871 entworfen haben, ist nachgezeichnet worden, wie sehr das Problem der richtigen Darstellung mit grundlegenden Fragen über den Gegenstand der Geometrie zusammenhängt. Die Objekte stellen eine Verbindung her zwischen dem Schüler, der in den Jahren nach 1872 zu dem wichtigsten Förderer des mathematischen Modellbaus wird, und seinem Lehrer. Sie zeigen aber auch die Differenzen, welche zwischen ihren Auffassungen bestanden. Plücker veranschaulichte mit den Modellen neue und unbekannte Gebilde. Sie halfen ihm dabei, eine innere Anschauung von der Gestalt der Äquatorial- und Meridianflächen zu entwickeln, welche für seine Art der Forschung wesentlich ist. Die Herstellung der Objekte war eng verbunden mit seiner Arbeits- und Denkweise. Für Plücker waren die Modelle jedoch mehr als bloße Arbeitsmittel. Sie waren für ihn auch ein Lohn für die Mühen der Forschung. Ein wenig wie Trophäen präsentierte er sie seinen Zuhörern bei akademischen Sitzungen.

Die späteren Entwürfe seines Schülers erinnern dagegen stärker an instruktive Mittel. Die Modelle sollten dem Betrachter die Anzahl und Art charakteristischer Merkmale, aber auch den Zusammenhang der dargestellten Flächen vor Augen führen. Anstatt eine möglichst große Anzahl an Gestalten wiederzugeben, bemühte sich Klein vielmehr darum, repräsentative Typen darzustellen. In seiner Vorgehensweise spiegelt sich eine gewandelte Sicht auf die Geometrie wider, die ihn von seinem Lehrer unterscheidet. Felix Klein erblickte in ihr nicht mehr die Raum- und Gestaltlehre, wie es Julius Plücker noch tat. Als Plückers Assistent, beim Ausarbeitung des Manuskriptes für die *Neue Geometrie* und dem Verfassen seiner eigenen Dissertation, beim gemeinsamen Bau neuer Modelle mit seinem Freund Alfred Wenker und während des Aufenthalts mit Sophus Lie in Paris reifte in Felix Klein der Gedanke, dass die sinnliche Form für die Geometrie etwas Unwesentliches ist, wie er es 1872 in seinem *Erlanger Programm* formulierte. Wenn er trotzdem in den folgenden Jahren zu einem der wichtigsten Förderer des mathematischen Modellbaus wurde, dann zeigt dies letztendlich, welchen Wert er dennoch der Anschauung beimaß.

Literaturverzeichnis

Anonym. 1866. On Complexes of the Second Order. In *Report of the British Association for the Advancement of Science. 36th Meeting (1866),* 6. London.

Battaglini, Giuseppe. 1868. Intorno ai Sistemi di Rette di Secondo Grado. *Giornale di Matematiche* 6:239–283.

Boyer, Carl B. 1956. *History of Analytic Geometry.* New York: Scripta Mathematica.

Clebsch, Alfred. 1869. Plückers Neue Geometrie des Raumes. *Göttingische gelehrte Anzeigen* 2:1569–1581.

———. 1871. Zum Gedächtnis an Julius Plücker. *Abhandlungen der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen: Mathematische Classe* 16:1–40.

Gardner, J. Helen, und Robin J. Wilson. 1993. Thomas Archer Hirst–Mathematician Xtravagant II. Student Days in Germany. *The American Mathematical Monthly* 100 (6): 531–538.

Klein, Felix. 1870. Zur Theorie der Liniencomplexe des ersten und zweiten Grades. *Mathematische Annalen* 2 (2): 198–226.

———. 1892. Vier Modelle zur Theorie der Liniencomplexe zweiten Grades. In *Katalog mathematischer und mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente,* herausgegeben von Walther Dyck, 283–285. München: K. Hof- und Universitätsdruckerei.

———. 1893. Lecture II.: Sophus Lie. In *Lectures on Mathematics,* 9–17. Boston: Macmillan / Co.

———. 1922a. Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen. In *Gesammelte Mathematische Abhandlungen,* herausgegeben von Hermann Vermeil und R. Fricke, 1:460–497. Berlin: Springer-Verlag Berlin.

———. 1922b. Vorbemerkungen zu den Arbeiten zur Anschaulichen Geometrie. In *Felix Klein – Gesammelte Mathematische Abhandlungen,* herausgegeben von Hermann Vermeil und R. Fricke, 2:3–6. Berlin: Springer-Verlag Berlin.

———. 1922c. Zur Dissertation. In *Gesammelte Mathematische Abhandlungen,* herausgegeben von Hermann Vermeil und R. Fricke, 1:3–4. Berlin: Springer-Verlag Berlin.

———. 1926. *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert.* Berlin: Springer.

Müller, Falk. 2011. Johann Wilhelm Hittorf and the Material Culture of Nineteenth-Century Gas Discharge Research. *The British Journal for the History of Science* 44 (2): 211–244.

Plücker, Julius. 1839. *Theorie der algebraischen Curven.* Bonn: Adolph Marcus.

———. 1865. On a New Geometry of Space. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 155:725–791.

———. 1866a. *Four letters written by Julius Plücker to Thomas Archer Hirst: September 1866 –October 1867.* Besucht am 27. September 2021. www.lms.ac.uk/sites/lms.ac.uk/files/library/Plucker%20letters%20to%20Hirst.pdf.

———. 1866b. Fundamental Views regarding Mechanics. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* 156:361–380.

———. 1869. *Neue Geometrie des Raumes gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement.* Herausgegeben von Felix Klein. Bd. 2. Leipzig: Teubner.

———. 1895. *Wissenschaftliche Abhandlungen.* Herausgegeben von Arthur Schoenflies und Friedrich Pockels. Bd. 1. Leipzig: B. G. Teubner.

Plump, Mechthild Ulrike. 2014. Julius Plücker - Leben und Werk eines analytischen Geometers im 19. Jahrhundert. Dissertation, Universität Wuppertal.

Rohn, Karl. 1877. Drei Modelle der Kummerschen Fläche. *Mathematische Modelle angefertigt im mathematischen Institut des königlichen Polytechnikums zu München.*

Rowe, David E. 2013. Mathematical Models as Artefacts for Research: Felix Klein and the Case of Kummer Surfaces. *Mathematische Semesterberichte* 60 (1): 1–24. ISSN: 1432-1815.

Seidl, Ernst, Frank Loose und Edgar Bierende, Hrsg. 2018. *Mathematik mit Modellen: Alexander von Brill und die Tübinger Modellsammlung.* Schriften des Museums der Universität Tübingen. Tübingen: Verlag Museum der Universität Tübingen.

Tobies, Renate. 2019. *Felix Klein: Visionen für Mathematik, Anwendungen und Unterricht.* Springer-Verlag. ISBN: 978-3-662-58749-2.

Volkert, Klaus. 2018. Mathematische Modelle und die polytechnische Tradition. In *Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik,* herausgegeben von Ralf Krömer und Gregor Nickel, 10:230. Siegen: Universitätsverlag Siegen.

Weierstrass, Karl. 1868. Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen. *Monatsberichte der Königlichen Preussische Akademie des Wissenschaften zu Berlin* (Mai): 310–338.

Chaos und Fraktale – Aufstieg und Fall eines innovativen Themengebiets für den Mathematikunterricht

Henning Heske

Abstract

Dieser Aufsatz liefert einen Beitrag zur Geschichte des deutschen Mathematikunterrichts am Ende des 20. Jahrhunderts. Über zwanzig Jahre lang, etwa von 1986 bis 2008, gab es Bestrebungen, das neue mathematische Teilgebiet Chaos und Fraktale im Mathematikunterricht, vornehmlich des Gymnasiums, zu behandeln. Die Diskussion darüber wurde von allen Mathematikdidaktik-Zeitschriften begleitet, in denen teilweise konkrete Unterrichtsvorschläge vorgestellt wurden. Trotz vieler guter Argumente setzten sich die Befürworter eines Aufgreifens dieses innovativen Themengebiets letztlich nicht durch. Dies lag auch darin begründet, dass von fachwissenschaftlicher Seite scharfe Kritik formuliert wurde. Mithilfe des Modells der Rekontextualisierung wird das Scheitern dieser Innovation auch theoretisch eingeordnet.

1 Einleitung: Die Geburt des Apfelmännchens

Ein zentraler Ausgangspunkt für die Entstehung des innovativen Themengebiets Chaos und Fraktale war die vermeintlich simple Frage: Wie lang ist die Küste

SieB 14 (2021), 197-210

Großbritanniens? Der französisch-US-amerikanische Mathematiker Benoît B. Mandelbrot (1924–2010) veröffentlichte 1967 seine Antwort dazu in der renommierten Fachzeitschrift *Science*. Darin stellte er fest, dass sich die Länge der Küste nicht ohne Weiteres bestimmen lässt, da sie sich immer tiefer verzweigt je genauer man hinschaut, d.h. je größer man den Maßstab wählt, und damit im Prinzip unendlich wird. Daher hielt Mandelbrot den Begriff der Länge für eine Küstenlinie insgesamt für ungeeignet und entwickelte an diesem Beispiel seine Konzepte Skaleninvarianz, Selbstähnlichkeit und fraktale Dimension (Mandelbrot 1967).

Zwanzig Jahre später löste Mandelbrot mit seinem populärwissenschaftlichen Buch *Die fraktale Geometrie der Natur* (1987) auch im deutschsprachigen Raum einen Hype um den Themenbereich Chaos und Fraktale aus, der vor allem darin begründet lag, dass nun einfache Computerprogramme ansprechende farbige Veranschaulichungen der Iterationen erzeugen konnten. Das sogenannte Apfelmännchen wurde dabei zu Mandelbrots bekanntestem Anschauungsobjekt.

In Deutschland wurde die Begeisterung für dieses neue Teilgebiet vor allem durch Heinz-Otto Peitgen (geb. 1945) forciert, der an der Universität Bremen eine Professur für Mathematik innehatte und mit einer Vielzahl medienwirksamer Veröffentlichungen in Erscheinung trat, insbesondere mit dem Buch *The beauty of fractals* (Peitgen & Richter 1986), aber auch mit Animationsfilmen. Zudem organisierte er ab 1992 jährlich eine Herbsttagung an der Bremer Lehrerakademie, die sich schwerpunktmäßig diesem Themenbereich widmete. Das große Interesse erfasste Ende der 1980er Jahre nicht nur Studierende, sondern auch Lehrerinnen und Lehrer sowie Schülerinnen und Schüler. Niemals zuvor hatte sich ein Teilgebiet der Mathematik der Öffentlichkeit so attraktiv vorgestellt und so schnell Anklang gefunden bei vielen Personen, die sich nun motiviert den Umgang mit komplexen Zahlen aneigneten.

2 Didaktische Konzeptionen für den Mathematikunterricht

Dieses breite Interesse erfasste auch die Mathematikdidaktik. Bis Ende der 1980er Jahre erschienen Aufsätze sowohl in der Zeitschrift *Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht* (Zeitler 1989) als auch in *mathematik lehren* (Henn 1988) und *Der Mathematikunterricht*, die sogar ein komplettes Themenheft „Chaos, Fraktale, Dynamische Systeme“ (Heft 5, 1989) mit einem Beitrag von Peitgen selbst (Peitgen & Jürgens 1989) und drei weiteren Artikeln (Henn 1989;

Wissemann-Hartmann 1989a, 1989b) vorlegte. Es folgten weitere Aufsätze in *Praxis der Mathematik* (Hermanns 1992), *Didaktik der Mathematik* (Zeitler, 1992), den *Mathematischen Semesterberichten* (Kirchgraber 1992) und schließlich auch im *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* (Bigalke 1993; Zeitler 1993a). Fast keine mathematikdidaktische Zeitschrift entzog sich diesem aktuellen Thema. Gleichzeitig erschienen zudem Lehrbücher, die sich dezidiert an Lehrkräfte richteten (Behr 1989, 1993; Zeitler & Neidhardt 1993). Ihre Verfasser waren selbst Lehrer wie Reinhart Behr (1928–2003) und Wolfgang Neidhardt oder wie Herbert Zeitler (1923–2012) emeritierter Professor für Didaktik der Mathematik.

Behr (1989, S. 7) stellt im Vorwort seines Buches mit dem farbigen Apfelmännchen auf dem Cover die Mathematik der Fraktale „als das geeignete Beschreibungsmittel für einen neuen Zweig der Naturwissenschaft, die sog. *Chaos-Theorie*“ dar. Diese biete vor allem durch ihren interdisziplinären Charakter die Chance, neue Einsichten in naturwissenschaftliche Zusammenhänge zu gewinnen. Als Voraussetzung zum Verständnis führt Behr lediglich die Algebra der Sekundarstufe I an. Als Hilfsmittel sei zudem ein gewöhnlicher wissenschaftlicher Taschenrechner ausreichend. Ergänzend führt er jedoch an: „Um die Entstehung der Bilder von fraktalen Mengen ganz zu verstehen, ist die Kenntnis der komplexen Zahlen unumgänglich.“ (Behr 1989, S. 8) Diese erklärt er daher in einem Extra-Kapitel. Anhand dieser Ausführungen wird bereits das Dilemma der Fraktalen Geometrie als Themengebiet für den Mathematikunterricht in den weiterführenden Schulen deutlich. Einerseits wird damit geworben, dass nur wenige mathematische Grundkenntnisse und auch keine Computerkenntnisse zum Verständnis notwendig sind, was eine Verortung in der Sekundarstufe I möglich erscheinen lässt. Andererseits wird betont, dass eine Kenntnis der komplexen Zahlen für eine tieferes Verständnis unabdingbar ist. Dieses Teilgebiet gehörte aber nicht zum obligatorischen Schulstoff, auch nicht der Sekundarstufe II. Demzufolge hätte für eine entsprechende Behandlung in der Schule relativ viel Platz im Lehrplan der Oberstufe geschaffen werden müssen.

Das Buch von Zeitler & Neidhardt, das 1994 und 2000 weitere Auflagen erlebte, wendete sich ausdrücklich „an praktizierende Lehrer, Studienanfänger und interessierte Laien“ (Text auf der Buchrückseite). Zentrale Bedeutung erhält in diesem Band der Dimensionsbegriff. Anhand ein- und zweidimensionaler iterativer Prozesse wird in die Thematik dynamischer Systeme, speziell die Chaostheorie, eingeführt. In der Einleitung berichten Zeitler & Neidhardt (1993, S. 19) von ihren Erfahrungen an der Universität Bayreuth, wo das Interesse an ihrem Seminar über Fraktale Geometrie „für hiesige Verhältnisse astronomisch“ gewesen sei. Sie sahen sich „gezwungen“, ein weiteres Seminar über Chaostheorie anzubieten, was schließlich weitere Fortsetzungen bis „Chaos IV“ nach sich zog. Neben dieser ungewöhnlichen Begeisterung für die Thematik schildern die Verfasser aber auch die bereits aufgekommene Kritik („Nichts als schöne Bildchen¡‘, S. 4), der sie mit dem vorgelegten Buch „durch Aufzeigen wenigstens einiger Ansätze von Mathematik“ (ebd.) begegnen wollen. Bemerkenswert ist auch, dass in der Danksagung die „vielen Gymnasiallehrer“ erwähnt werden, „die uns immer wieder zur Arbeit ermunterten und uns mit vielen Problemen konfrontierten“ (ebd.). Mit letzterem waren offenbar fachliche Probleme in diesem noch wenig erforschten Teilgebiet gemeint.

Deutlich wird jedenfalls, dass es offenbar Anfang der 1990er Jahre zahlreiche Lehrerinnen und Lehrer gab, die ihre wenigen curricularen Freiräume nutzten und das Thema Chaos und Fraktale zumindest in Ansätzen in ihrem Mathematikunterricht behandelten. Dies geht auch schon aus dem Themenheft der Zeitschrift *Der Mathematikunterricht* hervor, das bereits 1989 zwei konkrete Unterrichtsbeispiele zur Hofstadter-Folge und zum Chaos-Pendel enthielt (Wissemann-Hartmann 1989b).

Nachdem es zunächst darum ging, den Lehrerinnen und Lehrern die fachlichen Inhalte zu vermitteln, geriet zusehends die didaktische Vermittlung im Schulunterricht in den Fokus der Beiträge. Hans-Günther Bigalke (1933–2019) bezeichnete im *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* die Chaostheorie unmissverständlich als eine „neue Herausforderung für die Mathematikdidaktik“ (Bigalke 1993). Dabei warf er die Fragen nach den Gründen für die wachsende Bedeutung dieses neuen Themenbereichs sowie nach einer angemessenen Reaktion des Mathematikunterrichts und der Mathematikdidaktik auf. Auf diese Fragen gibt Bigalke drei Jahre später selbst konkrete Antworten. Zunächst fasst er noch einmal die Gründe, die für eine Behandlung von Elementen aus dem Themenbereich Chaos und Fraktale sprechen, zusammen: die Aktualität, die Möglichkeit einer inhaltlichen und methodischen Vernetzung von Lernprozessen sowie eine angemessene Einbeziehung des Computers. Während er den beiden zuletzt genannten Aspekten uneingeschränkt zustimmt, hinterfragt er den Aspekt der Aktualität. Um dieser zu begegnen und sie gleichzeitig zu begründen, führt Bigalke – unterfüttert mit zahlreichen Beispielen – explizit mathematische Begründungen an. So bezeichnet er „das Phänomen der Selbstähnlichkeit als eine neue Art von Symmetrie in der Geometrie“ und die fraktale Geometrie als „eine neue Sprache zu Beschreibung natürlicher Strukturen“ (Bigalke 1996, S. 43). Auch den Zusammenhang zwischen Chaos und Fraktalen macht er deutlich: „Somit ist die fraktale Geometrie in vielen Fällen eine angemessene Geometrie zur Beschreibung des deterministischen Chaos. [. . .] Umgekehrt lassen sich fraktale Strukturen oft durch chaotische Abläufe erzeugen.“ (ebd., S. 44) Zudem stellt Bigalke die Bedeutung des Experiments mithilfe des Computers in diesem Themengebiet heraus. Er kommt zu dem Schluss, dass die Aktualität nur dann ein Argument für die Behandlung in der Schule ist, wenn sie dort auch sichtbar wird. Dazu entwickelt er im zweiten Teil seines Aufsatzes einen möglichen Unterrichtsgang. Dieser verlangt jedoch neben dem Einsatz eines PCs Kenntnisse in rekursiven Folgen und der Matrizenrechnung, womit er wohl nur in der Sekundarstufe II realisiert werden könnte. Bigalke spricht sich also für eine Behandlung des Themengebiets Chaos und Fraktale im Mathematikunterricht aus. Seine abschließende Begründung lautet:

> Das Entscheidende ist aber, daß mit Problemstellungen aus dem Bereich der Chaostheorie und fraktalen Geometrie dem Schüler Phänomene angeboten werden, die den Mathematikunterricht interessant machen und deren Behandlung Phantasie und Kreativität fördernde Unterrichtsmethoden nicht nur ermöglicht, sondern sogar herausfordert: Mathematik wird nicht als vorstrukturiertes Fertigprodukt, sondern als Prozeß gelehrt und gelernt. (ebd., S.47).

3 Nur schöne Bilder – Die Kritik von wissenschaftlicher Seite

Gleichwohl hatte es bereits vor den differenzierten, fachdidaktischen Ausführungen von Bigalke fundamentale Kritik von Seiten der Fachwissenschaft gehagelt. Zu Beginn des Jahres 1994 veröffentlichte Klaus Steffen, seinerzeit Mathematikprofessor mit dem Forschungsschwerpunkt Partielle Differentialgleichungen an der Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf, in den DMV-Mitteilungen einen teilweise polemischen Aufsatz mit dem Titel „Chaos, Fraktale und das Bild der Mathematik in der Öffentlichkeit“ (Steffen 1994). Nach eigenen Angaben erfolgte diese thematische Auseinandersetzung „auf Drängen des Herausgebers“ (ebd., S. 25); bei diesem handelte es sich um den DMV-Vorsitzenden Gerd Fischer, der ebenfalls eine Professur in Düsseldorf innehatte. Durch diesen Hinweis wurde indirekt deutlich gemacht, dass Steffens Beitrag nicht als Einzelmeinung zu betrachten sei, sondern offenbar vom Vorstand der DMV mitgetragen wurde. Dafür spricht auch die Tatsache, dass Steffen seinen Aufsatz in der Wir-Form abgefasst hat. Steffen kritisiert zunächst scharf den überbordenden Hype um die Chaostheorie in den populären Medien, deren Einschätzung der Bedeutung dieses Themengebiets als neues Weltbild und eines aufkommenden Paradigmenwechsels er für völlig überzogen hält und als „Kult“ diffamiert:

> Die Insignien des neuen Kultes sind Feigenbaum-Diagramm, Lorenz-Attraktor und Mandelbrot-Menge, als Wahrzeichen des wissenschaft-

> lichen Fortschritts dieses Jahrhunderts werden sie gepriesen, als nicht nur allerschönstes, sondern auch kompliziertestes je sichtbar gemachtes Objekt der zeitgenössischen Mathematik bewundert (ebd., S. 25 f.).

Steffen prognostiziert, dass in zehn bis zwanzig Jahren die Chaostheorie in die umfassende Theorie der dynamischen Systeme integriert sei. „Und die Fraktale sollten ihren angemessenen Platz in der Geometrie und der Geometrischen Maßtheorie gefunden haben.“ (ebd., S. 25) Im Weiteren konzentriert sich Steffens Kritik vor allem auf das Gebaren des „unbestritten größte[n] mathematische[n] Medienstar[s] in der Chaos-Fraktal-Szene“ (ebd., S. 28): Heinz-Otto Peitgen, den er der „Propaganda für seine bevorzugten Gebiete“ bezichtigt (ebd., S. 38).

Substanziell wird Steffens Kritik erst gegen Ende, wo er auf die Behauptung eingeht, dass die Fraktale Geometrie wesentliche Beiträge zum Verständnis der Natur leiste. Solchen spricht er jede Berechtigung ab:

> Die Fraktalgeometrie liefert keine Modelle, auch keine Simulationen, der Natur, sondern nur Imitationen. Damit meinen wir, daß die mathematischen Algorithmen, mit denen die Bilder von teilweise verblüffender Naturähnlichkeit auf dem Monitor generiert werden, nichts oder nur äußerst wenig mit den Mechanismen zu tun haben, welche die entsprechenden natürlichen Formen hervorbringen. Die Verbindung zwischen beiden ist also allein der für uns gleiche visuelle Eindruck. (ebd., S. 35)

Abschließend geht Steffen der Frage nach, inwieweit das Themengebiet Chaos und Fraktale in den Mathematikunterricht gehöre. Peitgens Plädoyer dafür stützte sich auf die Einschätzung, „daß das Bild der Mathematik hierzulande grau, diffus oder gar absolut negativ ist und daß die Ursachen hierfür in erster Linie in unglücklicher angstbesetzter Schulerfahrung liegen.“ (ebd., S. 36) Das Themengebiet Chaos und Fraktale könne da in besonderer Weise Abhilfe leisten, indem es Freude und Faszination an der Mathematik vermittle. Steffen hält „das Bild von der Schulmathematik für allzu düster gezeichnet“ (ebd.), formuliert „ernsthafte Bedenken“ (ebd.) und erteilt dieser Forderung eine klare Absage aus der Sicht der Hochschulmathematik:

> Erstens sind Chaostheorie und Fraktalgeometrie noch längst nicht so gut etablierte Wissenschaftsgebiete, daß man dafür Teile des jetzigen Schulstoffs in Mathematik oder Physik opfern sollte. Zweitens bestehen größte Befürchtungen, was manche Schulbuchautoren mit Chaos und Fraktalen veranstalten könnten. Formalismus ohne Inhalt haben Ende der sechziger Jahre unter dem Etikett "New Math" in die Schulbücher

> Einzug gehalten. Werden wir dort demnächst inhaltsleeren Jargon wie z.B. "Die fraktale Geometrie ist die Geometrie des Chaos" finden? (ebd., S. 36 f.)

Fünfzehn Jahre später stellte Freeman Dyson in seiner Einstein-Vorlesung von 2009 rückblickend und vorläufig abschließend fest: „Das Thema Chaos zeichnet sich durch einen Überfluss an quantitativen Daten, einen unendlichen Fundus an schönen Bildern und das Fehlen rigoroser Sätze aus. Rigorose Sätze sind der beste Weg, um einem Thema intellektuelle Tiefe und Genauigkeit zu verleihen.“ (Dyson 2020, S. 40) Damit lieferte er eine schlüssige Begründung, warum das Thema Chaos und Fraktale heute nur ein Randdasein in der Mathematik führt.

4 Theoretische Einordnung anhand des Modells der Rekontextualisierung

Die Bemühungen um die Einführung des innovativen Themengebiets Chaos und Fraktale in den Mathematikunterricht der weiterführenden Schulen, speziell des Gymnasiums, lassen sich als versuchte Unterrichtsreform begreifen, die letztlich gescheitert ist. Dieser Ansatz wirft sogleich die Frage nach den Gründen für das Scheitern dieser Unterrichtsreform auf. Dieser Frage soll mit Hilfe des Modells der Rekontextualisierung nach Fend (2008) nachgegangen werden. Diesbezüglich erscheint es zielführend, die Abwandlungen dieses Modells, die Hamann (2018) für ihre Untersuchungen der gescheiterten Unterrichtsreform der „Mengenlehre“ in der Primarstufe vorgenommen hat, zu übernehmen. Den vier Ebenen von Fends bildungssoziologischem, fächerübergreifendem Modell – der kulturellen, der curricularen, der schulpraktischen und der rezeptiven Ebene – stellt Hamann die wissenschaftlich-theoretische Ebene, die curriculare Ebene, die unterrichtskonzeptionelle Ebene und die schulpraktische Ebene gegenüber. Auf jeder dieser Ebenen, die vertikal angeordnet sind, kommt nun noch der zeitliche Verlauf als weitere Prozessdimension zum Tragen, so dass sich ein mehrdimensionales deskriptives Modell ergibt. Die Ebenen sind in gewisser Weise hierarchisch geordnet, mit einer erwartbaren Wirkrichtung von oben nach unten. Gleichwohl sind auch Wechselwirkungen in die andere Richtung möglich. Die Abbildung 1 veranschaulicht die historische Einordnung des Reformversuchs durch den neuen Inhalt Chaos und Fraktale mit Hilfe der Anwendung des Modells der Rekontextualisierung.

Es zeigt sich, dass bereits kurz nach dem Erscheinen der beiden bahnbrechenden Lehrbücher von Mandelbrot (1987) und Peitgen & Richter (1986) auf der wissenschaftlichen Ebene dieses innovative Themengebiet auf der unterrichtskonzeptionellen Ebene aufgegriffen wurde und mit dem Themenheft „Chaos, Fraktale, Dynamische Systeme“ der Zeitschrift *Der Mathematikunterricht* (MU 5/1989) schon sehr früh erste Überlegungen zur Umsetzung auf der schulpraktischen Ebene angestellt wurden. Dabei wurde die curriculare Ebene übergangen, indem Freiräume, welche die Lehrpläne boten, ausgenutzt wurden.

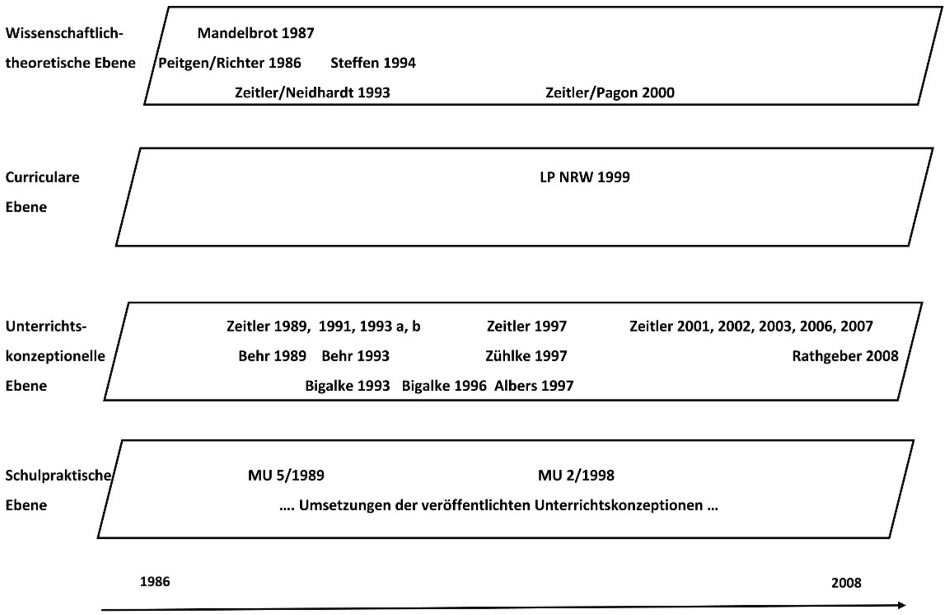


Abbildung 1: Chaos und Fraktale – Modell der Rekontextualisierung nach Fend (2008) und Hamann (2018)

Zudem wird deutlich, dass die Kritik auf der wissenschaftlichen Ebene durch die *Deutsche Mathematiker-Vereinigung* (DMV) in Form des Aufsatzes von Steffen (1994) eine Zäsur darstellt und mutmaßlich den Reformversuch zum Scheitern bringt. Bigalke (1996) stellt sich auf der unterrichtskonzeptionellen Ebene zwar dieser Kritik und unternimmt einen Rettungsversuch, doch be- und verhindert die Abwendung der DMV von diesem Themengebiet eine Umsetzung auf der curricularen Ebene. Neben Zeitler (1997, 2001, 2002, 2003, 2006, 2007), der unverdrossen mit bemerkenswerter Emphase weiterhin Beiträge in den Didaktik-Zeitschriften publiziert und ein zweites Lehrbuch vorlegt (Zeitler & Pagon 2000), bemüht sich die Zeitschrift *Der Mathematikunterricht* noch einmal um eine Versachlichung und Weiterführung der Diskussion. Sie präsentiert knapp neun Jahre nach ihrem ersten Themenheft 1998 ein zweites, nun mit dem Titel „Chaos und Fraktale im Oberstufenunterricht“. In vier Beiträgen werden konkrete Unterrichtsvorhaben dargestellt, die sich in der Praxis bewährt haben. Allerdings docken alle vier beschriebenen Unterrichtssequenzen sehr eng an den traditionellen Oberstufenunterricht an, sodass ein Großteil der Innovationskraft verloren geht. Chaos und Fraktale erscheinen nun nicht mehr als eigenständiges Themengebiet, sondern lediglich als ergänzender Aspekt der Lehrplanstoffes. Dies gilt für „Das Chaos im Newton-Verfahren" (Christiansen 1998) ebenso wie für „Die Feigenbaumanalyse – ein Unterrichtsgang für die Analysis in der Oberstufe" (Stender 1998). Auch die „Iteration von Matrixabbildungen" (Beutler 1998) und die ausgeführte Unterrichtsreihe zum Thema Folgen anhand des Drachen-Fraktals (Altendorf 1998) greifen wesentlich obligatorische Unterrichtsinhalte auf. Diese starke Anbindung an den gültigen Lehrplan machte den Autoren erst eine Behandlung von Chaos und Fraktalen im Unterricht über einen längeren Zeitraum möglich, aber dadurch büßte dieses Themengebiet bedingt an Faszination ein und ließ eine Forderung nach Aufnahme in den Lehrplan teilweise ins Leere laufen. Als roter Faden kristallisierte sich jedoch die fundamentale Idee der Iteration heraus, die dann auch verschiedentlich aufgegriffen wurde (siehe Abbildung 2).

Mathematik	Biologie, Informatik
Thema: Iterierte Funktionensysteme	
LK 13	Anwendungen der Linearen Algebra: Abbildungsmatrizen
Nur mit einfachen Abbildungen in der Ebene wie Drehung, Streckung und Verschiebung lassen sich durch fortgesetzte Hintereinanderausführung zahlreiche Fraktale erzeugen. Diesen Vorgang kann man als simultan arbeitende „Mehrfach-Verkleinerungs-Kopier-Maschine" deuten. In der Regel reichen 4 oder 5 solcher Abbildungen und damit 24 oder 30 Zahlenwerte, um Figuren wie die Schneeflockenkurve oder das Sierpinski-Dreieck zu zeichnen oder das Wachstum von Gräsern und Farnen zu simulieren! Es ist eine faszinierende Erfahrung, dass das „Grenzbild" (hier nur im Rahmen der Bildschirmauflösung) nicht von der Ausgangsfigur, sondern nur von den gewählten Abbildungen abhängt. Dabei kann in experimenteller Weise schön studiert werden, wie die Veränderung von Parametern in den Abbildungen zu verschiedenen Grenzfiguren führt. Der Einsatz entsprechender Software ist dringend anzuraten, gegebenenfalls kann die Erstellung solcher Software auch in einem gemeinsamen Projekt von einem Informatik-Kurs in Angriff genommen werden.	
Hinweis: Computereinsatz sinnvoll	

Abbildung 2: Das vorgeschlagene Projekt „Iterierte Funktionensysteme" (Lehrplan 1999, S. 54)

Im selben Jahr legten Kolleß, Kroker & Lagemann (1998) zudem einen Beitrag vor, wie selbstähnliche Figuren und Fraktale in der Sekundarstufe I behandelt werden können. Aber er bezog sich ausdrücklich nur auf einen fächerverbindenden Differenzierungsunterricht von Mathematik und Informatik. Für eine Behandlung im Regelunterricht hätten die gültigen Lehrpläne entsprechend verändert werden müssen. Dies erfolgte jedoch nur in Ansätzen oder gar nicht. So enthielt beispielsweise in Nordrhein-Westfalen der Lehrplan Mathematik für die gymnasiale Oberstufe von 1999 immerhin jeweils einmal explizit die Begriffe „chaotisch“ und „Chaostheorie“, sogar viermal die Begriffe „Fraktal“ bzw. „Fraktale“, stets im Zusammenhang mit möglichen ergänzenden Inhalten, zum Beispiel als Themenbereich für eine Facharbeit und Hinweisen auf einen entsprechenden Computereinsatz (Richtlinien 1999). Insbesondere der Vorschlag für ein fächerverbindendes Projekt zum Thema „Iterierte Funktionensysteme“ (Abbildung 2) war relativ ausführlich formuliert und stellte eine „faszinierende Erfahrung“ heraus, die bei der Erarbeitung gewonnen werden könne.

Doch diese vereinzelten Initiativen auf der curricularen Ebene entwickelten insgesamt zu wenig Wirkkraft für eine Unterrichtsreform. Der PISA-Schock im Jahr 2001 und die daraus resultierende Einführung von zentralen Prüfungen in fast allen Bundesländern beschnitten zudem in den folgenden Jahren die inhaltlichen Freiräume im Mathematikunterricht deutlich. Die Auseinandersetzung mit Chaos und Fraktalen blieb im Wesentlichen einzelnen Schülerinnen und Schülern sowie Lehrerinnen und Lehrern im Rahmen von Fach- und Projektarbeiten vorbehalten. Eine Unterrichtsreform durch die Einbindung dieses innovativen Themengebiets in den Mathematikunterricht fand nicht statt.

Das auf das Themengebiet Chaos und Fraktale angewandte Modell der Rekontextualisierung (Abbildung 1) zeigt deutlich, dass die mögliche Innovation für den Mathematikunterricht auf der curricularen Ebene verpasst wurde. In den zwölf Jahren von 1986 bis 1998 gab es diesbezüglich keine entscheidende Initiative. Dies ist auch der ausschlaggebende Unterschied zur Einführung der „Mengenlehre“, bei der frühzeitig und in der Folge mehrfach Vorgaben auf der curricularen Ebene festgesetzt wurden (vgl. Hamann 2018, S. 23). Es erscheint nicht abwegig, sogar einen Zusammenhang zwischen beiden Reformbemühungen zu erkennen. Nach dem großflächigen und nachhaltigen Scheitern der „Mengenlehre“ als Unterrichtsreform Anfang bis Mitte der 1980er Jahre, wird man weder auf der Ebene der Kultusministerkonferenz (KMK) noch in den Schulministerien der verschiedenen Bundesländer einer neuerlichen Innovation für den Mathematikunterricht sonderlich aufgeschlossen gegenübergestanden haben. Diese These ließe sich vermutlich durch die Auswertung der entsprechenden Ministeriumsakten, sofern sie archiviert sind, belegen.

5 Fazit

Pro	Contra
• Anschaulichkeit (Visualisierung) • Anwendungsbezug (Natur, Wirtschaft) • Nutzung moderner Computertechnologie (digitale Werkzeuge) • Vernetzung verschiedener Teilgebiete (Geometrie, Stochastik, Funktionenlehre, Algebra) • Neue Begrifflichkeiten: • Selbstähnlichkeit, Skaleninvarianz, fraktale Dimension, Chaos • Bezug zur aktuellen Forschung (Aktualität) • entdeckendes Forschen und Lernen möglich (experimentelle Mathematik)	• Komplexe Zahlen als grundlegende fachliche Lernvoraussetzung fehlen • hauptsächlich Computerbilder • Faszination des schönen Scheins • keine starken Sätze • kein Platz im Lehrplan

Tabelle 1: Pro- und Contra-Argumente für die Einführung des neuen Themengebietes Chaos und Fraktale in den Mathematikunterricht

Stellt man die Argumente für und wider eine Einführung des Themengebiets Chaos und Fraktale in den Mathematikunterricht gegenüber, so überwiegen zumindest quantitativ die Pro-Argumente (Tabelle 1). Und auch der Einwand von fehlenden starken Sätzen ist nur bedingt stichhaltig, denn das Standardgebiet der Analytischen Geometrie beinhaltet im schulischen Kontext ebenfalls keine. Gleichwohl verhinderte das Beharren auf dem traditionellen Lehrstoff diese Innovation. Dieses Beharrungsvermögen ist zu einem Teil auch strukturell bedingt. Jedenfalls gibt es keine ständigen Lehrplankommissionen, vielmehr werden diese unregelmäßig und fast immer aus schulpolitischen und nicht aus fachlichen Gründen einberufen. Zudem sprechen sich die Schulbuchverlage aus Kostengründen gegen häufige Veränderungen im Lehrplan aus. Die Digitalisierung des Unterrichts und der Schulbücher bietet die Chance, künftig auch im Mathematikunterricht deutlich flexibler auf zeitgemäße Entwicklungen zu reagieren.

Mit dem Modell der Rekontextualisierung konnte gezeigt werden, dass sich dieses innovative Themengebiet trotz zahlreicher Aktivitäten auf der unterrichtskonzeptionellen und der schulpraktischen Ebene nicht durchsetzte, da die Kultus- bzw.

Schulministerien sich nicht dazu durchringen konnten, dieses Themengebiet in den Lehrplänen zu verankern, was wesentlich in der fehlenden fachwissenschaftlichen Unterstützung dafür begründet lag. Einige Jahre fand man noch Relikte dieser fast zwanzig Jahre währenden Diskussion in den Lehrplänen. Aber in Nordrhein-Westfalen beispielsweise tauchen die beiden Begriffe Chaos und Fraktal im seit 2013 geltenden, deutlich knapper formulierten Lehrplan für die gymnasiale Oberstufe inzwischen gar nicht mehr auf (Kernlehrplan 2013). Das Themengebiet Chaos und Fraktale ist aus der aktuellen Fachdidaktik verschwunden, obwohl gerade der vielfach postulierte Einsatz von digitalen Medien eine ansprechende Umsetzung ermöglichen würde.

Literatur

Albers, R. (1997): Drachenkurven und Selbstähnlichkeit. *Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht*, 50, 456-458.

Altendorf, E. (1998): Einführung in die Unterrichtseinheit „Folgen“ anhand des „Drachen“-Fraktals. *Der Mathematikunterricht*, 44(2), 76–83.

Behr, R. (1989): *Ein Weg zur fraktalen Geometrie*. Stuttgart: Klett.

Behr, R. (1993): *Fraktale, Formen aus Mathematik und Natur*. Stuttgart: Klett.

Beutler, E. (1998): Iteration von Matrixabbildungen. Ein Kurs in Linearer Algebra. *Der Mathematikunterricht*, 44(2), 53–75.

Bigalke, H.-G. (1993): Chaostheorie. Eine neue Herausforderung für die Mathematikdidaktik. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 25, 197–208.

Bigalke, H.-G. (1996): Chaostheorie und Fraktale Geometrie im Mathematikunterricht? *Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht*, 49, 40–52.

Christiansen, H. (1998): Das Chaos im Newton-Verfahren. *Der Mathematikunterricht*, 44(2), 6–29.

Dyson, F. (2020): Vögel und Frösche. *DMV-Mitteilungen*, 28(1), 30–43.

Fend, H. (2008): *Schule gestalten. Systemsteuerung, Schulentwicklung und Unterrichtsqualität*. Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften.

Hamann, T. (2018): *Die „Mengenlehre“ im Anfangsunterricht. Historische Darstellung einer gescheiterten Unterrichtsreform in der Bundesrepublik Deutschland.*

Siegen: universi (Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik Band 9).

Henn, H.-W. (1988): Fraktale Geometrie. *mathematik lehren*, 31, 40-46

Henn, H.-W. (1989): Das Schneeflockenland und andere Fraktale. Eine Einführung in den fraktalen Dimensionsbegriff. *Der Mathematikunterricht*, 35(5), 43–61.

Hermans, A. (1992): Chaos im Mathematikunterricht. *Praxis der Mathematik*, 34, 81–89.

Kernlehrplan für die Sekundarstufe II. Gymnasium/Gesamtschule in Nordrhein-Westfalen. Mathematik (2013). Frechen: Ritterbach.

Kirchgraber, U. (1992): Mathematik im Chaos. Ein Zugang auf dem Niveau der Sekundarstufe II. *Mathematische Semesterberichte*, 39, 43–68.

Kolleß, F./ Kroker, A. / Lagemann, M. (1998): „Chaos“ im Differenzierungsunterricht Informatik/Mathematik: Selbstähnliche Figuren, Fraktale, Rekursion und Computergrafik. *Der Mathematikunterricht*, 44(6), 22–33.

Mandelbrot, B. B. (1967): How long is the coast of Britain? Statistical self-similarity and fractional dimension. *Science*, 155, 636-638.

Mandelbrot, B. B. (1987): *Die fraktale Geometrie der Natur*. Basel: Birkhäuser.

Peitgen, H.-O. & Richter, P. H. (1986): *The beauty of fractals. Images of complex dynamical systems*. Berlin: Springer.

Peitgen, H.-O. & Jürgens, H. (1989): Fraktale. Computerexperimente (ent)zaubern komplexe Strukturen. *Der Mathematikunterricht*, 35(5), 4–19.

Rathgeber, C. (2008): Wachstum und Chaos. *Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht*, 61, 22–26.

Richtlinien und Lehrpläne für die Sekundarstufe II – Gymnasium/Gesamtschule in Nordrhein-Westfalen. Mathematik (1999). Frechen: Richterbach.

Steffen, K. (1994): Chaos, Fraktale und das Bild der Mathematik in der Öffentlichkeit. *DMV-Mitteilungen*, 1, 25–40.

Stender, P. (1998): Die Feigenbaumanalyse – ein Unterrichtsgang für die Analysis in der Oberstufe. *Der Mathematikunterricht*, 44(2), 30–52.

Wissemann-Hartmann, C. (1989a): Chaos. Eine kleine Einführung in eine große Theorie. *Der Mathematikunterricht*, 35(5), 20–42.

Wissemann-Hartmann, C. (1989b): Zwei (kleine) Unterrichtsbeispiele. *Der Mathematikunterricht*, 35(5), 62–69.

Zeitler, H. (1989): Cantor-Staub, Sierpinski-Teppich, Menger-Schwamm – eine verrückte Welt. *Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht*, 42, 269–275.

Zeitler, H. (1991): Chaostheorie – was ist das? *Praxis der Mathematik*, 33, 49–54.

Zeitler, H. (1992): Zur Iteration komplexer Funktionen. *Didaktik der Mathematik*, 20, 20-38.

Zeitler, H. (1993a): Fraktale Geometrie in der Schule? *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 25, 209-213.

Zeitler, H. (1993b): Unglaubliches über Fraktale. *Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht*, 46, 199–206.

Zeitler, H. (1997): Schon wieder Würfelfraktale. *Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht*, 50, 452–455.

Zeitler, H. (2001): Fraktale Geometrie zwischen Medizin und Kunst. *Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht*, 54, 137–144.

Zeitler, H. (2002): Bronchien und Baumstrukturen. *Mathematische Semesterberichte*, 49, 185–208.

Zeitler, H. (2003): Theorie und Praxis bei Verzweigungen. *Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht*, 56, 269–273.

Zeitler, H. (2006): Spiralen in Bäumen. *Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht*, 59, 140–144.

Zeitler, H. (2007): Dimensionsänderung bei der Projektion von Fraktalen. *Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht*, 60, 464–470.

Zeitler, H. & Neidhardt, W. (1993): *Fraktale und Chaos. Eine Einführung.* Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

Zeitler, H. & Pagon, D. (2000): *Fraktale Geometrie. Eine Einführung.* Braunschweig: Vieweg.

Zühlke, B. (1997): Über Papierfolgen und Drachenkurven zu Methoden der Fraktalen Geometrie. *Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht*, 50, 10–15.

Adressen der Autoren

Dr. Henning Heske
Zentrum für schulpraktische Lehrerausbildung Krefeld
Johansenaue 3
D-47809 Krefeld
Henning.Heske@zfslkrefeld.onmicrosoft.com

Hannes Junker
Institut für Mathematik
D-06099 Halle (Saale)
hannes.junker@mathematik.uni-halle.de

Repetent Andreas Kirchartz
Wilhelmsstift
Collegiumsgasse 5
D-72070 Tübingen
nickel@mathematik.uni-siegen.de

Oliver Passon
Fakultät für Mathematik und Naturwissenschaften
Bergische Universität Wuppertal,
Gaußstr. 20
D-42117 Wuppertal
passon@uni-wuppertal.de

Toni Reimers
Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg
Institut für Mathematik
D-06099 Halle a. d. Saale
toni.reimers@mathematik.uni-halle.de

Susanne Spies
NT-Fakultät
Department Mathematik
Universität Siegen
Walter-Flex-Str. 3
D-57068 Siegen
spies@mathematik.uni-siegen.de

Tassilo von der Twer
Fakultät für Mathematik und Naturwissenschaften
Bergische Universität Wuppertal,
Gaußstr. 20
D-42117 Wuppertal
twer@uni-wuppertal.de

Claus-Peter Wirth
Brandenburger Straße 42
D-65582 Diez an der Lahn
wirth@logic.at

SieB
Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik

Die *Siegener Beiträge* bieten ein Forum für den Diskurs im Bereich von *Philosophie und Geschichte der Mathematik*. Dabei stehen die folgenden inhaltlichen Aspekte im Zentrum:

1. Philosophie und Geschichte der Mathematik sollen einander wechselseitig fruchtbar irritieren: Ohne Bezug auf die real existierende Mathematik und ihre Geschichte läuft das philosophische Fragen nach der Mathematik leer, ohne Bezug auf die systematische Reflexion über Mathematik wird ein Bemühen um die Mathematikgeschichte blind.

2. Geschichte ermöglicht ein Kontingenzbewusstsein, philosophische Reflexion fordert Kontextualisierungen heraus. Damit stellen sich u. a. Fragen nach der Rolle der Mathematik für die Wissenschaftsgeschichte, aber auch nach einer gesellschaftlichen Rolle der Mathematik und deren historischer Bedingtheit.

3. *Ein* spezieller Aspekt betrifft das (schulische) Lehren und Lernen von Mathematik und deren Wandel im historischen Verlauf; der reichhaltigen Zeitschriftenlandschaft im Bereich der mathematischen Fachdidaktik soll allerdings keine Konkurrenz gemacht werden.

Formelles:

1. Die Erscheinungsweise ist einmal jährlich.
2. Hauptziel ist eine Beförderung des fachlichen Diskurses; die Aufsätze werden nicht referiert, daher ist eine relativ schnelle Publikation möglich.
3. Publikationssprachen sind Deutsch (vorzugsweise), Englisch, Französisch, Italienisch.
4. Die Siegener Beiträge sind als Präpublikationsreihe konzipiert; alle Publikationsrechte verbleiben beim jeweiligen Autor.
5. Neben den regulären Ausgaben ist die Publikation von monographischen Bänden möglich.

SieB
Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik

Ralf Krömer, Gregor Nickel (Hrsg.)

Bisher erschienen

Band 1 (2013), 155 S., kart, 13,– Euro

Mit Beiträgen von Gregor Nickel, Ingo Witzke, Anna-Sophie Heinemann, Matthias Wille, Philipp Karschuck, Ralf Krömer & David Corfield

Band 2 (2013), 278 S., kart., 22,– Euro

Susanne Spies:
Ästhetische Erfahrung Mathematik: Über das Phänomen schöner Beweise und den Mathematiker als Künstler

Band 3 (2014), 207 S., kart., 22,– Euro

Henrike Allmendinger:
Felix Kleins „Elementarmathematik vom höheren Standpunkte“ aus: Eine Analyse aus historischer und mathematikdidaktischer Sicht

Band 4 (2014), 109 S., kart., 13,– Euro

Mit Beiträgen von Peter Ullrich, Nicola Oswald, Tanja Hamann, Sebastian Schorcht, Elena Ficara, Tim Räz & Tilman Sauer, Gregor Nickel

Band 5 (2015), 232 S., kart., 13,– Euro

Mit Beiträgen von Thomas Bedürftig, Alessa Binder, Martin Janßen, Elisabeth Pernkopf, Matthias Wille

Band 6 (2016), 311 S., kart., 22,– Euro

Martin Rathgeb:
George Spencer Browns *Laws of Form* zwischen Mathematik und Philosophie

Band 7 (2016), 199 S., kart., 13,– Euro

Mit Beiträgen von Karl Kuhlemann, Nikolay Milkov, Gregor Nickel, Martin Rathgeb, Laura Schulte, Harald Schwaetzer, Christian Thiel, Matthias Wille

Band 8 (2017), 202 S., kart., 13,– Euro

Mit Beiträgen von Thomas Gruber, Anna-Sophie Heinemann, Edward Kanterian, Daniel Koenig, Martin Rathgeb, Andreas Vohns, Matthias Wille

Band 9 (2018), 298 S., kart., 22,– Euro

Tanja Hamann:
Die „Mengenlehre“ im Anfangsunterricht. Historische Darstellung einer gescheiterten Unterrichtsreform in der Bundesrepublik Deutschland

Band 10 (2018), 220 S., kart., 13,– Euro

Mit Beiträgen von Edward Kanterian, Karl Kuhlemann, Andrea Reichenberger, Tilman Sauer & Gabriel Klaedtke, Shafie Shokrani & Susanne Spies, Klaus Volkert, Matthias Wille

Band 11 (2019), 204 S., kart., 13,– Euro

Daniel Koenig, Gregor Nickel, Shafie Shokrani und Ralf Krömer (Hrsg.):
Mathematik in der Tradition des Neukantianismus.
Mit Beiträgen von Gottfried Gabriel & Sven Schlotter, Kay Herrmann, Daniel Koenig, Thomas Mormann, Matthias Neuber, Shafie Shokrani, Merlin Carl & Eva-Maria Engelen, Gregor Nickel, Christian Thiel

Band 12 (2019), 338 S., kart., 22,– Euro

Sara Confalonieri, Peter-Maximilian Schmidt, Klaus Volkert (Hrsg.):
Der Briefwechsel von Wilhelm Fiedler mit Alfred Clebsch, Felix Klein und italienischen Mathematikern

Band 13 (2020), 322 S., kart., 18,– Euro

Mit Beiträgen von Thomas Bedürftig, Stephan Berendonk, Rosmarie Junker & Susanne Spies, Edward Kanterian, Martin Mattheis, Gregor Nickel, Andrea Reichenberger, Toni Reimers, Moritz Vogel, Matthias Wille

ISSN 2197-5590 univer*si* – Universitätsverlag Siegen | www.uni-siegen.de/universi

Preis: 18,– Euro (monographische Bände ggf. abweichend)

SieB – Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik

Bd. 14 (2021)

Mit Beiträgen von

Claus-Peter Wirth
Gisbert Hasenjaeger and a Most Interesting Unpublished Draft for Hilbert and Bernays' „Grundlagen der Mathematik"

Oliver Passon und Tassilo von der Twer
Methodische Probleme der quantitativ-empirischen Unterrichtsforschung

Toni Reimers
Wurzeln des Markscheidewesens im Spiegel gelehrter Schriften:
Eine mathematikhistorisch-bibliographische Analyse

Andreas Kirchartz
„Infiniti ad finitum proportionem non esse" –
Die astrologischen, astronomischen und komputistischen Studien des Nikolaus von Kues

Susanne Spies
Auf den Schultern von Riesen –
„Geschichte der Mathematik" für Lehramtsstudierende

Hannes Junker
Ansichten der Geometrie – Plastische Modelle in der Forschung von Julius Plücker und Felix Klein

Henning Heske
Chaos und Fraktale – Aufstieg und Fall eines innovativen Themengebiets für den Mathematikunterricht

ISSN 2197-5590

universi
UNIVERSITÄTSVERLAG SIEGEN