SieB

Ralf Krömer und Gregor Nickel (Hrsg.)

Band 16 • 2022

Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik

Mit Beiträgen von

S. Berendonk | H. Boehme | C. H. Hoffmann | D. Koenig | J. Lemanski | J. Özel | F. Pielsticker und I. Witzke | Š. Porubský | D. Rami | R. Tobies

Ralf Krömer, Gregor Nickel (Hrsg.)

SieB

Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik

Band 16 (2022)

Mit Beiträgen von:
S. Berendonk | H. Boehme | C. H. Hoffmann | D. Koenig | J. Lemanski
J. Özel | F. Pielsticker und I. Witzke | Š. Porubský | D. Rami | R. Tobies

universi
UNIVERSITÄTSVERLAG SIEGEN

Ralf Krömer
Fachgruppe Mathematik
Bergische Universität Wuppertal
Gaußstraße 20
D-42119 Wuppertal
rkroemer@uni-wuppertal.de

Gregor Nickel
Departement Mathematik
Universität Siegen
Walter-Flex-Str. 3
D-57068 Siegen
nickel@mathematik.uni-siegen.de

Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik Bd. 16 (2022)
Herausgeber: Ralf Krömer (Wuppertal) und Gregor Nickel (Siegen)

univer*si* – Universitätsverlag Siegen 2022

Umschlaggestaltung: Sebastian Schorcht
Druck: UniPrint, Universität Siegen

gedruckt auf holz- und säurefreiem Papier

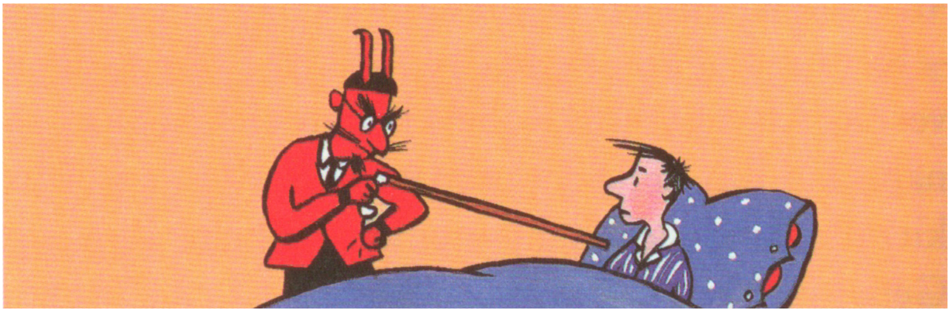
ISSN: 2197-5590

Vertrieb:
univer*si* – Universitätsverlag Siegen
Am Eichenhang 50
57076 Siegen
info@universi.uni-siegen.de
www.uni-siegen.de/universi

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

- Du musst wissen, es gibt da diese hundsgewöhnlichen Zahlen, die sich teilen lassen, und dann gibt es die anderen, bei denen das nicht geht. Die sind mir lieber. Weißt Du warum? Weil sie prima sind. An denen haben sich die Mathematiker schon seit über tausend Jahren die Zähne ausgebissen. Wunderbare Zahlen sind das. Zum Beispiel die Elf oder die Dreizehn oder die Siebzehn.
Robert wunderte sich, denn der Zahlenteufel sah plötzlich ganz verzückt aus, so, als ließe er sich einen Leckerbissen auf der Zunge zergehen.
- Und jetzt sag mir bitte, lieber Robert, was sind die ersten paar prima Zahlen.
- Null, sagte Robert, um ihn zu ärgern.
- Null ist verboten, rief der Alte und fuchtelte schon wieder mit seinem Spazierstock herum.



- Dann eben eins.
- Eins zählt nicht. Wie oft soll ich es dir noch sagen!
- Na schön, sagte Robert. Reg dich nicht auf. Dann eben die Zwei. Und die Drei auch, glaube ich jedenfalls. Die Vier nicht, das haben wir schon ausprobiert. Fünf sicher, die Fünf kann man nicht zerteilen. Naja, und so weiter.
- Ha, was heißt hier: und so weiter?
Der Alte hatte ich bereits wieder beruhigt. Er rieb sich sogar die Hände. Das war ein sicheres Zeichen, daß er wieder einmal einen ganz besonderen Trick auf Lager hatte.
- Das ist ja das Schöne an den prima Zahlen, sagte er. Kein Mensch weiß von vornherein,

wie es weitergeht mit den prima Zahlen, außer mir natürlich, aber ich verrate es keinem.
- Mir auch nicht?
- Niemandem! Nie! Der Witz ist nämlich der: Man sieht es einer Zahl nicht an, ob sie prima ist oder nicht. Kein Mensch kann das vorher wissen. Man muß es ausprobieren.
- Wie denn?
- Das werden wir gleich sehen.

Der vorstehende Dialog spielt sich in der dritten Nacht der Begegnungen des leicht erkrankten Robert mit dem Zahlenteufel ab[1], und er leitet die schrittweise Entwicklung des SIEBS DES ERATHOSTHENES ein, das der Zahlenteufel als einen „ganz alten Hut“ apostrophiert. Wir möchten an dieser Stelle die Gelegenheit ergreifen, eines der seltenen Literaten unserer Zeit zu gedenken, der mit kritischer Sympathie die Mathematik in ihrer aktuellen Gestalt begleitet hat: HANS MAGNUS ENZENSBERGER (1929-2022).

Unter dem Titel „Zugbrücke außer Betrieb“ hatte er 1998 auf dem Internationalen Mathematiker-Kongress in Berlin eine vielbeachtete Rede[2] gehalten, die den öffentlichen Auftritt der Mathematik thematisiert. Es lohnt sich, zentrale Thesen und Anfragen ENZENSBERGERS hier noch einmal ins Gedächtnis zu rufen. Er beginnt mit der lebhaften Schilderung eines gesellschaftlichen Konsenses, dem folgend „durchaus intelligente, gebildete Leute“ mit einer „sonderbaren Mischung aus Trotz und Stolz“ eine fast vollständige Ignoranz gegenüber der Mathematik zum Ausdruck brächten, die Mathematik sei „in unserer Zivilisation so etwas wie ein blinder Fleck geblieben“. Die Mathematiker seien keineswegs allein Schuld an dieser Misere. Wer meint, sie liege an deren angeblicher „logischer Pedanterie“ und „schwer erträglichen Form von Hochmut“, mache es sich viel zu leicht. Allerdings bringe ihre Profession, die dazu nötige „extreme und lang andauernde Konzentration“ und eine thematische Ausdifferenzierung, die den Kreis möglicher Adressaten drastisch schrumpfen ließe, durchaus die Gefahr einer „gewissen Isolation“ mit sich. Bezeichnend dafür sei die Redensart, „diese Ableitung oder jene Zuordnung (...) sei trivial“, was dazu führe, dass „als gesprächsfähig (...) nur der gelten [kann], für den das Triviale trivial ist (...) alle, auf die das nicht zutrifft, also mindestens 99 Prozent der Menschheit, sind in diesem Sinn hoffnungslose Fälle, mit denen sich zu unterhalten einfach nicht lohnt.“ Dennoch: „Es ist einfach nicht plausibel, den Schwarzen Peter einer Minderheit von Experten zuzuschieben, solange eine

1. Hans Magnus Enzensberger: „Der Zahlenteufel. Ein Kopfkissenbuch für alle, die Angst vor der Mathematik haben.“ Mit Bildern von Rotraut Susanne Berner. Carl Hanser Verlag, München 1997, pp. 55.

2. Ders.: „Zugbrücke außer Betrieb, oder die Mathematik im Jenseits der Kultur. Drawbridge up: Mathematics–A Cultural Anathema.“ Bilingual Edition (Transl. by Tom Artin, Illustr. K.-H. Hofmann) Peters, Natick Mass. 2001.

überwältigende Mehrheit aus freien Stücken darauf verzichtet, sich ein kulturelles Kapital von immenser Bedeutung und größtem Reiz anzueignen."

Die Bedeutung dieses kulturellen Kapitals skizziert er im Anschluss: zum einen sei die Mathematik extrem nützlich für Naturwissenschaft und Technik, zum anderen aber auch eine bewundernswerte Leistung des menschlichen Geistes, der darin ebenso tiefe wie elegante Resultate hervorbringe. Durchaus zustimmend wird Konrad Knopp zitiert, der in seiner Tübinger Antrittsrede 1927 formuliert, die Mathematik sei „Grundlage aller Erkenntnis und die Trägerin aller höheren Kultur." Ein kulturelles Paradox sei es somit, wenn sich just die moderne Gesellschaft eine solche Ignoranz leiste — eine Gesellschaft, die wie keine vor ihr durch Mathematik geprägt sei, und in der die mathematischen Wissenschaften — reine wie angewandte — ein Goldenes Zeitalter erlebten.

Schuld an dieser paradoxen Situation seien vor allem die Schulen, in denen die Kinder „jahrelang mit öden Routinen gepeinigt" würden[3]: „Es ist so, als würde man Menschen in die Musik einführen, indem man sie jahrelang Tonleitern üben läßt. Das Resultat wäre vermutlich lebenslänglicher Haß auf diese Kunst." Die bedauernswerten Mathematiklehrer wiederum seien „nicht nur mit den Vorgaben der Didaktiker und ihrer Moden geschlagen, sie müssen auch am Gängelband der Ministerialbürokratie operieren, die ihnen ganz brutale Lehrpläne und Lernziele" vorschreibe. Anlass zur Hoffnung gäben allerdings nicht nur die durchaus existenten, begnadeten Mathematikpädagogen, die es trotz allem fertig brächten, „ihre Schüler mit den Schönheiten, Reichtümern und Herausforderungen der Mathematik bekannt zu machen." Darüber hinaus gebe es — vor allem in der angelsächsischen Welt — erfolgversprechende Ansätze zur Popularisierung der Mathematik; hier seien Wissenschaftsjournalisten wie auch professionelle Mathematiker am Werk.

Nicht zuletzt Enzensberger selbst gehört zu den erfolgreichen Autoren einer Popularisierung der Mathematik, wobei 'Erfolg' sowohl im Sinne des Zuspruchs der Lesenden zu verstehen ist, als auch mit Bezug auf eine fruchtbare, elementarisierende, aber weder trivialisierende noch mystifizierdende Perspektive auf die Mathematik. Und an erster Stelle ist hier in der Tat an seinen — von Rotraut

3. Das Klagen über solche Routinen ist wiederum fast so alt wie der Mathematikunterricht selbst, und es lässt sich durchaus fragen, ob nicht im aktuellen schulischen Unterricht im Zuge einer sog. Kompetenz-Orientierung der Bildungswert des geistigen Trainierens dramatisch unterschätzt wird. Die derzeitige Überbetonung der Nützlichkeit der Mathematik bezieht sich jedenfalls auf ein extrem defizitäres Bild der Mathematik. Zudem sind die sog. Anwendungen fast immer im schlechtesten Sinne artifiziell, eigentlich nur mühselig und vielfach in mangelhafte Sprache eingekleidete Standardaufgaben. Ein solches Curriculum dient weder der Reinen Mathematik, die im Unterricht gar nicht mehr vorkommt, noch der Angewandten Mathematik, die völlig unglaubwürdig präsentiert wird.

Susanne Berner kongenial illustrierten — Zahlenteufel zu denken[4].

Es braucht hier wohl kaum eigens betont zu werden, dass ein wesentlicher Aspekt der Bemühungen um Geschichte und Philosophie der Mathematik gerade darin besteht, das „kulturelle Kapital“ Mathematik in seiner (historischen) Genese zu erschließen und in seiner systematischen, einschließlich der sozialen Bedeutung durchsichtig zu machen. Und zu diesem Unterfangen möchte auch SieB seine bescheidenen Beiträge leisten.

Wir freuen uns sehr, nunmehr bereits den sechzehnten Band der Siegener Beiträge vorlegen zu können. Er umfasst ein weites historisches Spektrum von der Griechischen Antike über die frühe Neuzeit bis ins ausgehende 19. und frühe 20. Jahrhundert und kombiniert auf vielfältige Weise historische mit systematischen Fragestellungen. Zwei Beiträge (Porubsky und Tobies) entstammen dabei dem Kontext der gemeinsamen Jahrestagung der Fachsektion „Geschichte der Mathematik“ der DMV und des Arbeitskreises „Mathematikgeschichte und Unterricht“ der GDM. Und *last, but not least* ist auch die Mathematik-Didaktik mit zwei Beiträgen vertreten.

Wie die früheren Bände, so dokumentiert auch der vorliegende die Pluralität von Themen, Perspektiven und Methoden — und kann hoffentlich ein Anstoß für einen produktiven Diskurs sein im Bemühen um ein besseres Verstehen 'der' Mathematik. Den *Auctores* danken wir sehr herzlich für ihre Bereitschaft, daran mitzuwirken.

Unser Dank gilt darüber hinaus Sebastian Schorcht für die Gestaltung der Titelgraphik, Daniel Koenig für die Mithilfe bei der LaTeX-Bearbeitung des Manuskripts sowie Kordula Lindner-Jarchow für die verlagsseitige Betreuung der Reihe.

Ralf Krömer Gregor Nickel

> Das Zahlengekritzel an der Wand schwamm Robert vor den Augen, und die Höhle kam ihm weich und warm vor wie eine Bettdecke. Robert versuchte sich zu erinnern, was das Wunderbare an den prima Zahlen war, aber seine Gedanken wurden immer weißer und wolkiger wie ein Gebirge aus weißer Watte. Er hatte selten so gut geschlafen.

4. Für eine sorgsame auf Sprache und Bild achtende Analyse des Werkes vgl. Elisabeth Pernkopf: *Zahlenteuflisches Sprechen und die Sprache der Mathematik.* SieB **5** (2015), 71-96.

Von Theodoros bis Speusippos. Zur Entdeckung des Inkommensurablen sowie der Seiten- und Diagonalzahlen

Harald Boehme

Zusammenfassung Ausgehend von Platons Dialog *Theaitetos* wird in dieser Arbeit der darin nur erwähnte Beweis des Theodoros rekonstruiert, ebenso die Entdeckung der Inkommensurabilität von Seite und Diagonale im Quadrat. In *Politeia* unterscheidet Platon bei seiner Konstruktion der geometrischen Zahl die ausdrückbare von der nicht ausdrückbaren Diagonalen, wobei die erstere durch die Seiten- und Diagonalzahlen gegeben ist. Damit entstand sowohl das Problem der Bestimmung der ausdrückbaren Diagonalen als auch der Approximation der nicht ausdrückbaren Diagonalen.

Die Mittel zur Behandlung dieser Probleme, Flächengeometrie und geometrische Logistik, ergeben sich bereits aus Theaitetos' Beweisen zur Irrationalität der von Ihm definierten Irrationalen. Da die Seiten- und Diagonalzahlen erst in der Spätantike nachzuweisen sind, wird als Vorlage die Schrift des Speusippos *Über pythagoreische Zahlen* vorgestellt. Die Arbeit schließt mit einer Verallgemeinerung, Seiten- und Höhenzahlen, von denen einige behandelt werden.

Inhalt

Zahlen $N = 3, 5, \ldots, 17$ eine Strecke a und die Strecke d mit $qu(d) = Nqu(a)$ nicht kommensurabel sind [*Tht.* 147d].[1]

2 Eine Rekonstruktion des Beweises Die einzelnen Beweise des Theodoros werden derart rekonstruiert, dass Theaitetos auf einen allgemeinen Beweis des Theorems schließen konnte.

3 Die Diagonale im Quadrat In 3.1 wird die Inkommensurabilität der Diagonalen bewiesen, was beim Beweis des Theodoros offenbar vorausgesetzt ist. In 3.2 wird gezeigt, dass der Beweis Euklids [*Elem.* X. 117] erst später an der Akademie gefunden wurde.

4 Andere Rekonstruktionen des Beweises von Theodoros In 4.1 wird eine arithmetische, in 4.2 eine mit Wechselwegnahme und in 4.3 eine Rekonstruktion mit der Methode von Siegfried Heller vorgestellt.

5 Fanden die Pythagoreer die Inkommensurabilität? Ist den Pythagoreern die Entdeckung das Inkommensurablen zuzuschreiben, wie es die Doxographie der Spätantike behauptet, ohne einen Beleg dafür zu haben?

6 Inkommensurabilität bei Platon Gezeigt werden die Auseinandersetzungen Platons, in 6.1 mit der Diagonalen des Quadrats, deren Größe der Knabe in *Meno* nicht sagen kann, in 6.2 mit der ausdrückbaren und nicht ausdrückbaren Diagonalen [*diametros rētos, arrētos, Rep.* 546c], wobei Platons Bezeichnungen offenbar auf eine Definition des Theaitetos zurückgehen. In 6.3 wird die Vereinigung von zwei nicht ausdrückbaren Diagonalen untersucht [*Hipp. Maj.* 303b-c].

7 Definitionen und Theoreme des Theaitetos Die Definitionen des Theaitetos enthielten ursprünglich sowohl ausdrückbare als auch nicht ausdrückbare Strecken. Für die von ihm definierten Irrationalen konnte er die Eigenschaft der Irrationalität mit einfachen Flächen beweisen, eine Methode, die ich *Flächengeometrie* nenne, was sonst als geometrische Algebra bezeichnet wird

8 Anwendungen der Geometrischen Logistik Die Flächengeometrie wird als *geometrische Logistik* zur Demonstration logistischer Gesetze angewandt. 8.1 Anstelle von mit Rechensteinen dargestellten einzelnen Zahlen der Pythagoreer ergeben sich allgemeine arithmetische Regeln. 8.2 Archytas' drei Mittel der Musik [Fragment 2] werden definiert und deren gegenseitigen Verhältnisse bewiesen, womit die Grundlagen des Heronischen Verfahrens zur Approximation von Quadratwurzeln gegeben sind. 8.3 Seiten- und Diagonalzahlen werden definiert und deren alternierende Norm bewiesen. 8.4 Der Versuch von Proklos, dies mit *Elem.* II.10 zu beweisen, erweist sich als unzulänglich.

9 Über pythagoreische Zahlen Die älteste Überlieferung der Seiten- und Diagonalzahlen ist bei Theon von Smyrna zu finden. Woher kannten die Neuplatoniker diese

1. $qu(x)$ bezeichnet das Quadrat über der Strecke x, $rec(x, y)$ das Rechteck mit den Seiten x, y. Außer diesen mnemotechnischen Abkürzungen werden die Symbole für die Grundrechenarten verwendet. Das bedeutet kein Kalkül, sondern lediglich eine abkürzende Schreibweise an Stelle der Rhetorik der Griechen.

Zahlen? Die Antwort wird mit Speusippos' Schrift *Über pythagoreische Zahlen* gegeben, woraus hervorgeht, dass der Ursprung dieser Zahlen nicht bei den Pythagoreern, sondern bei den alten Platonikern zu suchen ist.

10 Verallgemeinerungen Als mögliche Verallgemeinerungen der Seiten- und Diagonalzahlen werden untersucht. 10.1 Achimedes' Näherungswerte für $\sqrt{3}$ können sowohl durch das Heronische Verfahren als auch durch ein den Seiten- und Diagonalzahlen analoges Verfahren gefunden werden. 10.2 Für nichtquadratische Zahlen $N \geq 3$ lassen sich die Strecken mit $qu(d) = Nqu\,(a)$ als Höhen in einem rechtwinkligen Dreieck darstellen, womit Seiten- und Höhenzahlen gegeben sind. Diese werden in den Fällen untersucht, dass es eine Zahl K gibt mit $K^2 - N = \pm 1$ oder ± 2. In 10.3 sei eine allgemeine Folge der Seiten- und Höhenzahlen mit dem Anfangspaar (L, K) gegeben und sei dessen *Norm* $K^2 - NL^2 = \pm 1$, dann bedeutet dies eine Lösung der Pellschen Gleichung für N. Deren allgemeine Lösung ist identisch mit der Folge der Seiten- und Höhenzahlen mit der Norm $(\pm 1)^n$.

1 Der Vortrag des Theodoros

In der Einleitung von Platons Dialog *Theaitetos* erzählt Eukleides von Megara, dass Theaitetos (geb. ca. 415 v.u.Z.) in der Schlacht (369 bei Korinth) schwer verwundet wurde und tödlich an der Ruhr erkrankte. Weiter erinnert er sich an Sokrates, der kurz vor seinem Tode (399) einen Dialog mit Theodoros (ca. 460-390) und Theaitetos führte. Sokrates soll den Dialog dem Eukleides berichtet haben, der ihn dann aufgeschrieben hat.

Platon selbst war Anhänger des Sokrates, dennoch lässt er den Dialog als ein Zeugnis des Eukleides erscheinen. Diese Vorgeschichte ist wahrscheinlich ebenso Dichtung wie im Hauptteil die Begegnung von Sokrates mit Theodoros und dem jungen Theaitetos sowie dessen Bericht vom Vortrag des Theodoros. Jedoch erweist sich Platon darin als guter Kenner der Geometrie seiner Zeit, insofern ist der Dialog zwar kein Dokument, aber ein Zeugnis darüber, was der Beitrag des Theodoros zur Geometrie gewesen sein kann.

Ausgangspunkt ist Sokrates' Frage an Theaitetos „Was denkst du, dass Erkenntnis (*epistēmē*) ist?“ [*Tht.* 146c] Theaitetos antwortet: „Was jemand vom Theodoros lernen kann, Erkenntnisse sind die Geometrie und die anderen, welche du eben genannt hast (Astronomie, Harmonie und Logistik), auf der anderen Seite die Schuhmacherkunst und die Künste der übrigen Handwerker.“ Allein aus dieser Antwort geht hervor, dass Theodoros die geometrische Kunst beherrschte, denn er konnte sie dem Theaitetos lehren.[2] Von Theodoros erfahren wir noch, dass er Anhänger des Protagoras war,[3] jedoch sagt Theodoros von sich selbst, dass er sich bald vom bloßen Denken ab und der Geometrie zugewandt habe [165a], worin er für Beweise und notwendige Schlüsse bekannt wurde [162e]. Diese Einschätzung finden wir ebenso bei Xenophon, für den Theodoros ein tüchtiger Geometer war, als auch in der Geschichte der Geometrie des Eudemos, in der Hippokrates von Chios und Theodoros von Kyrene als die bedeutendsten Geometer ihrer Zeit genannt werden,[4] womit indirekt gesagt ist, dass die Beweise des Theodoros, im Hinblick auf Notwendigkeit und Allgemeinheit Ansprüchen genügten, die Hippokrates' Abhandlung über die Möndchen entsprechen.[5]

Auf die Aufzählung von Erkenntnissen erwidert Sokrates: „Gefragt war nicht, wovon es Erkenntnisse gäbe, . . . , sondern um die Erkenntnis selbst zu begreifen, was sie wohl sein mag" [146e]. Theaitetos kommt dieser Einwand bekannt vor und er berichtet von dem Vortrag des Theodoros:

> „Über *dynameis* zeichnete uns Theodoros etwas vor, indem er uns von der dreifüßigen und fünffüßigen bewies, dass sie als Länge nicht messbar wären durch die einfüßige. Und so ging er jede einzeln durch bis zur siebzehnfüßigen, bei dieser hielt er inne. Uns nun fiel ein, da der *dynameis* unendlich viele zu sein schienen, wollten wir versuchten, sie zusammenzufassen in eins, wodurch wir alle *dynameis* bezeichnen könnten" [147d].

Kurz gesagt, Theodoros bewies mittels einer Zeichnung, dass bestimmte Strecken (*dynameis*), nicht kommensurabel zur Einheitsstrecke sind. Dazu erklärt Theaitetos wie sie deren Definition gefunden haben: Sie zweiteilten die Zahlen;[6] diejenigen, die in zwei gleiche Faktoren zerlegt werden können, verglichen sie mit dem Quadrat und nannten sie quadratisch und gleichseitig. Diejenigen aber, die nur in zwei verschiedene Faktoren zerlegbar sind, verglichen sie mit dem Rechteck und nannten sie rechteckige (*promēkē*) Zahlen. Weiter heißt es:

> „Alle (*osai*) Linien, die im Quadrat eine gleichseitige ebene Zahl bilden, nannten wir Längen (*mēkei*), alle, die eine ungleichseitige (*hete-*

2. Vgl. Aristoteles, *Met.* 981b9: „Darum sehen wir die Kunst mehr für Wissenschaft an als die Erfahrung, denn die Künstler können lehren, die Erfahrenen aber nicht."

3. Theodoros war als Anhänger des Protagoras kein Pythagoreer, in deren Katalog er fälschlich von Iamblichos aufgezählt wurde [DK58 A].

4. Vgl. Xenophon, *Mem.* IV.2 (10). Proclus, *In Eucl*, p. 66 (nach der Ausgabe von Friedlein).

5. Rudio, p. 48 f. Theodoros und Hippokrates dürften die ersten Geometer gewesen sein, die Theoreme formuliert und bewiesen haben. Vgl. Boehme (2007).

6. Zahlen sind hier immer natürliche, d.h. positive ganze Zahlen.

> *romēkē*)[7] bilden, nannten wir *dynameis*, weil sie mit den Längen kein gemeinsames Maß haben, wohl aber die Flächen, die sie erzeugen können" [148a-b].

Zur Erklärung sei a die Einheitsstrecke, eine Strecke c ist eine Länge, wenn für die Quadrate gilt $qu(c) = K^2 qu(a)$,[8] wobei K eine Zahl ist und $c = Ka$. Eine Strecke d mit $qu\,(d) = Nqu(a)$, wobei N eine nichtquadratische Zahl ist, heiße *dynamis*, was mit $d = dyn(N, a)$ bezeichnet wird.[9] Nach Theodoros ist jede derartige Strecke mit der Einheit inkommensurabel; aber wie der Name sagt, ist sie in der Potenz (*dynamei*), d. h. das von der Strecke erzeugte Quadrat, kommensurabel zur Einheit. Dabei sind Definitionen vorausgesetzt, die Euklid wie folgt formuliert hat:

Definition 1 (V.1)[10] *Teil einer Größe ist eine Größe, die kleinere von der größeren, wenn sie die größere misst.*

Gegeben seien zwei Größen A, B, dann ist B ein Teil von A, wenn $A = B_1 + \ldots + B_p$, $B_i = B$, $i = 1, \ldots, p$. Sei I die Einheit, dann ist die Zahl P gegeben durch $P = I_1 + \ldots + I_p$, $I_i = I$, $i = 1, \ldots, p$; es ist dann $A = PB$, $P = PI$ [VII. *Def.*15].

Definition 2 (X.1) *Kommensurabel heißen Größen, die von demselben Maß gemessen werden.*

Demnach sind zwei Größen A, B kommensurabel, wenn es eine Größe E gibt und Zahlen P, Q, so dass $A = PE, B = QE$.

Definition 3 (VII.20) *Zwei Paare von jeweils kommensurablen Größen* $(A, B), (C, D)$ *stehen in Proportion, geschrieben* $A : B \sim C : D$, *wenn es Größen* E, F *gibt und Zahlen* P, Q, *so dass*

$$A = PE, B = QE, C = PF, D = QF.^{11}$$

Damit wird das Verhältnis zweier kommensurabler Größen auf ein Zahlenverhältnis zurückgeführt, denn setzen wir für $E = F = I$ die Einheit, dann ist nach Definition

7. Nach *Elem.*I, Def. 22 bedeutet dies rechteckig. Mit *Elemente* werden immer diejenigen des Euklid bezeichnet.

8. Bei Zahlen schreibe ich für das Produkt $K \cdot K = K^2$ und für $K \cdot L = KL$.

9. Algebraisch ist $d = \sqrt{N}\ a$; da aber N keine Quadratzahl ist, gab es für die Griechen keine Wurzel als Zahl. Der Name *dynamis* besagt nicht, dass die Strecke eine Potenz ist, vielmehr, dass sie in der Potenz kommensurabel zur Einheit ist; sie lässt sich daher weder mit Wurzel noch mit Potenz übersetzen. „Manches heißt nach seiner bloßen Ähnlichkeit Vermögen (*dynamis*), wie wir in der Geometrie etwas als vermögend oder unvermögend bezeichnen, weil es auf gewisse Weise ist oder nicht ist" [Aristoteles, *Met.* 1046a6]. Euklid nennt in *Elem.* X, Def. 2 derartige Strecken „*dynamei* messbar", anders als bei Platon (s.u.) sind sie ausdrückbar (*rētos*).

10. Die Zahlen in Klammern, wie hier V.1, bezieht sich auf die *Elemente* des Euklid.

11. Vgl. Taisbak (1971) 62.

$A : B \sim P : Q$. Zwei Paare kommensurabler Größen stehen in Proportion, wenn sie dasselbe Zahlenverhältnis haben, $A : B \sim P : Q$ und $C : D \sim P : Q$. [12]

Theorem des Theodoros *Gegeben sei eine Strecke a und eine nichtquadratische Zahl N, dann ist die Strecke d=dyn* (N, a) *nicht kommensurabel zu a.*

Welche Bedeutung dieses Theorem für die griechische Geometrie hatte lässt sich einem Bekenntnis von Platon in seinem späten Dialog *Nomōn* entnehmen [819c ff]: Er glaubte, dass sich Strecke gegen Strecke, Fläche gegen Fläche, ebenso Rauminhalte natürlich messen lassen, was er nun für eine schimpfliche Unwissenheit hält. Erst spät habe er davon gehört, dass dies keineswegs gilt und sich nicht nur für sich geschämt, sondern auch für alle Hellenen, denn deren Einstellung dazu schien ihm „die einer Herde von Schweinen zu sein".

2 Eine Rekonstruktion des Beweises

Außer Platons Dialog und dem darin enthaltenen Bericht des Theaitetos über den Vortrag des Theodoros sind keine weiteren Zeugnisse bekannt. Daher kann sein Beweis nur rekonstruiert werden, und zwar unter Berücksichtigung der damaligen Mittel der Geometrie, soweit uns diese aus anderen Quellen überliefert sind. Eine ähnliche Aufgabe stellt sich der Archäologie, z.B. einen Tempel rekonstruieren, von dem nur die Fundamente und einige Trümmer erhalten sind. Da bei jeder Rekonstruktion zusätzliche Annahmen gemacht werden, ist das Ergebnis eine Hypothese, deren Glaubwürdigkeit an den konkreten historischen Zusammenhängen zu messen ist, in die sie gestellt wurde.

Die dem Beweis des Theodoros zugrundeliegenden Bedingungen werden im Dialog genannt: 1. die geometrische Darstellung, denn Theodoros führte ihn mittels einer Zeichnung, so dass es zunächst darum geht, die jeweils gezeichnete Figur zu konstruieren, womit der Beweis zu führen ist.[13] 2. Theaitetos Bericht von den

12. Die so definierte Proportion entspricht der Architektur der Tempel, welche auf Symmetrie (Gleichmaß) beruht, in dem ein gemeinsames Maß (modulus) zu Grunde gelegt wird, so dass die Verhältnisse der Teile des Tempels durch Zahlenverhältnisse gegeben sind; vgl. Vitruv, III.1.1, Knell (1988) 41ff. Dementsprechend betont Artmann [1985, 302 ff] die elementare Bedeutung von Proportionen gegenüber Knorr (1975), der eine elementare Kongruenzgeometrie an den Anfang stellt, aber die hoch entwickelte Baukunst der Griechen außer Acht lässt.

13. Dies geht auf die Anfänge der Geometrie zurück, so werden von Hippokrates zur Quadratur der Möndchen nicht gewöhnliche Figuren (*diagrammaton*) beschrieben [Rudio (1907) 48]. Gemäß Platon sagen die Menschen selbst, wie es ist, „wenn man sie zu den Figuren führt" [*Phaedo*, 73a-b)]. Auch Aristoteles hebt die Bedeutung der Diagramme hervor, z. B. beim Regenbogen lassen sich die Eigenschaften aus der gezeichneten Figur ersehen [*Meteor.* 375b 18]. Vgl. Knorr (1975) 69 ff.

einzelnen Beweisen des Theodoros sollte zeigen, dass Theodoros das Theorem im Prinzip für jede rechteckige Zahl gezeigt hat, aber nicht allgemein für jede dieser Zahlen als solche.[14] 3. konnte Theaitetos auf Grund der einzelnen Beweise des Theodoros auf deren Fortsetzung schließen, so dass allgemein eine *dynamis* nicht kommensurabel zur Einheit ist.

Die letzte Bedingung wird meines Wissens nach bisher von keiner Rekonstruktion erfüllt, daher kam man zu der Ansicht, Theodoros habe mit seinem Beweis bei 17 aufgehört, weil dieser für größere Zahlen nicht oder nur mühsam zu führen, jedenfalls nicht zu verallgemeinern war.[15] Die Bedingung folgt jedoch aus Theaitetos Definition der *dynameis* als Strecken, die nur in der Potenz mit den Längen kommensurabel sind. Hier wäre der Einwand möglich, dass dies erst ein späteres Resultat des Theaitetos war, was ihm Platon bereits im Dialog mit Theodoros unterstellt. Jedoch definiert Theaitetos darin lediglich Quadrat- und Rechteckzahlen, die den Pythagoreern als figurierte Zahlen bekannt waren und hier zur Einteilung der Zahlen gebraucht werden. Insofern konnte Theaitetos die Erkenntnis von der Inkommensurabilität aller *dynameis* nur auf Grund von Theodoros Ausführungen gewonnen haben.

Erst die von Platon angefügte Bemerkung: „Bei den Körpern findet Ähnliches statt“ [*Tht.* 148b] verweist auf die weitergehende Theorie. Der geometrische Beweis des Theodoros ist aber keineswegs auf Körper übertragbar, denn dazu wäre für eine Zahl N, die keine Kubikzahl ist, nicht nur zu zeigen, dass eine *dynamis* d mit $Kub\,(d) = NKub(a)$ inkommensurabel zu a ist, sondern sie wäre noch als Würfelkante zu konstruieren, was erst der nachfolgenden Generation gelang.[16] Daher gilt Platons Bemerkung einem späteren Beweis des Theaitetos, der sowohl für Quadrate als auch Kuben zu führen ist. Man könnte fragen, ob Theaitetos schon im Anschluss an den Vortrag des Theodoros einen derart allgemeinen Beweis gefunden hat. Dies ist auszuschließen, weil die Mittel dafür noch nicht zur Verfügung standen, so dass Theodoros nur einzelne Beweise führen konnte, was ebenso für den jungen Theaitetos zutraf. Andererseits zeigt diese Bemerkung, dass Theaitetos später die Zahlentheorie weiter entwickelt hat, insbesondere die Theorie der *relativ primen* Zahlen,womit für Flächen und Körper zu beweisen war: *Eine dynamis ist inkommensurabel zur Einheit.*[17]

14. Vgl. Aristoteles, *Ana. post,* 74a 26 ff. „Wenn man von jedem Dreieck (...) beweist, dass es (in der Summe) zwei rechte Winkel enthält: das gleichseitige für sich, das ungleichseitige und das gleichschenklige, so weiß man noch nicht von dem Dreieck, dass seine Winkel zwei Rechten gleich sind, außer in sophistischer Weise.“

15. Vgl. Knorr (1975) Kap. IV. Burnyeat (1978) 505, hält Theodoros Stopp bei 17 für unwesentlich.

16. $Kub\,(x)$ bezeichnet den Würfel mit Kante x , zur Konstruktion vgl. Archytas DK47 A14.

17. Vgl. *Elem.* VII. Def. 12, Theoreme VII.20-27. Van der Waerden (1966) 275 rekonstruiert einen entsprechenden Beweis, setzt aber die Zahlentheorie von Buch VII als ein Werk der Py-

N = 3. Nach Platon führte Theodoros den Beweis zuerst für die dreifüßige *dynamis*, woraus zu schließen ist, dass der Fall $N = 2$ bereits anders bewiesen wurde. Gegeben sei die Einheitsstrecke a, dazu ist zunächst die *dynamis* d mit $qu(d) = 3qu(a)$ zu konstruieren. Dies bedeutet die Quadratur des Rechtecks $Rec\,(3a, a)$, was Aristoteles wie folgt erklärt: „Wer behauptet dass die Quadratur das Auffinden der mittleren Proportionalen ist, der macht den Grund der Sache namhaft."[18] Die Quadratur einer geradlinigen Figur setzt Hippokrates voraus, ebenso dieselben Proportionen bei ähnlichen Figuren, was allein durch die Anschauung begründet ist, ohne eine analytische Definition. Ebenso war bekannt, dass die *dynamis* d als mittlere Proportionale $a : d \sim d : 3a$ gegeben ist; zu deren Konstruktion wird über der Strecke $4a$ mittels eines Halbkreises ein rechtwinkliges Dreieck mit den Hypotenusenabschnitten a, $3a$ und Höhe d errichtet. (Fig. 2.1)[19]

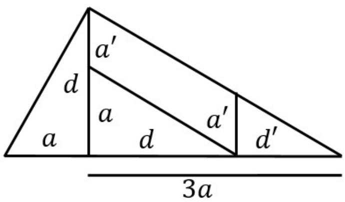


Fig. 2.1

Ein rechtwinkliges Dreieck werde durch das Paar seiner Katheten bezeichnet. Das Dreieck (a, d) lässt sich in $(d, 3a)$ einbeschreiben, so dass die rechten Winkel zusammenfallen, die Restfläche besteht dann aus einem Parallelogramm mit zwei gleichen Seiten a' und dem rechtwinkligen Dreieck $(a', d') = (d - a, 3a - d)$; diese drei Dreiecke sind einander ähnlich.

Dementsprechend folgt aus $a : d \sim d : 3a$ mit korrespondierender Subtraktion $a : d \sim (d - a) : (3a - d)$,[20] bzw. $a : d \sim a' : d'$. Aus $qu\,(d) = 3qu\,(a)$ folgt mittels Quadratur $a < d < 2a, d < 3a < 2d$ also ist $a' = d - a < a$ und $d' = 3a - d < d$. Seien a, d kommensurabel, dann gibt es eine Strecke e und Zahlen R, S, so dass $a = Re, d = Se$. Es ist dann $a' = R'e, d' = S'e$ mit $R' = S - R, S' = 3R - S$. Diese absteigende Rekursion lässt sich fortsetzen, schließlich entsteht eine unbegrenzt absteigende Folge von rechtwinkligen Dreiecken $(a, d) > (a', d') > (a'', d'') > \ldots$ sowie eine absteigende Folge von Zahlenpaaren $(R, S) > (R', S') > (R'', S'') > \ldots$, die jedoch durch das Paar der Einheiten $(1, 1)$ begrenzt ist. Da beides zusammen unmöglich ist, können die Strecken a, d nicht kommensurabel sein.[21]

thagoreer voraus. Dies widerspricht Platons Dialog, weil damit die Mittel für einen allgemeinen Beweis zur Verfügung gestanden hätten, Theodoros aber den Beweis für jede Zahl einzeln vorführt

18. *De An.* II.2, 413a 13-20. Vgl. *Met.* III.2, 996b 18.

19. Vgl. *Elem.* VI.13. Die Bezeichnung von Strecken mit Buchstaben sowie die Bezeichnung von gleichen (kongruenten) Strecken mit demselben Buchstaben geht auf die praktische Geometrie zurück, wo Strecken mit ihren Maßzahlen bezeichnet wurden; d. h. das Zeichen steht für eine Klasse kongruenter Strecken.

20. Vgl. *Elem.* V.19.

21. Dieser Beweis ist verwandt, aber nicht gleich, dem unendlichen Abstieg von Fermat; denn hier wird der Abstieg geometrisch, nach Fermat aber algebraisch begründet. Boyer (1968) 387

$5 \leq N \leq 8$. Für $N = 5$ wird die *dynamis* $d = dyn\,(5, a)$ mit $a : d \sim d : 5a$ ebenfalls als mittlere Proportionale konstruiert. Es ist $a : d \sim 2a : 2d$, also folgt mit korrespondierender Subtraktion $a : d \sim (d - 2a) : (5a - 2d)$, dabei ist $2a < d < 3a, 2d < 5a < 3d$, so dass $a' = d - 2a < a, d' = 5a - 2d < d$ und $a : d \sim a' : d'$. Aus der Verkleinerung der Strecken im selben Verhältnis folgt wie vorher, dass die Strecken a, d nicht kommensurabel sein können.

Für $N = 6, 7, 8$ gelten *analoge* Ungleichungen, so dass der Beweis ebenso zu führen ist. Für $N = 8$ ist außerdem $d = 2c$ mit $c = dyn(2, a)$.

$10 \leq N \leq 15$. Die *dynamis* wird jeweils als mittlere Proportionale gemäß $a : d \sim d : Na$ konstruiert. Es ist $3a < d < 4a, 3d < Na < 4d$, so dass sich mit der korrespondierenden Subtraktion $a : d \sim (d - 3a) : (Na - 3d)$ kleinere Strecken im selben Verhältnis ergeben, woraus der Widerspruch folgt. Für $N = 12$ ist $d = 2c$ und $c = dyn\,(3, a)$.

$N = 17$. Analog zum Vorhergehenden ist die *dynamis* inkommensurabel zur Einheit.

Der Beweis beruht auf der Annahme, dass eine Größe unbegrenzt teilbar ist, was auf die Naturphilosophie des Anaxagoras zurückgeht. In den von Simplikios überlieferten Fragmenten heißt es „das Kleine war grenzenlos“ [DK59 B1], „denn weder gibt es beim Kleinen je ein Kleinstes, sondern stets ein noch Kleineres“ [B3]. Beim Quantitativen unterscheidet Aristoteles Menge, wenn es zählbar, und Größe, wenn es messbar ist [*Met.*1020a 7]. Menge ist in nicht Kontinuierliches teilbar, Größe ist ein Kontinuierliches, das „in ein stets wieder Teilbares teilbar ist“.[22] Zwar kritisiert Aristoteles jene, die beweisen wollen, dass sich die Diagonale nicht durch die Seite messen lässt, und dabei mit dem Argument des Zenon für die Unmöglichkeit der Bewegung beginnen. Denn das hieße die Nicht-Ursache als Ursache setzen; die Unmöglichkeit der Bewegung hängt aber in keiner Weise mit der Inkommensurabilität zusammen [*An. pr.*65b 16-21].[23] Insofern richtet sich Aristoteles' Kritik keineswegs gegen einen unbegrenzten Abstieg, vielmehr erwähnt er ihn ausdrücklich: Bei der Zahl ist in Richtung zum Kleinsten eine Grenze, hingegen geht es bei der Größe in Richtung zum Kleineren über jede Größe noch hinaus [*Phys.* 207b 4].

Die Quasi-Allgemeinheit des Beweises. Erinnern wir uns an den Dialog: Zunächst schien es Theaitetos, dass es unbegrenzt viele *dynameis* gebe. Nachdem er je-

zeigt die Irrationalität von $\sqrt{3}$ mit einem solchen Abstieg.

22. *Phys.* 231b 16. Noch Geminos betont, dass Geometer annehmen, das Kontinuierliche sei teilbar, nach Proklos *In Eucl.* 278. Modern ist es ein Axiom der Quantität: „Zu jeder Größe gibt es eine kleinere.“ Hölder (1901) 7.

23. Dennoch wird seit der Antike versucht, einen solchen Zusammenhang herzustellen, obwohl er von Aristoteles ausdrücklich ausgeschlossen wird, vgl. Heath (1949) 30 ff.

doch deren Begriff erfasst hat, folgert er unmittelbar aus den Einzelbeweisen des Theodoros, dass alle *dynameis* mit den Längen nicht kommensurabel sind, wohl aber in der Potenz, d.h. quadriert, sind sie kommensurabel. Diese Verallgemeinerung war jedoch keine einfache Induktion, indem der Satz als richtig angenommen wurde, weil er für die nicht quadratischen Zahlen $3 \leq N \leq 17$ richtig war. Vielmehr waren die einzelnen Beweise Paradigmen eines allgemeinen Beweises für *alle* nichtquadratischen Zahlen N. Dazu war jeweils eine Zahl K zu finden, so dass $K^2 < N < (K+1)^2$, damit demonstrierte Theodoros die Beweise für $1 \leq K \leq 4$.[24] Theaitetos fand dann nicht nur deren Gemeinsamkeiten, sondern erkannte auch mit einer verständigen Abstraktion das Gemeinsame des Verfahrens und die allgemeine Gültigkeit des Theorems. Hans Freudenthal (1953) hat für einen derartigen Beweis den Begriff „quasi allgemein“ geprägt; hier ist die Quasiallgemeinheit ein Kriterium für die Rekonstruktion des Beweises von Theodoros.

Für uns führt diese Rekonstruktion auf einen allgemeinen Beweis, den wir wie folgt formulieren können: Sei eine nicht quadratischen Zahl N und eine Strecke a gegeben, für die *dynamis* $d = dyn\,(N, a)$ gilt dann $qu\,(d) = Nqu(a)$, also die Proportion $a : d \sim d : Na$, so dass d als mittlere Proportionale wie oben mit dem Höhensatz konstruiert werden kann. Für die Zahl K mit $K^2 < N < (K+1)^2$ folgt $Ka < d < (K+1)\,a$, $Kd < Na < (K+1)\,d$. Weiter folgt aus $Ka : Kd \sim d : Na$ mit korrespondierender Subtraktion $a : d \sim (d - Ka) : (Na - Kd)$, es ist dann $a' = (d - Ka) < a, d' = Na - Kd < d$ und $a : d \sim a' : d'$; wie oben folgt daraus, dass die Strecken a, d inkommensurabel sind.

Korollar *Sei N keine Quadratzahl, dann gibt es keine Zahlen P, Q, so dass die Gleichung* $Q^2 = NP^2$ *erfüllt ist.*

Denn sei $Q^2 = NP^2$, dann erfüllen die kommensurablen Strecken $a = Pe$, $d = Qe$, die Gleichung $qu\,(d) = Nqu\,(a)$, im Widerspruch zum Theorem des Theodoros.

Dieses zahlentheoretische Korollar lässt sich auch mit euklidischen Mitteln rein zahlentheoretisch beweisen. Dazu ist die im geometrischen Beweis angenommene korrespondierende Subtraktion durch eine arithmetische korrespondierende Subtraktion zu ersetzen. Aus Platons Bemerkung, dass Theodoros den Beweis mittels einer Zeichnung geführt habe, geht aber hervor, dass es zur Zeit des Theodoros noch keine auf Definitionen beruhende Zahlentheorie gab, somit dürfte diese erst im 4. Jhd. entstanden sein. Dazu gehörten wohl zuerst die von Theaitetos formulierten Definitionen von Quadrat- und Rechteckzahlen; anzunehmen ist, dass er auch die Definition der Proportion von Zahlenpaaren aufgestellt hat. Diese entspricht der Proportion von Größenpaaren, wie sie in Definition 1.3 formuliert

24. Euklid geht ähnlich vor, wenn er eine allgemeine Induktion quasi allgemein für $n = 1, 2, 3$ beweist, vgl. *Elem.* VII.1,2; X.2

wurde. Seien nunmehr $(A, B), (C, D)$ Paare von Zahlen mit $A > C, B > D$, dann ist $A - C = P(E - F), B - D = Q(E - F)$, also gilt die korrespondierende Subtraktion $A : B \sim (A - C) : (B - D)$.[25]

Nach dem Korollar ist $N \neq \left(\frac{S}{R}\right)^2$, d. h. $\sqrt{N}$ ist irrational. Dazu gab Richard Dedekind in seiner berühmten Arbeit „Stetigkeit und irrationale Zahlen" einen algebraischen Beweis [1972, 12]: Das Korollar ist erfüllt, wenn für alle Z ahlenpaare (R, S) die *Norm* $\Delta(R, S) = S^2 - NR$ nicht Null ist. Mit anderen Bezeichnungen nimmt Dedekind an, dass es Zahlen S, R gibt, sodass $S^2 - NR^2 = 0$ und R die kleinste Zahl ist, für die eine derartige Gleichung möglich ist. Er definiert die Zahl K mit $K^2 < N < (K + 1)^2$ und setzt scheinbar willkürlich $R' = S - KR$, $S' = NR - KS$ (dieselbe absteigende Rekursion wie oben), wobei $R' < R$. Damit gilt die Identität $S'^2 - NR'^2 = \left(K^2 - N\right)\left(S^2 - NR^2\right) = 0$, also ist auch $S'^2 - NR'^2 = 0$, was der Annahme widerspricht, woraus die Behauptung folgt.[26]

Rekonstruktion eines zweiten Beweises Sei $N \geq 2$ eine nicht quadratische Zahl, a eine Einheitsstrecke und $d = dyn\,(N, a)$, ferner sei K eine Zahl so dass $(K - 1)^2 < N < K^2$. Es ist dann $(K - 1)\,a < d < Ka, (K - 1)\,d < Na < Kd$. Aus $Ka : Kd \sim d : Na$ folgt $a : d \sim (Ka - d) : (Kd - Na)$ sowie $a' = Ka - d < a, d' = Kd - Na < d$ und $a : d \sim a' : d'$. Wir erhalten also jeweils kleinere Strecken im selben Verhältnis, daraus folgt, dass a, d nicht kommensurabel sein können.

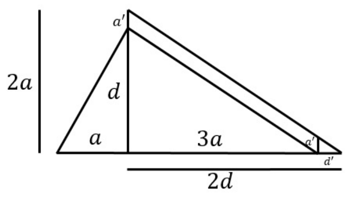


Fig. 2.2

Für $N = 3$ ist $K = 2$ und es gelten dieselben Ungleichungen wie beim ersten Beweis $a < d < 2a, d < 3a < 2d$. Aus $2\;a : 2d \sim d : 3a$ folgt mit korrespondierender Subtraktion $a : d \sim (2a - d) : (2d - 3a)$ und es ist $a' = 2a - d < a, d' = 2d - 3a < d$. Geometrisch wird das rechtwinklige Dreieck $(d, 3a)$ in das vergrößerte Dreieck $(2a, 2d)$ eingebettet, die Differenz ist ein Parallelogramm und das dazwischen liegende Dreieck (a', d'). (Fig. 2.2)

Die beiden möglichen Beweise des Theodoros unterscheiden sich durch ihre Rekursion,

1. $\begin{pmatrix} -K & N \\ 1 & -K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d' \\ a' \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} K & -N \\ -1 & K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d' \\ a' \end{pmatrix}$

25. Vgl. *Elem.* VII. 11. Die Definition der Proportion ist ebenso Voraussetzung für VII. 20, 21, worauf schließlich VII. 27 beruht, womit Theaitetos das Theorem des Theodoros für Flächen und Körper allgemein beweisen konnte, s. o. Anm. 17.

26. Dabei verwendet Dedekind implizit die Identität von Brahmagupta für $\Delta(R', S') = \Delta(1, K) \cdot \Delta(R, S)$, d. h. $(NR - KS)^2 - N(S - KR)^2 = (K^2 - N)(S^2 - NR^2)$, s.u. Kap. 10.3.

Beide Matrizen haben eine Inverse genau dann, wenn $K^2 - N = \pm 1$, also im ersten Fall für $N = 2$, $K = 1$, im zweiten Fall für $N = 3, K = 2$. Die umgekehrte, im allgemeinen nicht inverse, aufsteigende Rekursion ist in beiden Fällen gegeben durch $\begin{pmatrix} K & N \\ 1 & K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d' \\ a' \end{pmatrix}$.

3 Die Diagonale im Quadrat

Theodoros hat die zweifüßige *dynamis* ausgelassen, jedoch gilt der allgemeine Beweis auch dafür, wozu $d = dyn\,(2, a)$ als mittlere Proportionale zu konstruieren wäre. Andererseits ist d als Diagonale im Quadrat gegeben, so dass direkt deren Inkommensurabilität mit der Seite zu zeigen ist, was Platon im *Theaitetos* offenbar voraussetzt. Auch dazu soll eine Rekonstruktion vorgelegt werden.

3.1 Ausgangspunkt ist das Verhältnis des Quadrats der Diagonalen zum Quadrat der Seite, wie es Platon in seinem frühen Dialog *Menon* [85a-b] gezeigt hat (Fig.3.1).

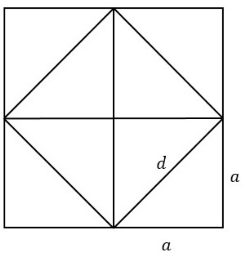


Fig. 3.1

Aus den Anzahlen der gleichschenkligen rechtwinkligen Dreiecke mit Seite a und Diagonale d folgt: *Im Quadrat mit Seite a und Diagonale d ist* $qu\,(d) = 2qu(a)$. Man könnte dies den „Satz von Platon“ nennen, obwohl der Sachverhalt wohl lange bekannt war.

Daraus folgt $qu\,(2a) = 2qu(d)$, besteht also das Streckenpaar (a, d) aus Seite und Diagonale eines Quadrats, dann gilt dies auch für das Paar $(d, 2a)$. Wird nun das größere Quadrat dem kleineren mit einer gemeinsamen Ecke umbeschrieben, dann ist die Differenz der beiden Quadrate offensichtlich ein Gnomon, bestehend aus einem Quadrat mit Seite a' und Diagonale d', sowie zwei Rechtecken $rec\,(a, a')$ (Fig. 3.2).

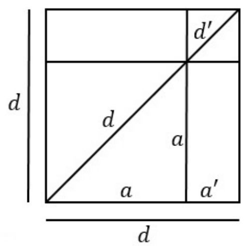


Fig. 3.2

Es ist $a' = d - a, d' = 2a - d$, und weil $a < d < 2a < 2d$ ist, folgt $a' < a, d' < d$. All dies dürfte den Geometern bekannt gewesen sein, bis einer von ihnen eine Berechnung (*logismos*) versuchte. Mit einer Messstrecke e gebe es Zahlen R, S, so dass $a = Re, d = Se$, dann ist $a' = R'e, d' = S'e$, wobei $R' = S - R$, $S' = 2R - S$ und $R' < R, S' < S$. Dasselbe Verfahren kann wiederum auf das Quadrat mit Seite und Diagonale a', d' angewandt und beliebig fortgesetzt werden, so dass schließlich eine unbegrenzte Folge von immer kleineren

Strecken entsteht $a > a' > a'' > \ldots$. Für die Zahlen entsteht dabei eine Folge $R > R' > R'' \ldots$, diese ist jedoch durch die Einheit begrenzt, was beides zusammen unmöglich ist, so dass Seite und Diagonale a, d kein gemeinsames Maß haben können.

Fassen wir den Beweis zusammen, dann ist für ein Quadrat Seite und Diagonale a, d eine unbegrenzte Folge von Quadraten definiert mit den Seiten und Diagonalen $a_1 = d - a$, $d_1 = 2a - d$, sowie $a_{n+1} = d_n - a_n, d_{n+1} = 2a_n - d_n$.

Lemma 3.1 i) *Es ist* $a = a_1 + d_1$ *sowie* $a_n = a_{n+1} + d_{n+1}$. ii) *Die Folge der Seiten und Diagonalen* a_n, d_n *enthält die Wechselwegnahme von* a, d.

i) folgt aus $a = (d - a) + (2a - d)$, und ebenso für a_n. ii) ergibt sich rekursiv: Es ist

1) $d = a + a_1, a > a_1$, und $a = a_1 + d_1$, ebenso ist

2) $d_1 = a_1 + a_2, a_1 > a_2$, so dass 2)' $a = 2a_1 + a_2$, $a_1 > a_2$. Mit $a_1 = a_2 + d_2$ und

3) $d_2 = a_2 + a_3, a_2 > a_3$ folgt 3)' $a_1 = 2a_2 + a_3, a_2 > a_3$.

Somit ergeben die Gleichungen 1), 2)', 3)' usw. eine Wechselwegnahme, deren Quotienten bilden den periodischen Kettenbruch für $\sqrt{2} = \left[1; \overline{2}\right]$.

T.L. Heath konstruiert formal denselben Beweis, bezieht ihn aber auf Fig. 3.3.

Lemma 3.2 *Die Strecken* a, d *seien Seite und Diagonale eines Quadrates, dann sind* $a_1 = d - a, d_1 = a - a_1$*, ebenso Seite und Diagonale eines Quadrats.*

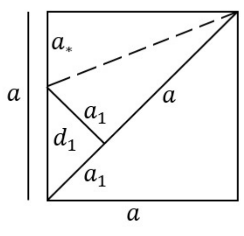


Fig. 3.3

In Fig.3.3 ist zu zeigen, dass $a_1 = a_*$; dies folgt aus dem Satz des Pythagoras, angewandt auf die beiden rechtwinkligen Dreiecke mit den Seiten a, a_1 sowie a, a_* mit einer gemeinsamen Hypotenuse. Demnach ist $qu\,(a) + qu\,(a_1) = qu\,(a) + qu\,(a_*)$, es folgt die Behauptung.[27]

Aus $d_1 + d = 2a$ folgt $d_1 = 2a - d$,. sodass die Rekursion dieselbe ist wie mit Fig.3.2. Jedoch waren im Gegensatz zum Satz des Pythagoras die Gleichungen in Fig. 3.2 unmittelbar einsichtig, so dass die Inkommensurabilität eher damit entdeckt werden konnte. Es ist jeweils $d_n =$

27. Toeplitz (1949) 4 benutzt dieselbe Figur und beweist $a_1 = a_*$ mit dem Kongruenzsatz SSW_g , angewandt auf die beiden rechtwinkligen Dreiecke. Jedoch wurden Kongruenzsätze erst im 4. Jhd. an der Akademie aufgestellt, aber auch nur soweit, wie sie in den *Elementen* formuliert sind (ohne SSW_g). Hingegen war der Satz des Pythagoras bereits im 5. Jhd. bekannt und für Hippokrates eine wesentliche Voraussetzung.

$a_n + a_{n+1}$, $a_n > a_{n+1}$, so dass $a_{n+1} < \frac{1}{2}a_n$; Heath schloss daraus mit *Elem.*X.1, dass schließlich $a_n < e$ für jede gegebene Einheitsstrecke e. Angenommen Seite und Diagonale a, d hätten ein gemeinsames Maß, dann wäre a_n ein Vielfaches davon, was aber nicht kleiner als das Maß selbst sein kann, so dass es auf Grund dieses Widerspruchs kein gemeinsames Maß geben kann. Jedoch ist dieser Schluss nicht elementar, sondern beruht auf einem Axiom des Eudoxos, das erst gegen Mitte des 4. Jhd. aufgestellt wurde, während die Inkommensurabilität von Seite und Diagonale des Quadrats bereits im 5.Jhd. entdeckt wurde.

Werden die beiden anfänglichen Quadrate mit den Streckenpaaren für die Seiten und Diagonalen (a, d) sowie $(d, 2a)$ längs der Diagonalen zusammengesetzt, entsteht das Quadrat mit Seite und Diagonale $(d + a, 2a + d)$. Dieselbe umgekehrte, aufsteigende Rekursion lässt sich auch für Zahlenpaare (P, Q) aufstellen, indem die Summe mit dem assoziierten Paar gebildet wird, mit $(P, Q) + (Q, 2P) = (Q + P, 2P + Q)$ ist dann eine aufsteigende Rekursion dieser Zahlen gegeben. Das Interesse an „Seiten- und Diagonalzahlen“ konnte aber erst später, nach der Entdeckung der Inkommensurabilität von Seite und Diagonale des Quadrates entstanden sein, so dass sie auch hier erst später zu behandeln sind.

Gehen wir von einem ursprünglichen Beweis mit Fig. 3.2 aus, dann erweist sich die Rekonstruktion des Beweises von Theodoros als eine Verallgemeinerung davon. Dazu war die Voraussetzung $qu\,(d) = 2qu\,(a)$ als Proportion $a : d \sim d : 2a$ aufzufassen, und an Stelle der Differenz der Quadrate die korrespondierende Subtraktion $a : d \sim (d - a) : (2a - d)$ zu bilden, wobei beide Proportionen an Fig. 3.2 abzulesen sind. Dies konnte der Ausgangspunkt gewesen sein, um die Inkommensurabilität für jede *dynamis* $d = dyn\,(N, a)$ mit der Ausgangsstrecke a zu beweisen. Jedoch ist das Quadrat ein Sonderfall, während der obige Beweis für $N = 3$ den allgemeinen Fall darstellt, was der Grund gewesen sein kann, dass Theodoros damit begonnen hat. Mit der Voraussetzung, dass dieses den Hörern des Theodoros bekannt war, erwähnt Platon im *Theaitetos* nur den quasi-allgemeinen Beweis für $N \geq 3$.

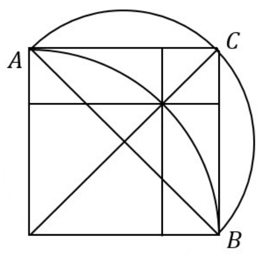


Fig. 3.4

Kann man daher nicht auch vermuten, dass Theodoros selbst zu Anfang die Inkommensurabilität am Quadrat entdeckt und als solche begriffen hat?

Zusatz. Ein ähnlicher Anfang lässt sich bei Hippokrates feststellen. Er fand das erste Möndchen (*mēniskos*) entsprechend Fig. 3.4 und bewies, dass dessen Fläche $\mathcal{M}$ gleich dem Dreieck ABC ist, wobei er das Prinzip benutzte: Ähnliche Segmente der Kreise haben dasselbe Verhältnis zueinander wie ihre Basis in der Potenz, [Rudio, 48].

Bezeichnen wir das Segmente über einer Strecke s mit $\widehat{s}$, dann ist $\widehat{AB} = 2\widehat{AC}$ (Fig. 3.4) Für die Flächen gilt dann $\mathcal{M} + \widehat{AB} = ABC + \widehat{AC} + \widehat{BC}$, daraus folgt $\mathcal{M} = ABC$.- Fig. 3.2 ist Fig. 3.4 verwandt, denn sie lässt sich der Konstruktion des Möndchens einbeschreiben.

3.2 Zur Inkommensurabilität der Diagonalen im Quadrat wird im Anhang von *Elem.* X als Theorem 117 ein arithmetischer Beweis überliefert, von dem angenommen wird, es sei abgesehen von einigen Modernisierungen der primäre Beweis gewesen.[28] Dieser hätte dann wie folgt ausgesehen: Für die Diagonale des Quadrats d und die Seite a ist vorausgesetzt $qu\,(d) = 2qu(a)$. Seien d, a kommensurabel, dann haben sie das Verhältnis von zwei Zahlen, $d : a \sim S : R$, und es seien S, R die kleinsten Zahlen in diesem Verhältnis. Es gibt dann eine Strecke e, so dass $d = Se, a = Re$, es ist dann $qu\,(d) = S^2 qu\,(e)\,, qu\,(a) = R^2 qu\,(e)\,,$ woraus folgt $qu\,(d) : qu\,(a) \sim S^2 : R^2$. Also ist nach Voraussetzung $S^2 = 2R^2$, d.h. S^2 ist gerade.

Lemma 3.3 *Eine Zahl P ist genau dann gerade/ungerade wenn P^2 gerade/ungerade ist.*

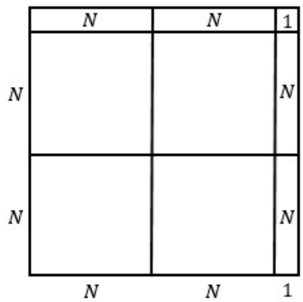


Fig. 3.5

Sei $P = 2N$ gerade, dann ist $P^2 = 4N^2$ gerade. Sei $P = 2N + 1$ ungerade, dann ist $P^2 = 4N^2 + 4N + 1$ ungerade (Fig. 3.5). Die Umkehrungen folgen jeweils indirekt.

Nach dem Lemma ist S gerade, aber da die kleinsten Zahlen im selben Verhältnis gegeneinander prim sind [VII.22], ist R ungerade. Andererseits ist $S = 2T$, also $4T^2 = 2R^2$ und $R^2 = 2T^2$, d. h. R wäre gerade; R ist aber ungerade, das ist unmöglich. Also ist d inkommensurabel zu a.

Aristoteles zitiert dies als Beispiel eines indirekten Beweises, wobei bei Annahme des Gegenteils etwas Unmögliches folgt.: „Z. B. zeigt man die Inkommensurabilität der Diagonalen daraus, dass bei Annahme ihrer Kommensurabilität ungerade Zahlen geraden gleich werden“ [*An. pr.* 41a 23 ff; 50a 35 ff]. Grundlage dafür ist das *Tertium non datur*, was jedoch für die Pythagoreer nicht galt, denn sie betrachten das Gerade und Ungerade als Elemente der Zahlen, aber das Eine sei sowohl gerade als ungerade [*Met.* 986a 20]; der Beweis kann daher nur als Beweis an der Akademie angesehen werden. Dass er nicht viel älter sein kann, zeigt die Verwendung von VII.22, die nicht zu umgehen ist. Denn die Voraussetzung, die Zahlen

28. Vgl. Vogt (1909) 106 mit weiteren Verweisen; Heath (1921) I, 157; Szabó (1969) 283; Knorr (1975) 26.

S, R seien nicht beide gerade, setzt einen endlichen Abstieg voraus, äquivalent zur Voraussetzung der Existenz kleinster Zahlen im selben Verhältnis, denn beide benutzen für die natürlichen Zahlen das Prinzip vom kleinsten Element. Nach einem Bericht von Boethius wurde VII.22 explizit von Archytas im Zusammenhang mit überteiligen Verhältnissen verwendet,[29] damit könnte der Beweis von X.117 von ihm stammen. Nach einem Zeugnis des Porphyrios berichtete Archytas, dass die Pythagoreer die ersten (kleinsten) Zahlen, welche die Verhältnisse der Harmonien erzeugen, *pythmenes* (Basen) nannten,[30] was nicht heißt, dass sie diese für den Beweis der Inkommensurabilität angewandt hätten.

4 Andere Rekonstruktionen des Beweises von Theodoros

Es gibt zahlreiche Versuche, den Beweis zu rekonstruieren, davon können hier nur einige vorgestellt werden.[31]

4.1 Arithmetischer Beweis

Seit H. Hankel wird versucht, den Beweis nach *Elem.* X.117 auf beliebige nicht quadratische Zahlen zu übertragen.[32] Dies gelingt mühelos für $N = 3$: Es gebe Zahlen R, S, so dass (1) $S^2 = 3R^2$, und es seien R, S nicht beide durch 3 teilbar. Dann ist aber S^2 durch 3 teilbar und folglich auch S, denn wäre S nicht durch 3 teilbar, also $S = 3L + U, U = 1$ oder 2, dann wäre $S^2 = 9L^2 + 6LU + U^2, U^2 = 1$ oder 4, was ebenfalls nicht durch 3 teilbar ist. Es folgt $S = 3L$ und $3L^2 = R^2$, also ist 3 ein Teiler von R^2 und damit von R im Widerspruch zur Voraussetzung, so dass (1) nicht erfüllt sein kann.[33]

Es ist aber nicht immer zutreffend, dass ein Teiler einer Quadratzahl S^2 auch ein Teiler von S ist, z. B. 12 teilt 6^2, aber 12 teilt nicht 6. Jedoch gilt für die 12-füßige

29. Vgl. DK 47 A 19 (Diels, Kranz, 1974); zur Übersetzung und Authentizität siehe Huffman, Archytas (2005) 451 ff.

30. Vgl. DK 47 A17; ebenso Huffman 428 ff. Platon verwendet den Begriff in *Rep.* 546c 1.

31. Vgl. Knorr (1975) Ch. IV.

32. Vgl. Hankel (1874) 95, Vogt (1910) 105 ff. Beide setzen bereits für die vorplatonische Mathematik die Primzahlzerlegung der Zahlen voraus, was sicher nicht gegeben war, da sie nicht einmal Euklid kennt.

33. Dem entsprechend stellt Theon von Smyrna den Satz auf: „Eine Quadratzahl ist entweder durch 3 teilbar oder wird es, wenn eine Eins abgezogen wird“ [*Exp.* 35, Hiller]. Dies ist hier erfüllt, weil in jedem Fall $U^2 - 1$ durch 3 teilbar ist.

dynamis $qu(\frac{d}{2}) = 3qu(a)$, damit folgt aus der Inkommensurabilität der *dynamis* für $N = 3$ auch die Inkommensurabilität für $N = 12$. Allgemein gilt:

Lemma 4.1 *Die Zahl N enthalte keine Quadratzahl als Teiler. Wenn N Teiler einer Quadratzahl* S^2 *ist, dann ist N auch Teiler von S.*

Denn sei N kein Teiler von S, dann ist $S = NL + U$, $1 < U < N$ und $S^2 = N^2L^2 + 2N(LU) + U^2$. Zu zeigen ist, dass mit diesen Voraussetzungen N kein Teiler von U^2 ist und daher auch kein Teiler von S^2.[34] Empirisch konnte Theodoros zweifellos für die quadratfreien Zahlen N, $5 \leq N \leq 17$ zeigen, wenn $U < N$, dann ist N kein Teiler von U^2. Jedoch hätte Theaitetos auf Grund einer derartigen Demonstration keinen allgemeinen Beweis für das Lemma finden können. Erst mit moderner Zahlentheorie wäre dies wie folgt möglich: Da N quadratfrei ist, folgt die Zerlegung $N = T_1T_2. \ldots .T_n$, $T_1 < T_2 < \ldots < T_n$, mit Primzahlen T_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Dies vorausgesetzt, sei N ein Teiler von Q^2, dann ist jede der Primzahlen T_i ein Teiler von Q^2, also ist nach dem Fundamentallemma T_i ein Teiler von Q.[35] Damit ist $T_1A_1 = Q$, da $T_2|Q$, folgt $T_2|A_1$, also ist $A_1 = T_2A_2$ und $T_1T_2A_2 = Q$. Derart folgt mit vollständiger Induktion schließlich $T_1T_2. \ldots .T_nA_n = Q$, also ist N ein Teiler von Q. Dieser Beweis entspricht nicht Euklid, denn er kennt keine Primzahlzerlegung mit beliebig vielen Faktoren, dargestellt als eine formale Reihe von Zeichen.[36]

4.2 Wechselwegnahme

Nach einer Hypothese von H. Zeuthen (1910) hätte Theodoros die Irrationalität der *dynameis* mittels Wechselwegnahme (*anthyphairesis*) gezeigt. Grundlage dafür ist *Elem.* X.2, als Anwendung von X.1, wonach zwei Größen inkommensurabel sind, wenn die Wechselwegnahme unbegrenzt ist. Dies folgt aber auch elementar, denn seien die Größen kommensurabel, dann haben sie das Verhältnis von Zahlen, und deren Wechselwegnahme ist begrenzt.

Im Folgenden gehen wir von Zeuthens Hypothese aus und prüfen, was Theaitetos daraus hätte schließen können. Für ein Paar von gleichartigen Größen (A, A_1), $A > A_1$, gibt es eine eindeutig bestimmte Division mit Rest auf Grund von *Elem.*

34. Vgl. Hardy, Wright, 43. Sie quadrieren die Restklassen mod N und stellen fest, dass deren Quadrate ungleich 0 mod N sind. Die Abstraktion der Restklassen ist jedoch der griechischen Mathematik fremd, eher wurde mit den Resten selbst gerechnet.

35. Euklid beweist dies in VII.30: *Seien* A, B *zwei Zahlen und* P *eine Primzahl. Wenn* $P|AB$, *dann* $P|A$ *oder* $P|dB$.

36. Euklid behandelt in IX.14 das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) von Primzahlen $P_1, \ldots, P_n$, nimmt aber nicht an, dass das kgV das Produkt dieser Primzahlen ist. Vgl. Mueller (1981) 99f.

V, *Def.* 3, 4. Damit ist deren Wechselwegnahme nichts anderes als der so genannte euklidische Algorithmus:

$$\begin{aligned} A &= t_1 A_1 + A_2, \quad A_1 > A_2 \\ A_1 &= t_2 A_2 + A_3, \quad A_2 > A_3 \\ A_2 &= t_3 A_3 + \ldots \end{aligned}$$

Sei $A_{n+1} = 0$, dann ist A_n das größte gemeinsame Maß von (A, A_1). In jedem Fall erzeugt das Paar (A, A_1) bei der Wechselwegnahme eine begrenzte oder unbegrenzte Folge von Quotienten, wir schreiben dafür $\mathit{anth}\,(A, A_1) = [t_1; t_2, t_3, \ldots]$.

Nach Aristoteles wurde das Verhältnis von Größen zuerst wie folgt bestimmt:

Definition 4.1 *Seien (A, B) und (C, D) jeweils gleichartige Paare von Größen, es ist $A : B \sim C : D$ genau dann, wenn $\mathit{anth}\,(A, B) = \mathit{anth}\,(C, D)$.*[37]

Es sollen nun für einige Paare (d, a), wobei d eine *dynamis* und a die Einheit ist, die Folgen der Quotienten ermittelt werden. Dabei rechnen wir mit den Strecken algebraisch, obwohl deren Produkte geometrische Rechtecke, und deren Potenzen geometrische Quadrate sind,[38] die geometrische Begründung für die binomischen Sätze wird gemäß *Elem.* II vorausgesetzt.

Sei $N = K^2 + 1$, zur Vereinfachung rechnen wir algebraisch, so folgt für die *dynamis*

$d^2 = \left(K^2 + 1\right) a^2, Ka < d < (K + 1)\,a, \mathit{und}\,(d - Ka)\,(d + Ka) = a^2$, also ist

1. $d = Ka + (d - Ka)$ und $a : (d - Ka) \sim (d + Ka) : a$
2. $d + Ka = 2Ka + (d - Ka)$. Damit ist die Wechselwegnahme periodisch und $\mathit{anth}\,(d, a) = \left[K; \overline{2K}\right]$.

Eine andere Rechnung ergibt sich für $N = K^2 - 1$, z.B. $N = 3$. Es ist dann $d^2 = 3a^2$, $a < d < 2a, (d - a)\,(d + a) = 2a^2$, damit ist die Wechselwegnahme

1. $d = 1a + (d - a)\,, a : (d - a) \sim (d + a)2a$
2. $d + a = 1 \cdot 2a + (d - a)\,,\ 2a : (d - a) \sim (d + a) : a$
3. $d + a = 2a + (d - a)$. Die Strecken wiederholen sich, also ist als Kettenbruch $\sqrt{3} = [1; \overline{1, 2}]$. Für die weiteren Zahlen ist die Wechselwegnahme ebenso zu verallgemeinern, was sich symbolisch nachrechnen lässt, es folgt $\mathit{anth}\,(d, a) = \left[K - 1; \overline{1, 2(K - 1)}\right]$.

37. Nach *Top.* 158b, vgl. *Les Éléments*, Vol. II, 515ff.
38. Algebraisch ist $d^2 = Na^2, d = \sqrt{N}a$, und $Anth(d, a)$ liefert den Kettenbruch für $\sqrt{N}$.

Angenommen, Theodoros hätte für jedes $N = K^2 \pm 1, K \leq 4$ eine periodische Wechselwegnahme gezeigt, dann hätte Theaitetos diese nicht als quasi allgemein für alle nicht quadratischen Zahlen erkennen können. Denn für die übrigen nichtquadratischen Zahlen, 6, 7, 11, 13, 14, hätten sich Wechselwegnahmen mit wechselhaften Perioden verschiedener Länge ergeben, für die sich keine Regel erkennen, geschweige denn beweisen ließ. Wir können davon ausgehen, dass Theaitetos keine spekulative Verallgemeinerung aussprach, so dass er aus den einzelnen heterogenen Beweisen mittels Wechselwegnahme nicht auf die allgemeine Inkommensurabilität aller *dynameis* schließen konnte.[39] Dieser Schluss wird aber im Dialog vorausgesetzt, denn darin sagt Theaitetos ausdrücklich, dass *alle dynameis* mit den Längen nicht kommensurabel seien. Damit ist ausgeschlossen, dass Theodoros die Inkommensurabilität der *dynameis* mittels Wechselwegnahmen gezeigt hätte.

4.3 Beweis nach Siegfried Heller

An Stelle von geometrischen Proportionen verwendet Heller Kongruenzen mit der Begründung, Theodoros hätte das „Versagen der alten Proportionslehre für irrationale Größen erkannt".[40] Zwar waren mit der Entdeckung inkommensurabler Strecken die in der praktischen Geometrie verwendeten arithmetischen Verhältnisse nicht mehr hinreichend, jedoch abstrahierten die Geometer davon, indem sie die Verhältnisse gleichartiger Größen betrachteten und dieselben Verhältnisse in ähnlichen Figuren feststellten. Dies ist sowohl von Hippokrates als auch von Archytas überliefert und für Theodoros zumindest anzunehmen. Dennoch kann Heller für $N = K^2 + 1$ mittels Kongruenzen im Rechteck mit den Seiten 1, K sowie Diagonale $d = dyn(N, 1)$ die Wechselwegnahme von Diagonale und Grundseite konstruieren, die sich als periodisch, also unbegrenzt erweist, woraus die Inkommensurabilität folgt. Ebenso gelingt dies für $N = K^2 - 1$, im Rechteck mit einer Seite 1, Diagonale K und der Seite d. Dies wird für $N = 5, 3$ vorgeführt, das Verfahren ist aber quasi-allgemein so dass der Beweis für $N = K^2 \pm 1$ gezeigt ist.

Um das Theorem des Theodoros auch für die übrigen nichtquadratischen Zahlen zu beweisen, löst Heller diese Fälle mittels der Pellschen Gleichung für N. Deren Lösung sind $Zahlen K, L$, so dass $NL^2 = K^2 \pm 1$; es ist dann $qu\,(Ld) = L^2 qu\,(d) = NL^2 qu\,(a) = \left(K^2 \pm 1\right) qu\,(a)$. Somit ist dies ein gelöster Fall, so dass sich die Inkommensurabilität von Ld und damit auch von d zeigen lässt. Aber

39. Dies gilt auch für andere Darstellungen der Wechselwegnahme, z.B. bei Fowler. Noch für Euler war die Periodizität der Kettenbrüche für Quadratwurzeln nicht selbstverständlich, denn er prüfte dies empirisch für $2 \leq N \leq 120$. Erst Lagrange bewies den Satz: *Der Kettenbruch einer Quadratwurzel ist periodisch* [Perron, 66].

40. Heller (1956) 23.

auch damit könnte Theaitetos nicht auf die Inkommensurabilität aller *dynameis* schließen, denn dies wäre eine unzulässige Verallgemeinerung, weil aus den einzelnen Lösungen der Pellschen Gleichung nicht erkennbar ist, dass immer eine solche Lösung existiert. Z.B. für $N = 13$ ist $13 \cdot 5^2 = 18^2 + 1$, also $5\sqrt{13} = \sqrt{18^2 + 1}$, aber für $N = 19$ wäre dies die Lösung $19 \cdot 39^2 = 170^2 - 1$. Man kann aber nicht davon ausgehen, dass Theaitetos die Lösbarkeit der Pellschen Gleichung für alle N angenommen hätte, wenn sie schon in diesem Fall nicht zu finden war.

5 Fanden die Pythagoreer die Inkommensurabilität?

Darauf gibt Pappos eine Antwort: „Die Untersuchung der kommensurablen und inkommensurablen, der ausdrückbaren und unausdrückbaren Größen nahm ihren Anfang in der pythagoreischen Schule“ [Pappos, 133]. Zunächst ist zu klären, wer und was sind die Pythagoreer? Bei Platon traten sie als diejenigen auf, welche die Lebensweise des Pythagoras fortgesetzt haben,[41] bei Aristoteles als die sogenannten Pythagoreer [*Met.* 985b 23 ff], eine Lebens- und Glaubensgemeinschaft in Italien, womit er seinen Bericht über die Gedanken der Alten abschloss. Allein Philolaos von Kroton,[42] ragt heraus, weil er der Einzige ist, von dem Fragmente aus einem Buch über die Natur überliefert sind. Darin formulierte er die Lehre:

> „Und in der Tat hat alles was man erkennen kann Zahl. Denn es ist nicht möglich, irgendetwas mit dem Gedanken zu erfassen oder zu erkennen ohne diese“ [DK44 B4].

Die pythagoreischen Zahlen zeigten jedoch nicht die Quantität von zählbaren Mengen an, sondern repräsentierten deren Qualitäten, zunächst für die Zahlen selbst. Diese stellten die Pythagoreer mit Rechensteinen (*psephoi*) dar, mit denen sie das Schema eines Dreieckes oder Quadrats legten und so die Qualitäten der Zahlen unterschieden [*Met.* 1092b12].

> „Als Elemente der Zahlen aber betrachteten sie das Gerade und das Ungerade, von denen das eine unbegrenzt sei, das andere begrenzt, das Eine bestehe aus diesen beiden“ [*Met.* 986a17ff; DK44 B5]

41. Der pythagoreische *Bios* ist umstritten, vgl. Burkert (1972) 200 ff.
42. Ca. 470 – 400, vgl. Huffman, Chap. I.1.

Diese Gegensätze standen am Anfang der zehn Prinzipien, die für das Seiende angenommen wurden, dazu gehörte auch Männliches und Weibliches, Ruhendes und Bewegtes, Quadrat und verschiedenlängliches (*heteromēkes*) Viereck.

Geometrische Figuren interessierten Philolaos als Gestalten, die Zahlen darstellen, wie Dreieck und Viereck. So schrieb er das gleichseitige Dreieck und das Quadrat dem 12-geteilten Tierkreis ein, wodurch dieser in 4 bzw. 3 Abschnitte zerlegt wurde, so dass dem Dreieck 4 und dem Quadrat 3 Götter zugeordnet waren.[43] Den *Kubos* mit 12 Kanten, 8 Ecken und 6 Flächen nannte Philolaos eine geometrische Harmonie, weil 8 das harmonische Mittel von 12 und 6 ist.[44] Dem entsprechend wurde der (nach Pyramide und Kubus) dritte den Pythagoreern bekannte reguläre Körper, die „Kugel mit den 12 Fünfecken" oder der „Körper mit den 20 Ecken" genannt [Iamblichos, *VP* 24][45]. Als Gestalten von Zahlen waren die geometrischen Objekte aber keine, die geometrisch untersucht wurden.

All dies lässt nicht erkennen, dass sich die Pythagoreer mit der Messbarkeit von Größen befasst hätten, die nicht durch Zahlen bestimmt waren, dennoch wird dies in der Spätantike von Iamblichos behauptet (Anfang 4. Jhd. n. C.):

> „Demjenigen, welcher als erster die Natur des Kommensurablen und Inkommensurablen solchen eröffnete, die nicht würdig waren, an der Lehre teilzuhaben, sollen die Pythagoreer so tief verabscheut haben, dass sie ihn aus der Lehr- und Lebensgemeinschaft ausschlossen" [*VP* 246].

Mit dem Ausschluss aus der Gemeinschaft wird indirekt gesagt, dass die Entdeckung Ihm, Pythagoras selbst zukommt,[46] denn

> „So sei der Mann wie ein Frevler im Meer ertrunken, der den Aufbau des Körpers mit 20 Ecken verriet, die Tatsache, dass das Dodekaeder sich einer Kugel einbeschreiben lässt. Einige sagen auch, ihm sei dies widerfahren, weil er das Geheimnis des Irrationalen (*alogias*) und Inkommensurablen (*asymmetrias*) verraten habe" [*VP* 247].

43. Proklos, *In Eukl.* 130, 167, 173. Vgl. Burkert (1972) 349; Huffman (1993) 385ff bezweifelt das Zeugnis.

44. Die Größen der Harmonien werden von Philolaos genannt: $1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{3}, 2$ [DK44 B6]. Jedoch beruhen sie nicht auf physikalischen Messungen (das Monochord wurde erst von Euklid benutzt), sondern sind ein Modell entsprechend der Stimmung der Lyra, wo nach der Quarte, gefolgt von einer Quinte, die Oktave erklingt, gemäß den Verhältnissen $(2:3)\cdot(3:4) \sim 1:2$.

45. Schriften der Antike werden hier mit Abkürzungen und Seitenzahlen nach ihren neueren gedruckten griechischen Ausgaben zitiert.

46. Vgl. Dillon (2002) 298 ff.

Das Letztere kann nur eine Zutat des Iamblichos sein, da der Ausdruck *alogos* für irrationale Linien erst von Theaitetos geprägt und später von Aristoteles benutzt wurde.[47] Vorher hieß es, Hippasos habe erstmals die „Kugel mit den 12 Fünfecken" veröffentlicht und sei als Verräter im Meer umgekommen [VP 88]. Dies wurde im 20. Jhd. mit dem vorher gehenden Zitat [VP 247] kombiniert, so dass schließlich Hippasos das Irrationale entdeckt haben soll.[48] Bekannt ist Hippasos von Metapont lediglich durch Aristoteles, der von ihm und Heraklit von Ephesos berichtet, dass sie das Feuer als Prinzip gesetzt haben [Met.984a7]. Im Unterschied zu Heraklit, von dessen Philosophie über 100 Fragmente erhalten sind, gibt es von Hippasos kein eigenes Zeugnis, was nicht heißt, dass man von ihm nichts zu wissen meint. So heißt es bei L. Zhmud, dass Hippasos üblicherweise der Beweis der Irrationalität von $\sqrt{2}$ zugeschrieben wird, [49] und zwar nur dieser, weil Theodoros von Kyrene die Irrationalität von $\sqrt{3}$ bis $\sqrt{17}$ bewiesen habe. Da Zhmud keine Quelle zur Verfügung hat, vermutet er, dass in Eudemos' Geschichte der Geometrie Hippasos genannt wurde, aber im Kommentar des Proklos fehlt, weil er dessen Entdeckungen Pythagoras zuschreibt [*In Eukl.* 65]. Proklos war aber konsequent, wenn er Iamblichos so verstand, dass alle Weisheit von Pythagoras kommt. So soll er auch die Beschaffenheit der kosmischen Schemata (platonischen Körper) gefunden haben; dem widerspricht aber das Scholion ad *Elem.* XIII, wonach die Pythagoreer den Kubus, die Pyramide und das Dodekaeder konstruiert haben, Theaitetos aber das Oktaeder und das Ikosaeder.[50] Dass die Zuschreibungen an Pythagoras eine Übernahme von Iamblichos war, zeigt dessen wörtliches Zitat bei Proklos: „Pythagoras verwandelte die mathematischen Wissenschaften in die Form einer freien Erziehung."[51]

K. von Fritz stellte die weitergehende Spekulation auf, dass Hippasos die Inkommensurabilität im Zusammenhang mit dem Dodekaeder am Pentagon entdeckt habe.[52] Dabei beruft sich von Fritz auf die Anschauung, dass die Diagonalen des Pentagon ein kleineres Pentagon einschließen und dessen Diagonalen wiederum ein kleineres usw., so dass ein unbegrenzter Prozess vorliegt; es wäre aber analytisch zu zeigen, dass dies eine unbegrenzte Wechselwegnahme ist.

Satz 5.1 *In einem regulären Fünfeck teilen die Diagonalen einander stetig, und ihre größeren Abschnitte sind der Fünfeckseite gleich.*

47. *An. post.* 76b9, vgl. Fowler 192.
48. O. Becker (1957) 71, er irrt allerdings, wenn er schreibt, von Hippasos werde berichtet, er habe das Dodekaeder beschrieben und veröffentlicht und ebenso die Entdeckung des Irrationalen; einen derartigen Bericht gibt es in der Antike nicht.
49. Zhmud (2013) 415, z.B. Van der Waerden (1966) 182.
50. Euclid, *Opera* V, 654.
51. Proklos *In Eukl.* 65 = Iamblichos *De communi mathematica scientia* 70. Die Übereinstimmung der Texte ist seit Anfang des 20. Jhd. bekannt. Vgl. Vogt (1908 – 1909) 31; Sachs (1917) 30.
52. Von Fritz (1945)

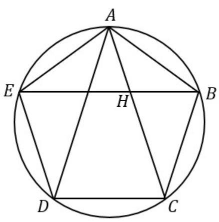


Fig. 5.1

Nach einem Satz des Hippokrates[53] haben in einem Kreis ähnliche Segmente gleiche Peripheriewinkel, demnach sind die Winkel *BAC, CAD* und *DAE* gleich einem Winkel α. Das Dreieck *ABH* hat zwei Winkel α an der Basis *AB*, also ist der Außenwinkel $AHE = 2\alpha$. Da auch der Winkel $HAE = 2\alpha$ ist, ist das Dreieck *AEH* gleichschenklig, also $EH = EA$, *d.h.* die größeren Abschnitte der Diagonalen sind gleich den Seiten des Fünfecks.

Die Diagonale ist geteilt in $AC = CH + HA$, die Dreiecke *ACD* und *CBH* sind einander ähnlich, also ist $AC : CD \sim CH : HB$; mit $CD = CH$ und $HB = AH$ folgt $AC : CH \sim CH : AH$, d.h. die Diagonale ist stetig geteilt.

***Satz* 5.2** *Eine Strecke* $d = a + b$ *sei stetig geteilt mit* $a > b$*, dann sind* d, a *inkommensurabel.*

Vorausgesetzt ist $d : a \sim a : b$, mit korrespondierender Subtraktion folgt daraus $(d - a) : a \sim (a{-}b) : b$ (*Elem.* V.17), bzw. $a : b \sim b : (a{-}b)$, also ist auch die Strecke a stetig geteilt. Fortgesetzt ergibt dies eine unbegrenzte Wechselwegnahme, so dass d, a nicht kommensurabel sein können, denn wären sie kommensurabel, hätten sie ein Verhältnis von zwei Zahlen, deren Wechselwegnahme ist jedoch begrenzt.

Es gibt keinen Hinweis darauf, dass Hippasos, der mindestens eine Generation vor Hippokrates lebte, den Satz des Hippokrates kannte, zumal in Eudemos' Abriss der Geschichte der Geometrie Hippasos nicht erwähnt wird, wohl deshalb, weil Hippasos ebenso wie Pythagoras keine Schrift hinterlassen hat.[54] In seiner Rekonstruktion zeichnet von Fritz weder den Kreis noch verwendet er einen Satz dazu, sondern zitiert lediglich das Theorem von der Winkelsumme im Dreieck, das von Eudemos den Pythagoreern zugeschrieben wird. Aber wie allein daraus die Inkommensurabilität folgen soll, bleibt schleierhaft, denn dazu genügt nicht *Elem.* I, vielmehr müsste auch *Elem.* III verwendet werden.

6 Inkommensurabilität bei Platon

6.1 Im frühen Dialog *Menon* setzt Platon bereits die Inkommensurabilität von Diagonale und Seite im Quadrat voraus, denn Sokrates stellt einem Knaben die

53. Vgl. Rudio, 49; *Elem,* III.27. Euklid beweist das Lemma in XIII.8 mit III.28 und VI.31, einem Satz über die Verhältnisse von Kreisbögen, der hier nicht benötigt wird.

54. Kennzeichen der Pythagoreer waren *symbola*, die als *akusmata* geglaubt wurden, also beispielhaftes Reden, was eine mathematische Demonstration ausschließt, vgl. Burkert (1972) 166 ff.

Aufgabe, ein Quadrat mit einer Seite von 2 Fuß zu verdoppeln [*Men.* 82b-85b].[55] Der Knabe versucht dies, indem er die Seite verdoppelt, aber dies ergibt ein viermal so großes Quadrat. Wiederum aufgefordert, die Seite des doppelten Quadrats zu sagen (*legein)*, antwortet er „dreifüßig"; hier ist das Quadrat neunfüßig, während das doppelte Quadrat doch achtfüßig ist. Bei der dritten Aufforderung, die Seite genau zu sagen (*epein*), kann der Knabe nur noch antworten, „ich weiß es nicht", worauf ihm Sokrates die Diagonale als Lösung vorführt (s.o. Fig. 3.1). Die Unsagbarkeit der Diagonalen ist hier zwar Thema, dem aber noch kein eigener Begriff zugeordnet ist.

6.2 Eingebettet in einer Rede über die Musen konstruiert Platon in *Politeia* VIII, 546c eine geometrische Zahl. Ausgangspunkt ist, dass die menschlichen Zahlen alles gegeneinander messbar und ausdrückbar (*rēta*) darstellen,[56] „ wobei dann die Basis (*pythmēn*) von $1\frac{1}{3}$ (*epitritos*) mit Fünf zusammengespannt, dreimal vermehrt, zwei Harmonien darstellt."

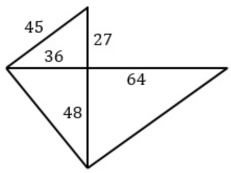


Fig. 6.1

Messbar und ausdrückbar gegeneinander, beides bedeutet ein Verhältnis in Zahlen; die Basis sind die kleinsten Zahlen im selben Verhältnis, also das Paar $(3, 4)$, dieses bildet mit 5 das Tripel $(3, 4, 5)$, was als rechtwinkliges Dreieck realisiert werden kann. Die dreimalige stetige Vergrößerung des Verhältnisses $3 : 4$ ist $27 : 36 : 48 : 64$ (Fig.6.1),[57] so dass $27 : 36 \sim 36 : 48$, also $36 \cdot 36 = 48 \cdot 27$; für Platon sind dies zwei Harmonien.

„Die eine eine gleichvielmal gleiche, hundert ebensovielmal, die andere gleichlänglich rechteckig, von hundert Quadraten des ausdrückbaren (*rētōn*) Durchmessers der Fünf, jeder um Eins verkürzt, des unausdrückbaren (*arrētōn*) um Zwei, und von hundert Kuben der Drei."

Die *eine* Zahl ist $(100 \cdot 36)^2$, die *andere* ist eine Rechteckzahl mit je gleichen (gegenüber liegenden) Längen; die erste Länge ist $100 \cdot 48$, wobei $48 = 7^2 - 1$, 7 als der *ausdrückbare* Durchmesser der 5 ist eine Näherung der Diagonalen im Quadrat mit Seite 5. Ebenso ist $48 = 50 - 2$, wobei $50 = 2 \cdot 5^2$ das Quadrat des *unausdrückbaren* Durchmessers der Fünf ist. Die zweite Länge ist $100 \cdot 27$, wobei $27 = 3^3$ der Kubus der Drei ist; also ist die *andere* Zahl $4800 \cdot 2700$; beide

55. Siehe oben Fig. 3.1.
56. Die Übersetzung „ausdrückbar" (Schleiermache) kann auch in *Tht.* 205d gewählt werden: „die Silben müssen erkennbar und ausdrückbar sein (*gnōstas kai rētas*)", vgl. 202b.
57. Nach Proklos *In Remp.* II, 40, vgl. Blößner 82. Mit korrespondierende Addition ergibt sich $27 : 36 \sim 75 : 100$, das Verhältnis von heiligen Zahlen.

Produkte ergeben dieselbe geometrische Zahl 12960000.[58] Nach Platon entscheidet die geometrische Zahl über bessere und schlechtere Zeugung, das hat zwar keinerlei reale Bedeutung, jedoch steht dahinter die Vorstellung einer ewigen und im Prinzip berechenbaren Ordnung.[59]

Mathematisch bedeutsam sind in Platons Rede sowohl die Zahlen als auch die Bezeichnungen der Diagonalen der Fünf als *ausdrückbare* Zahl, bzw. *unausdrückbare* Strecke. Beide Begriffe werden von Platon weder erklärt noch definiert, woraus zu schließen ist, dass sie seinen Hörern wohlbekannt waren.[60] Das einzelne Paar $(5, 7)$ repräsentiert hier ein Allgemeines (P, Q), wobei Q der ausdrückbare Durchmesser von P ist, und sich Q^2 und $2P^2$ nur um eine Einheit unterscheiden, was sich aus Platons Rechnungen ablesen lässt. Platons Zahlen verweisen auf Seite und Diagonale eines Quadrats, deren Verhältnis annähernd $7 : 5$ ist. Im Folgenden wird es darum gehen, sowohl die Entdeckung der Seiten- und Diagonalzahlen zu rekonstruieren, als auch die Herkunft ihrer Bezeichnung als *ausdrückbare* Seiten- und Diagonalen.

6.3 Vorerst soll noch dem Gegensatz von *rētos* und *arrētos* im Werk Platons nachgegangen werden. Im *Hippias maior,* einem Dialog, der heute mehrheitlich als unecht angesehen wird, aber möglicherweise noch zu Lebzeiten Platons verfasst wurde,[61] geht es Sokrates im Gespräch mit Hippias um den Begriff des Schönen, wobei Sokrates die Frage stellt: Wenn zwei Dinge schön sind, ob es dann beide zusammen sind; und wenn beide zusammen schön sind, ob auch jedes einzelne es ist. An jeweils einem mathematischen Beispiel zeigt er dazu die Möglichkeiten auf [303b-c].

> i) „Wenn die aus zwei (Zahlen) zusammengefügte (*amphoteron*) gerade ist, kann jede einzelne von ihnen sowohl ungerade, als auch gerade sein.“ ii) „Wenn von zwei (Größen) jede einzeln nicht ausdrückbar ist, so können beide vereinigt (*synamphotera*) sowohl ausdrückbar als auch nicht ausdrückbare sein.“

i) folgt unmittelbar daraus, dass sowohl die Summe von zwei geraden Zahlen gerade ist als auch die Summe von zwei ungeraden Zahlen. ii) unterscheidet sich davon nicht nur durch die anderen Prädikate, sondern auch durch eine andere Art der

58. Es gibt zahlreiche Versuche, diese und auch andere Zahlen zu berechnen, vgl. Blößner (1999) Kap. I. D.
59. Vgl. Burkert (1972) 481, n.76.
60. Nach Caveing (1998) 65 war der Begriff „diagonale exprimable“ bereits fixiert, so dass Platon die Seiten- und Diagonalzahlen vorausgesetzt hat. Dagegen übersetzt Heath (1921) I 306, rational und irrational Diameters, die Diagonale ist jedoch nicht *alogos*, sondern lediglich *arrētos*, d.h. in der Potenz *rētos.*
61. Vgl. Erler (2007) 301ff.

Zusammensetzung, indem Sokrates dafür jeweils eine andere Bezeichnung verwendet.[62] Bei den Zahlen handelt es sich um eine Addition der einzelnen zu einem Aggregat, in dem sie in der Summe zwar zusammen sind, aber dennoch voneinander getrennt bleiben. Im *Sophistes* wird dieses Nebeneinander für Bewegung und Stillstand angenommen, wenn das Seiende als ein Drittes gesetzt wird, in dem beide zusammengefügt (*amphotera*) existieren [250 a]. Nachdem Theaitetos dies bejaht hat, drückt der Fremde es noch einmal negativ aus: „Nicht also Bewegung und Stillstand vereinigt (*synamphoteron*) ist das Seiende, sondern ein von diesem Verschiedenes [250 c]. Im *Timaios* geht es um die Harmonie von Körper und Seele, das aus beiden Vereinigte (*synamphoteron*) wird Lebewesen (*zōon*) genannt [87 e].[63]

Die Stelle ii) im *Hippias maior* wird oft dadurch interpretiert, dass zwei irrationale Strecken addiert werden, so ist $\left(2+\sqrt{2}\right)+\left(2-\sqrt{2}\right)=4$ ausdrückbar, $\left(\sqrt{2}+1\right)+\left(\sqrt{2}-1\right)=2\sqrt{2}$ unausdrückbar.[64] Jedoch widerspricht dies dem Text insofern, als dort nicht zwei Irrationale, sondern zwei unausdrückbare Strecken vorausgesetzt sind, oder, algebraisch formuliert, zwei Quadratwurzeln von nichtquadratischen Zahlen, deren Vereinigung sowohl ausdrückbar als auch nicht ausdrückbar sein kann. Nicht nur aus den im Text verschieden bezeichneten Verknüpfungen, sondern auch aus der Aufgabe selbst folgt, dass man die Strecken nicht durch eine Addition zusammensetzen kann, sondern dass dies durch eine andere Art der Vereinigung zu realisieren ist. Die Stelle bliebe aber unverständlich, wenn die Vereinigung nicht für ausdrückbare Strecken bekannt gewesen wäre. Dafür gab es das Produkt als das von den Strecken erzeugte Rechteck, es repräsentiert die Vereinigung der Strecken insofern, als die beiden Ausgangsstrecken im Rechteck vermischt und aufgehoben sind.[65]

Bezeichnen wir für eine nichtquadratische Zahl M die *dynamis* $dyn\,(M,a)$ mit $d\,[M]$, dann ist diese Strecke unausdrückbar, aber in der Potenz ist $qu(d[M]) = Mqu(a)$ ausdrückbar, entsprechend sei für eine Quadratzahl $d\left[P^2\right]=Pa$.

Satz 6.1 *Sei a die Einheitsstrecke, M, N seien zwei nichtquadratische Zahlen, dann ist* $rec(d[M], d\,[N]) = rec(a, d\,[MN])$.

62. Auf diesen Unterschied machte bereits H. Vogt (1909) 104 aufmerksam.

63. Vgl. *Symposion* [209 b], dort erfreut ein schöner Körper, vereinigt (*synamphoteron*) mit einer wohlgebildeten Seele.

64. Vgl. Knorr (1975) 278. Ebenso besteht eine stetig geteilte Strecke $a = b + c$ aus zwei Apotomen, also Irrationalen [*Elem.* XIII.6]. Seine Behauptung [296 n.77], die Verknüpfungen in i) und ii) wären Summen, wird scheinbar dadurch betätigt, dass Sokrates im Nachsatz [*Hipp. mai.* 303c] beide mit *amphoterous* bezeichnet, das ist aber lediglich eine Verallgemeinerung, um beide Beispiele in Bezug auf die Schönheit als *alogia* zu ironisieren.

65. Dem entsprechen die griechischen Bezeichnungen: Zur Multiplikation zweier Zahlen heißt es bei Euklid *kai genētai tis* (das Produkt), dem entsprechend ist die Verheiratung *gamos*.

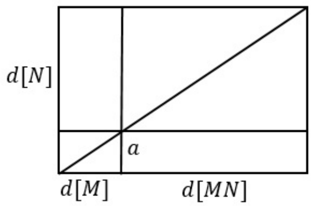


Fig. 6.2

Das Rechteck $rec(d[M], d[N])$ werde an die Strecke a angelegt (Fig. 6.2), dies ergibt ein gleiches Rechteck $rec(a, d[MN])$, dessen Größe von $d[MN]$ definiert wird, also auch die Größe der Vereinigung von $d[M]$ und $d[N]$. Zum Beweis ist zu zeigen, dass $a : d[M] \sim d[N] : d[MN]$.

Satz 6.2 *Für vier Strecken a, b, c, d gilt die Proportion $a : b \sim c : d$ genau dann, wenn $qu(a) : qu(b) \sim qu(c) : qu(d)$.*[66]

Seien die vier Strecken proportional, dann folgt

$$qu(a) : rec(a, b) \sim qu(c) : rec(c, d), rec(a, b) : qu(b) \sim rec(c, d) : qu(d).$$

Über Gleiches hinweg ist dann $qu(a) : qu(b) \sim qu(c) : qu(d)$ [*Elem.* V.22, VII.14]. Die Umkehrung folgt indirekt.

Beweis von Satz 6.1 Es ist $1 : M \sim N : MN$, daraus folgt $qu(a) : Mqu(a) \sim Nqu(a) : MNqu(a)$, also gilt für die Strecken $a : d[M] \sim d[N] : d[MN]$, was zu zeigen war.

Damit ergeben sich einfache Beispiele zu ii): 1) $rec(d[3], d[12]) = rec(a, 6a) = 6qu(a)$ ist ausdrückbar. 2) $rec(d[2], d[3]) = rec(a, d[6])$ ist nicht ausdrückbar, weil $qu(a) : rec(a, d[6]) \sim a : d[6]$.

7 Definitionen und Theoreme des Theaitetos

Anfang des 4. Jhd. v.u.Z. trat bei den Griechen eine neue Generation von Geometern auf, die uns von Eudemos vorgestellt werden:

> „In dieser Zeit (von Platon) lebten auch der Thasier Leodamas, Archytas von Tarent und Theaitetos von Athen, von denen die Lehrsätze vermehrt und in ein den wissenschaftlichen Anforderungen entsprechendes System gebracht wurden.“[67]

Archytas war Politiker und mehrmals Stratege seiner Polis, er stand in Verbindung mit Platon seit dessen erster Reise nach Sizilien ca. 390.[68] Theaitetos lebte

66. Euklid beweist dies in *Elem.* VI.22 für geradlinige, ähnliche Figuren.
67. Proklos *In Eukl.* 66. Leodamas wird nur noch einmal von Proklos erwähnt, p. 211.
68. Vgl. Erler (2007) 50.

in Athen, lernte von Theodoros und verkehrte mit der von Platon ca. 385 gegründeten Akademie. Sein Hauptwerk ist eine Theorie der Irrationalen, die er wie folgt definierte.

Definition 7.1 (X.3) *Die Ausgangsstrecke heiße* ausdrückbar *(rētē);*[69] *die mit ihr linear kommensurablen ebenfalls* ausdrückbar; *die mit ihr nur in der Potenz kommensurablen* unausdrückbar (*arrētē*) *die mit ihr in Länge und in der Potenz inkommensurablen heißen* irrational (*alogoi*).[70]

Auf Grund dieser Definition dürfte Platon in seiner Musenrede an Stelle der nicht sagbaren Diagonalen im *Menon* von der unausdrückbaren Diagonalen und als deren Gegenteil von der ausdrückbaren Diagonalen gesprochen haben. Dem entsprechend wurden von Theaitetos die Strecken in drei Klassen eingeteilt, in ausdrückbare Strecken, die kommensurabel zur Ausgangsstrecke a sind; unausdrückbare Strecken, die nur in der Potenz kommensurabel zu a sind; und irrationale Strecken, die in der Länge und in der Potenz inkommensurabel zu a sind.

Definition 7.2 (X.4) *Das Quadrat über der Ausgangsstrecke soll* ausdrückbar*, und die mit ihm kommensurablen Flächen sollen* ausdrückbar*, die mit ihm inkommensurablen aber* irrational *heißen, auch die in der Potenz diese erzeugenden Strecken heißen* irrational.

Definitionen und Theoreme *Seien* u, v *zwei ausdrückbare Strecken, die nur in der Potenz kommensurabel sind, dann ist das Rechteck* $rec\,(u, v)$ *irrational; auch die Strecke, die in der Potenz dasselbe ergibt, ist irrational; sie heiße* **Mediale**. *Die zusammengesetzte Strecke* $u+v$ *ist irrational, sie heiße* **Binomiale***, und wenn* $u > v$*, dann ist die abgezogene Strecke* $u-v$ *irrational, sie heiße* **Apotome** [*Elem.* X.21, 36, 73].

Zum Beweis dürfte Theaitetos wie Euklid vorgegangen sein.

69. Die Übersetzung *rētos* = rational, Heath (1926) III, 10) ist abzulehnen, da sie einen Gegensatz zu irrational = *alogos* vortäuscht. Bei Schleiermacher heißt es „ausdrückbar“ oder „aussprechbar“; entsprechend übersetzt Vitrac, *Les Éléments* III, 50 *rētos* = exprimable.

70. Diese m. E. ursprüngliche Definition wird von Platon dadurch bestätigt, dass er die Diagonale als unausdrückbar bezeichnet. Euklid wird dies später dahingehend verändern, dass er die unausdrückbaren Strecken ausdrückbar nennt, was zur Folge hat, dass $\sqrt{2}$ ausdrückbar ist, vgl. Heath (1926) III, 12.

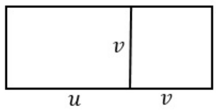


Fig. 7.1

Theorem 7.1 *Eine Mediale ist irrational.*

Seien u, v zwei aussagbare Strecken, die nur in der Potenz kommensurabel sind, aus Fig.7.1 folgt $rec\,(u, v) : qu\,(v) \sim u : v$,[71] da u $ink.v$ folgt $rec\,(u, v)\; ink.qu\,(v)$ und weil $qu\,(v)$ ausdrückbar, ist $rec\,(u, v)$ irrational. Die Mediale c mit $qu\,(c) = rec\,(u, v)$ ist dann ebenfalls irrational.

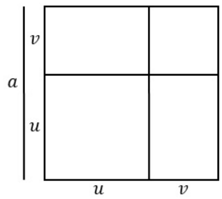


Fig. 7.2

Theorem 7.2 *Eine Binomiale ist irrational.*

Sei $a = u + v$ eine Binomiale, dann ist u $ink.v$ also $rec\,(u, v)\; ink.qu\,(u) + qu\,(v)$, denn diese Quadrate sind ausdrückbar. Gemäß Fig.7.2 (II.4) ist $qu\,(a) = qu\,(u) + qu\,(v) + 2rec(u, v)$, so dass auch $qu\,(a)\; ink.qu\,(u) + qu\,(v)$ (X.16), d. h. a ist irrational.

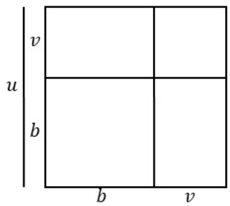


Fig. 7.3

Theorem 7. 3 *Eine Apotome ist irrational.*

Sei $b = u - v$ eine Apotome, gemäß Fig. 7.3 (II.7) ist $qu\,(b) + 2rec\,(u, v) = qu\,(u) + u\,(v)$, da $rec\,(u, v)\; ink.(qu\,(u) + qu\,(v))$, folgt $qu\,(b) = qu\,(u) + qu\,(v) - 2rec\,(u, v)\; ink.\,(qu\,(u) + qu\,(v))$, d. h. b ist irrational.

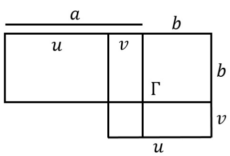


Fig. 7.4

Theorem 7.4 *Sei $a = u + v$ eine Binomiale und $b = u - v$ die dazu konjugierte Apotome, dann ist das Rechteck $rec\,(a, b)$ ausdrückbar.*

In Fig. 7.4 (II.5) ist $a = u + v, b = u - v$, es folgt $rec\,(a, b) = rec\,(u, b) + rec\,(v, b) = \Gamma$, dies ist ein Gnomon mit $\Gamma + qu\,(v) = qu\,(u)$, so dass $rec\,(a, b) = qu\,(u) - qu(v)$. Da die beiden Quadrate ausdrückbar sind, ist auch das Rechteck ausdrückbar.

Dass Theaitetos diesen Sachverhalt gefunden hat, wird indirekt von Eudemos dem Peripatetiker bestätigt, denn von ihm ist bezeugt, dass Theaitetos die Irrationalitäten den verschiedenen Mitteln zuteilte, die Mediale dem geometrischen, die Binomiale dem arithmetischen und die Apotome dem harmonischen [Pappos, 13]. Diese Zuteilung beruht auf Analogien und Gegensätzen; so sind das arithmetische Mittel sowie die Binomiale Summen. Während das Produkt des arithmetischen

71. Bereits Hippokrates hat diese Proportion benutzt, ohne eine Definition der Proportion vorauszusetzen, z. B. sei w die mittlere Proportionale mit $u : w \sim w : v$, dann ist $qu\,(u) : qu\,(w) \sim qu\,(u) : rec\,(u, v) \sim u : v$, dies als Vorspiel zur Verdopplung des Würfels [Proklos, *In Eukl.* 113].

mit dem harmonischen Mittel, das geometrische Mittel, im Allgemeinen nicht ausdrückbar ist, ist im Gegensatz dazu das Produkt von Binomiale und Apotome ausdrückbar.

Die von Theaitetos benutzten Größenvergleiche zwischen Flächen, die aus Rechtecken und Quadraten zusammengesetzt sind, verweisen auf eine neue Art der Geometrie, die ich *Flächengeometrie* nenne. Im 5. Jhd. war sie noch unbekannt; weder Theodoros noch Hippokrates haben sei verwendet, erstmals führte Platon in *Menon* damit einen Beweis vor (s.o. 3.1). Später wurde die Flächengeometrie von Euklid mit Axiomen und Postulaten begründet und in *Elem.* II.1-8 zusammengefasst. Setzt man für ein Rechteck $rec(a,b)$ das Produkt ab und für ein Quadrat $qu\,(a)$ formal a^2, dann lassen sich die Sätze 1-8 als algebraische Formeln lesen, weshalb H. Zeuthen die Flächengeometrie als eine „geometrische Algebra" *allgemeiner* Größen interpretierte [1886, p.7]. Jedoch sind die Strecken der antiken Flächengeometrie keineswegs allgemeine Größen, sondern haben als Strecken jeweils eine bestimmte Größe. Hingegen sind *allgemeine* Größen lediglich symbolisch repräsentiert, so dass anstelle der bestimmten Größen nur deren mögliche Bestimmtheit tritt [Klein, II p. 127]. A. Szabó insistierte bereits darauf, dass in *Elem.* II lediglich geometrische Sätze aufgestellt wurden, wobei II.5, 6 Hilfssätze für II.11 und 14 seien [Szabó, 1968, p. 487]. Diese Feststellung greift aber zu kurz, denn die Flächengeometrie ist das wesentliche Beweismittel für *Elem.* X und dürfte allein zu diesem Zweck entstanden sein; z. B. wird II.5 zur Flächenanlegung in X.17 angewandt und damit in dem wesentlichen Satz X.54.[72] Außerdem übernimmt Szabó von P. Tannery die Behauptung, es handle sich in *Elem.* II um die Flächengeometrie der Pythagoreer, was einer von den Schülern Platons etablierten, aber historisch falschen Tradition entspricht, wonach die Lehren der Platoniker als solche der Pythagoreer angesehen wurden.[73]

8 Anwendungen der Geometrischen Logistik

Das wesentliche Mittel für die Beweise des Theaitetos waren geometrische Figuren, bestehend aus Rechtecken und Quadraten, an denen z.B. die binomischen Sätze

72. Damit zeigt sich das Dilemma von Szabó, dass er wahrscheinlich *Elem.* X nicht gelesen hat. Vgl. die Rezension von Burkert (1971) 102.

73. Vgl. Burkert (1972) 81 ff. Dies gilt auch für die Geometrie der Akademie, wo nach Eudemos die Hypothese aufgestellt wurde, die Flächenanlegung mit Überschuss und Mangel wäre eine alte Entdeckung der pythagoreischen Muse, vgl. Proklos, *In Eukl.* 419. Es gibt auch einen internen Grund dafür, dass dies nicht sein kann, denn die erste Quelle für eine elliptische Flächenanlegung ist *Meno*, 86e ff. Diese Stelle verweist jedoch auf eine Anlegung mittels geometrischen Proportionen, welche die Pythagoreer allein deswegen nicht behandeln konnten, weil es dafür im Allgemeinen keine Zahlen gab, siehe Philolaos Fr.4.

abgelesen werden konnten. Diese Betrachtungsweise, angewandt auf Zahlen, hat eine Vorgeschichte bei den Pythagoreern, und wurde dann in der Zeit Platons zur Grundlage der Logistik.

8.1 Figurierte Zahlen

Aristoteles berichtet, dass die Pythagoreer sagten, das Unbegrenzte sei die gerade Zahl, ein Anzeichen (*sēmeion*) hiervon sei: „Je nachdem die Gnomone (der ungeraden Zahlen) um die Eins gelegt, oder (der geraden Zahlen) ohne die Eins gelegt werden, entsteht immer dieselbe Form oder eine andere.“[74]

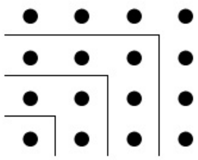


Fig. 8.1

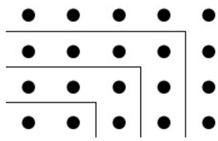


Fig. 8.2

Bei den ungeraden Zahlen ist zu sehen, dass deren Teilsummen immer quadratische Zahlen sind, hingegen ergeben die geraden Zahlen jeweils Teilsummen, welche heteromeke Zahlen sind, formal $N\,(N-1)\,, N > 1$[75]. Jedoch ist diese Feststellung lediglich eine Verallgemeinerung der Empirie, wenn die *psēphoi* entsprechend gelegt werden, diese stellen aber immer nur einzelne bestimmte Zahlen dar, so dass dies kein allgemeiner Beweis sein kann; ein solcher ergibt sich erst, wenn beliebige Zahlen als Strecken dargestellt sind. Dann stellt $N = 1$ eine Quadratzahl dar, und wenn eine Quadratzahl N^2 gegeben ist, dann ist $N^2 + 2N + 1 = (N+1)^2$ wieder eine Quadratzahl (Fig. 8.3.).[76]

Aus demselben Grund war auch für die geraden Zahlen kein Beweis mit *psēphoi* möglich, wohl aber mit Strecken. $N = 2$ ist eine heteromeke Zahl, und wenn $N\,(N-1)$ gegeben ist, dann ist $N\,(N-1) + 2N = N(N+1)$ wieder eine heteromeke Zahl (Fig.8.4).

Die von den ungeraden Zahlen gebildeten Quadrate erzeugen „pythagoreische Tripel“, X, Y, Z mit $X^2 + Y^2 = Z^2$. Sei K eine ungerade Zahl, dann ist auch $K^2 =$

74. *Phys.* 203a 10-15, d.h. die Zahlen sind als *psēphoi* in der Form eines Gnomons als rechter Winkel zu legen.

75. Vgl. Nikomachos, II.17, 18; Theon von Smyrna, p. 26, 21.

76. Dies ist quasi eine vollständige Induktion, jedoch keine im modernen Sinn, denn N steht hier jeweils für eine beliebige, aber bestimmte Zahl, es müsste jedoch das Zeichen für eine Variable sein, die lediglich eine mögliche Bestimmtheit anzeigt.

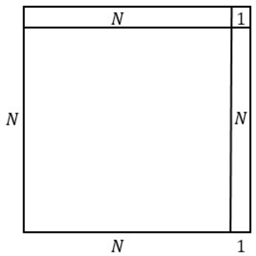


Fig. 8.3

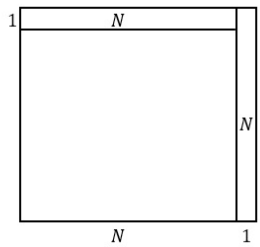


Fig. 8.4

$2N+1$ ungerade und es ist $N^2+K^2=(N+1)^2$, d. h. die Zahlen $\frac{1}{2}\left(K^2-1\right)$, K, $\frac{1}{2}(K^2+1)$ bilden ein pythagoreisches Tripel.[77]

Die Anwendung der Geometrie zum Beweis logistischer Regeln beruht darauf, dass für die Strecken Maßzahlen bzgl. einer Einheit angenommen werden. Der Summe von Strecken entspricht dann die Summe der Zahlen, der Fläche eines Rechtecks entspricht das Produkt der Zahlen für dessen Seiten. Die Rechengesetze, Kommutativität, Assoziativität, Distributivität, sowie die Monotoniegesetze werden geometrisch repräsentiert und können als Gesetze für Zahlengrößen (positive ganze Zahlen und Bruchzahlen) aufgefasst werden. Insbesondere ergeben sich geometrische Darstellungen für die binomischen Formeln, so dass diese ebenso für Zahlengrößen gelten. Eine Einschränkung ist dadurch gegeben, dass in der Flächengeometrie nur Produkte von zwei Faktoren darzustellen sind. Diese Art der Logistik nennen wir *geometrische Logistik*; sie war für Platon selbstverständlich: „Geometer, Astronomen, und Logistiker machen keine Diagramme, sondern diese sind schon, und sie finden sie nur auf, wie sie sind".[78]

Werden dabei die Zahlengrößen durch Buchstaben dargestellt,[79] dann bedeutet das Symbol eine beliebige, aber bestimmte Größe, was durch ihre Darstellung als eine gegebene Strecke ausgedrückt wird.[80] Dies geschieht insbesonders dann, wenn Relationen der Zahlen mit geometrischen Ausdrücken beschrieben werden. Derart ist eine Zahl ein Teil einer Zahl, wenn sie diese ausmisst (*katametrē*) [Elem. VII, Def.16]. Das Produkt zweier Zahlen wird eine ebene Zahl genannt, die beiden

77. Proklos *In Eukl.* 428 nennt dies die Methode des Pythagoras. Heath (1921) I, 80 glaubte noch daran, heute wird dies lediglich als eine ahistorische Zuschreibung angesehen.

78. *Euthyd.* 290c, ein früher Dialog Platons, demnach beschreibt das Zitat sie Methode der Logistik am Anfang des 4. Jhd. Im Kontext unterscheidet Platon das Wissen vom Gegenstand des Wissens, der vorgefunden wird.

79. So bei Archytas in DK47 A19: Sei $A:B$ ein überteiliges Verhältnis und $C:D+E$ die kleinsten Zahlen im selben Verhältnis. Vgl. Huffman (2005) 452 ff, die Rechenzeichen wurden eingefügt.

80. Vgl. *Elem.* VII, darauf bezieht sich Klein (1936) 127ff und verweist dazu auf P. Tannery.

Faktoren sind ihre Seiten [VII. Def.16]. Euklid verweist damit auf die Anfänge der Arithmetik als geometrische Logistik, ein Beispiel dafür ist VIII.18: *Zwischen zwei ähnlichen ebenen Zahlen gibt es eine mittlere Proportionalzahl.* Hier sind nicht nur die Ausdrücke der Geometrie entlehnt, vielmehr ist der arithmetische Beweis als eine Übersetzung des geometrischen Beweises zu verstehen.[81]

8.2 Die drei Mittel des Archytas

Archytas von Tarent (ca. 425-355), berühmt als Staatsmann, Physiker, Musik-Theoretiker, Geometer und Logistiker, wurde mit Platon bei dessen Reise nach Sizilien bekannt, was zu einer lebenslangen Freundschaft führte. Er wird auch als Pythagoreer bezeichnet, jedoch war die Schule der Pythagoreer zu der Zeit bereits aus Italien vertrieben, so dass er ihr schon aus diesem Grund nicht angehören konnte. Im Hinblick auf seine Lehren unterscheidet Aristoteles eindeutig zwischen den Pythagoreern und Archytas, den er als eigenständigen Philosophen darstellt. Überliefert sind von ihm vier Fragmente und Berichte über seine Leistungen, herausragend die geometrische Verdopplung des Würfels [DK47 A14].

In Fragment 2 definiert er die drei Mittel der Musik, das arithmetische, geometrische und das entgegengesetzte, sogenannte harmonische und stellt dazu zwei Theoreme auf: Das arithmetische Mittel ist gegeben, „wenn sich drei Begriffe (*horoi*) analog übertreffen; um wieviel der erste den zweiten übertrifft, um so viel übertrifft der zweite den dritten.“ Das Übertreffen bezieht sich auf eine Darstellung der Begriffe als Teilstrecken auf einer Strecke, bezeichnen wir diese mit A, M, B, dann ist die Analogie gegeben durch $A - M = M - B$. Archytas behauptet, dass dabei der Abstand (*diasthēma*) der größeren Begriffe kleiner als derjenige der kleineren ist. D.h. er betrachtet die Abstände als Intervalle; für diese soll gelten (1) $A : M < M : B$. – Das geometrische Mittel ist gegeben, „wenn sich der erste Begriff zum zweiten wie der zweite zum dritten verhält, die größeren haben das gleiche Intervall wie die kleineren“. Bezeichnen wir das geometrische Mittel mit G, dann ist $A : G \sim G : B$. – Das entgegengesetzte Mittel bezeichnen wir mit H, es wird von Archytas dadurch definiert, dass $A : (A - H) \sim B : (H - B)$; dafür soll gelten (2) $A : H > H : B$.

Archytas führte die Bezeichnung des „entgegengesetzten“ (*hypenantia*) Mittels ein, an Stelle des „harmonischen“, wie Philolaos dieses Mittel bezeichnet hat. Iamblichos kehrt diese Chronologie um, indem er Pythagoras die drei Mittel unterstellt, das arithmetische, das geometrische und das dritte, entgegengesetzte, „das von den

81. Man betrachte die Figur zu *Elem.* I.43, darin sind die „Ergänzungen“ jeweils die mittleren Proportionalen der um die Diagonale liegenden Parallelogramme.

Leuten um Archytas und Hippasos in ´harmonisch´ umbenannt wurde“ [*In Nik.* 100]. Doch damit unterstellt Iamblichos dem Pythagoras auch die Logistik des Archytas, was ziemlich unglaubwürdig ist, denn die Gegensätzlichkeit des dritten Mittels ergibt sich erst aus der „vollkommenen Proportion“ $A : M \sim H : B$ [*In Nik.* 118].[82]

Wir können annehmen, dass Archytas die Relationen (1) und (2) bewiesen hat, denn Eudemos stellte ihn auf eine Stufe mit Theaitetos, so dass beide den wissenschaftlichen Anforderungen der Mathematik genügten, deren Theoreme als notwendig zu beweisen waren. Um die Gleichungen und Ungleichungen zu beweisen, konnte Archytas aber nicht von Def. 1.3 für die Proportion ausgehen, stattdessen bot sich an:

Definition 8.1 *Vier Zahlen A, B, C, D stehen in Proportion, wenn $AD = BC$.*[83]

Es ist $A : B >$ bzw. $< C : D$, wenn $AD >$ bzw. $< BC$.

Der Beweis des Archytas kann damit auf Grundlage des folgenden Lemmas rekonstruiert werden:

Lemma 8.1 *Gegeben seien zwei Zahlen A, B, $A > B$, dann ist* $(A-B)^2 + 4AB = (A+B)^2$.

Dies folgt unmittelbar aus Fig. 8.5. Die Figur stellt die Anlegung von zwei Gnomonen an das innere Quadrat dar, wozu Fig. 8.1 und 8.3, leicht modifiziert, als Vorbild dienen konnten.

Euklid beweist das Lemma mit Fig. 8.6, indem er II.7 und II.4 verbindet; dies waren die geometrischen Hilfssätze für die obigen Theoreme 2 und 3 des Theaitetos. Logistisch formuliert: $(A-B)^2 + 2AB = A^2 + B^2$ und $(A+B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$. Zusammen ergibt sich daraus $(A-B)^2 + 4AB = (A+B)^2$.

Jedoch sind in Fig. 8.6 nicht alle vier Produkte AB als Rechtecke dargestellt, da sie teilweise nicht zusammenhängen. Somit zerlegt Euklid diese in $4AB = 4(A-B)B + 4B^2$. Die vier Rechtecke und Quadrate bilden zusammen einen Gnomon Γ, dafür gilt $(A-B)^2 + \Gamma = (A+B)^2$. Mit diesem Beweis von Lemma 8.1 demonstriert Euklid, dass die geometrische Logistik keineswegs als abstrakter Kalkül

82. Gemäß Iamblichos behauptet man, diese Proportion „sei eine Erfindung der Babylonier und sei zuerst durch Pythagoras zu den Griechen gekommen“ [*In Nik.* 118]. Die Babylonier benutzten die Mittel zur Approximation von Quadratwurzeln, vgl. Becker (1957) 65, Burkert (1972) 441 Anm. 84. Die Entdeckung der Mittel bei den Griechen war aber unabhängig davon, denn nach den Fragmenten des Philolaos und Archytas war sie mit der Harmonie verknüpft, einem besonderen griechischen Problem.

83. Die Äquivalenz mit der Proportion folgt aus *Elem.* VII.19.

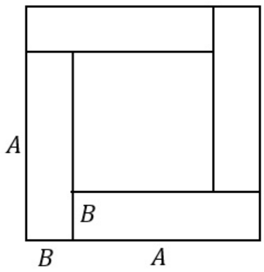


Fig. 8.5

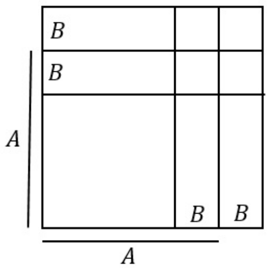


Fig. 8.6

aufzufassen ist, sondern als eine Betrachtung konkreter Rechtecke und Quadrate, welche arithmetische Produkte und Quadrate repräsentieren, die zusammengesetzt wieder Rechtecke und Quadrate ergeben. Anzumerken ist, dass II.8 in Euklids *Elementen* nicht angewandt wird, so dass das geometrische Theorem möglicherweise zunächst nichts anderes war, als eine systematische Darstellung des logistischen Lemmas von Archytas.[84]

Rekonstruktion der Beweise des Archytas. Für die drei Mittel sind die oben aufgestellten Ungleichungen (1) und (2) zu zeigen. Aus Lemma 8.1 folgt $AB < \left(\frac{A+B}{2}\right)^2$, nun ist $M = \frac{A+B}{2}$, also $AB < M^2$, so dass (1) $A : M < M : B$, und da $AB = G^2$ folgt $G < M$. Für das harmonische Mittel gilt $AH - AB = AB - BH$, so dass $(A + B)\,H = 2AB$, daraus folgt $MH = AB$. Also ist $M > G > H$, so dass $A : H > A : G \sim G : B > H : B$, d.h. es gilt (2).

Eine weitere Anwendung von 8.1 besteht in der Erzeugung „pythagoreischer Tripel“ für eine gerade Zahl. Zunächst ist $(N-1)^2 + 4N = (N+1)^2$; sei nunmehr K eine gerade Zahl und $4N = K^2$, dann ist $N = (\frac{1}{2}K)^2$ und die Zahlen $\left(\frac{1}{2}K\right)^2 - 1, K, \left(\frac{1}{2}K\right)^2 + 1$ bilden ein solches Tripel.[85]

Philolaos wird der Versuch nachgesagt, die Oktave zu halbieren.[86] In seiner Tonleiter liegt zwischen Quarte und Quinte ein Ganzton, dessen Größe ist $1\frac{1}{8}$, denn $(6:8) \cdot (8:9) \sim 6:9$. Die Quarte besteht aus zwei Ganztönen und einem Halbton gemäß: $(8:9) \cdot (8:9) \cdot (243:256) \sim 3:4$.[87] Jedoch ist der Halbton kein halber

84. Euklid selbst verwendet *Elem.* II.8 in *Data* 86, einer komplizierten biquadratischen Gleichung. Saito (1985) 53, erklärt sie im Zusammenhang mit dem Schnitt zweier Hyperbeln. Archytas’ vermutliche Verwendung von II.8 lässt jedoch auf eine frühere Entdeckung schließen.

85. Proklos in *Eukl.* 428 nennt dies die Methode Platons, was auf die Akademie verweist. Das allgemeine Verfahren zur Erzeugung solcher Tripel wird von Euklid in *Elem.* X.28, Lemma 1 vorgestellt.

86. DK44 A26, vgl. Burkert (1972) 394, Huffman (1993) 367.

87. Dies entspricht der absteigenden Tonleiter A G F E mit den aufsteigenden Zahlen 192, 216, 243, 256. Vgl. Archytas DK47 A16, Platon *Tim.* 36b, Burkert (1972) 387.

Ton, so dass die Oktave so nicht halbiert werden kann. Ein Beweis dafür, dass dies überhaupt nicht möglich ist, stammt von Theodoros, wonach es keine Zahlen R, S gibt, so dass $(S : R) \cdot (S : R) \sim S^2 : R^2 \sim 2 : 1$ ist. Andererseits gilt für Seite a und Diagonale d eines Quadrats $qu\,(d) : qu\,(a) \sim 2 : 1$. Sei $S^2 > 2R^2$, dann ist $2S^2 qu\,(a) > 2R^2 qu\,(d)$, also $Sa > Rd$, bzw. $S : R > d : a$. Für das *assoziierte* Verhältnis $2R : S$ mit $(S : R) \cdot (2R : S) \sim 2 : 1$ gilt $(2R)^2 < 2S^2$, daraus folgt analog $2R : S < d : a$. Insofern bilden die Verhältnisse $S : R$ und das dazu assoziierte Verhältnis $2R : S$ Schranken für das inkommensurable Verhältnis $d : a$.

Zur Bestimmung der drei Mittel geht Archytas von Begriffen aus, mit denen er wie mit Größen rechnet, somit beschränkt er sich nicht auf ganze Zahlen, sondern kann ebenso mit den Größen der Harmonien rechnen. Das arithmetische Mittel von 2 und 1 ist die Quinte $\frac{3}{2}$ und dazu assoziiert ist das harmonische Mittel, die Quarte $\frac{4}{3}$; für beide ist das arithmetische Mittel $\frac{17}{12}$, dazu assoziiert ist $\frac{24}{17}$. Für die Verhältnisse folgt daraus

$$3 : 2 > 17 : 12 > d : a > 24 : 17 > 4 : 3 > 1 : 1.$$

Wird dieser Prozess weiter verfolgt, ergibt sich eine immer nähere Einschließung des Verhältnisses $d : a$, welches die Mitte der Oktave darstellt. Ob Archytas soweit gerechnet hat und vielleicht noch weiter gegangen ist,[88] ist nicht bekannt, er hat aber mit den drei Mitteln die Grundlagen dafür bereit gestellt.

Das hier gezeigte Näherungsverfahren war Archimedes bekannt (s. u.), später wird das Verfahren nach Heron von Alexandrien (ca. 100 n. C.) benannt, der es häufig verwendet, um die „Seiten“ von gegebenen Quadraten näherungsweise zu berechnen. In *Metrica* I.8 geht er dem entsprechend vor; für $\sqrt{720}$ setzt er zunächst 27 und erhält für die Seite $S = \frac{1}{2}\left(27 + \frac{720}{27}\right) = 26\frac{1}{2}\frac{1}{3}$. In *Metrica* I.9 berechnet er die Fläche eines spitzwinkligen Dreiecks, dessen Höhe nicht ausdrückbar ist (*mē rētēs*). Mit den gegebenen Maßen für die Seiten ergibt sich die Höhe $h = \sqrt{63}$. „Es ist aber möglich, wenn man die Seite (*pleura*) von 63 annähernd bestimmt, den Inhalt zu finden, als wäre die Höhe ausdrückbar“; er berechnet dann den Inhalt mit $h \approx \frac{1}{2}\left(8 + \frac{63}{8}\right) = 8 - \frac{1}{16}$.

Zusatz. Für die griechischen Landmesser bestand das Problem nicht darin, die Diagonale eines Quadrats, sondern dessen Seite zu berechnen. Bei Landteilungen wurden bevorzugt die heiligen Maße von 100 oder 50 *plethra* verwendet (1 *plethron* = 100 *pus)* und die Flächen als Quadrate abgesteckt. Man fand dies z. B. bei Ausgrabungen in Tauric Chersonesos, einer antiken Stadt in der Nähe von Sebastopol,

88. Der nächst Schritt liefert $577 : 408 > d : a > 816 : 577$, in Dezimalzahlen $1,4142156 > \sqrt{2} > 1,4142114$. Die Babylonier erhielten mit dieser Methode im Sexagesimalsystem $1;24,51,10 = 1,4142128$. Vgl. V. d. Waerden (1966) 72.

die 422 v. Chr. von Delos und Herakleia Pontikos neu gegründet wurde.[89] Der Grundriss bestand aus zwei mal drei aneinander gelegten Quadraten, wobei für jedes eine Seite von 210 m gemessen wurde. Mit dem Attischen Fußmaß von 0,297 m ergibt das eine Seitenlänge von 707 Fuß, die mit dem Abakus berechnet werden konnte. Ein Quadrat der Fläche 500000 hat näherungsweise 700 als Seite, denn es ist $500000 = 700^2 + 10000$ (Fig.8.7).

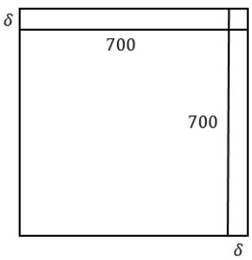


Fig. 8.7

An Fig. 8.7 konnten die Landmesser ablesen, dass $2\cdot 700\cdot \delta \approx 10000$, also $\delta\approx 7$, was die Länge 707 Fuß ergab. Dementsprechend ist $\sqrt{50} = 7 + \delta$, mit $\delta = \frac{1}{14}$. Diese Art der Berechnung ist nicht von Heron überliefert, sondern von Theon von Alexandrien [*Comm.* p. 470], der sich an der ursprünglichen Methode orientiert und *Elem.* II.4. anwendet; er würde rechnen $(700 + \delta)^2 \approx 700^2 + 2\cdot 700\cdot \delta$.

Hingegen begnügte sich Aristarch von Samos (ca. 270 v. C.) mit der ersten Näherung, um das Verhältnis von Diagonale und Seite im Quadrat abzuschätzen. Aus $qu\,(d) : qu\,(a) \sim 2 : 1 > 7^2 : 5^2$ folgert er $d : a > 7 : 5$.[90]

8.3 Seiten- und Diagonalzahlen

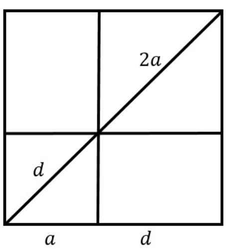


Fig. 8.8

In dem oben rekonstruierten Beweis des Theodoros für Seite a und Diagonale d eines Quadrats wird eine absteigende Rekursion durch korrespondierende Subtraktion von $a : d \sim d : 2a$ definiert, mit dem Resultat, dass $a' = d - a$, $d' = 2a - d$. In der Nachfolge des Theodoros konnten Mathematiker die dementsprechende korrespondierende Addition als umgekehrte, aufsteigende Rekursion $a' = d + a$, $d' = d + 2a$ definieren. (Fig.8.8).

Dies bedeutet, dass die Quadrate mit Seite und Diagonale (a, d) sowie $(d, 2a)$ längs der Diagonalen zusammengesetzt werden, bzw. die gegebenen Paare einfach addiert werden, so dass ein Quadrat mit Seite und Diagonale $(a + d, d + 2a)$ entsteht.

Werden nun an Stelle der Strecken für Seite und Diagonale Zahlenpaare (P, Q) gesetzt, dann ist auf Grund der Inkommensurabilität der Strecken immer eine

89. Vgl. Habicht (1976).
90. Vgl. Aristarchus 378.

Differenz $\Delta(P,Q) = Q^2 - 2P^2 \neq 0$ gegeben. Für diese so genannten „Seiten- und Diagonalzahlen“ ist entsprechend den Strecken eine aufsteigende Rekursion gegeben, indem die Zahlenpaare (P,Q) und das assoziierte Paar $(Q, 2P)$ addiert werden und so das Paar $(P', Q') = (Q+P, Q+2P)$ entsteht.

Sei $Q^2 < 2P^2$, dann ist $Q : P < (Q+2P) : (Q+P) < 2P : Q$; dies folgt aus $Q(Q+P) < P(Q+2P)$ und $Q(Q+2P) < 2P(Q+P)$. Analog gilt dies für $Q^2 > 2P^2$. Demnach gilt nicht nur für die Verhältnisse $Q : P < d : a < 2P : Q$ (Kap. 8.2), sondern zwischen den Verhältnissen eines Zahlenpaares und dem assoziierten Paar liegt auch das Verhältnis der Summe dieser Paare, als deren *additives* Mittel. Schließlich liegt noch zwischen den von den Paaren erzeugten Größen $\frac{Q}{P}$ und $\frac{2P}{Q}$ deren *arithmetisches* Mittel $\frac{1}{2}(\frac{Q}{P} + \frac{2P}{Q})$.

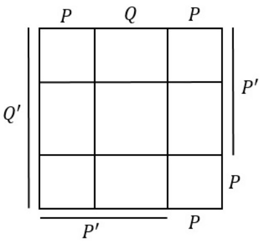


Fig. 8.9

Satz 8.2 *Mit der gegebenen aufsteigenden Rekursion folgt* $(P', Q') = -\Delta(P,Q)$.

Dazu ist zu zeigen $Q'^2 - 2P'^2 = -(Q^2 - 2P^2)$ bzw. $Q^2 + Q'^2 = 2P^2 + 2P'^2$, dies folgt direkt aus Fig. 8.9.[91]

Mit dem Anfangspaar $(P_1, Q_1) = (1,1)$, sowie $(P_{n+1}, Q_{n+1}) = (P'_n, Q'_n)$ ist die Folge der Seiten- und Diagonalzahlen definiert, die Paare haben die Norm $Q_n^2 - 2P_n^2 = (-1)^n$, Der Anfang ist gegeben durch: $(1,1), (2,3), (5,7), (12,17), (29,41), (70,99)$

Jedoch war die allgemeine Eigenschaft der Norm nicht empirisch zu beweisen; weder mit der einfachen Induktion, noch durch eine geometrische Heuristik war zu beweisen, dass sich mit der angenommenen Rekursion für die Zahlenpaare fortgesetzt immer die alternierende Norm von einer Einheit ergibt. Dies konnte erst mittels der Anfang des 4. Jhd. entstandenen geometrischen Logistik bewiesen werden. Dazu erweist sich Fig. 8.9 als eine konkrete Möglichkeit, um die benötigte Gleichheit daran abzulesen.

Der Zweck der Seiten- und Diagonalzahlen bestand allerdings nicht darin, das Verhältnis $d : a$ zu approximieren, sondern Seite und Diagonale ausdrückbar zu machen. So heißt es bei Iamblichos [*In. Nic.* 91]:

91. Mit $U = Q+P, V = P$ bedeutet das die Identität $(U-V)^2 + (U+V)^2 = 2U^2 + 2V^2$. Euklid beweist diese binomische Formel zweimal in II.9, 10, aber ohne sie in den *Elementen* anzuwenden (Kap. 8.4). Diophant verwendet sie in *Arith.* I.31 für die Aufgabe $x+y = a, x^2+y^2 = b$; er setzt $x = \frac{a}{2} + s, y = \frac{a}{2} - s$, so dass $x^2 + y^2 = \frac{a}{2}^2 + 2s^2 = b$, also ist $s = \frac{1}{2}\sqrt{2b - a^2}$, d.h. die Aufgebe ist nur lösbar, wenn $2b - a^2$ eine Quadratzahl ist.

> „Bei (geometrischen) Größen ist, wenn man die Seite berechnet, die Diagonale inkommensurabel (*alogos*). Nicht so ist es jedoch bei den (arithmetischen) Größen, sondern hier wird die Seite zur Diagonalen ausdrückbar (*rētē*) sein".

Der Grund für die Ausdrückbarkeit ist gegeben, wenn die Differenz von Q^2 und $2P^2$ lediglich eine Einheit ist.[92]

Ähnlich äußert sich Aristoteles: „Das (Verhältnis des) Übertroffene zum Übertroffenen ist der Zahl nach völlig unbestimmt (*aoriston*), denn die Zahl ist kommensurabel, aber hier liegt eine inkommensurable Zahl zu Grunde" [*Met.* 1021 3-6]. Das Verhältnis ist ebenso nicht ausdrückbar wie das Verhältnis von Diagonale und Seite im Quadrat, während das Verhältnis der Seiten- und Diagonalzahlen ausdrückbar ist. Betrachtet man die unbegrenzte Folge dieser Zahlen, dann repräsentiert diese insgesamt eine ausdrückbare Darstellung der Diagonalen, die erst in der Neuzeit analytisch als Approximation des Verhältnisses von Diagonale und Seite interpretiert wird. [93] Insofern bleiben die Platoniker der Spätantike der Philosophie Platons treu, während die praktischen Mathematik die Ausdrückbarkeit der Seite eines Quadrats als deren numerische Näherung versteht.

8.4 Proklos zu Seiten- und Diagonalzahlen

Nach Iamblichos hat „Nikomachos alles über die Arithmetik im Sinne des Pythagoras dargelegt" [*In Nic.* 4]. Proklos (ca. 450 n. C.) historisiert dies dahingehend, dass die Pythagoreer die Seiten- und Diagonalzahlen gefunden hätten [*In Remp.* II, § 23, 27]. Proklos stellt auch die Beziehung zu Platon her, der sagte, die Zahl 48 sei einerseits gleich der ausdrückbaren Diagonalen der 5, vermindert um 1, andererseits gleich der unausdrückbaren, vermindert um 2. Für die Behauptung, diese Zahlenfolge hätten die Pythagoreer entdeckt, wird allerdings keine Quelle genannt, und eine solche wurde auch bis heute nicht gefunden; an keiner Stelle handeln Pythagoreer vor Platon von Seiten- und Diagonalen als Zahlen. Indem Proklos die Entstehung dieser Zahlen auf die Erkenntnis zurückführt, dass die Diagonale nicht ausdrückbar sein kann, wenn die Seite es ist, dann können sie allein deshalb nicht auf die Pythagoreer zurückgeführt werden, weil diese die Inkommensurabilität von

92. Vgl. Theon von Smyrna: „Das Verhältnis der Diagonalen zur Seite ist in der Einheit zu finden" [*Exp.* 43].

93. D. h. eine Intervallschachtelung für $\sqrt{2}$: Sei n gerade, dann ist $\frac{Q_n}{P_n} - \frac{Q_{n+1}}{P_{n+1}} = \frac{Q_n^2 - 2P_n^2}{P_n(P_n+Q_n)} < \frac{1}{P_n(P_n+Q_n)}$. Aus $P_n > 2P_{n-1}, Q_n > 2Q_{n-1}$ folgt $P_n\,(P_n + Q_n) > 4^{n-1}P_1\,(P_1 + Q_1) = 4^{n-1} \cdot 2$, also ist $\frac{1}{P_n(P_n+Q_n)} < \frac{1}{4^{n-1}\cdot 2}$. Hingegen haben die Griechen niemals eine „Zahl geschaffen", die in allen Intervallen liegt.

Seite und Diagonale nicht erkannt haben (s. o. Kap. 5). Insofern können nicht Pythagoreer, sondern nur Akademiker gesagt haben, dass, wenn die Seite ausdrückbar ist, die Diagonale zwar nicht ausdrückbar ist, aber die Diagonalzahlen in der Potenz abwechselnd um eine Einheit kleiner oder größer sind als die doppelte Potenz der Seitenzahlen.

Nach Proklos haben die Pythagoreer die Rekursion der Zahlen mittels des geometrischen Satzes gefunden, dass die Diagonale vergrößert um die Seite zur Seite wird, während die Seite verdoppelt und um die Diagonale vergrößert zur Diagonalen wird. Jedoch begnügt sich Proklos nicht mit einer einfachen Figur (s.o. 6.2), sondern führt den Sachverhalt auf *Elem.* II zurück.

Lemma 8.3 (II.10) *Eine Strecke $A\Gamma$ sei in B halbiert und um eine beliebige Strecke $\Gamma\Delta$ verlängert, dann gilt $qu(A\Delta) + qu(\Gamma\Delta) = 2qu(AB) + 2qu(B\Delta)$.*

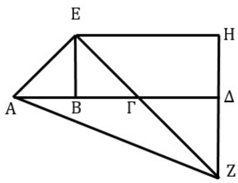


Fig. 8.10

Sei $AB = BE$ und $E\Gamma Z$ eine Gerade, dann ist $\Gamma\Delta = \Delta Z$, so dass bei E und Δ rechte Winkel gegeben sind (Fig. 8.10). Nach dem Satz des Pythagoras ist $qu(A,\Delta) + qu\,(\Delta, Z) = qu\,(A, E) + qu\,(E, Z) = 2qu\,(A, B) + 2qu(B, \Delta)$.

Damit argumentiert Proklos wie folgt:[94] Gegeben seien zwei gleiche Strecken AB, $B\Gamma$ und $\Gamma\Delta$ sei die Diagonale über AB, so dass $qu\,(\Gamma\Delta) = 2qu(AB)$. Nach Lemma 8.3 ist dann $qu(A\Delta) + qu\,(\Gamma\Delta) = 2qu(AB) + 2qu(B\Delta)$, gemäß der Voraussetzung folgt daraus $qu(A\Delta) = 2qu(B\Delta)$. D.h. wenn die Strecken AB und $\Gamma\Delta$ Seite und Diagonale eines Quadrats sind, dann sind $B\Delta = B\Gamma + \Gamma\Delta$ und $A\Delta = AB + B\Gamma + \Gamma\Delta$ ebenso Seite und Diagonale eines Quadrats. Der Beweis von Proklos erweist sich aber als unangemessen, da der Sachverhalt als Spezialfall eines allgemeinen Theorems dargestellt wird, obwohl er sich elementar zeigen lässt. Denn nach Voraussetzung ist $E\Gamma = \Gamma\Delta$ und $\Gamma Z = A\Gamma$, also $EZ = A\Delta$.[95] Im Übrigen ist die Vorstellung von Proklos, die Rekursion der Seiten- und Diagonalzahlen wäre damit geometrisch demonstriert worden, lediglich heuristisch, denn sie ist allein dadurch begründet, dass die Norm alternierend ± 1 ist.

Da Proklos ausführlich II.10 zitiert, wurde angenommen, dass die Pythagoreer damit die alternierende Norm bewiesen hätten. Denn betrachtet man die Strecken als Darstellung von Zahlen, $AB = P, B\Gamma = P$ und $\Gamma\Delta = Q$, dann besagt das Theorem

94. Vgl. Fowler (1999) 98 ff.
95. Vgl. Fig. 8.8, dementsprechend ist in Fig. 8.10 das gegebene Quadrat ΓBE , und das vergrößerte Quadrat EHZ, der Satz des Pythagoras wird nicht benötigt.

$$(2P+Q)^2 + Q^2 = 2P^2 + 2\,(P+Q)^2\,,$$

was der alternierenden Norm entspricht (s. o. Kap.8.3). Aber weder die Pythagoreer noch Proklos führt diesen Beweis, vielmehr wurde er erst von H. Zeuthen gefunden, ohne Kenntnis von Proklos *In Remp.* II.[96] Zeuthens Rekonstruktion des Beweises für die alternierende Norm der Seiten-und Diagonalzahlen ist aber ebenso unangemessen, denn II.10 beruht auf dem Satz des Pythagoras, da es sich bei der Norm aber um eine rein arithmetische Beziehung handelt, konnte sie einfacher mit geometrischer Logistik, entsprechend II.8 bewiesen werden.

In seinem Nachwort zum Kommentar von Proklos sah Hultsch darin eine Bestätigung dafür, dass die Pythagoreer die Seiten- und Diagonalzahlen gefunden hätten [1901, 393 ff]. Denn das verwendete Theorem II.10, sowie das ganze Buch II würde von den Pythagoreern stammen, eine Ansicht, für die es keinen Beleg gibt. Vielmehr lässt sich die Darstellung von Zahlen als Strecken erst bei Archytas nachweisen (s.o. 8.2), während die Pythagoreer des 5. Jhd. Figuren mit Spielsteinen legten, womit die Theoreme von *Elem.* II nur in Einzelfällen gezeigt, aber nicht allgemein bewiesen werden konnten. Dagegen wurden, wie oben gezeigt, die Theoreme II.4-8 an der Akademie gefunden. Euklid fügte dem II.9-10 hinzu, als Theoreme, die in den Elementen nicht verwendet werden. Hingegen konnte Saito [1985, p.49] nachweisen, dass dies Hilfssätze für Euklids *Konika* sind, die in den ersten drei Büchern von Apollonios' *Konika* enthalten sind. Dabei geht es um Sehnen in der Ellipse, wobei II.9 oder II.10 angewandt wird, je nachdem, ob sich deren Schnittpunkt innerhalb oder außerhalb der Ellipse befindet.[97]

9 *Über pythagoreische Zahlen*

Dies ist der Titel einer Schrift von Speusippos, dem Neffen und Nachfolger Platons als Scholarch der Akademie 347 – 339 v. C.[98] Die Schrift wurde als Hauptquelle über die Pythagoreer angesehen,[99] was sie aber nicht ist, vielmehr eine Pythagoreisierung des Platonismus, indem dessen Lehren als „pythagoreisch“ angegeben wurden.[100] Gehen wir aber davon aus, dass es Lehren der Akademie sind, die Speusippos zusammengefasst hat, dann lieferte er damit einen Einblick in deren

96. Zeuthen (1886) 27 ff, bezog sich auf das analoge Theorem II.9. Der von Kroll editierte Kommentar von Proklos, Bd. II erschien 1901.
97. Saito (1985) 48 ff.
98. *Th. ar.* 82,10
99. Sachs (1917) 65.
100. Metry (2002) 177.

Arithmetik, abseits von ihrer klassischen Überlieferung. Dabei folgte Speusippos einer Tendenz, die Platon selbst vorgeführt hat, eigene Überlegungen so zu formulieren, als ob sie pythagoreisch wären (s. o. Kap. 6). Einen Auszug der Schrift enthielt vermutlich eine *Theologische Arithmetik* des Nikomachos von Gerasa, die verloren ging, aber teilweise in dem gleichnamigen Buch des 4. Jhd. überliefert ist, welches fälschlich Iamblichos zugeschrieben wurde.[101] Demnach behandelt Speusippos in der ersten Hälfte lineare Zahlen, polygonale Zahlen und alle Arten von ebenen Zahlen, körperliche Zahlen sowie die fünf Figuren für die Elemente des Universums, in der zweiten Hälfte des Buches behandelt er die Zahl Zehn als die vollkommene Zahl. Dass die ebenen Zahlen auch die Seiten- und Diagonalzahlen umfassen, folgt aus der Einleitung *Über die Einheit* (*monas*); dort werden etliche Zahlarten genannt, gerade und ungerade und gerade-ungerade,[102] lineare und ebene usw., aber auch diagonale und seitliche (*diametrikē*, *pleurikē*) [*Th. Ar.* 1,16].

In der Schrift das Iamblichos, *Zu Nikomachos Einführung in die Arithmetik*, ist Speusippos Einteilung der Zahlen wiederzufinden:

1. Natürliche Zahlen; gerade und ungerade Zahlen, Primzahlen und perfekte Zahlen
2. Verhältnisse natürlicher Zahlen
3. Flächenzahlen; Polygonalzahlen, Seiten- und Diagonalzahlen
4. Körperzahlen
5. Proportionen

Auch Iamblichos erwähnt unter dem Abschnitt zur Einheit diese als seitlich und diagonal [*In Nic.* 11,20], weil sie potentiell alle Zahlenverhältnisse umfasse. Allerdings unterscheidet er die Seiten- und Diagonalzahlen von den anderen Flächenzahlen dadurch, dass sie nicht in der Arithmetik, sondern in der Geometrie zu behandeln sind [91,3-93,7]. Als Grund dafür gibt er an, „wenn man dort die Seite berechnet, dann ist die Diagonale irrational (*alogos*)".[103] Um dennoch deren Verhältnisse in der Arithmetik zu erkunden, müsse man von der Eins ausgehen, „Seite und Diagonale als zwei Einheiten bezeichnen und zweckmäßige allgemeine und immer gleiche Hinzufügungen vornehmen." Mit einer scheinbaren Begründung, dass, „was die Seite in der gezeichneten Figur zweimal bedeutet, die Diagonale einmal bedeutet", werden der Seite die Diagonale und der Diagonalen zwei Seiten hinzugefügt, aus dem Paar $(1, 1)$ entstehen somit nacheinander die Paare $(2, 3), (5, 7), (12, 17)$. Dadurch würden die Quadrate der Diagonalen abwechselnd

101. Nikomachos von Gerasa, ca 100 n.C., Iamblichos von Chalkis, ca. 300 n.C. Vgl. *Th. Ar.* 82,10 – 83,6.
102. [1, 12], die Mischung gerade-ungerade [Philolaos Fr. 5) ist die Eins (*hen*) [Aristoteles, *Met.* 986a19].
103. Iamblichos setzt, entgegen *Elem.* X, inkommensurabel gleich irrational, vgl. *VP* 247.

um eine Einheit (*monas*) kleiner und größer sein als das doppelte der Quadrate über den Seiten, „und so werden Diagonalen und Seiten zueinander ausdrückbar (*rētai*)“ [92]. Diese durch empirische Induktion erschlossene Eigenschaft, dem gemeinverständlichen Charakter der Schrift entsprechend, wird als selbstverständlich angenommen, aber nicht bewiesen.

Auch die Gliederung von Nikomachos *Einführung in die Arithmetik* stimmt weitgehend mit derjenigen von Iamblichos *In Nic.* überein, allerdings fehlen bei ihm die Seiten- und Diagonalzahlen. Nikomachos verweist aber in II.6 auf eine *Einführung in die Geometrie*, die nicht überliefert ist oder nie geschrieben wurde, so dass man nicht sicher sein kann, er habe diese Zahlen dort dargestellt. Jedoch war Speusippos Schrift *Über pythagoreische Zahlen* wahrscheinlich auch für Nikomachos *Arithmetik* eine Vorlage, ob direkt oder durch andere Schriften übermittelt, muss offenbleiben. Dasselbe gilt für Theon von Smyrna: *Expositio des nützlichen mathematischen Wissens zur Lektüre Platons* (ca. 120 n. C.), der ersten erhaltenen Schrift, in der die Seiten- und Diagonalzahlen behandelt werden. Theon schreibt gleichfalls im Teil I, *Arithmetik*, über Flächenzahlen, das sind Polygonalzahlen sowie Seiten- und Diagonalzahlen, von denen er wie Iamblichos nur die ersten vier Paare der Folge und deren Norm berechnet; er schließt mit derselben Bemerkung „dass diese Diagonalen und diese Seiten immer ausdrückbar (*rētai*) sind“ [*Exp.* 44].

Speusippos' Titel „*Über pythagoreischen Zahlen*“ erweckt den Anschein, als sei der Inhalt das alte Wissen der Pythagoreer, doch unterscheidet sich die Darstellung des Speusippos grundsätzlich von dem, was wir von den Pythagoreern durch Aristoteles wissen. Zunächst lässt sich die Behauptung widerlegen, dass Speusippos Buch eine Zusammenstellung pythagoreischer Schriften, insbesonders von Philolaos, sei [*The. ar.* 82,10]. Denn von Speusippos werden die Zahlen geometrisch realisiert: „Die Einheit (*hen*) ist ein Punkt, zwei eine Linie, drei ein Dreieck, vier eine Pyramide,“[104] wobei er den Platonikern folgt, die „nach den Zahlen Linien und Flächen und Körper setzen“ [*Met.* 992b13], also die geometrischen Elemente aus den Zahlen ableiten. Dies widerspricht aber Aristoteles' Beschreibung der so genannten Pythagoreer, die annehmen, dass die Einheiten eine Größe haben.[105] Zwar soll damit Philolaos gleichfalls geometrische Örter gelegt haben, was in Anlehnung an die mit *psephoi* gelegten Gestalten des Eurythos glaubhaft ist: „Eins hat den Ort eines Punktes, Drei der ersten ungeraden linearen (Zahl), Neun der

104. Nach dem Speusippos-Fragment 4 in *Th. ar.* 83,6–85,23, d.h. ein Raum der Dimension n wird allgemein von $n+1$ Punkten aufgespannt. Diese haben zwar keine Dimension, existieren aber durch ihre Bezeichnung, vgl. Burkert (1972) 66f.

105. Vgl. Philolaos: „Eins (*hen*) in der Mitte der Kugel heißt Hestia“ DK 44 B7, vgl. *Met.* 986a, 1080b19.

ersten ungeraden quadratischen (Zahl),“[106] jedoch sind dies keine geometrischen Figuren, sondern eher Bilder von Zahlen. Im Gegensatz dazu hatten bei den Platonikern die mathematischen Punkte keine Teile, und daher auch keine Größe.[107] Demensprechend werden bei Nikomachos die figurierten Zahlen nicht mit ausgedehnten Punkten gelegt, sondern diese werden mit α, dem Zeichen für eins, lediglich bezeichnet,[108] was mit Speusippos überein stimmt, denn er hat die Zahlen von einem dinglichen (Pythagoreer) oder ideellen Sein (Platon) befreit, um sie als selbständige, mathematische Zahlen zu behandeln [*Met.* 1028b21].

Während Speusippos *Über pythagoreische Zahlen* in der Absicht schrieb, an der Akademie gefundene Zahlen als pythagoreische darzustellen, ging Nikomachos noch einen Schritt weiter zurück, wenn es bei ihm heißt, dass die Alten unter der Führung des Pythagoras die Wissenschaft zuerst systematisch betrieben hätten [*Ar.* I.1]. Nach Iamblichos hatte Nikomachos in seiner *Arithmetischen Kunst* (*technē*) alles über die Arithmetik im Sinne des Pythagoras dargelegt [*In Nic.* 4]. Jedoch wussten weder Platon noch Aristoteles etwas von einer derartigen Kunst das Pythagoras, und auch nicht der Pythagoreer, so dass diese wohl erst mit den so genannten *pythagoreischen Zahlen* des Speusippos aufkam. Ihre Darstellungen bei Nikomachos, Theon und Iamblichos lassen darauf schließen, um welche Art von Schrift es sich dabei handelte; es werden keine Theoreme aufgestellt und Beweise geführt, sondern die Eigenschaften der Zahlen werden lediglich an Beispielen vorgeführt. Platon erwähnt Darstellungen dieser Art: „Alle und jede einzelne Kunst ist öffentlich bekannt gemacht und niedergeschrieben da, für jeden der es lernen will“ [*Soph.* 232d]; eine solche wird auch die erste Hälfte von Speusippos Schrift gewesen sein.

Die zweite Hälfte behandelt die Zehn als vollkommene (*teleios*) Zahl, worauf die Griechen und alle Menschen in Übereinstimmung mit der Natur kommen, wenn sie zählen [*Th. ar.* 83,1ff]. Denn sie hat viele Eigenschaften, die zu einer vollkommenen Zahl passen; sie ist erstens gerade, zweitens enthält sie die gleiche Anzahl Primzahlen $(1, 2, 3, 5, 7)$ wie zusammengesetzte Zahlen $(4, 6, 8, 9, 10)$, zwar gilt das auch für 12 und 14, aber 10 ist die erste derartige Zahl. Außerdem enthält sie in beiden Hälften die gleiche Anzahl von nicht vielfachen $(1, 2, 3, 5)$ wie von vielfachen Zahlen $(6, 8, 9, 10)$. Ferner enthält sie alle Arten, lineare, ebene und körperliche Zahlen, es folgt die Realisierung der Zahlen $1, 2, 3, 4$ als Punkt, Linie, Dreieck und Pyramide. Diese Zahlen haben zueinander überteilige Verhältnisse $(N + 1) : N$ und es ist

106. Vgl. DK44 A26, 20-23, aus Boethius, Inst. Mus.
107. Vgl. *Elem.* I, Def. 1. Speusippos dürfte diese Definition gekannt haben, die wohl schon in den *Elementen* des Theudios verwendet wurde, vgl. Proklos *In Eucl.* 67.
108. Vgl. Nikomachos *Arithmetika*, α soll das Zeichen für eins sein [II.6,2]. Theon *Exp.*: Die erste Dyade wird durch zwei Alpha dargestellt, $\alpha\alpha$ [31] .

$1+2+3+4=10$. Auch die geometrischen Figuren seien in Zehn enthalten und werden durch sie begrenzt, denn die Pyramide hat vier Seiten und Flächen und sechs Kanten, deren Summe ist die Zehn, derart folgen noch weitere, auch dubiose Beispiele. Jedoch beweist keines dieser Beispiele, dass Zehn vollkommen sei, und es gibt auch kein Prinzip des Vollkommenen, wonach es sich beweisen ließe.

Aristoteles bezeichnet derartige Texte als „exoterische Darstellungen (*logoi*)", z.B. wenn es um die Frage geht, ob die mathematischen Gegenstände und Ideen selbständige Wesen sind. Nach Platon wären sie es beide, nach Speusippos wären es nur die Gegenstände der Mathematik [*Met.* 1076a28]. Exoterische Darstellungen enthalten keine wissenschaftliche Beweisführung aus vorausgesetzten Prinzipien, sondern allgemeinverständliche Darlegungen mit der dazu gehörigen Rhetorik. Diese bedient sich verschiedener Anzeichen (*sēmeia*), um die Sache glaubhaft zu begründen, und sie ist umso besser begründet, je mehr Anzeichen angeführt werden können, z.B. wenn es um die Existenz einer Sache geht, worüber es keine Prinzipien geben kann.[109] Ein solches Beispiel wäre die vollkommene Zahl 10; Speusippos setzte deren Existenz voraus, konnte aber nur mit Anzeichen auf deren Vollkommenheit verweisen. Nicht viel anders lässt sich der erste Teil der Schrift des Speusippos rekonstruieren: Verschiedene Zahlklassen werden dadurch vorgestellt, dass einzelne Arten aufgezählt werden. Bei den Polygonalzahlen sind es zuerst die Dreiecks- und Viereckszahlen, die nach Aristoteles von den Pythagoreern mit *psēphoi* gelegt wurden [*Met.* 1092b12]. Insbesonders hatte die Dreieckszahl $10=1+2+3+4$ als so genannte *Tetractys* eine mythische Bedeutung. Weitergehend soll Philippos Opus, ein Schüler Platons, über Polygonalzahlen geschrieben haben,[110] indem er diese Zahlen als 5-Eckzahlen, 6-Eckzahlen, 7-Eckzahlen usw. verallgemeinerte, wie sie später von Nikomachos, Theon und Iamblichos vorgestellt, aber nicht allgemein definiert und behandelt werden.[111] Anders stellt sich dies für die Seiten- und Diagonalzahlen dar, nach der obigen Rekonstruktion wurden sie zur Zeit Platons an der Akademie gefunden und deren alternierende Norm mit Mitteln der Flächenarithmetik bewiesen. Diesen Beweis behandelte Speusippos offenbar nicht, während er *Über pythagoreische Zahlen* schrieb und die Zahlen nur vorstellte, so dass auch die davon abhängigen Schriften von Theon, Iamblichos und schließlich Proklos die alternierende Norm nicht bewiesen haben. Die Darstellung der Seiten- und Diagonalzahlen bestand einmütig in der Berechnung der ersten vier Paare als Zeichen für die ganze Folge.

109. Vgl. Wieland (1970) 334 ff.
110. Vgl. Burkert (1972) 431.
111. N-Eckzahlen entstehen, wenn von der arithmetischen Folge $a_n = 1+(n-1)\,D$ mit $D = N-2$ die Partialsummen gebildet werden. Die *nte* N-Eckzahl ist dann $\frac{n}{2}\,(1+a_n) = \frac{n}{2}(2+(n-1)\,D)$. Nach Diophant, *Polygonalzahlen* §8, wurde diese Formel von Hypsicles gefunden (ca. 175 v. C.).

10 Verallgemeinerungen

10.1 Archimedes zu $\sqrt{3}$

In *Dim. Circ.* III geht Archimedes (287 – 212 v. C.) von einem dem Kreis umbeschriebenen 6-Eck aus und betrachtet das Verhältnis des Radius zur halben Seite des 6-Ecks. Dies ist gegeben durch das Verhältnis der Höhe d zur halben Seite a eines gleichseitigen Dreiecks, wobei $qu(d) = 3qu(a)$, bzw. $a : d \sim d : 3a$. Er geht von einer Näherung aus, setzt $d : a > 265 : 153$ und berechnet damit für das Verhältnis des Kreisumfangs U zum Durchmesser $c = 2d$ als eine obere Grenze $U : c < 3\frac{1}{7}$. Zur Berechnung einer unteren Grenze verwendet er ein einbeschriebenes 6-Eck und betrachtet das Dreieck, welches von einer Seite des 6-Ecks und dem Durchmesser des Kreises aufgespannt wird. Auch dies ist die Hälfte eines gleichseitigen Dreiecks mit der halben Seite e und der Höhe g wofür er $g : e < 1351 : 780$ setzt, womit als eine untere Grenze folgt $3\frac{10}{71} < U : c$.

Es stellt sich die Frage, wie Archimedes die Näherungen für das Verhältnis der Höhe zur halben Seite im gleichseitigen Dreieck gefunden hat. Zunächst können wir annehmen, dass die alexandrinischen Mathematiker das heronische Verfahren kannten. Demnach ist d die Seite eines Quadrats mit der Fläche von 3 Einheiten, d.h. in unserer Schreibweise $\sqrt{3}$. Sei eine Bruchzahl $r < \sqrt{3}$, die assoziierte Zahl ist $\frac{3}{r} > \sqrt{3}$, ein Näherungswert ist dann das arithmetische Mittel $r' = \frac{1}{2}(r + \frac{3}{r})$. Hier ist $\frac{5}{3} < \sqrt{3}$, mit dem Verfahren folgt daraus $\frac{26}{15} > \sqrt{3}$. Angewandt auf $\frac{26}{15}$ ergibt sich $\frac{1351}{780} > \sqrt{3}$, das ist genau der größere Wert des Archimedes, erzeugt mit dem geringsten Aufwand.

Um eine kleinere Näherung zu finden, liegt die Annahme nahe, dass Archimedes dazu eine Folge fand, analog zu den Seiten- und Diagonalzahlen, wie sie Speusippos überliefert hat. Zu deren Rekursion wird jeweils ein Zahlenpaar mit dem assoziierten Paar addiert, was schließlich $\sqrt{2}$ approximiert. Dem entsprechend ergibt sich für $\sqrt{3}$ die Rekursion $\begin{pmatrix} Q' \\ P' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3P \\ Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q + 3P \\ P + Q \end{pmatrix}$, wobei das Paar (P', Q') noch zu reduzieren ist, so dass proportional dazu ein Paar mit $ggT\,(P, Q) = 1$ gegeben ist. Mit dem Anfangspaar $\begin{pmatrix} Q_1 \\ P_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, der Rekursion $\begin{pmatrix} \overline{Q}_{n+1} \\ \overline{P}_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{Q}'_n \\ \overline{P}'_n \end{pmatrix}$ einschließlich der Reduktion, die hier mit $(\overline{P,Q})$ bezeichnet wird, ist schließlich die Folge der Seiten- und Höhenzahlen gegeben:

$$\binom{1}{1}, \binom{2}{1}, \binom{5}{3}, \binom{7}{4}, \binom{19}{11}, \binom{26}{15}, \binom{71}{41}, \binom{97}{56} \cdots$$

Die Norm $\Delta_n = Q_n^2 - 3P_n^2$ ist alternierend $-2, +1$; dass dies immer so ist, folgt aus der Gleichung $\Delta(P', Q') = -2\Delta(P, Q)$, entsprechend der Identität

$$(Q + 3P)^2 - 3(Q + P)^2 = -2(Q^2 - 3P^2).$$

Dies musste Archimedes nicht beweisen, da er sich nur für die Anfangswerte der Folge interessierte. Das 9. Paar ist $\binom{265}{153}$ mit $\Delta_9 = -2$ oder als Bruch geschrieben $\frac{265}{153}$, also der von Archimedes benutzte Wert.[112] Im Gegensatz zu Speusippos, der nach dem Zeugnis von Theon die Folge der Seiten- und Diagonalzahlen als eine unbegrenzte Folge von ausdrückbaren Diagonalen beschrieb, interessierte sich Archimedes für die Möglichkeit, mit der für $\sqrt{3}$ analogen Folge Näherungswerte der nicht ausdrückbaren Höhe zu finden. Dabei ließ er den mit dem heronischen Verfahren errechneten Wert stehen, auch wenn $\frac{97}{56}$ genügt hätte, um $3\frac{10}{71}$ als untere Grenze für das Verhältnis $U : c$ zu erhalten.[113]

Ich erwähne noch die Möglichkeit, dass Archimedes, da er lediglich noch einen Wert mit negativer Norm benötigte, sich darauf beschränken konnte, nur jedes zweite Paar der Folge zu berechnen, und zwar durch Addition mit dem assoziierten Paar und anschließender Reduktion

$$\begin{pmatrix} Q + 3P \\ P + Q \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} Q + 3P \\ P + Q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3(P + Q) \\ Q + 3P \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2Q + 3P \\ Q + 2P \end{pmatrix}$$

mit der dadurch gegebenen Matrix ergibt sich die Folge:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \to \binom{5}{3}, \binom{19}{11}, \binom{71}{41}, \binom{265}{153}$$

wobei die Norm konstant -2 ist, d.h. er hätte in drei Schritten den gewünschten Wert erreicht.

Es wurde die Forderung aufgestellt, Verfahren zu finden, die in unmittelbar aufeinander folgenden Schritten die drei archimedischen Werte ergeben, angefangen

112. Für uns unterscheiden sich Paare und Brüche durch den Bruchstrich, dieser war in der Antike nicht üblich, so schrieb Heron $\genfrac{}{}{0pt}{}{\gamma}{\beta} = \frac{2}{3}$ (*Metrica* I.18, der Nenner stand unten). Diese Schreibweise konnte dem Kontext entsprechend auch für Paare benutzt werden.
113. Vgl. Knorr (1976) 137.

bei $\frac{5}{3}$. Die von I. Schneider [114] vorgestellten Verfahren sind aus algebraischen Methoden abgeleitet, die nicht auf Archimedes zurückgeführt werden können. Die Forderung der Einheitlichkeit entspricht eher der modernen Mathematik, die elegante Lösungen bevorzugt, hingegen kam es den Alexandrinischen Mathematikern als Pragmatiker auf Brauchbarkeit und Einfachheit an, so dass das heronische Verfahren auf der Hand lag; es war also nur noch eine Näherung von unten zu finden.

Nehmen wir an, dass Archimedes die 2-Schritt Rekursion berechnet hätte, dann könnte er ebenso drei Schritte berechnet haben. Die Rekursion ist dann gegeben durch

$$\begin{pmatrix} 2Q+3P \\ Q+2P \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 2Q+3P \\ Q+2P \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3Q+6P \\ 2Q+3P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5Q+9P \\ 3Q+5P \end{pmatrix}.$$

Wird diese Rekursion einschließlich Reduktion angewandt, entsteht eine kurze Folge, die alle gewünschten Zahlen enthält: $\begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 26 \\ 15 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 265 \\ 153 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1351 \\ 780 \end{pmatrix}$, wobei die Norm alternierend $-2, +1$ ist.[115]

Eine Vereinfachung des heronischen Verfahrens ergibt sich, wenn $K^2 < N < (K+1)^2$, es ist dann $\sqrt{N} = \sqrt{K^2+R} \approx \frac{1}{2}(K + \frac{K^2+R}{K}) = K + \frac{R}{2K}$, analog für $(K-1)^2 < N < K^2$ mit $N = K^2 - R$. Darauf geht eine Rekonstruktion von F. Hultsch zurück, wonach Archimedes die folgende Formel verwendet hätte: $a \pm \frac{b}{2a\pm1} < \sqrt{a^2 \pm b} < a \pm \frac{b}{2a}$ für $0 < b < 2a \pm 1$.

Die obere Abschätzung entspricht dem heronischen Verfahren, während die untere Abschätzung eine willkürlich gesetzte Modifikation davon ist. Mit dem Ausgangswert $\frac{5}{3}$, wobei die Norm $\Delta(3,5) = 5^2 - 3 \cdot 3^2 = -2$ ist, folgt $5 + \frac{2}{11} < 3\sqrt{3} = \sqrt{5^2+2} < 5 + \frac{2}{10}$, also ist $\frac{19}{11} < \sqrt{3} < \frac{26}{15}$ mit den Normen -2 und $+1$. Dasselbe Verfahren auf $\frac{19}{11}$ angewandt ergibt

$19 + \frac{2}{39} < 11\sqrt{3} = \sqrt{19^2+2} < 19 + \frac{2}{38}$, also ist $\frac{743}{429} < \sqrt{3} < \frac{362}{209}$ mit den Normen -74 und $+1$. Durch die auffällig abweichende Norm des unteren Wertes zeigt sich, dass die Modifikation des heronischen Verfahrens nur manchmal zu verlässlichen Werten führt. Dies ist bei $\frac{26}{15}$ der Fall gemäß $26 - \frac{1}{51} < 15\sqrt{3} = \sqrt{26^2-1} < 26 - \frac{1}{52}$, also ist $\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}$ mit den Normen -2 und $+1$. Das sind zwar die von Archimedes verwendeten Zahlen, jedoch erscheint das Ergebnis zufällig und nicht

114. Schneider (2016) 29 ff.

115. Knorr (1976) 138 rechnet mit derselben Rekursion, begründet sie aber lediglich als Mittelwertbildung. Eine Rechtfertigung von $\frac{1351}{780}$ geling m.E. einfacher mit dem Heronschen Verfahren, während Archimedes' Berechnung der Rekursion im Zweischritt- oder Dreischrittverfahren hier lediglich als eine Möglichkeit zu betrachten ist.

vorhersehbar, so dass berechtigte Zweifel angebracht sind, dass der Systematiker Archimedes ein derart modifiziertes heronisches Verfahren benutzt hat.

10.2 Allgemeine Seiten- und Höhenzahlen

Zum Schluss soll noch gezeigt werden, welche Verallgemeinerungen der Seiten- und Diagonalzahlen, allgemein der Höhenzahlen, möglich sind, ohne anzunehmen, dass sie in der Antike verwirklicht wurden. Dies führt schließlich zu Pellschen Gleichungen, insbesonders $Y^2 - Nx^2 = \pm 1$ oder $\pm 2, N$ keine Quadratzahl. Eine historische Kontinuität von Theodoros bis in die Neuzeit lässt sich natürlich nicht nachweisen, der Zusammenhang ist aber durch dasselbe mathematische Problem gegeben. Das ist die geometrische Proportion für die Höhe im rechtwinkligen Dreieck $a : d \sim d : Na$, bzw. $qu\,(d) = Nqu(a)$, wo an Stelle der zueinander inkommensurablen Seiten und Höhen, die daher unausdrückbar sind, Zahlen zu finden sind, die davon minimal, ± 1 oder ± 2, abweichen, so dass die Verhältnisse ausdrückbar werden. Für $N = 2$ hat dazu die Akademie noch zur Zeit Platons den Grund gelegt, auf dem sowohl hellenistische und indische, als auch neuzeitliche Mathematiker aufbauen konnten.

Beim Beweis des Theodoros wurde eine Zahl K mit $K^2 < N < (K+1)^2$ definiert und mit K-facher korrespondierender Subtraktion erhielten wir die Proportion $a : d \sim (d - Ka) : (Na - Kd)$, wobei $Ka < d$, und $Kd < Na$. Es lässt sich auch die entgegengesetzte, K-fache korrespondierende Addition anwenden, so dass durch

$a : d \sim (d + Ka) : (Kd + Na)$ eine Rekursion gegeben ist, $a' = d + Ka, d' = Kd + Na$. Da a, d zueinander inkommensurabel sind, kann kein Zahlenpaar die Proportion $d : a$ erfüllen, man kann aber mit Zahlen (P, Q) die analoge Rekursion definieren.

Satz 10.1 *Mit der Rekursion* $\begin{pmatrix} Q' \\ P' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} KQ \\ KP \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} NP \\ Q \end{pmatrix}$ *gilt für die Norm* $\Delta\,(P', Q') = \Delta(1, K) \cdot \Delta(P, Q)$.

Dies folgt aus der Identität $(KQ + NP)^2 - N\,(Q + KP)^2 = (K^2 - N) \cdot (Q^2 - NP^2)$.

Eine Folge von Zahlenpaaren, die jeweils zu reduzieren sind, so dass ggT $(P_n, Q_n) = 1$, sei definiert durch $\begin{pmatrix} Q_1 \\ P_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \overline{Q}_{n+1} \\ \overline{P}_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{Q}'_n \\ \overline{P}'_n \end{pmatrix}$. Die Überstreichung steht für die reduzierten Paare.

Satz 10.2 (1) *Sei* $K^2 - N = \pm 1;$ *bei* $+1$ *hat diese Folge die konstante Norm* $\Delta\,(P_n, Q_n) = +1$, *bei* -1 *die alternierende Norm* $\Delta\,(P_n, Q_n) = (-1)^n$.

(2) *Sei* $K^2 - N = \pm 2$, *dann ist entsprechend* $\Delta\left(\overline{P}_{2n-1}, \overline{Q}_{2n-1}\right) = \pm 2, \Delta\left(\overline{P}_{2n}, \overline{Q}_{2n}\right) = 1$.

(1) Dies folgt direkt aus Satz 10.1, ein Beispiel dafür sind die Seiten- und Diagonalzahlen.

(2) Es ist $\begin{pmatrix} Q_2 \\ P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K & N \\ 1 & K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K^2 + N \\ 2K \end{pmatrix}$, nach Voraussetzung ist $K^2 - N$ gerade, also ist auch $K^2 + N$ gerade.[116] Ohne Reduktion ist $\Delta(P_2, Q_2) = \pm 2\Delta(1, K) = +4$, reduziert ist dann $\Delta\left(\overline{P}_2, \overline{Q}_2\right) = 1$. Betrachten wir nun die 2-fache Rekursion, diese ist gegeben durch

$$\begin{pmatrix} K & N \\ 1 & K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} K & N \\ 1 & K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K^2 + N & 2KN \\ 2K & N + K^2 \end{pmatrix}$$

Vollständige Induktion: 1. Sei reduziert $\Delta\left(\overline{P}_{2n}, \overline{Q}_{2n}\right) = 1$, mit der 2-fachen Rekursion ist dann $\Delta(P_{2n+2}, Q_{2n+2}) = (\pm 2)^2 = 4$, da jedoch alle Elemente der 2-fachen Rekursionsmatrix gerade sind, lässt sich dieses Zahlenpaar mit 2 reduzieren, so dass $\Delta\left(\overline{P}_{2n+2}, \overline{Q}_{2n+2}\right) = 1$.

2. Sei reduziert $\Delta\left(\overline{P}_{2n-1}, \overline{Q}_{2n-1}\right) = \pm 2$, dann ist $\Delta(P_{2n+1}, Q_{2n+1}) = \pm 8$, da sich wie vorher das Paar mit 2 reduzieren lässt, ist $\Delta\left(\overline{P}_{2n+1}, \overline{Q}_{2n+1}\right) = \pm 2$. Daraus folgt insgesamt, dass die Norm der reduzierten Folge alternierend $-2, +1$ ist, ein Beispiel dafür sind die Seiten- und Höhenzahlen am gleichseitigen Dreieck.

Weitere Beispiele:

$N = 5, K = 2$ ergibt $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 38 \\ 17 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 161 \\ 72 \end{pmatrix} \ldots \Delta_{2n-1} = -1, \Delta_{2n} = 1$

$N = 6, K = 2$ ergibt $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 22 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 49 \\ 20 \end{pmatrix} \ldots \Delta_{2n-1} = -2, \Delta_{2n} = 1$

$N = 7, K = 3$ ergibt $\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 45 \\ 17 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 127 \\ 48 \end{pmatrix} \ldots \Delta_{2n-1} = +2, \Delta_{2n} = 1$

Ein Gegenbeispiel ist

$$N = 6, K = 1 \text{ mit } \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 19 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 73 \\ 28 \end{pmatrix} \ldots \Delta_n = (-5)^n$$

116. Dies ist elementar, folgt aber auch aus dem Lehrstück vom Geraden und Ungeraden *Elem.* IX. 21-27.

Bemerkung. Für Theon von Smyrna bestand die Charakteristik der Seiten- und Diagonalzahlen darin, dass die Folge der Zahlen unbegrenzt ist, dass das Quadrat der Diagonalen alternierend um eine Einheit größer und kleiner als das doppelte Quadrat der Seite ist, so dass diese Diagonalen und Seiten immer ausdrückbar sind. Dagegen wird neuerdings die Folge der Paare „Theons Leiter" genannt und als Folge von rationalen Zahlen interpretiert, die $\sqrt{2}$ approximiert, was sicher nicht Theons Absicht war.[117] Auch ihre Verallgemeinerung als „Theon's ladder for any square root" geht davon aus, dass auch die allgemeine Leiter nichts anderes als eine Approximation von $\sqrt{N}$ ist. Die Verallgemeinerung besteht darin, dass die Rekursion durch die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & N \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ gegeben ist, wobei die Reduktion der Folge und Berechnung der Normen entfällt, aber dennoch die Approximation gegen $\sqrt{N}$ zu beweisen ist (z. B. für $N = 6$ s.o.).[118]

10.3 Lösungen der Pellschen Gleichung

Wie zu Anfang sei N eine nichtquadratische Zahl, a die Ausgangsstrecke und d eine *dynamis* als mittlere Proportionale in $a : d \sim d : Na$; seien K, L zwei Zahlen, dann gilt ebenso die Proportion $Ka : Kd \sim Ld : LNa$, also ist mit korrespondierender Addition $a : d \sim (Ka + Ld) : (Kd + LNa)$. Für Zahlenpaare ergibt sich daraus die analoge Rekursion $\begin{pmatrix} Q' \\ P' \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix} + L \begin{pmatrix} NP \\ Q \end{pmatrix}$ als gewogenes Mittel, mit Matrix geschrieben $\begin{pmatrix} Q' \\ P' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K & LN \\ L & K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix}$, die dadurch definierte Folge nenne ich die allgemeinen Seiten- und Höhenzahlen.

Satz 10.3 *Sei* $\Delta(K, L) \neq 0$, *dann gilt für die allgemeinen Seiten- und Höhenzahlen*

$$\Delta(P', Q') = \Delta(L, K) \cdot \Delta(P, Q).$$

Dies folgt aus der Identität von Brahmagupta (6. Jhd. n. C.):[119]

$$(KQ + LNP)^2 - N(LQ + KP)^2 = (K^2 - NL^2) \cdot (Q^2 - NP^2)$$

117. Vgl. Theon von Smyrna (2021), Einführung.

118. Giberson, Osler (2004). Eine weitergehende Verallgemeinerung ist „Theon's ladder for any root" ($\sqrt[p]{N}$), Osler, Wright and Orchard (2005).

119. Formuliert in rhetorischer Algebra, vgl. Colebrooke (1817) 263; in symbolischer Algebra entspricht dies dem Normenproduktsatz in $Z\sqrt{N}$. Dazu schreiben wir für ein Paar $(P, Q)\, den Ausdruck$ $\left(Q + P\sqrt{N}\right)$ mit der Norm $\Delta = Q^2 - NP^2$, dann ist $\left(K + L\sqrt{N}\right)\left(Q + P\sqrt{N}\right) = (KQ + LPN) + (LQ + KP)\sqrt{N}$. Berechnen wir auf beiden Seiten die Norm, erhalten wir die obige Identität. Vgl. Remmert, Ullrich (1995) 100.

Nach Lagrange hat die Gleichung $X^2-NY^2=1$ immer eine Lösung, diese sei $K^2-NL^2=1$, d.h. $\Delta(L,K)=1$, und K sei minimal, wir definieren dem entsprechend die Folge $\begin{pmatrix}Q_1\\P_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}K\\L\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}Q_{n+1}\\P_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Q'_n\\P'_n\end{pmatrix}$, dann ist $\Delta(P_n,Q_n)=1$ für alle n; damit sind die allgemeinen Seiten- und Höhenzahlen die allgemeine Lösung der Pellschen Gleichung für N.

Die Gleichung $X^2-NY^2=-1$ hat nicht immer eine Lösung, z. B. nicht für $N=3$,[120] gibt es jedoch eine Lösung $K^2-NL^2=-1$ und K sei minimal, dann hat die ebenso definierte Folge die alternierende Norm $\Delta(P_n,Q_n)=(-1)^n$. Die allgemeinen Seiten- und Höhenzahlen sind in beiden Fällen die Lösung der Pellschen Gleichung $X^2-NY^2=\pm1$.

Beispiel: $N=13$, es ist $18^2-13\cdot5^2=-1$, dies ergibt Matrix und Folge

$$\begin{pmatrix}18 & 65\\ 5 & 18\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}18\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}649\\180\end{pmatrix},\ldots,\Delta_n=(-1)^n.$$

Zusatz. Schließlich wird noch der Zusammenhang des heronischen Verfahrens mit den allgemeinen Seiten- und Höhenzahlen untersucht. Gegeben sei ein Zahlenpaar (L,K) mit der Norm $\Delta(L,K)\neq0$, und die mittels der Rekursionsmatrix $\mathcal{R}=\begin{pmatrix}K & LN\\ L & K\end{pmatrix}$ sowie dem Anfangselement $\begin{pmatrix}K\\L\end{pmatrix}$ definierte allgemeine Folge von Seiten- und Höhenzahlen $\begin{pmatrix}Q_n\\P_n\end{pmatrix}$.

Lemma 10.4 *Es ist* $\mathcal{R}^n=\begin{pmatrix}Q_n & NP_n\\ P_n & Q_n\end{pmatrix}$.

Dies gilt für $n=1$, es gelte für n, dann ist

$$\begin{aligned}\mathcal{R}^{n+1}&=\begin{pmatrix}K & LN\\ L & K\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Q_n & NP_n\\ P_n & Q_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}KQ_n+LNP_n & KNP_n+LNQ_n\\ LQ_n+KP_n & LNP_n+KQ_n\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}Q_{n+1} & NP_{n+1}\\ P_{n+1} & Q_{n+1}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Satz 10.5 *Vorausgesetzt sei die allgemeine Folge der Seiten- und Höhenzahlen, das heronische Verfahren, angewandt auf* (P_n,Q_n), *ergibt* (P_{2n},Q_{2n}).

120. Hier wäre $X^2+1=3Y^2$ durch 3 teilbar, aber dann könnte X^2-1 nicht durch 3 teilbar sein, entgegen dem Satz des Theon von Smyrna (s.o. Anm. 34).

Nach Heron ist $\frac{1}{2}\left(\frac{Q_n}{P_n}+\frac{NP_n}{Q_n}\right)=\frac{Q_n^2+NP_n^2}{2P_nQ_n}$, äquivalent dazu ist $\begin{pmatrix} Q_n & NP_n \\ P_n & Q_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q_n \\ P_n \end{pmatrix}=$ $\begin{pmatrix} Q_n^2+NP_n^2 \\ 2P_nQ_n \end{pmatrix}$. Andererseits ist $\begin{pmatrix} Q_n \\ P_n \end{pmatrix}=\mathcal{R}^{n-1}\begin{pmatrix} K \\ L \end{pmatrix}$, so dass

$$\mathcal{R}^n\cdot\mathcal{R}^{n-1}\begin{pmatrix} K \\ L \end{pmatrix}=\mathcal{R}^{2n-1}\begin{pmatrix} K \\ L \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} Q_{2n} \\ P_{2n} \end{pmatrix}.$$

Literatur

Archimedes, Werke, Übers. A. Czwalina. Darmstadt 1972.

Aristarchus, *Treatise on the Sizes and Distances oft he Sun and Moon*. Greek text ed. and tr. T. L. Heath. Oxford 1913.

Aristoteles, Philosophische Bibliothek. Meiner, Hamburg 1976 ff.

Aristoteles, *Physik*, Griechisch und deutsch. Hrsg. und übers. Karl Prantl, [Leipzig 1854], Aalen 1978.

Artmann, B. (1985): Über voreuklidische „Elemente", deren Autor Proportionen vermied. *Archive of the History of Exact Sciences* 33, 291-306.

Becker, O. (1957): *Das mathematische Denken der Antike*. Göttingen.

Blößner, N. (1999): *Musenrede und "geometrische Zahl"*. Akademie der Wissenschaften und der Literatur, Mainz.

Boehme, H. (2007): Anfänge der theoretischen Geometrie bei den Griechen. In Hupp, I., Ulrich, P.: *Mathematische Streiflichter*. Tagung zur Geschichte der Mathematik in Lambrecht (Pfalz) 2007. Rauner Verlag, Augsburg (2017) 1-14.

Boyer, C. B. (1968): *A History of Mathematics*. New York.

Burkert, W. (1971): Rezension zu A. Szabó, Anfänge der griechischen Mathematik. *Erasmus* 23, 102-105.

Burkert, W. (1972): *Lore and Science in Ancient Pythagoreanism*. Transl. E. L. Minar, Cambridge, Mass. 1972. *Weisheit und Wissenschaft*. Nürnberg 1962.

Burnyeat, M. F. (1978): The Philosophical Sense of Theaetetus' Mathematics. *Isis* 69, 489-513.

Caveing, M. (1988): *La Constitution du type mathématique de l'idéalité dans la pensée grecque*. III. *La question de l'irrationalité*. Paris.

Colebrooke, H. T.: *Algebra with arithmetic and mensuration from the Sanscrit.* [London 1817] Wiesbaden 1973.

Dedekind, R. (1872): *Stetigkeit und irrationale Zahlen.* Vieweg, Braunschweig.

Descartes, R.: *La géométrie.* Übers. L. Schlesinger. Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt 1981.

Diels, H., Kranz, W. (1974): *Die Fragmente der Vorsokratiker.* Berlin.

Dillon, J. (2002): *Die Vita Pythagorica – ein Evangelium?* In Jamblich (2002), 295-301.

Diophantus von Alexandria: *Die Arithmetik und die Schrift über die Polygonalzahlen.* Übers. G. Werthheim. Leipzig 1890.

Erler, M. (2007): *Platon.* Schwabe Verlag, Basel.

Euclid, *Opera Omnia.* Ed. J. L. Heiberg, M. Menge, Leipzig 1883 ff.

Euclide: *Les Éléments*, Vol. I – IV. Traduction et commentaires Vitrac, B. Presses Universitaires de France, Paris 1990-2001.

Euklid: *Die Elemente.* Übers. C. Thaer. Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt 1973.

Euklid: *Die Data.* Übers. C. Thaer. Springer, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1962.

Fowler, D. H. (1987): *The Mathematics of Plato's Academy.* University Press, Oxford.

Freudenthal, H. (1953): Zur Geschichte der Vollständigen Induktion. *Archives internationales d'histoire des sciences* 6, 17-37.

Von Fritz, K. (1945): Discovery of Incommensurability by Hippasos of Metapontum. *Annals of Mathematics* 46, 242-264.

Gibberson, S., Osler, T.J. (2004): Extending Theon´s ladder to any square root. *The College Mathematics Journal*, 35, 222-226.

Habicht, C. (1976): Eine hellenistische Urkunde aus Larissa. In Milojcic, V., Demokritos, I.: *Die deutschen archäologischen Forschungen in Thessalien.* Bonn, S. 157-173.

Hankel, H. (1874).: *Beiträge zur Geschichte der Mathematik in Altertum und Mittelalter.* Teubner, Leipzig.

Hardy, G. H. Wright, E. M. (1938): *An Introduction to the Theory of Numbers.* Oxford.

Heath, T. L. (1921): *A History of Greek Mathematics*. Clarendon Press, Oxford.

Heath, T. L. (1926): *The thirteen Books of Euclid´s. Elements.* Vol. I-III. Translated from J. L. Heiberg. Cambridge University Press.

Heath, T. L. (1949): *Mathematics in Aristotle.* Clarendon Press, Oxford.

Heller, S. (1956): Ein Beitrag zur Deutung der Theodoros-Stelle in Platons Dialog „Theaetet". *Centaurus* 5, Nr.1, 1-58.

Heronis Alexandrini, Opera Omnia, Griechisch und Deutsch. Vol. III *Metrica*, Hrg. H. Schöne. Teubner, Leipzig 1903.

Hölder, O. (1901): Die Axiome der Quantität und die Lehre vom Maß. *Berichte über die Verhandlungen der königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig.* Mathematisch-physikalische Klasse, 53, S. 1-46.

Huffman, C. A. (1993): *Philolaos of Croton.* Cambridge University Press. Cambridge.

Huffman, C. A. (2005): *Archytas of Tarentum.* Cambridge University Press. Cambridge.

Hultsch, F. (1896).: *Arithmetica.* Pauly's Realencyclopädie der classischen Altertumswissenschaft, Bd. 3, Sp. 1066-1116.

Hultsch, F. (1901): Epilog ad *Procli Diadochi in Platonis rempublicam commentarii*, ed. Kroll, Vol. II, 393 ff. Teubner, Leipzig.

Jamblich (2002): *Pythagoras.* Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt.

Iamblichos (*In Nic.*): *Einführung des Nicomachos in die Arithmetik.* Griechisch und Deutsch. Übers. O. Schönberger, E. Knobloch nach H. Pistelli. Rahden/Westf. 2012.

Iamblichos (*VP*): *De vita Pythagorica.* Griechisch und Deutsch. Übers. Michael von Albrecht nach Deubner/Klein. In Jamblich (2002), 32-211.

Iamblichos (*Comm. math. sc.*): *Von der allgemeinen mathematischen Wissenschaft.* Übers. O. Schönberger, E. Knobloch nach N. Festa, St. Katharinen 2000.

Iamblichus [attributed] (*Th. Ar.*): *The Theology of Arithmetic.* Transl. R. Waterfield from V. de Falco, Phanes Press 1988.

Klein, J. (1936): *Die griechische Logistik und die Entstehung der Algebra* II. Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik. Abt. B H.2, 127-235.

Knell, H. (1988): *Architektur der Griechen.* Darmstadt.

Knorr, W. R. (1975): *The Evolution of the Euclidean Elements*. D. Reidel, Dordrecht.

Knorr, W. R. (1976): Archimedes and the Measurement oft the Circle: A New Interpretation. *Archive for History of Exact Sciences.* 15, 115-140.

Michel, P. H. (1950): *De Pythagore à Euclide.* Paris.

Metry, A. (2007): *Speusippos. Zahl Erkenntnis Sein.* Bern.

Mueller, I. (1981): *Philosophy of Mathematics and Deductive Structure in Euclid's Elements.* Cambridge, Massachusetts.

Nikomachos (*Ar.*): *Introduktion to Arithmetic.* Transl. M. L. D'Ooge. London 1926.

Pappos von Alexandrien, *Kommentar zu Euklid, Elem.* X. Aus dem Arabischen, deutsch von H. Suter. Abh. zur Geschichte der Naturwissenschaften und der Medizin, H. 4, 9-78, Erlangen 1922.

Perron, O. (1977): *Die Lehre von den Kettenbrüchen.* Vieweg, Darmstadt.

Platon: Werke. Griechisch/deutsch, Übers. F. Schleiermacher. Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt 1970.

Proclus (*In Eucl.*):*A Commentary on the First Book of Euclid's Elements.* Translated by G. R. Morrow from G. Friedlein. Princeton University Press, Princeton 1970.

Proclus (*In Remp*): *Commentaire sur la République.* Trad. A. J. Festugière nach W. Kroll. Paris 2005.

Remmert, R., Ullrich, P. (1995): *Elementare Zahlentheorie*. Basel, Boston, Berlin.

Rudio, F. (1907): *Der Bericht des Simplicius über die Quadraturen des Antiphon und des Hippokrates.* Teubner, Leipzig.

Sachs, E. (1917): *Die Fünf platonischen Körper.* Weidmann, Berlin.

Saito, K. (1985): Book II of Euclid´s *Elements* in the light oft the Theory of Conic Sections. *Historia Scientiarum* No. 28, 31-60.

Schneider, I. (2016): *Archimedes*. 2. Aufl. Berlin.

Szabó, Á (1969): *Anfänge der griechischen Mathematik.* München, Wien.

Taisbak, C. M. (1971): *Division and Logos.* Odense University Press.

Théon d'Alexandrie: *Commentaire sur les livres 1 et 2 de l'Almageste.* Texte par A. Rome. Città del Vaticano 1936.

Theon von Smyrna (*Exposition*)*: Mathematik für die Platonlektüre.* Griechisch und deutsch. Übers. K. Brodersen nach E. Hiller. Darmstadt 2021.

Toeplitz, O. (1949).: *Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung.* Springer, Berlin.

Van der Waerden, B. L. (1966): *Erwachende Wissenschaft.* Basel, Stuttgart.

Van der Waerden, B. L. (1983): *Geometry and Algebra in ancient Civilizations.* Berlin, Heidelberg.

Vitruv: *Zehn Bücher über Architektur.* Übers. C. Fensterbusch. Darmstadt 1987.

Vogt, H. (1909): Die Entdeckungsgeschichte des Irrationalen nach Plato und anderen Quellen des 4. Jahrhunderts. *Bibliotheca Mathematica* Bd. 10, 97-155.

Wieland, W. (1970): *Die aristotelische Physik.* Göttingen.

Xenophon: *Erinnerungen an Sokrates.* Übers. R. Preiswerk. Stuttgart 1980.

Zeuthen, H. G. (1886): *Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum.* Kopenhagen.

Zeuthen, H. G. (1910): Sur la constitution des livres arithmétiques des Eléments d'Euclide et leur rapport à la question d'irrationalité. *Danske videnskabernes Selskabs Skrifter*, 395-435.

Zhmud, L. (2013): Pythagoras und die Pythagoreer. *Die Philosophie der Antike.* Hrg. H. Flashar, D. Bremer, G. Rechenauer. Basel.

Diagrammatisches Denken bei Euklid

Jasmin Özel

Abstract

Sollen wir Euklids Vorgehen in den *Elementen*[1] als ein axiomatisches System verstehen—oder als ein System des natürlichen Schließens, in dem die Regeln und Prinzipien, denen wir in unserem Schließen folgen, dargelegt werden? Im Folgenden werde ich darstellen, wie Kenneth Manders, Danielle Macbeth, Marco Panza und andere in jüngster Zeit diese letztere Sicht als eine alternative Lesart von Euklids Elementen dargestellt haben. Insbesondere werde ich versuchen zu zeigen, dass wir in dieser Lesart Euklids eine Art der Argumentation vorfinden, die nicht bloß auf Diagrammen basiert (wie dies auch in anderen diagrammatischen Darstellungen der Fall ist), sondern dass die Euklidische Geometrie hier als wesentlich diagrammatisch aufgefasst wird: Wir argumentieren und denken hier *in dem Diagramm*, und nicht bloß auf seiner Grundlage.

1 Einleitung

> Ganz recht, nur darf man nicht vergessen, daß auch diese Figuren als Charaktere anzusehen sind. Denn der Kreis auf dem Papier ist nicht der wirkliche Kreis, auch ist das gar nicht vonnöten, sondern es genügt, daß er für uns die Stelle des Kreises vertritt.“ (Leibniz, „Dialog über die Verknüpfung zwischen den Dingen und Worten“ 1677)

1. Auch wenn die Autoren, die in diesem Aufsatz besprochen werden, ihre Aussagen auf Demonstrationen in den *Elemente* schlechthin beziehen (siehe z.B. Manders 2008, S. 65), stammen die meisten Beispiele in dieser Debatte aus Buch I – Buch III.

Diagramme sind spätestens mit den Entwicklungen des 19. Jahrhunderts in der Mathematik in Verruf geraten.[2] Oft wird seitdem eine Spannung zwischen Anschauung (in Kants Sinne) und Genauigkeit gesehen. Ich werde hier eine alternative Sicht auf die Diagramme beschreiben, wie wir sie vor allem in den Arbeiten der letzten zwei Jahrzehnte von Kenneth Manders, Danielle Macbeth, Marco Panza und anderen vorfinden. Zunächst werde ich mich mit der Natur der Diagramme in Euklids Elementen beschäftigen: Laut Manders, Macbeth *et al.* wird Euklids Vorgehen hier für gewöhnlich als ein Axiomatisches System beschrieben. Die Prämissen wären demnach in der Form einer Liste von Definitionen, Grundbegriffen und Postulaten gegeben, von denen dann bestimmte Theoreme als Schlüsse folgen. Manders, Macbeth *et al.* behaupten hingegen, dass wir Grund haben, das Procedere in Euklids Diagrammen nicht als Axiomatisches System, sondern stattdessen als ein System des natürlichen Schließens zu begreifen, in dem die Regeln und Prinzipien, denen wir in unserem Schließen folgen, dargelegt werden. Mein Fokus wird vor allem darauf liegen zu zeigen, worin laut dieser Lesart die Vorteile der Euklidischen Geometrie bestehen, und was ihre Besonderheiten sind. Manders et al. plädieren dafür, dass wir hier eine Art der Argumentation vorfinden, die nicht bloß auf Diagrammen basiert (wie dies etwa in Euler-Diagrammen der Fall ist), sondern dass die Euklidische Geometrie wesentlich diagrammatisch ist: Wir argumentieren und denken hier *in dem Diagramm*, und nicht bloß auf seiner Grundlage.

Wie wir sehen werden, haben die Diagramme in dieser alternativen Sicht, um es mit Grice auszudrücken, keine *natürliche* sondern eine *nicht-natürliche Bedeutung*. Während natürliche Bedeutung bildzeichenhaft ist, ist nicht-natürliche Bedeutung konventionell („conventional“ in Grice 1957, S. 379) oder symbolisch, wie im Folgenden erläutert wird.[3] Diagramme werden hier somit als wesentlich allgemein verstanden. Ich werde mit Manders et al. und anhand von Beispielen aus Buch I der *Elemente* dafür plädieren, dass Euklids Diagramme sich damit grundlegend von anderen diagrammatischen Darstellungsweisen, wie wir sie etwa in Euler Diagrammen vorfinden, unterscheiden—die zwar explizit machen können, was in den Prämissen bloß implizit gegeben ist. Euklids Diagramme hingegen erweitern unser Wissen, und sind damit in Kants Worten *synthetisch apriorisch*. Zudem—ebenfalls im Gegensatz zu anderen diagrammatischen Darstellungsweisen—ist es hier das Diagramm selbst, und nicht etwa der begleitende Text, der der Ort der Argumentation ist.

2. Seitdem werden Diagramme gar als Hindernisse für den Fortschritt von Beweisen verstanden.

3. „This question about the distinction between natural and nonnatural meaning is, I think, what people are getting at when they display an interest in a distinction between ‚natural‘ and ‚conventional‘ signs“ (Grice 1957, S. 379).

2 Die Euklidische Demonstration

Die Euklidische Demonstration war laut Danielle Macbeht das Paradigma antiker mathematischer Praxis: „The paradigm of ancient mathematical practice is the Euclidean demonstration, a practice characterized by the involvement of both text and diagram“ (Macbeth, S. 236).[4] Charakteristisch für diese Praxis ist die Verwendung von sowohl Text als auch Diagramm. Im Gegensatz dazu ist die frühe moderne Mathematik seit dem 17. Jahrhundert rechnend und symbolisch; sie enthält wesentlich die Formelsprache der Arithmetik und der elementaren Algebra.[5] Die Wissenschaft der Mathematik mag seit Euklid zwar nicht die radikalen Veränderungen erfahren haben, die wir im Laufe der Geschichte der Naturwissenschaften vorfinden. Dennoch hat sich die Praxis der Mathematik im Laufe ihrer zweieinhalbtausendjährigen Geschichte erheblich verändert. Insbesondere im 19. Jahrhundert erfuhr die diagrammatische Form der Argumentation kritische Aufmerksamkeit seitens der Mathematik. So wurden hier verschiedene alternative Formen der Geometrie und ihrer Beziehung zueinander eingeführt, die z. B. ohne das Parallelenaxiom auskommen und somit nicht-euklidisch sind. Diese waren dann natürlich in ihrer Anwendung, z.B. in der Relativitätstheorie, von Bedeutung. Zudem finden wir im Laufe des 19. Jahrhunderts einen Übergang zu einem mehr konzeptuellen oder begrifflichen Ansatz: Ein Denken basierend auf dem Begriff der Stetigkeit in der Analysis, oder von dem der Gruppe in der abstrakten Algebra.[6]

Diese neueren Entwicklungen der mathematischen Praxis brachten neue Anforderungen mit sich, wie der nach exakten und lückenfreien Beweisen auf der Basis zuvor spezifizierter Axiome und Definitionen. Sie bedeuteten für viele zudem, dass die Euklidische mathematische Praxis hoffnungslos fehlerhaft sei.

Im 20. Jahrhundert finden wir dann sogar eine Tendenz in der Philosophie der Mathematik vor, die Geometrie ganz als Mittel der Rechtfertigung in Beweisen zu verwerfen. Die moderne Logik wurde nun zum einzig akzeptablen Standard mathematischer Rechtfertigung.[7]

Diese Entwicklungen der Mathematik insbesondere im 19. Jahrhundert haben in den Augen vieler die Grenzen der euklidischen Geometrie aufgezeigt. Dennoch

4. Im Gegensatz zu Macbeths Behauptung hier verfährt Archimedes hingegen sehr anders (ich danke einem Gutachter für diesen Hinweis).
5. Cf. Macbeth 2010 und Lachtermann 1989.
6. Stein 1988.
7. Manders 2008, S. 65.

verteidigen Macbeth und Manders ihren Stellenwert als eine "extremely successful, robust, and sound mathematical practice"[8]. Doch auch wenn die Euklidische Geometrie sich im Laufe ihrer Geschichte als erfolgreiche, robuste und korrekte Praxis erwiesen hat, so hat sie mit der gegenwärtigen mathematischen Praxis wenig gemein. Es stellt sich uns somit die Frage, worin dann ihr Wert bestehen kann. Manders *et al.* argumentieren erstens, dass ein Nachdenken über die mathematische Praxis, die wir bei Euklid vorfinden—als frühe systematische und fruchtbare mathematische Praxis—uns dabei helfen kann, das Wesen mathematischer Praxis im allgemeinen zu erhellen.[9] Zweitens könne ein solches Verständnis uns in eine bessere Lage versetzen, spätere Entwicklungen besser in ihrem Kontext zu verstehen. Mit Manders, Macbeth *et al.* werde ich nun daher dafür plädieren, dass die Euklidische Praxis in der Tat nicht fehlerhaft ist. Sie mag ihre Grenzen haben: nicht alles kann in der Mathematik auf Euklids Art und Weise umgesetzt werden. Dennoch hat sich diese Geometrie über zweieinhalbtausend Jahre als extrem erfolgreiche, robuste, und korrekte Praxis erwiesen—wenn auch eine, die sich von der gegenwärtigen mathematischen Praxis stark unterscheidet.

3 Euklids Elemente: Axiomatisches System oder ein System des Natürlichen Schließens?

Euklids *Elemente* werden für gewöhnlich als axiomatisches System beschrieben, in dem Theoreme bewiesen und Lösungen zu Problemen konstruiert werden, nämlich durch eine auf Diagrammen basierte Beweisführung, die sich auf den Fall der in Frage stehenden geometrischen Figur bezieht. Wir werden gleich am Beispiel des ersten Satzes des ersten Buches das bekannteste Beispiel einführen, das in der Literatur zur Untermauerung der These genutzt wird, dass die geometrischen Argumente, die wir bei Euklid vorfinden, als Diagramm-basiert zu verstehen sind[10]. Nach Danielle Macbeth sollten Euklid's Element jedoch als ein System des Natürlichen Schließens und nicht als Axiomatisches System verstanden werden—und als eines das nicht bloß auf Diagrammen basiert, sondern im Diagramm argumentiert. Sie widerspricht der herkömmlichen Sicht wie folgt:

> In Euclid's demonstrations, the definitions, common notions, and postulates are not treated as premises; instead they function, albeit only implicitly, as rules constraining what may be drawn in a diagram and

8. Macbeth 2010, S. 236
9. Ibid.
10. Vgl. Marco Panzas (2012) Diskussion in „The twofold role of diagrams in Euclid's plane geometry“

> what may be inferred given that something is true. They provide the rules of the game, not its opening positions.[11]

Die Definitionen, Axiome und Postulate sollen demnach nicht als Prämissen verstanden werden, sondern als Regeln, die *die Regeln des Spiels* festlegen—die uns also implizit sagen, was in einem Diagramms gezeichnet werden kann, und welche Schlüsse wir ziehen dürfen. Die Unterscheidung zwischen einem Axiomatischen System und einem System des Natürlichen Schließens besteht damit in folgendem Kontrast, den Manders, Macbeth *et al.* in Bezug auf die Funktion der Definitionen, Postulaten und Grundbegriffen konstatieren: 1. In der axiomatischen Lesart fungieren sie als *Prämissen*; 2. in der Lesart als System des Natürlichen Schließens stellen sie die *Regeln und Prinzipien* des Schließens selbst dar—die Inferenzregeln, die aussagen, welche inferentiellen Schritte von Prämissen zu Konklusion legitim sind und welche nicht. Macbeth drückt den Gegensatz wie folgt aus:

> Do they function to provide starting points for reasoning, as has been traditionally assumed? Or do they instead govern one's passage in the construction, from one diagram to another, and one's reasoning, from one judgment to another?[12]

Im ersten Falle besteht die Rolle der Definitionen, Postulate und Grundbegriffe darin, die *Startpunkte des Denkens* zu sein; im zweiten regeln sie den *Übergang* in der Konstruktion von einem Diagramm zum nächsten sowie von einem Urteil zum nächsten. Macbeths Verdacht hier ist, dass die Annahme, dass Euklid in den *Elementen* in der Tat ein Axiomatisches System vorlegt, der Tatsache geschuldet ist, dass Platon und Aristoteles annahmen, dass jede Wissenschaft — inklusive der Mathematik — danach streben sollte, axiomatisch zu sein. Insofern Euklids System ein „Paradigma der Wissenschaft" darstellt, sollte es daher auch axiomatisch sein. In einem axiomatischen System ist eine Liste von Axiomen gegeben (vielleicht zusammen mit explizit genannten Inferenz-Regeln), auf deren Grundlage man Theoreme deduzieren kann. Die Axiome sind somit Urteile, die die Prämissen von Inferenzen bereitstellen. In einem System des natürlichen Schließens sind dagegen nicht die Axiome gegeben, sondern stattdessen verschiedene Inferenz-Regeln, die darlegen, welche inferentiellen Schritte von Prämissen zur Konklusion legitim sind. Die Prämissen sind somit nicht gegeben, sondern müssen bereits gegeben sein. Die Regeln besagen dann, wie das weitere Vorgehen auszusehen hat.

Die Frage danach, ob Euklids System ein axiomatisches ist oder nicht können wir somit wie folgt übersetzen: Besteht die Funktion der Definitionen, Postulate

11. Macbeth 2010, S. 237.
12. Ibid.

und Axiome, die zu Beginn von Euklids Demonstrationen gegeben sind, darin Prämissen zu liefern, oder aber die Regeln, nämlich die Regeln der Konstruktion und von Inferenzen?

Betrachten wir z.B. die drei ersten Postulate des ersten Buchs:

1. Von einem beliebigen Punkt zu einem anderen ist eine gerade Strecke zu ziehen,

2. und eine gerade Strecke ist beliebig verlängerbar,

3. und um einen beliebigen Punkt ist mit beliebigem Radius ein Kreis beschreibbar...

Die ersten drei Postulate in den *Elementen* bestimmen, was im Verlaufe der Konstruktion von Diagrammen gezeichnet werden kann: Sind zwei Punkte gegeben, so kann eine gerade Strecke mit den zwei Punkten als Endpunkten gezeichnet werden. Eine begrenzte Strecke kann fortgesetzt werden. Hat man einen Punkt und das Segment einer Geraden (oder eine Distanz), so kann ein Kreis mit dem Punkt als Mittelpunkt und dieser Distanz als Radius gezeichnet werden.[13] In jedem der genannten Fälle muss der Ausgangspunkt (Punkte bzw. Strecken) bereits gegeben sein, damit das Postulat überhaupt Anwendung finden kann. Zudem kann anfangs nichts, was diese drei Postulate nicht erlauben, getan werden. Sobald sie jedoch bewiesen sind, können eine Vielzahl anderer Konstruktionsregeln ebenfalls genutzt werden. Mit Hilfe von Kreisen, Linien und Punkten kann nun etwa gezeigt werden, dass ein gleichseitiges Dreieck auf einer gegebene begrenzten graden Linie konstruiert werden kann (erstes Buch, erster Satz). In nachfolgenden Konstruktionen kann im Anschluss dann immer bereits ein gleichseitiges Dreieck gezeichnet werden, ohne weitere Zwischenschritte in der Konstruktion—angenommen natürlich, man hat das entsprechende Linien-Segment.

Sätze, so wie der erste Satz des ersten Buches, die Konstruktionsprobleme lösen, fungieren bei Euklid somit als abgeleitete Regeln ("derived rules"[14]) der Konstruktion. Sobald sie bewiesen sind, können sie bei der Konstruktion von Diagrammen genauso benutzt werden wie die Sätze selbst. Definitionen können ebenfalls Inferenzen erlauben: Wenn z.B. in einem Satz ein Diagramm einen Kreis enthält, dann erlaubt die Definition des Kreises den Übergang zu der Annahme, dass alle Ihre Radien gleich sein. Wenn es eine dreiseitige Figur enthält, also eine Figur, die von drei geraden Linien begrenzt ist, deren Seiten alle gleicher Länge sind, dann erlaubt die Definition eines gleichseitigen Dreiecks, den Schluss, dass es sich um ein gleichseitiges Dreieck handelt.

13. Vgl. Macbeth 2010, S. 237.
14. Macbeth 2010, S. 238.

Doch nicht alles, was im Laufe einer Demonstration geschieht, wird durch explizit angegebene Regeln, ob nun basal oder abgeleitet, geregelt. So zieht Euklid erstens explizit und implizit mehrere offensichtlich gültige Schlüsse (z.B. dass zwei Dinge nicht gleich sind, wenn eines größer ist als das andere). Die Regeln für solche Schlüsse werden für gewöhnlich nicht explizit genannt.[15] Zweitens, und für unsere Zwecke wichtiger, muss man in Euklids Demonstrationen vieles direkt aus dem Diagramm ablesen, wieder ohne Regeln, die explizit angegeben werden.

Betrachten wir hier als Beispiel den ersten Satz des ersten Buches, in dem auf einer gegebenen geraden Strecke ein gleichseitiges Dreieck zu errichten ist:

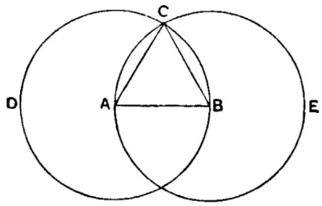


Figure 1 [16]

- Es sei die gerade Strecke AB gegeben.
- Es soll auf AB ein gleichseitiges Dreieck errichtet werden. Es ist um A mit Radius AB der Kreis BCD zu zeichnen und um B mit Radius BA der Kreis ACE.
- Vom Punkt C, in dem die Kreise sich schneiden, sind zu den Punkten A und B die Strecken CA und CB zu ziehen.[17]

Wenn zwei Kreise sich schneiden, dann ergeben sie einen Schnittpunkt. Dieser Schnittpunkt scheint einfach plötzlich aufzutauchen in dem Diagramm („it pops up“ in Macbeths Worten), wenn es gezeichnet wird, und steht einem von da an in der nachfolgenden Beweisführung einfach zur Verfügung. Im ersten Satz des ersten Buchs geschieht genau dies gleich zweimal, wenn aus einer gegebenen Strecke ein gleichseitiges Dreieck konstruiert wird. Hier ist die Apodeixis, die Euklid im Anschluss an das Diagramm anführt (mit meinen Zusätzen in eckigen Klammern):

1. Da der Punkt A Mittelpunkt des Kreises CDB ist, ist AC gleich AB. [Aufgrund der nicht erwähnten Definition eines Kreises.]

15. Ich danke einem Gutachter für den Hinweis, dass zumindest als Axiom festgelegt wrid, dass Gleichheit Deckungsgleichheit ist.
16. Macbeth 2010, S. 240.
17. Euklid, *Elemente*, 1. Satz, 1. Buch

2. Da wiederum B Mittelpunkt des Kreises CAE ist, ist BC gleich BA. [Wieder implizit erlaubt durch die Definition eines Kreises.]

3. Es wurde gezeigt, dass CA gleich AB ist, somit sind CA und CB gleich AB. [Aufgrund des ersten Grundsatzes]

4. Da dasjenige, das demselben gleich ist, auch unter sich gleich ist, ist CA gleich CB. Also sind CA, AB, BC gleich. [Gerechtfertigt durch das Axiom der Gleichheit]

5. Deshalb ist das Dreieck ABC gleichseitig und auf AB errichtet, was auszuführen war.[18]

4 Die Euklidische Demonstration als wesentlich allgemein

Bevor ich nun zu der zentralen Frage komme, nämlich der danach, was genau diagrammatisches Denken bei Euklid (im Unterschied zu bloß auf Diagrammen basiertem Denken) ausmacht, müssen wir zunächst eine weitere Frage beantworten, nämlich die danach, ob Euklids Diagramme eine *Instanz* darstellen, über die hier nachgedacht wird, oder ob sie stattdessen etwas *Allgemeineres* darstellen. Eine ähnliche Form der Argumentation kann laut Macbeth in der Quantorenlogik gefunden werden: wenn wir z.B. beweisen wollen, dass alles was A ist auch C ist, von den zwei Annahmen, dass alles was A ist auch B ist, und alles was B ist C ist, so müssen wir zunächst eine Instanz der Prämissen bilden, damit dann die Regeln des propositionellen Kalküls Anwendung finden können.[19]

Man denkt hier somit über einen besonderen Fall nach, und am Ende des Beweises nimmt man das, was für dieses eine Einsetzungsbeispiel bewiesen wurde als allgemeingültig an. Denn jeder Schluss, der aufgrund dieses einen Beispiels im Laufe des Beweises gezogen wurde, könnte genauso gut aufgrund jedes anderen Beispiels gezogen werden. Laut Russell kommt Euklids Demonstrationen eine analoge Funktion zu.[20]

Dies erlaubt uns nun, etwas mehr zu dem Verhältnis von Diagramm und Text in den Elementen zu sagen. Leibniz folgend sagt Manders:

18. Euklid, *Elemente*, 1. Satz, 1. Buch. Der erst Grundsatz ist für unsere Zwecke hier besonders relevant: „Das was demselben gleich ist, ist unter sich gleich“

19. “What is to be demonstrated is general but the demonstration itself (that is, the setting out, construction, and *apodeixis*) is particular; its generalizability is ‘a derivative of its repeatability’”

20. Cf. Macbeth 2010.

> [D]iagrams [are] textual components of a traditional geometrical text or argument, rather than semantic counterparts.[21]

Bei Leibniz finden wir die folgende Aussage, die ich am Anfang der Einleitung bereits erwähnte:

> Ganz recht, nur darf man nicht vergessen, daß auch diese Figuren als Charaktere anzusehen sind. Denn der Kreis auf dem Papier ist nicht der wirkliche Kreis, auch ist das gar nicht vonnöten, sondern es genügt, daß er für uns die Stelle des Kreises vertritt.[22]

Grice, wie Macbeth betont, erklärt die Unterscheidung hier als eine zwischen *natürlicher* und *nicht-natürlicher Bedeutung*, zwischen bildhafter und symbolischer oder auf Konventionen basierender Bedeutung: (1) ein bestimmter Hautfleck kann Masern bedeuten vs. (2) der Bus klingelt dreimal, um zum Ausdruck zu bringen, dass er voll ist. Hätte der Kreis eine natürliche Bedeutung, dann entspräche er dem ersten Fall und hätte seine Bedeutung aufgrund des Beispiels der geometrischen Figur; bei einer nicht-natürlichen Bedeutung dem zweiten Fall—der Kreis im Diagramm wäre dann an sich bereits allgemein

Mit Peirce könnten wir also auch sagen, dass die Diagramme als „icons" („Bildzeichen") und nicht als „symbols" („Symbole") oder „indices" fungieren. Die Ähnlichkeit, die wir hier vorfinden, ist jedoch nicht unbedingt eine der Erscheinung. Peirce: „Many diagrams resemble their object not at all in looks; it is only in respect to the relations of their parts that the likeness consists"[23].

Laut Manders und Macbeth ist dies der Grund, warum die Euklidische Demonstration als wesentlich allgemein angesehen werden kann:

> A drawn circle [. . .] can look like a circle for either of two reasons. It can look like a circle for the same reasons that a dog looks like a dog, namely because it is a circle, a particular instance of circle nature. Or it can look like a circle because it is an icon with non-natural meaning that is intended to resemble a circle first and foremost in the relation of its parts.[24]

> . . . [A] Euclidean diagram does not instantiate content but instead formulates it.[25]

21. Manders 1996, S. 391.
22. Leibniz: Dialog über die Verknüpfung zwischen den Dingen und Worten (1677)
23. Peirce 1931, S. 282.
24. Macbeth 2010, S. 246
25. Macbeth 2010, S. 250.

Was man in Euklidischen Demonstrationen zeichnet sind nicht Bilder geometrischer Objekte, sondern die *Relationen*, die die geometrischen Objekte konstituieren. Tennant (1986) plädiert ebenfalls dafür, dass das Dreieck ABC is „no more than a placeholder in schematic reasoning", und das entsprechende Diagramm „stands for no particular triangle".[26] Und auch Marco Panza spricht sich für diese Lesart aus:

> ... EPG (Euclid's plane geometry) arguments are not about singular objects, but rather about something like general schemas, or better, only about concepts.[27]
>
> Diagrammatic singular terms never enter into the statement of a geometrical proposition (whether might it be a theorem or a problem) of the Elements and the Data. They enter rather into their proofs or solutions. It is just because these are proofs or solutions of propositions that are rightly taken to be general, that it is often denied that the diagrammatic singular terms that enter into them refer to particular objects.[28]

Laut Panza erscheinen diagrammatische singuläre Terme nie im Ausdruck des geometrischen Satzes, sondern nur in den Beweisen oder Lösungen. Da Beweise und Lösungen der Sätze richtig verstanden allgemein sind, wird hier somit verneint dass die diagrammatischen singulären Terme auf besondere Objekte verweisen. Panza macht auf dieser Grundlage folgenden Vorschlag:

> ... in EPG, general propositions are proved or solved by working on particular individuals.[29]
>
> ... they are general insofar as they assert some admitted rules to be followed in constructing geometric objects are such that these objects cannot but be constructed so as to have certain properties or relations, to the effect that any time one of them is constructed what is obtained is an object having these properties or relations. (Panza 2012, 62)

Panza erinnert uns hier auch an Platons Auffassung im Staat (Buch VII, 527a-b): Wenn Mathematiker Geometrie betreiben, Kreise beschreiben, Dreiecke konstruieren, Geraden erstellen, bringen sie diese Gegenstände nicht wirklich hervor, sondern zeichnen nur Bilder von ihnen. Die Verwendung praktischer Sprache ist hier

26. Tennant 1986, S. 303f.
27. Panza 2012, S. 60.
28. Panza 2012, S. 61
29. Panza 2012, S. 62.

jedoch unabdingbar, da wir Menschen von den ewigen, unveränderlichen, und rein intelligible Objekten der Geometrie nur zu sprechen vermögen, indem wir (zumindest dem Anschein nach) auf andere Objekte, nämlich zeitliche, veränderliche, und sinnlich wahrnehmbare verweisen (Panza 67). Es ist somit den Grenzen unseres Verstandes geschuldet, dass wir eine „menschliche“ Geometrie benötigen, um auf ewige Wahrheiten zu verweisen:

> Even if it were admitted that the objects EPG is about exist (eternally) as such, and are distinguished from each other by their intrinsic nature, and/or that the constructions fulfilled by the geometers merely echo some other transcendent constructions, these objects would enter into EPG, understood as a human geometry, only insofar as the geometer is able to identify them and to distinguish them from each other through some appropriate, human way. (Panza 2012, 67)

5 Diagrammatische Argumentation vs. Diagramm-basierte Argumentation

Ich werde nun abschließend darlegen, warum Euklids System als diagrammatisch—anstatt nur auf Diagrammen basiert—zu verstehen ist. Ich habe bisher gezeigt, warum die Argumentation bei Euklid laut Macbeth, Manders und anderen in Analogie zu einem System des natürlichen Schließens im Unterschied zu einem axiomatischen System aufzufassen ist. Wir haben dann gesehen, inwiefern die Euklidischen Diagramme keine Instanzen darstellen, sondern stattdessen nicht-natürliche Bedeutung haben, und als „icons“ („Bildzeichen“) fungieren. Diagramme sind damit in der hier referierten Lesart als wesentlich allgemein zu verstehen.

Betrachten wir folgendes Diagramm, das wir im fünften Satz des ersten Buchs vorfinden:

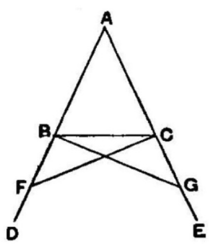


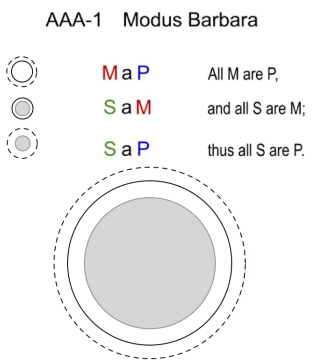
Figure 2 30

Satz 5 sagt uns über dieses Diagramm:

- In einem gleichschenkligen Dreieck sind die Winkel auf der Grundseite, auf der die Schenkel errichtet sind, gleich und, bei Verlängerung der beiden Schenkel, auch die Winkel darunter.
- Wenn das Dreieck ABC die beiden gleichen Seiten AB und AC hat, dann, nach Verlängerung der Seiten AB und AC um BD und CE, sage ich, ist der Winkel ABC gleich dem Winkel ACB und der Winkel CBD gleich dem Winkel BCE.

In dem Diagramm, das wir gerade gesehen haben, ist es genauso wenig möglich,[31] die Identität der Winkel nicht zu realisieren, wie es möglich wäre, einen Kreis in einen zweiten zu einzuschließen, und diesen in einen dritten, ohne somit den ersten auch in den dritten einzuschließen.

Laut Macbeth (2010, S. 251) finden wie dieses Prinzip auch in Euler-Diagrammen vor, die dazu genutzt werden können, gültige Syllogismen aufzuweisen, hier Barbara:



32

Genauso wie man auf der Grundlage eines Euler-Diagrammes schließen kann, dass ein bestimmter Schluss folgt, kann man auf der Basis des Euklidischen Diagramms ebenfalls schließen, dass die aufgestellten Behauptungen wahr sind. Nun stellt sich die Frage: Ist die Funktion der Euler-Diagramme dieselbe, die wir auch in Euklids Diagrammen vorfinden? Wenn wir nun noch einmal das erste Beispiel, den ersten Satz des ersten Buches bei Euklid, betrachten, so zeigt sich folgender Unterschied:[33]

30. Macbeth 2010, S. 250.
31. Zumindest nachdem wir die Hilfslinien der Pons Asinorum eingezeichnet haben.
32. https://en.m.wikipedia.org/wiki/File:Modus_Barbara_%28Euler%29.svg
33. Ich danke einem Gutachter für den Hiweis, dass die Euklidische Demonstration für Q^2 nicht funktionieren würde, da hier der Schnittpunkt der beiden Kreise nicht existiert.

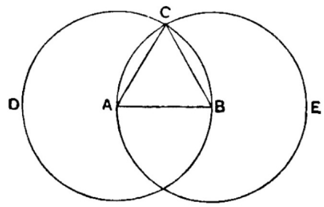


Figure 1 [34]

Euler-Diagramme können etwas bloß implizit in den Prämissen gegebenes explizit machen. Im Gegensatz zu Euklids Diagrammen können sie unser Wissen jedoch nicht erweitern. Euklids Diagramme sind im Gegensatz dazu fruchtbare Erweiterungen unseres Wissens. Der Grund dafür liegt in der bereits genannten Eigenschaft Euklidischer Diagramme, Objekte auftauchen zu lassen („pop up“). Wir sehen, dass ein gleichseitiges Dreieck auf einer geraden Linie konstruiert werden kann, weil dieses Dreieck in unserer Konstruktion plötzlich erscheint. Vor diesem Zeitpunkt enthält die Demonstration nichts, was auf ein Dreieck schließen lässt. Wir können somit nicht sagen, dass das gleichseitige Dreieck in irgendeinem Sinne *implizit* bereits gegeben war. Dennoch zeigt der erste Satz des ersten Buchs, dass ein solches Dreieck *potentiell* hier gegeben ist. Wenn, was Euklid uns hier vorgibt, gegeben ist, dann können wir auf einer geraden Linie ein gleichseitiges Dreieck konstruieren. Das Dreieck erscheint einfach („pops up“), wenn wir bestimmte Linien zeichnen. Etwas Neues entsteht hier somit aufgrund dieser „pop up“ Eigenschaften des Diagramms. So kann z.B. ein Radius eines Kreises sich in eine Seite eines Dreiecks verwandeln. Dies ist in Euler-Diagrammen nicht möglich. Die Bedeutung eines Bildzeichens („icon“) eines gezeichneten Kreises ist hier unveränderlich für den Verlauf der Argumentation. Nichts könnte hier sowohl Bildzeichen eines Radius und Bildzeichen der Seite eines Dreiecks sein.

Macbeth vergleicht die Euklidischen Diagramme mit dem bekannten Hase-Enten-Bild. In beiden Fällen kommt es darauf an, die Figur auf eine bestimme Art und Weise zu betrachten. Die gezeichneten Linien unterdeterminierten, was bildlich repräsentiert wird. Sie können potentiell auf radikal verschiedene Arten und Weisen gelesen werden. Dieses Potential wird dann im Verlauf der Argumentation realisiert. Die Euklidischen Diagramme fungieren somit genauso wie das Hasen-Enten-Bild als Bildzeichen für verschieden Arten geometrischer Objekte, nämlich relativ dazu, welche Perspektive man zu ihnen einnimmt. Der Text, den Euklid zusätzlich zum Diagramm zur Verfügung stellt, dient nicht der Demonstration, sondern hilft lediglich dabei, im Diagramm zu sehen. Die Ergiebigkeit der Eu-

34. Macbeth 2010, S. 240.

klidischen Demonstration liegt somit in Kants Terminlogie in der Tatsache, dass der Schluss synthetisch apriorisch ist: er ist notwendig, allgemein, und erweitert dennoch unser Wissen, insofern das Prädikat noch nicht im Begriff des Subjekts enthalten ist. Das Potential des Diagramms wird allein im Diagramm realisiert.

Macbeth unterscheidet in diesem Zusammenhang drei Ebenen der Argumentation:

1. *Grundbestandteile*: Punkte, Linien, Winkel und Flächen
2. *Geometrische Objekte*: die sich aus den Grundbestandteilen zusammensetzen, z.B. Punkte als Endpunkte von Strecken, Punkte als Schnittpunkte von Linien, Winkel, etc.
3. *Das Diagramm*: das selbst keine geometrische Figur ist, aber in ihm können verschiedene Objekte der zweiten Ebene je nach Perspektive wahrgenommen werden

Wir haben gesehen, dass die Euklidischen Diagramme die Funktion von anderen Bildzeichen teilen, wie dem Hasen-Enten-Bild, nämlich relativ zu der Perspektive, die wir zu ihnen einnehmen. Doch Euklidische Diagramme besitzen auch eine Eigenschaft, die wir weder in den Hasen-Enten-Bildern noch in Euler-Diagrammen vorfinden. Euklidische Diagramme zeichnen sich dadurch aus, dass sie drei Ebenen der Artikulation besitzen: Auf der basalsten Ebene finden wir Punkte, Linien, Winkel und Flächen vor. Auf der zweiten Ebene finden wir die geometrischen Objekte vor, die der Gegenstand der Geometrie sind, und die sich aus den Grundbestandteilen zusammensetzen. Auf der dritten Ebene sind nun je nach Konfiguration der verschiedenen gezeichneten Linien Objekte der zweiten Ebene abzulesen

Laut Macbeth erklären diese drei Ebenen der Artikulation zusammen mit den verschiedenen Möglichkeiten, die Teile des Diagramms zu zerteilen, wie man die Einzelteile des Diagramms auf der zweiten Ebene in neue, radikal andere Teile rekonfigurieren kann—und damit signifikante und oft überraschende geometrische Wahrheiten beweisen kann. Die Demonstration besteht dabei wieder aus zwei Teilen: der Kataskeue (Konstruktion) und der Apodeixis. Die Kataskeue gibt uns Informationen über die Konstruktion des Diagramms, nämlich nach dem, was im Diagramm formuliert werden kann, gemäß den Postulaten und bereits demonstrierten Problemen. Die Apodeixis wird davon bestimmt, was man aus dem Diagramm ablesen kann, nämlich gemäß den Grundbegriffen, Definitionen und bereits bewiesenen Sätzen. Sie ist damit nicht ein Mittel des Beweises, sondern stattdessen gibt sie uns eine Anleitung dazu, wie Teile des konstruierten Diagramms zu lesen oder zu analysieren sind—also wie die einzelnen Teile des Diagramms für den Zweck der Demonstration zu zerteilen sind.

Es ist somit das Diagramm selbst, und nicht der Text, das der eigentlich Ort der Argumentation ist. Der Text leitet laut Macbeth hingegen nur die Gedanken während der Demonstration: „[t]he text [...] is merely a script to guide one's words, and thereby one's thoughts, as one walks oneself through the demonstration“ (Macbeth 2010, S. 260). Wir denken hier in dem Diagramm, und nicht nur auf der Grundlage des Diagramms.

Literatur

Euklid: Elemente (2017). Übersetzung der 15 Bücher der Stoicheia mit Verknüpfung der griechischen Textfassung. Neufassung mit Hypertextverweisen. : Die Stoicheia. / Übersetzer: Rudolf Haller. Markgröningen : Edition Opera-Platonis.

Euclid, Elements (1959). Published as Euclid's Elements: all Thirteen Books Complete in One Volume. T Heath (trans.), D. Densmore (ed.). New York: Dover Books.

Grice, H. Paul (1957), „Meaning“. *Philosophical Review* 66, S. 377-388.

Lachtermann, David Rapport (1989). *The Ethics of Geometry: A Genealogy of Modernity.* New York and London: Routledge.

Macbeth, Danielle (2010). "Diagrammatic Reasoning in Euclid's Elements". In: Bart van Kerkhove, Jean Paul van Bendegem & Jonas de Vuyst (eds.), Philosophical Perspectives on Mathematical Practice 12. College Publications. pp. 235-267.

Manders, Kenneth (1995). „The Euclidean Diagram“. In: Mancosu, P. (Ed.) (2004). *The Philosophy of mathematics practice.* Oxford University Press.

Peirce, Charles Sanders (1931). *Collected Papers of Charles Sanders Peirce.* Ed. by C. Hartsthorne and P. Weiss. Vol. 2. Harvard University Press.

Russel, Bertrand (1956). „Mathematical Logic Based on the Theory of Types“. *Logic and Knowledge: Essays 1901-50.* Ed. by R.C. Marsh. Routledge.

Stein, H. [1988]. *"Logos*, Logic, and *Logistiké*: Some Philosophical Remarks on the Nineteenth Century Transformation of Mathematics." *History and Philosophy of Modern Mathematics.* Ed. by W. Aspray and P. Kitcher. Vol. XI. Minnesota Studies in the Philosophy of Science. Minneapolis, MN: University of Minnesota Press.

Tennant, Neil (1986). „The withering away of formal semantics?“ *Mind and Language*, 1, 302-318.

Der Hauptsatz in der Ars conjectandi: Interpretationen von Bernoullis Beiträgen zu den Anfängen der mathematischen Wahrscheinlichkeitstheorie

Christian Hugo Hoffmann[1]

Zusammenfassung Eines der fundamentalen Konzepte der modernen mathematischen Wahrscheinlichkeitstheorie bildet das Gesetz der Großen Zahl, welches auf den Hauptsatz in der Ars conjectandi des großen Mathematikers Jakob Bernoulli zurückgeht. In diesem Paper würdigen wir zunächst den quasi-physikalischen Charakter von Bernoullis Wahrscheinlichkeitsbegriff sowie seine für die Etablierung der Stochastik wichtige Leistung der Verknüpfung von Glücksspieltheorie und Statistik. Weiterhin führen wir eine philosophisch motivierte Diskussion, die auch die stark durch das 18. Jahrhundert geprägte „Induktionsproblematik" betrifft. Dabei gehen wir auf einen Einwand von Leibniz aus einem Brief an Bernoulli ein, wo ersterer präzise angebbare Wahrscheinlichkeiten bei der statistischen Interpretation von Naturereignissen verneint, und zeigen, dass dieser Einwand vielmehr auf eine inverse Anwendung des Hauptsatzes abzielt, die letzterem nicht vorgeschwebt ist. Ein Ausblick, inwiefern der Hauptsatz auf die statistische Praxis zugeschnitten ist, und die Andeutung neuer Probleme einer Theorie statistischen Schließens rundet die Untersuchung schließlich ab.

1. Großer Dank gebührt Prof. Dr. Gregor Nickel für die äußerst wertvollen Hinweise zur Überarbeitung und Aufwertung dieses Manuskripts.

1 Einleitung

> "One of the fundamental concepts of the probability theory is the law of large numbers and large-scale phenomena. In fact, this particular law has become the stepping stone between the theories of probability on the one hand and statistics on the other." (Idele 1979: 209).

Dieses Gesetz der großen Zahl ist verbunden mit dem Namen des Basler Mathematikprofessors Jakob Bernoulli (1654-1705), in dessen Schrift Ars conjectandi man es später dargelegt fand. Sie wurde posthum 1713 von seinem Neffen Nikolaus Bernoulli herausgegeben. „Der programmatische Titel des großangelegten Werkes – Ars conjectandi («Kunst des Vermutens») – stellte seine Wahrscheinlichkeitsrechnung in eine Reihe mit den artes liberales" (Hauser 1997: 88). Bernoulli zielte offenbar auf eine neue Disziplin ab, welche in allen praktischen Fragen des bürgerlichen Lebens, in Politik, Moral und Wirtschaft, ihre Anwendung finden sollte (ebd.). Vor diesem Hintergrund legt er nun den Grundstein zur Wahrscheinlichkeitstheorie und ermöglicht mit dem Hauptsatz zugleich die Synthese aus Glücksspieltheorie und Statistik.

Ausgangspunkt für diese erste Fassung des Gesetzes der großen Zahl war die Frage (die sich schon in den Meditationes, Bernoullis wissenschaftlichem Tagebuch findet, vgl. Bernoulli 1988a: 197-201 und Schneider: 1988: 117): Lassen sich Wahrscheinlichkeiten wie die für eine bestimmte Absterbefolge aufgrund von wiederholten Beobachtungen zumindest näherungsweise bestimmen? Kann man also quantifizieren, um wie viel wahrscheinlicher der Tod eines Greises gegenüber dem eines Jünglings früher eintritt, indem man Personen vergleichbaren Alters und Temperaments[2] herausgreift und deren Sterbehäufigkeiten zählt? Für die Bejahung dieser Fragen erschien es Bernoulli wesentlich, erweisen zu können, dass die Zuverlässigkeit der relativen Häufigkeit als Schätzwert für die gesuchte Wahrscheinlichkeit des vorgegebenen Ereignisses mit wachsender Anzahl der Beobachtungen ansteigt. Diesen Erweis sah Jakob Bernoulli durch seinen Hauptsatz, der schwachen Formulierung des Gesetzes der großen Zahl, als gegeben an.

Es sei an dieser Stelle jedoch explizit darauf verwiesen, dass der Ausdruck „Gesetz der großen Zahl" nicht ohne Einschränkung synonym mit dem Terminus „Hauptsatz" verwendet werden darf. Ersteres ist eine moderne Begrifflichkeit, die Bernoulli nicht kannte, und weiterhin (von Mathematikern unserer Zeit) in eine starke respektive schwache Formulierung unterschieden wird. Aus dem Blickwinkel der

2. „[...] ejusdem & aetatis & temperamenti cum nostris juvenculis & senibus" (Bernoulli 1975a: 47).

modernen Mathematik entspricht Bernoullis Hauptsatz dabei der schwachen Formulierung und ist von dem Starken Gesetz der großen Zahl abzugrenzen (vgl. etwa Mosler & Schmid 2011).

Im Verlauf dieser Abhandlung werden sich zwar manchmal Berührungspunkte zu der üblichen derzeitigen (schwachen) Formulierung des Gesetzes der großen Zahl darbieten, dennoch steht eine historische Darstellung gemäß Bernoullis Konzeption im Vordergrund. Dass sich der Hauptsatz hier als Fokus anbietet, liegt weder ausschließlich im verheißungsvollen Terminus selbst, noch in der Tatsache begründet, dass das Schlussstück des Bernoullischen Oeuvres auf die Deklaration des Theorems zuläuft, sondern weil es auch philosophische Brisanz bietet, wie sich (spätestens) in Kapitel 4 dieses Artikels zeigen wird.

Die vorliegende Arbeit behandelt daher zunächst Bernoullis Hauptsatz. Konkret gilt es dabei, Bernoullis Leistung der Verknüpfung von Glücksspieltheorie und Statistik (in seinem Hauptsatz) herauszuarbeiten, wobei das obige Bild des Trittsteins wieder aufgegriffen wird (Abschnitt 3). Allerdings wird festzuhalten sein, dass Bernoulli seinen Hauptsatz am theoretischen Modell der Urne beweist (wo sich a-priori-Wahrscheinlichkeiten identifizieren lassen) und nicht an Fällen, wo Wahrscheinlichkeiten mittels der Erfahrung bestimmt (Leibniz: geschätzt[3]) werden müssen. Nichtsdestotrotz glaubt er, Bernoulli, dass der Satz auch dann gelte, indem er sich die Verhältnisse (bei kontingenten Sachverhalten, die sich durch statistische Regelmäßigkeiten auszeichnen) in völliger Analogie zu einer Urne vorstellt. Dieser kritische Punkt belebt eine anschließende philosophisch motivierte Diskussion, die auch die stark durch das 18. Jahrhundert geprägte „Induktionsproblematik" tangiert (Abschnitt 4).

Leibniz´ Kritik an der Unterstellung von präzise angebbaren Wahrscheinlichkeiten bei der statistischen Interpretation von Naturereignissen legt es nahe, den Trittstein zwischen mathematischem Kalkül und Empirie (in dieser Hinsicht) nicht zu verlegen, er bezweifelt gerade diese Synthese, welche sich im Hauptsatz manifestiert (4.1). Doch zielt Leibniz´ Einwand – wie sich bei genauerer Betrachtung erweisen wird – vielmehr auf eine inverse Anwendung des Hauptsatzes ab, die in Kapitel 4.2 diskutiert wird. Ein Ausblick, inwiefern der Hauptsatz auf die statistische Praxis zugeschnitten ist, und die Andeutung neuer Probleme einer Theorie statistischen

3. Leibniz würde bestreiten, dass sich Wahrscheinlichkeiten *a posteriori* genau bestimmen lassen, lediglich eine Schätzung ist erzielbar, siehe Kap. 4.1. Hier muss bei „bestimmen" zwischen einer ontischen und einer epistemischen Ebene unterschieden werden. Selbst wenn Wahrscheinlichkeiten bzw. relative Häufigkeit in einer unbekannten Urne genau bestimmt sind (ontisch), kann man sie auch durch wiederholtes Ziehen nicht genau (!) bestimmen (epistemisch). Auch Bernoulli würde wohl nicht behaupten, dass sich Wahrscheinlichkeiten empirisch genau (!) bestimmen lassen, bestenfalls beliebig genau.

Schließens runden im letzten Abschnitt die Analyse ab (4.3). Der Hauptbeitrag dieses Artikels für die Community liegt dabei in zwei Punkten begründet: zum einen die Würdigung und Abgrenzung von Bernoullis Wahrscheinlichkeitsbegriff gegenüber den Vorstellungen und dem Einwand von Leibniz, was aus historischer Perspektive anhand der Briefkorrespondenz zwischen den beiden herausgearbeitet und beleuchtet wird. Wiewohl die aktuelle wissenschaftshistorische Literatur hier nicht in einem separaten Kapitel oder Abschnitt besprochen wird, da die Fülle an Literaturbeiträgen den notwendigen Raum für das Erreichen des ersten Ziels dieses Papers zu stark beschneiden würde, wenden wir uns in 4.2 mit der Kontroverse mit Daston durchaus der Auseinandersetzung mit Bernoullis Hauptsatz in der jüngeren Literatur zu.

Bevor allerdings die Wendung zum Hauptsatz nun erfolgen kann, sind freilich noch Vorbemerkungen nötig (Abschnitt 2). So baut – wie oben antizipiert – die Deklaration des Hauptsatzes wesentlich auf dem Urnenmodell (2.2) auf, an welchem sich paradigmatisch der Modellparameter zeigen lässt. Die Bestimmung dieses festen Fallverhältnisses, an der Urne das Zahlenverhältnis der schwarzen und weißen Steine, macht wiederum den neuen Wahrscheinlichkeitsbegriff (2.1) aus, dessen Einführung im Folgenden Eingang in die Untersuchung findet.

2 Präliminarien: Jakob Bernoullis Wahrscheinlichkeitsbegriff

> „Die Wahrscheinlichkeit ist nämlich ein Grad der Sicherheit und unterscheidet sich von ihr wie der Teil vom Ganzen“ (Bernoulli 1988b: 63).[8]

In dieser abstrakten Definition ist keine Rede von einem Verhältnis günstiger zu insgesamt möglichen Fällen, die Parallele zu dem uns vertrauten Ausdruck lässt sich höchstens (Bernoulli 1988b: 63) erahnen. Dieser lautet in formaler Schreibweise: „p(A) = NA / N“ (mit der bekannten Interpretation der Ausdrücke), wobei insbesondere p(A) das Maß angibt, inwieweit man mit dem Eintreffen von A rechnen darf. Und offenbar tendiert Bernoulli ebenso in die Richtung, wenn er scheibt: Die Sicherheit, welche man für das Eintreten eines Ereignisses annehmen darf, sei keineswegs für alle Ereignisse gleich, sondern schwanke vielfach zwischen größeren und kleineren Werten. Nur Ereignisse, deren gegenwärtige oder zukünftige Existenz zweifelsfrei feststehe, erhalten dabei die höchste oder absolute Sicherheit zugeschrieben. Alles übrige beanspruche einen geringeren Grad der Sicherheit, der größer oder kleiner ist je nachdem, ob es eine größere oder kleinere Anzahl von Wahrscheinlichkeiten gebe, die für die gegenwärtige, vergangene oder künftige Existenz irgendeiner Sache sprechen (ebd.). Mit einem Beispiel wird Bernoulli etwas konkreter und zeigt damit auch die Nähe zu unserem heutigen Verständnis:

> „Sei z.B. angenommen, die gesamte und absolute Sicherheit, die ich mit dem Buchstaben a oder mit der Einheit 1 bezeichne, bestehe aus fünf Wahrscheinlichkeiten oder Teilen, von denen drei für die gegenwärtige oder zukünftige Existenz irgendeines Ereignisses stehen, die restlichen dagegen, so soll dieses Ereignis 3/5 a oder 3/5 der Sicherheit besitzen." (Ebd.).

Die absolute Sicherheit wird hier in gleiche Einheiten zerlegt, wobei jeder mögliche Fall eine Einheit bildet; die günstigen, für das Vorliegen eines exemplarischen Ereignisses A sprechenden Fälle unter ihnen bilden die Einheiten der „Wahrscheinlichkeit". Das mag aus zeitgenössischer Perspektive etwas umständlich klingen, jedoch knüpft Bernoullis mehr oder minder philosophische Exposition an Allgemeinplätze seiner Zeit an (Hauser 1997: 94): Die Wahrscheinlichkeit drückt sich in der unvollkommenen Erkenntnisfähigkeit des Menschen aus, als Richtschnur für das praktische Handeln, als flexibles Bindeglied zwischen göttlicher Prädetermination und der Kontingenz menschlichen Handelns.[4]

Über dem Begriff der Wahrscheinlichkeit (als Grad „subjektiver Gewissheit") und dem Begriff der Kontingenz (als Ausdruck unvollständiger „subjektiver Gewissheit", wiewohl das eine unübliche Verwendung von „Kontingenz" ist – normalerweise: „wirklich, aber nicht notwendig" und eher ontisch als epistemisch gebraucht) ist die Gewissheit geordnet. Bernoulli unterscheidet eine „objektive Gewissheit der Dinge an sich" (also die unverbrüchliche Tatsache der gegenwärtigen oder zukünftigen Existenz dieser Sachen) und eine „subjektive Gewissheit der Dinge in Bezug auf unsere Erkenntnis" (Bernoulli 1988b: 62)[5]. Bernoulli führt daneben noch einen wei-

4. Einerseits verbürgt die göttliche Prädetermination den an sich bestimmten Weltenlauf: „Auch für zukünftige Ereignisse steht zweifelsfrei fest, daß sie in gleicher Weise, wenn auch nicht mit der unausweichlichen Notwendigkeit des Fatums, so doch wegen der göttlichen Voraussicht und Vorherbestimmung eintreten werden müssen" (Hauser 1997: 62 f.). Andererseits gilt für das menschliche Subjekt: Je nachdem, wie die Kenntnis einer Sache bzw. ihrer Ursachen beschaffen ist, erscheine sie ihm einmal zufällig, ein anderes Mal notwendig: „Sequitur hinc, uni & uno tempore videri posse contingens, quod alii (imò & eidem) alio tempore post cognitas ejus causas fit necessarium; adeo ut contingentia præcipuè etiam respiciat cognitionem nostram" (Bernoulli 1975b: 240). Summa summarum: Die Kontingenz – die Möglichkeit, so oder anders sein zu können – beziehe sich hier nur auf die menschliche Erkenntnis (die daher unvollkommen ist), von einem (vollkommenen) göttlichen Standpunkt aus ist alles gewiss und bestimmt. Vgl. auch die Logik von Port Royal (Arnauld & Nicole 1662).

5. „Subjektiv" ist hier nicht im Sinne von „abhängig vom erkennenden Subjekt" zu lesen. „Seine [Bernoullis] «subjektive Gewissheit» (die ein Kontinuum von Graden erlaubt) kommt solchen Sachverhalten der Erkenntnis zu, die keine wissenschaftliche Wahrheit eines Dings an sich, gleichwohl Aspekte der Realität repräsentieren und insofern (modern gesprochen) objektiven

teren zentralen Begriff ein, der jedoch so schon aus der spanischen Spät-Scholastik bekannt ist: den Begriff der „moralischen Gewissheit“. „Moralisch gewiss“ ist das, dessen Wahrscheinlichkeit sich der absoluten Sicherheit in einer Weise annähert, dass der Unterschied unmerklich wird (Bernoulli 1988b: 63). Dies rührt von dem Gedanken her, dass für das praktische Handeln ein hoher, wenn auch unvollkommener Grad an Überzeugung oder Wahrscheinlichkeit genügt (Hauser 1997: 100). So mag man beispielsweise den morgigen Sonnenaufgang aufgrund der bisherigen Erfahrung als „moralisch gewiss“ ansehen (und ihn nicht als „absolut sicher“ bewerten, weil die Zukunft ja bekanntermaßen – von einem nicht-göttlichen Standpunkt aus – ungewiss ist), jedoch müsste man streng genommen, im Sinne der Ars conjectandi, für ihn sogar eine Wahrscheinlichkeit von eins ansetzen.[6]

Nach den bisherigen Ausführungen scheint es (mit Blick auf die inhaltliche Grundlegung des Begriffs in der Einleitung), als propagiere Bernoulli eine Art subjektive Wahrscheinlichkeit, die Ausdruck einer unvollständigen Kenntnis der Dinge ist und einer göttlichen Voraussicht und Vorherbestimmung gegenübersteht (vgl. auch Hauser 1997: 95). De facto wird Bernoullis vermeintlich „subjektive“ Wahrscheinlichkeit eine logisch-analytische Seite – die hier sonst unerwähnt bleibt (vgl. dazu ebd. S. 100-108) – und eine objektiv-realistische Seite – im Zusammenhang mit statistischen Erhebungen – aufweisen.

2.1 Der quasi-physikalische Charakter der neuen Wahrscheinlichkeit

Jakob Bernoulli leitet seine Wahrscheinlichkeiten nicht direkt, sondern auf dem Umweg über die „Beweiskraft“ einzelner Argumente ab. Für die Zwecke dieser Arbeit reicht es aber aus, an dem gezeichneten Bild einer Verhältniszahl zwischen den „dafürsprechenden“ Fällen und den die volle Gewissheit konstituierenden möglichen Fällen festzuhalten. Wie lassen sich aber die gleichmöglichen Fälle bestim-

Charakter besitzen können. Die «objektive Gewissheit» (die immer absolut ist) hingegen ist einer ganz anderen Kategorie der Erkenntnis vorbehalten – der menschlichen *scientia* bzw. der göttlichen *praescientia* – und steht hier nicht zur Debatte.“ (Hauser 1997: 97). In diesem Sinne ist der morgige Sonnenaufgang aus der Perspektive eines göttlichen Wesens „objektiv gewiss“ (sofern er tatsächlich vorgesehen ist) genauso wie die analytischen Einsichten der Wissenschaft (beispielsweise, dass die Winkelsumme im Dreieck 180° beträgt) „objektiv gewiss“ sind, wohingegen bei unseren Vermutungen basierend auf Zeugnissen und Erfahrung, eben der beobachteten Sonnenaufgänge, nur „subjektive“ Gewissheit besteht.

6. Bezüglich der Wahrscheinlichkeit des morgigen Sonnenaufgangs können ausschließlich *günstige* Fälle angenommen werden, da die Sonne bislang ja jeden Morgen am Horizont emporstieg. Verlangt dies, das Ansetzen einer Wahrscheinlichkeit von eins, aber auch die Umkehrung des Hauptsatzes, der in Kürze erläutert wird? Die Problematik einer inversen Anwendung des Hauptsatzes wird in Kapitel 4.2, ob Bernoulli daran gedacht hat in Kap. 3 und 4.1/ 4.2 diskutiert.

men? Bei den Glücksspielen sind sie wohl a priori bekannt, ergo resultiert die Angabe aus (theoretischem) Vorwissen. So ergibt sich bei einer (fairen) Münze, dem Elementarmodell des Glücksspiels, p(Kopf) $= \frac{1}{2}$ aus der (vorausgesetzten, idealisierten) Symmetrie des Geldstücks. Bei den von Bernoulli fokussierten praktischen Fragen des bürgerlichen Lebens, den vom Wirken der Natur oder von menschlichen Entscheidungen abhängigen Ereignissen, können gleichmögliche Fälle im Allgemeinen jedoch nicht bestimmt werden, sie seien „aufgrund der Komplexität der Natur und der Vielfalt der wirkenden Ursachen" (ebd.: 108f.) unbekannt. Tatsächlich steht aber eine andere Möglichkeit zur Verfügung. Was sich nämlich der Bestimmung a priori entzieht, lässt sich schließlich auf dem umgekehrten Weg a posteriori, d.h. über die Erfahrung ermitteln. Denn, so schreibt Bernoulli (1988b: 65) weiter, man müsse annehmen, dass jedes Ereignis künftig in so vielen Fällen eintreten (günstige Fälle) oder nicht eintreten (ungünstige Fälle) kann, wie der betreffende Tatbestand unter ähnlichen Rahmenbedingungen in der Vergangenheit eingetreten bzw. nicht eingetreten ist. Um hier ein naheliegendes Beispiel aus dem Alltag für Bernoullis Aussage zu geben: Vor aller Erfahrung ist die Wahrscheinlichkeit für eine bestimmte Regenmenge im kommenden Mai schwer ausmachbar. Auch fällt es schwer, hier von gleichmöglichen Fällen zu sprechen, im Gegensatz zu den gleichen Gewinnaussichten bei Glücksspielen. Doch bietet sich ein Vergleich mit den langjährigen Aufzeichnungen der Niederschlagsmengen zur Angabe einer Prognose an.[7] Ferner mag es, wie Bernoulli in der Ars conjectandi notiert, jedermann instinktiv klar sein, dass ein empirisches Wahrscheinlichkeitsurteil möglichst viele Beobachtungen erfordert: Die „Gewohnheiten der Natur", um es mit Leibniz auszudrücken (vgl. den Brief vom 3. 12. 1703 an Jakob Bernoulli; Leibniz 1988: 59), erkennt man eben erst durch häufigeres Beobachten. Bernoulli geht im Folgenden allerdings weit über diese Binsenwahrheit hinaus, wenn er schreibt:

> „Es bleibt nämlich zu untersuchen, ob im selben Maß wie die Anzahl der Beobachtungen auch beständig die Wahrscheinlichkeit dafür wächst, dem richtigen Verhältnis zwischen den Anzahlen der Fälle für das Eintreten und für das Nichteintreten eines bestimmten Ereignisses näherzukommen, so daß diese Wahrscheinlichkeit schließlich jeden beliebig vorgegebenen Grad der Sicherheit übertrifft, oder ob das Problem sozusagen eine Asymptote aufweist, d.h., ob es einen gewissen Grad der Sicherheit gibt, den es auch bei beliebiger Vervielfachung der Beobachtungen niemals zu überschreiten gestattet [...]." (Bernoulli 1988b: 66).

7. Aus den Daten kann man sodann ermitteln, wie oft sich die Regenmenge x bzw. non-x in früheren Maimonaten bereits eingestellt hat, um zu einem Verhältnis A:B zu gelangen (mit A: Anzahl der Maimonate mit Regenmenge x; und B: entsprechendes für non-x).

Wie sich im Fortgang am Hauptsatz verdeutlichen wird, kristallisiert sich letztere Vermutung heraus, nämlich dass mit größer werdender Stichprobe die Häufigkeitsverhältnisse das gesuchte Fallverhältnis beliebig gut und zuverlässig approximieren. Dabei nimmt jenes Fallverhältnis für ihn mehr und mehr Züge eines festen Modellparameters an, der den kontingenten Sachverhalten zugrundeliege und prinzipiell beliebig genau messbar sei, paradigmatisch am Modell der Urne (Hauser 1997: 110).

2.2 Einführung des Urnenmodells

Bei iterierten Zufallsereignissen, die unter hinreichend ähnlichen Bedingungen ablaufen, stellt sich Bernoulli die Verhältnisse in völliger Analogie zu einer Urne vor, aus welcher schwarze und weiße Steine (calculi) blind entnommen werden: „[...] Man [kann] nämlich die Urne z.B. durch die Atmosphäre oder auch den menschlichen Körper ersetz[en], welche so wie die Urne die Steinchen eine Unmenge mannigfacher Veränderungen bzw. Krankheiten enthalten [...]" (Bernoulli 1988b: 67). Das Nachvollziehen von vielen praxisnahen Untersuchungsfragen wie etwa auch der der Geschlechterverteilung von Neugeborenen am Urnenmodell hebt für uns deutlich den objektiv-physikalischen Charakter der Wahrscheinlichkeit hervor.

Zudem, so Bernoulli (ebd.: 66f.) weiter, zeichne sich diese Art von Phänomenen durch eine festgelegte Anzahl von „fruchtbaren" und „unfruchtbaren" Fällen aus, unter denen sich entweder ersteres (ein bestimmtes Ereignis tritt ein) oder letzteres (dasselbe Ereignis tritt nicht ein) realisiert. Im Bild der Urne ausgedrückt, entspricht also der Modellparameter dann dem Zahlenverhältnis der schwarzen und weißen Steine.

Man könnte sich nun aber fragen, ob auch der Umkehrschluss gerechtfertigt ist, von einem (modern und schematisch gesprochen) bekannten „p(A)" auf ein unbekanntes „NA" und „N" zu schließen? Veranschaulichen wir uns diese Frage mit einem Beispiel, um zu sehen, dass diese Frage keineswegs banal ist. Angenommen man versichert uns bei einer Urne mit (endlich vielen) schwarzen und weißen Kugeln betrage die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$, eine weiße Kugel zu ziehen. Können wir daraus folgern, dass die Hälfte der Kugeln weiße sind? – Wir können es nicht. Es ist nämlich möglich, dass die Urne von einem Zufallsapparat bestückt wurde. Der Apparat ließe schwarze und weiße Bälle mit einer Wahrscheinlichkeit von je $\frac{1}{2}$ hineinkullern. Die Chance, jetzt eine weiße Kugel zu ziehen, beträgt zwar $\frac{1}{2}$ von dieser Perspektive aus gesehen, dennoch können in der Urne beispielsweise mehr schwarze als weiße Kugeln liegen. Wäre indessen die Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{2}$ nicht vorausgesetzt, so würde die Angabe der Wahrscheinlichkeit von unserer Erkenntnis abhängen, in beiden Fällen ist sie jedoch nicht mehr a priori möglich.

3 Der Hauptsatz in der Ars conjectandi – Bernoullis schwache Formulierung des Gesetzes der großen Zahl

> „Ich kann weniger von dem wahren Verhältnis abweichen, wenn ich öfter als wenn ich seltener beobachte“ (Bernoulli 1988c: 122).

In Bernoullis Hauptsatz, der aus unserer Warte schwachen Formulierung des Gesetzes der großen Zahl, wurzelt schließlich der objektiv-realistische Strang der neuen Wahrscheinlichkeit. Denn Voraussetzung für sein Aufkommen ist die Messbarkeit des Modellparameters, die eben durch den Hauptsatz gewährleistet ist.

> „Hauptsatz: Nun folgt endlich der eigentliche Satz, dessentwegen all dies ausgeführt wurde, dessen Beweis nun aber erbracht wird allein durch die Anwendung der vorausgeschickten Hilfssätze auf das gegenwärtige Vorhaben. Um aber jede lästige Umschreibung zu vermeiden, bezeichne ich die Fälle, in welchen ein bestimmtes Ereignis eintreten kann, als fruchtbar, und jene Fälle, in welchen dasselbe Ereignis nicht eintreten kann, als unfruchtbar. Ebenso bezeichne ich die Versuche als fruchtbar, in welchen ersichtlich einer der fruchtbaren Fälle eintritt, und als unfruchtbar jene, in welchen man das Eintreten eines der unfruchtbaren Fälle beobachtet. Verhalte sich also die Anzahl der fruchtbaren zur Anzahl der unfruchtbaren Fälle genau oder angenähert wie r/s oder vielmehr zur Anzahl aller wie r/(r+s) oder r/t [t wurde von Bernoulli bereits weiter oben eingeführt als r+s], welches Verhältnis die Grenzen (r+1)/t und (r-1)/t einschließen...“ (Bernoulli 1988b: 124).

Auf diese Weise vollzieht sich der Brückenschlag, manifestiert sich der Trittstein zwischen mathematischem Kalkül und statistischem „Experiment“, womit zugleich die Bedingungen aufgestellt sind, welche die statistische Erhebung erfüllen muss, um jenen Modellparameter (r/t – am Urnenmodell a priori gewonnen) genügend genau (a posteriori) zu reproduzieren. Der Hauptsatz gibt also vor, wie umfangreich (bei einem beliebig vorgegebenem Grad an Gewissheit) die Stichprobe sein muss, damit das empirisch gewonnene Verhältnis aus fruchtbaren und unfruchtbaren Fällen (r/s* bzw. r/t*)[8] mit entsprechender Wahrscheinlichkeit (c-mal wahrscheinlicher) innerhalb eines bestimmten Intervalls (zwischen r-1/t und r+1/t) um den „wahren“ Wert (r/t) liegt:

> „. . . Zu zeigen ist [was Bernoulli im Fortgang auch zeigt]: Es können so viele Versuche angestellt werden, daß es sich als beliebig vorgegeben, z.B. c-mal wahrscheinlicher herausstellt, daß die Anzahl der fruchtbaren Beobachtungen innerhalb diese [sic!] Grenzen als außerhalb fallen wird, d.h., daß das Verhältnis der Anzahl der fruchtbaren zur Anzahl aller Beobachtungen nicht größer als (r+1)/t und nicht kleiner als (r-1)/t sein wird. . . “ (Ebd.).

Das Theorem beinhaltet demnach die Aussage, dass bei entsprechend breiter Erfahrungsgrundlage die empirisch gefundenen Häufigkeiten dem a-priori-Verhältnis der fruchtbaren und unfruchtbaren Fälle mit beliebig hoher Wahrscheinlichkeit beliebig nahekommen. Allerdings ist es bei den von Bernoulli ins Auge gefassten praktischen Anwendungen nicht möglich, ein a-priori-Verhältnis zu identifizieren, das (theoretische) Vorwissen hilft hier nicht weiter (vgl. Abschnitt 2.1 in dieser Arbeit). In diesen Fällen setzt er stattdessen die Existenz einer a-priori-Wahrscheinlichkeit stillschweigend voraus, eines solchen „wahren“ Fallverhältnisses, welchem die beobachteten Verhältnisse beliebig gut und sicher nahekommen, sofern die Zahl der Beobachtungen groß genug gewählt ist (vgl. Bernoulli 1988b: 67).

Für seinen Beweis des Hauptsatzes aber kann das leichtfertige Ansetzen eines Grenzwertes Bernoulli nicht vorgeworfen werden. Denn er begründet seinen Hauptsatz am Urnenmodell, wo sich der feste Modellparameter – das Zahlenverhältnis der schwarzen und weißen Steine – a priori bestimmen lässt und somit nicht stillschweigend angenommen zu werden braucht.

Wenn beispielsweise in einer Urne 3000 weiße und 2000 schwarze Steinchen enthalten sind, dann könnte man einerseits die Wahrscheinlichkeit, mit der man ein weißes bzw. schwarzes Steinchen zieht, einfachhin über die Gesamtzahl der schwarzen und weißen Steinchen ermitteln, nämlich dass in drei von fünf Fällen ein weißes Steinchen gezogen wird. Andererseits wäre es auch möglich, das feste Fallverhältnis (3:2) durch Versuche herauszufinden, indem man ein Steinchen nach dem anderen herausnimmt – mit jeweiligem Zurücklegen der entnommenen Steinchen vor der nächsten Ziehung, damit die Anzahl der Steinchen in der Urne gleichbleibt – und feststellt, wie oft sich ein weißes bzw. wie oft sich ein schwarzes gegenüber der Gesamtzahl der gezogenen Steinchen gezeigt hat. Nach dem Hauptsatz kann man

8. r/s* bzw. r/t* ist von r/s bzw. r/t mehr oder weniger stark verschieden (abhängig von der Größe der Stichprobe).

letzteres so oft machen, dass es 10mal, 100mal, 1000mal usw. wahrscheinlicher ist, d.h. auch schließlich moralisch sicher wird, dass sich ein Verhältnis 3:2 und nicht ein davon abweichendes einstellt. Daher wird man auf diese Weise den Modellparameter a posteriori fast immer ebenso genau messen können, wie er a priori bekannt ist, worin die Metapher vom Trittstein ihren musterhaften Ausdruck findet.

Anders verhält es sich in Fällen, wo das „wahre" Fallverhältnis aufgrund der Komplexität der Natur und der Vielfalt der wirkenden Ursachen nicht a priori festgestellt werden kann. Jedoch kann man es hier auch nicht a posteriori ermitteln (was nämlich eine inverse Anwendung des Hauptsatzes verlangen würde)[9], sodass der Weg eines stillschweigenden Voraussetzens des „wahren" Fallverhältnisses übrigbleibt. Dennoch möchte Bernoulli letzteren Bereich nicht von der Geltung seines Hauptsatzes ausschließen (Bernoulli 1988b: 67), weil er die Urne quasi als Musterbeispiel oder Paradigma für kontingente Sachverhalte, die unter ähnlichen Rahmenbedingungen wiederholt ablaufen, betrachtet. Dies will sagen, dass in der überwiegenden Mehrzahl der Fälle (uns) zwar keine a-priori-Wahrscheinlichkeiten bekannt sind (mit der Hauptausnahme der Glücksspiele), diese aber dennoch existieren, nur müssen sie eben aufgrund unserer Unkenntnis vorausgesetzt werden, sodass das Bild eines zwischen Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik gesetzten Trittsteins auch hier zutreffen solle.

4 Kritische Bewertung und die Grenzen des Gesetzes der großen Zahl

Bernoullis Konzeption fand keineswegs den ungeteilten Zuspruch seiner Zeitgenossen. Insbesondere Leibniz, mit dem Bernoulli noch kurz vor seinem Tod über Fragen der Wahrscheinlichkeitsrechnung korrespondierte, leistete grundsätzlichen Widerstand. Er unterzog das Urnenmodell und den Hauptsatz Bernoullis einer philosophisch motivierten Kritik. Allerdings baut Leibniz diese auf einem labilen Fundament auf, da ihm die Präsumtion Bernoullis (hinsichtlich des Voraussetzens von a-priori-Wahrscheinlichkeiten bei der statistischen Interpretation von Naturereignissen) zu Zeiten des Briefs vom 3. 12. 1703, auf dem wesentlich die nachstehenden Ausführungen beruhen, mutmaßlich nicht bekannt war[10] oder er sie zumindest stillschweigend ablehnte. Jedenfalls geht dies aus Leibniz´ Einwendung

9. Zur Problematik einer inversen Anwendung vgl. Abschnitt 4.2 in dieser Arbeit.

10. Aus dem Brief vom 28. Februar 1705 an Leibniz geht hervor, dass er vermutlich bis zur Publikation der *Ars conjectandi* (1713) mit der genauen Formulierung des Hauptsatzes bzw. mit dem Beweis gar nicht vertraut war, obwohl Bernoulli im Brief vom 3.10.1703 an Leibniz bereits auf die Bedeutung seines Hauptsatzes hinwies. Vgl. Bernoulli 1971: 95-98.

hervor (Abschnitt 4.1), die nicht die Bedeutung der Urne als Leitbild für Zufallsereignisse würdigt, dafür vielmehr auf eine inverse Anwendung des Hauptsatzes abzielt. Bleibt die Frage offen, ob Bernoulli an eine Umkehrung seines Hauptsatzes dachte (4.2).

4.1 Aus dem Briefwechsel zwischen Leibniz und Jakob Bernoulli

Wie schon bei Fermat gehört die Probabilität für Leibniz zur ars combinatoria, der mathematisch-logischen Grunddisziplin, während sich in Bernoullis mehr an konkreten Fragen des praktischen Handelns orientiertem Konzept (siehe unseren Abschnitt 2.1 oben oder das erste Bernoulli-Zitat in 2.2) logische und statistisch-physikalische Aspekte überlappten. Entsprechend sind auch die Wahrscheinlichkeiten bei Leibniz logischer Natur (Campe 2002: 159f.), d.h. aus logischen Fallanalysen abzuleiten; Statistik, Wahrscheinlichkeit und Glücksspieltheorie gehen hier eine viel vagere Verbindung ein, weil Leibniz – wie nachstehend hervortreten wird – gerade die Synthese aus Wahrscheinlichkeitsrechnung und statistischen Beobachtungen hinterfragt, den Trittstein zwischen beiden Bereichen nicht verlegt. Wohlbemerkt ficht er diese Verknüpfung nicht im Allgemeinen an, sondern nur im Hinblick auf die Ermittlung von Wahrscheinlichkeiten a posteriori. Bernoullis Leistung am Urnenmodell steht damit nicht zur Debatte.

Leibniz bezieht seine Position aus einer logisch-epistemologischen Analyse von Kontingenz, Notwendigkeit und Freiheit heraus: „Alle Wahrheiten sind für ihn analytischer Natur, d.h. in rein logischen Relationen von Subjekt und Objekt enthalten“ (Hauser 1997: 118). Er unterscheidet nun grundsätzlich in notwendige und kontingente Wahrheiten. Erstere (auch Vernunftwahrheiten genannt) seien Identitätsaussagen, indem ihr Gegenteil unmöglich ist, d.h. sie lassen sich durch eine endliche Analyse in Identitäten zwischen elementaren Begriffen auflösen.

> „Sie beruhen also auf identischen Wahrheiten bzw. Wahrheiten, die keinen Widerspruch dulden, deren logisches Kriterium somit das Prinzip der Identität bzw. das Prinzip des Widerspruchs ist, wobei das Identitätsprinzip (A = A) für die affirmativen identischen und das Widerspruchsprinzip (A $\neq$ Non-A) für die negativen identischen Wahrheiten gilt.“ (Holze 1991: 72).

Die Negation einer wahren kontingenten Aussage enthält indessen keinen logischen Widerspruch. „Cäsar überquerte den Rubikon“ oder „Morgen geht die Sonne auf“ sind genau wie andere individuelle Tatsachen der Natur in dem Sinne kontingent, dass sie sich auf etwas Existierendes beziehen und von unendlich vielen Umständen abhängen. „Die kontingente Wahrheit entsteht [. . .] dort, wo man es mit dem Problem des Unendlichen zu tun hat und wo der methodische Prozeß an kein Ende gelangen kann“ (Campe 2002: 187). So hätte sich der Weltenlauf (vom Standpunkt einer endlichen Analyse aus) auch anders entwickeln können (z.B. kann der Sonnenaufgang ausbleiben oder hätte ausbleiben können), „nur die göttliche Schau der unendlichen Kette der Ursachen wäre [nach Leibniz] in der Lage, [die] tatsächliche Determiniertheit [der Welt] einzusehen“ (Hauser 1997: 119).

In diesem Umfeld komme schließlich auch die Wahrscheinlichkeit für Leibniz ins Spiel. Denn wenn sich eine Aussage über einen Sachverhalt nicht eindeutig analytisch auflösen lässt, dann ergibt sich eine Vielfalt logisch möglicher Lösungen, für die sich a priori, in formaler Analogie zu Glücksspielen, Wahrscheinlichkeiten bestimmen lassen (vgl. Leibniz 1961: Schriften IX und XIV).

Andererseits ist sich Leibniz durchaus im Klaren, dass in den meisten praktischen Fragen diese Wahrscheinlichkeiten a posteriori aus statistischem Material geschätzt werden müssen. Es bleibe nur offen, „ob man auf diese Weise schließlich eine vollkommen richtige Schätzung erhalten kann“ (Leibniz 1988: 59).

Leibniz verneint schließlich diese aufgeworfene Frage und argumentiert, dass solche empirisch geschätzten Wahrscheinlichkeiten keinen quantifizierbaren Anspruch auf Vertrauenswürdigkeit und Sicherheit erheben dürften, selbst wenn sie auf einer noch so breiten Erfahrungsgrundlage basierten. Anders als bei mathematischen Grenzprozessen, so sein Einwand, könne man hier nicht annehmen, dass sich die Häufigkeitsverhältnisse mit größer werdender Stichprobe asymptotisch einem „wahren“ Wert annähern (vgl. auch Hauser 1997: 119).

> „Das Hauptproblem scheint mir darin zu bestehen, daß zufällige Ereignisse bzw. das, was von unendlich vielen Umständen abhängt, nicht durch endlich viele Versuche bestimmt werden kann. Zwar hat die Natur ihre Gewohnheiten, die aus der Wiederkehr der Ursachen erwachsen, aber nur im Regelfall. Wer sagt deshalb, ob nicht der nächste Versuch gerade wegen der Veränderlichkeit der Dinge beträchtlich von der Regel aller vorhergehenden abweicht?“ (Leibniz 1988: 59).

Ergo lassen sich unter diesen Umständen keine gesicherten Wahrscheinlichkeiten a posteriori annehmen, die bei den von Bernoulli ins Auge gefassten praktischen Anwendungen unerlässlich sind, wenn die relativen Häufigkeiten mit steigender Zahl der Beobachtungen nicht zwingend, wie Leibniz betont, gegen einen Limes konvergieren. Denn die Relevanz der „endlich vielen Versuche“ für die Bewertung des „zufälligen Ereignisses“ ist abhängig davon, ob die Konformität der Natur gilt.

Falls sich demnach der Lauf der Natur zum Zeitpunkt t ungewohnt ändert, so werden die Wahrscheinlichkeitsargumente, die auf Ereignissen aus dem Zeitraum t-x ($x > 0$) basieren, für Ereignisse oder Aussagen nach t hinfällig. Halten wir fest: Die Interpretation der Wahrscheinlichkeit als ein Schließverfahren, nämlich von der Häufigkeit eines Ereignisses in der Vergangenheit auf einen festen Grenzwert zu schließen, scheint unter obigen Ausführungen nicht mehr haltbar. Man gelangt eben nicht zu einem (oder endlich vielen) wohldefinierten Modellparameter(n) (der/die in Bernoullis berühmtem Urnenmodell seinen/ihren Ausdruck findet/finden), sondern vielmehr bleibt ein kontingentes Ereignis von unendlich vielen Faktoren abhängig.

Leibniz veranschaulicht seine Kritik an einem Beispiel, der empirischen Bestimmung einer Kometenbahn aus mehreren Beobachtungen:

> „Wenn man aus irgendeiner Anzahl von Beobachtungen die Bahn eines Kometen zu bestimmen versucht, setzen wir voraus, sie sei ein Kegelschnitt oder eine einfachere Kurve einer anderen Art. Es lassen sich bei beliebig vielen gegebenen Punkten unendlich viele Kurven finden, die gerade durch diese Punkte gehen.“ (Leibniz 1988: 59).

Daher kann der Komet von Punkt zu Punkt eine unendliche Zahl anderer Bahnen genommen haben, die vielen (endlich vielen) Bahnpunkte sagen nichts über den Verlauf an den jeweils anderen Punkten aus. In analoger Weise könne eine endliche Zahl statistischer Daten auch nicht gesichert in die Zukunft extrapoliert werden. Man dürfe zwar auf die „Gewohnheiten der Natur“ vertrauen, die ihre Ursachen erfahrungsgemäß in ähnlicher Weise immer wiederkehren lässt – im Bild des Kometen ausgedrückt: Es darf getrost eine Bahn ohne wilde Ausschweifungen vermutet werden. Denn nach Leibniz mache die Natur niemals Sprünge, sie halte sich hingegen an Gesetze (daher Naturgesetze); jedoch bestehe stets die Möglichkeit, dass Gott diese Naturgesetze aufhebt (da er nicht an sie gebunden sei) oder profaner formuliert: Es ist durchaus logisch und in manchen Fragen physikalisch möglich, dass der Weltenlauf nicht den bekannten Naturgesetzen unterliegt – so können wir uns mögliche Welten vorstellen, in denen andere Gesetze herrschen. Kurzum: Naturgesetze gelten nicht notwendig, sondern stehen nur für „Gewohnheiten der Natur“ (vgl. auch Holze 1991: 157). Aus diesem Grund „wird die empirische Schätzung [. . .] in der Praxis brauchbar und ausreichend sein“ (Leibniz 1988: 60). Allein ein exaktes mathematisches Modell kontingenter Ereignisse kann es für Leibniz nicht geben.

Ohne Leibniz´ Einspruch entwerten zu wollen, bringt doch Bernoullis Entgegnung darauf, in der Ars conjectandi dargelegt (Bernoulli 1988b: 67 f.), die grundsätzliche Differenz zwischen beiden auf den Punkt: Bernoulli erklärt seinen Hauptsatz anhand einer Urne, die mit schwarzen und weißen Steinchen gefüllt ist und wo es eine chaotische Dynamik sowie eine sensitive Abhängigkeit von den Daten gibt. In diesem theoretischen Modell kann das Verhältnis zwischen schwarzen und weißen Steinchen a priori bestimmt werden. Trotzdem glaubt Bernoulli, dass der Satz auch dann gelte, wenn keinerlei Möglichkeit besteht, das Verhältnis auf jenem Weg zu erkennen. Was die Kritik von Leibniz angeht, so würde diese, wenn schon, dann für beide Fälle gleichermaßen gelten:

> „Zunächst wenden sie[11] [adressiert an Leibniz] ein, das Verhältnis der Steinchen sei eine Sache, das der Krankheiten oder der Veränderungen in der Atmosphäre eine andere; die Anzahl jener sei bestimmt, die Anzahl dieser unbestimmt und schwankend. Darauf erwidere ich, daß beide hinsichtlich unserer Kenntnis als gleich unsicher und unbestimmt anzusehen sind. Daß aber irgendetwas an sich und seinem Wesen nach so beschaffen ist, kann man nicht leichter verstehen als man verstehen kann, daß der Schöpfer der Natur etwas gleichzeitig geschaffen und nicht geschaffen hat; denn was immer Gott geschaffen hat, hat er gerade durch den Umstand des Erschaffens auch bestimmt.“ (Bernoulli 1988b: 67).

Wie die Passage offenlegt, kann Leibniz´ Einwand aber auch sein Ziel verfehlen. Bernoulli entzieht sich dem Vorwurf, indem er sich auf die Determiniertheit der Dinge beruft, was sich indirekt auch am Hauptsatz zeigt. Denn dieser erlaubt ja lediglich den Schluss von einer gegebenen Wahrscheinlichkeit auf die zu erwartende Häufigkeit, von der Umkehrung war (bisher) nicht die Rede. Entsprechendes gilt bei der Bestimmung von Wahrscheinlichkeiten a posteriori. Hier sei das „wahre“ Fallverhältnis eben schon vorausgesetzt, „die Zahl der möglichen Krankheiten oder atmosphärischen Veränderungen an sich bestimmt“ (ebd.). Ferner widerspricht Bernoulli der Vorhaltung, dass die Anzahl der Steinchen endlich, die der Krankheiten allerdings unendlich sei. Denn selbst wenn sie unendlich sei (was Bernoulli nicht glaubt), so könne dennoch ein bestimmtes Verhältnis zwischen zwei unendlich großen Zahlen eintreten, das sich durch endliche Zahlen (zumindest beliebig genau) ausdrücken lasse. Es verhalte sich wie bei dem bestimmten Verhältnis von Kreisumfang zu Kreisdurchmesser, das nur durch die ins Unendliche fortgesetzten Ludolphischen Kreiszahlen ausdrückbar ist, aber für die Praxis in mehr als ausreichend engen Grenzen eingeschlossen wurde (vgl. ebd.: 67-68).

Dies war eine metaphysisch begründete Aussage über die Beschaffenheit der Seinsgründe, welche für Leibniz unannehmbar war, da sie sich einer logischen Analyse

11. Bernoulli verwendet hier den Plural, um wahrscheinlich von Leibniz abzulenken.

entzieht. Vielleicht weil sie naiv anmuten mag, kommt der Verdacht einer intendierten Umkehrung des Hauptsatzes auf.

4.2 Direkte versus inverse Anwendung des Hauptsatzes

> "[...] later philosophers and mathematicians turned probability theory to the task of measuring the strength of an inductive generalization by its experiential „breadth". Bernoulli´s theorem was among the earliest and most influential contributors to this program [...]." (Daston 1988: 244).

Muss der Hauptsatz als mathematische Rechtfertigung induktiven Schließens gesehen werden? Nach Lorraine Daston, einer zeitgenössischen Wissenschaftshistorikerin, liegt die These nicht nur nahe, sie unterstellt gar Bernoulli eine beabsichtigte Umkehrung des Hauptsatzes (Daston 1988: 230f.).

Wie hat man sich aber eine solche inverse Anwendung vorzustellen? Obige Ausführungen (zu einer direkten Anwendung) besagen ja, dass – sofern der Modellparameter nicht a priori bestimmbar ist – empirisch gefundene Häufigkeiten mit steigender Zahl der Beobachtungen auf einen (vorausgesetzten) „wahren" Wert zulaufen. Demzufolge bedeutet die Umkehrung des Hauptsatzes, dass von den statistischen Beobachtungen (Einzelerfahrungen) auf den (somit nicht mehr vorausgesetzten) „wahren" Wert geschlossen werden kann (im Sinne einer Verallgemeinerung). Die Ähnlichkeit zur klassischen Induktion, dem Übergang von Einzelaussagen ist offenkundig.[12] Doch lässt sich hier schnell ein ungültiger Schluss, ein „Induktionsproblem" erkennen, weil die Prämissen (jene Einzelaussagen) nicht die Conclusio (die Allaussage) implizieren.

Insofern drängt sich die Frage auf, wie es sich bei der inversen Anwendung des Hauptsatzes verhält. Eine exemplarische Argumentation de Moivres, der glaubte, die Umkehrung des Satzes einfachhin erledigen zu können, gibt darüber Aufschluss (vgl. de Moivre 1988: 132): Angenommen, so erläuterte er, die Ereignisse würden in ihren Häufigkeiten gegen ein Verhältnis P:Q konvergieren, dann müsse das zugrunde liegende allgemeine Gesetz, der „wahre" Wert, notwendigerweise durch ebendieses Verhältnis charakterisiert sein. Jede andere Konstellation R:S führte seines Erachtens zu einer Kontradiktion, denn die Häufigkeiten müssten ja dann gegen R:S konvergieren, was sodann unserer Hypothese widersprechen würde; den Fall, dass überhaupt kein Gesetz vorliegt, hielt er für absurd, da man dann keinen Grenzprozess beobachten dürfte.

12. Die Analogie, im weiteren Sinne, besteht freilich nur, wenn das „wahre" Fallverhältnis nicht *a priori* festgestellt werden kann.

Auch an dieser Stelle fällt ein ungültiger Schluss auf, da de Moivre sich offenbar in einem Zirkel verfängt und das voraussetzt, was er eigentlich beweisen wollte. Man wird aber nie feststellen können, ob sich statistische Beobachtungen tatsächlich einem festen Modellparameter annähern, weil Stichproben eben stets endlich sind oder in Leibniz´ Worten: „Die Gewohnheiten der Natur“ lassen zwar das Schätzen von Wahrscheinlichkeiten zu, aber niemals mit quantifizierbarer oder gar asymptotisch wachsender Präzision und Zuverlässigkeit. In der Tat hätte die Kritik an de Moivres „Beweis“ auch von Leibniz vorgetragen werden können. Als der sich nämlich gegen die Behauptung Bernoullis wandte, dass man die Wahrscheinlichkeit a posteriori beliebig genau bestimmen könne, hat er seinem Brieffreund wohl eine inverse Anwendung des Hauptsatzes unterstellt[13] und eben auf die damit einhergehenden Tücken bereits aufmerksam gemacht. De Moivre sah dieses „Induktionsproblem“ noch nicht (Bellhouse 2011: Chapter 8; Verburgt 2015). Aber wie steht es mit Jakob Bernoulli, der nach Lorraine Daston ebenfalls an eine inverse Anwendung des Hauptsatzes dachte?

Für Fragen in engem Zusammenhang mit dem Induktionsproblem, etwa wie wahrscheinlich eine Hypothese im Lichte der statistischen Erfahrung ist, war Bernoullis Hauptsatz sicherlich das falsche Werkzeug und entgegen Dastons These spricht alles dafür, dass Bernoulli an solche Anwendungen, die erst spätere Generationen für sich entdeckten, nie gedacht hat: „Ob die beobachtete Gleichförmigkeit zu dem in der Angabe implizierten allgemeinen Gesetz induktiv verallgemeinert werden kann, ist völlig offen. Auf diese Frage kann Bernoullis Theorem keine Antwort geben; es erlaubt noch nicht einmal einen Wahrscheinlichkeitsvergleich konkurrierender Hypothesen.“ (Hauser 1997: 115). Außerdem sollte Bernoullis Entgegnung auf Leibniz´ Kritik bereits deutlich gemacht haben, dass ihm eine Umkehrung des Hauptsatzes fernliegt. Aus seiner Sicht sei den kontingenten Sachverhalten ein festes Fallverhältnis zu eigen (also eine Aussage über die ontologische Ebene), sodass dieses nicht induktiv ermittelt zu werden braucht (auf der epistemologischen Ebene). Man kann ja auch gar nicht induktiv darauf schließen, aber den Parameter gleichwohl mit asymptotisch wachsender Genauigkeit und Sicherheit angeben, womit die Empirie dann in der Regel einen guten Schätzwert für das Weiterrechnen liefert (ebd.: 114). Bernoulli gab keineswegs vor, auf Fragen anderer Art (etwa nach einem Wahrscheinlichkeitsvergleich konkurrierender Hypothesen) eine Antwort zu finden, er formuliert vielmehr unmissverständlich und korrekt, ohne Anspielung

13. Leibniz hat freilich Bernoulli nicht wirklich eine naive Umkehrung des Hauptsatzes im eigentlichen Sinne vorgeworfen, weil ihm vermutlich zu Zeiten des Briefwechsels die genaue Formulierung des Satzes noch gar nicht bekannt war (obwohl der Brief vom 3.10.1703 an Leibniz etwas anderes nahelegt). Zumindest beendet Bernoulli im Brief vom 28. Februar 1705 die Diskussion um den Hauptsatz und vertröstet Leibniz auf den zugehörigen Beweis, welchen er bald publizieren werde (vgl. Bernoulli 1971: 95-98). Dennoch trifft Leibniz´ Einwand auf die inverse Anwendung des Hauptsatzes zu.

auf eine beabsichtigte Umkehrung des Hauptsatzes. Wie kommt dann allerdings Daston zu einer anderen Einschätzung? Die einfache Antwort auf diese berechtigte Frage ist schlichtweg, dass sie sich in der Aufarbeitung der Bedeutung des Bernoullischen Hauptsatzes zu sehr von de Moivre (1718: 251)

> „If from numberless observations we find the ratio of the events to *converge* to a determinate quantity, then we conclude that this ratio expresses the determinate law according to which the event is to happen." [Hervorhebung in dem Zitat durch diesen Autor]

leiten lässt (Daston 1988: 233) und die Metapher der Verquickung aus Wahrscheinlichkeitstheorien mit deduktivem Vorgehen und Statistik mit induktivem Vorgehen (dem Leser wohlbekannt aus dem Eingangszitat von Idele 1979) überstrapaziert wurde: „statistics is about the real world – where a priori probabilities are not known – so only the inverse use of Bernoulli's theorem [das galt zur Zeit des Erscheinens der Ars conjectandi und ungefähr bis zur Mitte des 18. Jahrhunderts, denn danach gab es mit bedingten Wahrscheinlichkeiten sehr wohl Alternativen zu dem inversen Gebrauch des Hauptsatzes, siehe auch den nachfolgenden Abschnitt 5] would provide satisfactory conditions for statistical induction, and it is flawed." (Scheemaekere und Szafarz 2008: 9 und vgl. auch Sheynin 2018: 53).

5 Ausblick

Eine zuvor diskutierte inverse Anwendung des Hauptsatzes taugt nicht als Legitimation des induktiven Verallgemeinerns von Einzelerfahrungen, stattdessen fällt sie dem „Induktionsproblem" selbst zum Opfer. Dem ungeachtet glaubte de Moivre (und vielfach andere) leichtfertig in einer Zeit unumgänglicher mathematischer Idealisierung einen Limes ansetzen zu dürfen.[14] Es konnte nicht lange dauern, bis die Schwachstellen seines „Beweises" aufgedeckt wurden, immerhin war es gerade das 18. Jahrhundert, das die Frage der Induktion in den Mittelpunkt des Interesses rückte.

Die Kritik setzte dabei von zwei Seiten an: Zum einen erwies sich der Grenzfall großer Stichproben, den Bernoulli im Sinn hatte, in der Anwendung als kaum relevant (beispielsweise in der astronomischen Praxis und angefangen mit der Frage,

14. Vor dem Hintergrund, dass man sich im 18. Jh. üblicherweise Limesprozeduren geometrisch an stetigen Kurven vorstellte, erscheint die obige Behauptung nachvollziehbar. Erst als man den Infinitesimalkalkül aus diesem anschaulichen Zusammenhang herauslöste (19. Jahrhundert), wurde die unterstellte Annahme (einer Art Stetigkeit der Phänomene) problematisiert. Den Trend deuten auch Schneider (1988: 118 f.) sowie Hauser (1997: 153) an.

was hier die Stichproben sind).[15] Bei kleineren Stichproben hingegen ist der Rückschluss von der Statistik auf die zugrunde liegende Verteilung trügerisch: „Nur zu schnell erwies sich, wie wenig die Theorie auf die statistische Praxis zugeschnitten war: Man hatte es fast nie mit den großen Stichproben zu tun, die Jakob Bernoulli und de Moivre im Auge gehabt hatten. In der Fehlertheorie waren die Stichproben viel zu klein, als daß man den ‚wahren' Verteilungsparameter aus den Häufigkeiten hätte ablesen können." (Hauser 1997: 155f.). Und zum anderen stellt sich die Frage der Signifikanz empirischer Daten. Denn selbst wenn eine Statistik regulär und einheitlich zu sein scheint, könnte es sich nicht dennoch um eine bloß zufällige Koinzidenz handeln, die auf keinem festen Wahrscheinlichkeitsmuster basiert? „Verschiedene Hypothesen standen zur Debatte, deren Wahrscheinlichkeiten im Licht der unvollständigen Erfahrung zu bestimmen waren. Dies warf neue Probleme einer Theorie statistischen Schließens auf, etwa die Frage der Signifikanz einer Statistik und die Möglichkeit einer verallgemeinernden Induktion." (Ebd.: 156).

Diese Überlegung tangiert abermals das Problem der Induktion und steht im Zusammenhang mit der in der damaligen Erkenntnistheorie häufig diskutierten Frage, ob man damit rechnen darf, dass die Sonne auch morgen wieder aufgeht (ebd.: 154). Erst mit der Einführung einer inversen oder bedingten Wahrscheinlichkeit durch Bayes und Laplace wurde die Induktionsproblematik in allgemeinerer Form angegangen, was eine neue Ära einleitete (Laplace 1774: 621-656 und Bayes 1988: 135-144).

So bleibt also festzuhalten, dass Gedanken, die in die Richtung einer inversen Wahrscheinlichkeit oder einer „Wahrscheinlichkeit von Ursachen" (Laplace) weisen, Bernoulli fern liegen. Aber man sollte Bernoullis Leistung auch nicht daran festmachen. Zwar hat der Dissens mit Leibniz das Bild getrübt, denn wo Leibniz im Zufälligen nur Gewohnheiten sieht, da spricht Bernoulli von einer mathematisch wohldefinierten Bestimmtheit, die sich in einem theoretischen Modell (der Urne) als festes Fallverhältnis widerspiegelt (Hauser 1997: 120). Allerdings kommt hier auch die spezifisch Bernoullische Konzeption zum Vorschein, die ihn von seinen Vorgängern und Zeitgenossen unterschied – eine Konzeption, die nicht nur äußerst fruchtbar für die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie war, sondern auch gerechtfertigt. Trotz der Einwände und trotz der damals ungelösten Schwierigkeiten der inversen Anwendung war der Siegeszug des Hauptsatzes, der sich heute

15. Falls doch große Stichproben vorliegen, so darf keineswegs angenommen werden, die inverse Anwendung sei dann korrekt, wie das Misslingen von de Moivres Argumentation gezeigt hat. Auch eine sehr große Stichprobe bleibt eine endliche. Abseits von skeptischen Argumenten kann jedoch davon ausgegangen werden, dass bei großen Stichproben der Unterschied zwischen den gefundenen Häufigkeitsverhältnissen und dem „wahren" Wert marginal ist und in der Praxis daher vernachlässigt werden kann.

als schwache Formulierung des Gesetzes der großen Zahl in vielen Statistik- und Mathematiklehrbüchern wiederfindet, unaufhaltsam. Denn es darf ja nicht vergessen werden, dass sich Bernoullis Hauptsatz am Modell der Urne – und in vielfach anderen Fällen, wo a-priori-Wahrscheinlichkeiten bekannt sind – behauptete. Doch auch im Hinblick auf die Kontroverse um Wahrscheinlichkeiten a posteriori gibt es keinen Anlass, den skeptischen Überlegungen Leibniz´ (und anderer) Glauben zu schenken, sie sind zwar möglich, nicht aber wahrscheinlich. Insbesondere Bayes und Laplace traten später in diesem Feld mit ihren jeweiligen Theoremen für das Bild des Trittsteins zwischen mathematischem Kalkül und Statistik ein, welches jedoch bei Daston (1988) mit dem Bezug zu und der Interpretation von Bernoulli zu kritisieren war.

Literatur

Arnauld, Antoine, und Nicole, Pierre. 1662. La logique, ou l'art de penser. Paris.

Bayes, Thomas. 1988: An essay towards solving a problem in the doctrine of chances, in: Ivo Schneider (Hg. u. Übersetzer): Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie von den Anfängen bis 1933 – Einführungen und Texte, Darmstadt: 135–144.

Bellhouse, David. 2011. Abraham De Moivre. Setting the State for Classical Probability and Its Applications. London.

Bernoulli, Jakob. 1988a: Meditationes, in: Ivo Schneider (Hg.): Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie von den Anfängen bis 1933 – Einführungen und Texte, Darmstadt: 197–201.

Bernoulli, Jakob. 1988b: Ars conjectandi, in: Ivo Schneider (Hg. u. Übersetzer): Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie von den Anfängen bis 1933 – Einführungen und Texte, Darmstadt: 62–68, 124.

Bernoulli, Jakob. 1988c. Meditationes, in: Ivo Schneider (Hg. u. Übersetzer): Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie von den Anfängen bis 1933 – Einführungen und Texte, Darmstadt: 122–123.

Bernoulli, Jakob. 1975a: Meditationes, in: Naturforschende Gesellschaft Basel (Hg.): Die Werke von Jakob Bernoulli, Band 3: 21–106.

Bernoulli, Jakob. 1975b: Ars conjectandi, in: Naturforschende Gesellschaft Basel (Hg.): Die Werke von Jakob Bernoulli, Band 3, Basel: 107–286.

Bernoulli, Jakob. 1971: Brief vom 28. 02. 1705, in: C. I. Gerhardt (Hg.): G. W. Leibniz – Mathematische Schriften, Band III/1, Hildesheim/ New York: 95–98.

Campe, Rüdiger. 2002: Spiel der Wahrscheinlichkeit – Literatur und Berechnung zwischen Pascal und Kleist, Göttingen.

Daston, Lorraine. 1988: Classical Probability in the Enlightenment, Princeton.

Hauser, Walter. 1997: Die Wurzeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung – Die Verbindung von Glücksspieltheorie und statistischer Praxis vor Laplace, Stuttgart.

Holze, Erhard. 1991: Gott als Grund der Welt im Denken des Gottfried Wilhelm Leibniz, Stuttgart.

Idele, S. I. 1979: The Law of Large Numbers: Some Issues of Interpretation and Application for Beginners, in: The Statistician, Vol. 28, No. 3: 209–217.

Laplace, Pierre Simon Marquis de. 1774: Mémoire sur la probabilité des causes par les évènemens, in: Mémoires de l´Académie Royale des Sciences présentés par divers sçavans 6, Oeuvres Band 8 : 621–656.

Leibniz, Gottfried Wilhelm. 1988: Aus dem Brief vom 3. 12. 1703, in: Ivo Schneider (Hg. u. Übersetzer): Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie von den Anfängen bis 1933 – Einführungen und Texte, Darmstadt: 59–60.

Leibniz, Gottfried Wilhelm. 1961: Schriften zur scientia generalis und characteristica, in: C. I. Gerhardt (Hg.): Die philosophischen Schriften von G. W. Leibniz, Band VII, Hildesheim.

De Moivre, Abraham. 1988: The doctrine of chances, in: Ivo Schneider (Hg. u. Übersetzer): Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie von den Anfängen bis 1933 – Einführungen und Texte, Darmstadt: 125–134.

De Moivre, Abraham. 1718: The doctrine of chances. London.

Mosler, Karl/ Schmid, Friedrich. 2011: Wahrscheinlichkeitsrechnung und schließende Statistik, Berlin/ Heidelberg.

Scheemaekere, X. de, und Szafarz, A. 2008. Inverting Bernoulli's Theorem: The Original Sin. Verfügbar unter: https://dipot.ulb.ac.be/dspace/bitstream/2013/14571/1/rou-0194.pdf (07-01-2022).

Schneider, Ivo. 1988: Einleitung zu Kapitel 4. Gesetz der großen Zahlen und zentraler Grenzwertsatz, in: ders. (Hg.): Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie von den Anfängen bis 1933 – Einführungen und Texte, Darmstadt: 117–121.

Sheynin, O. 2018. Theory of probability, A historical essay. arXiv.org: https:

//arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1802/1802.09966.pdf (07-01-2022).

Verburgt, Lukas. 2015: The objective and the subjective in mid-nineteenth-century British probability theory, in: Historia Mathematica, Vol. 42, No. 4: 468–487.

Schopenhauers Logikdiagramme in den Mathematiklehrbüchern Adolph Diesterwegs

Jens Lemanski

1 Einleitung

Erst seit Mitte der 2010er Jahre hat man sich in der Forschung verstärkt auf zwei Bereiche des Werks Arthur Schopenhauers (1788–1860) konzentriert: Seine Logik und seine Philosophie der Mathematik. Dabei ist aufgefallen, dass wesentliche Texte, die Schopenhauer für seine *Berliner Vorlesungen* aus den 1820er Jahren verfasst hat, nie intensiv in der Forschung zur Kenntnis genommen wurden. Diese Texte zeigen sowohl in der Logik als auch in der Philosophie der Mathematik eine starke Verwandtschaft: Schopenhauer argumentiert dafür, dass weder Mathematik auf Logik noch Logik auf Mathematik zurückgeführt werden soll, sondern dass beide Disziplinen auf der reinen Anschauung beruhen. Wie in der von Immanuel Kant (1724–1804) begründeten Transzendentalphilosophie üblich, ist diese Anschauung zwar nicht notwendigerweise sinnlich, kann aber durch Diagramme in der Logik oder durch Figuren in der Mathematik versinnlicht werden.

Die Entdeckung der schopenhauerschen Logik und Philosophie der Mathematik hat weitreichende Folgen für das Verständnis der Philosophie Schopenhauers und deren Rezeptionsgeschichte: Hatten Historiker und Biographen aufgrund der Nichtbeachtung der Mathematik und Logik Schopenhauers bis vor Kurzem noch angenommen, dass Schopenhauers Werk erst langsam ab den 1840er an Popularität gewinnt, so zeigen erste Blicke in Werke der Logik und Mathematik, dass Schopenhauers Ansatz bereits in den 1820er Jahren rezipiert und auch produktiv in anderen Bereichen angewandt wurde.

Ein Beispiel für diese Rezeption und Fortführung der schopenhauerschen Ideen findet man im Werk Friedrich Adolph Wilhelm Diesterwegs (1790–1866): Dieser honoriert bereits in den frühen 1820er Jahren Schopenhauers Leistungen, insbesondere im Bereich der Logik und Mathematik, und führt seine Impulse fort. Eine Idee betrifft einen besonderen Typus von Logikdiagrammen, den Schopenhauer verstärkt erforscht hat, nämlich das sogenannte Partitionsdiagramm. Schopenhauer verwendet diese Diagramme, um damit Begriffsanalysen in der Wissenschaft und Alltagssprache zu visualisieren. Partitionsdiagramme haben die Besonderheit, sowohl das Art- und Gattungsverhältnis von Begriffen als auch die Oppositionsstrukturen (Kontradiktion, Kontrarität, Subkontrarität, Subalternation) anzuzeigen. Diese schopenhauersche Methode wurde von Diesterweg aufgegriffen, fortgeführt und konsequent in der Mathematik angewandt.

In den folgenden Kapiteln soll die historische und auch die systematische Dimension dieser Anwendung von Logikdiagramme auf die Mathematik skizziert werden. In Kapitel 2 wird zunächst die frühe Rezeption der schopenhauerschen Logik und Philosophie der Mathematik vorgestellt. Dabei werden einige oftmals tradierte Vorurteile, die das Werk Schopenhauers betreffen, in Frage gestellt oder sogar ausgeräumt. In Kapitel 3 wird dann die Philosophie der Mathematik und der Logik Schopenhauers vorgestellt. Es wird gezeigt, dass Schopenhauers Logikdiagramme auf Ideen der Mathematiker Leonhard Euler (1707–1783), Bernhard Friedrich Thibaut (1775–1832) und Franz Ferdinand Schweins (1780–1856) zurückgehen und dass Schopenhauer diese Logikdiagramme auch bereits zur Analyse mathematischer Begriffe verwendet. Kapitel 4 beschäftigt sich mit der Schopenhauer-Rezeption Diesterwegs. Es wird die Frage behandelt, inwieweit Diesterweg in der Mathematik von Schopenhauer beeinflusst war und welche Rolle dieser Einfluss auf sein Verständnis von Logik und Mathematik hatte. In Kapitel 5 wird schließlich gezeigt, dass Diesterweg die schopenhauersche Begriffsanalyse der Mathematik mit Hilfe von Logikdiagrammen aufgreift und weiterführt. Da Diesterweg einer der einflussreichsten Pädagogen und Mathematikdidaktiker des 20. Jahrhunderts war, ist anzunehmen, dass sich Spuren dieser Methode noch heute finden lassen. Inwiefern dies wahrscheinlich ist, wird in der Zusammenfassung (Kapitel 6) thematisiert.

2 Die frühe Schopenhauer-Rezeption

Arthur Schopenhauer ist ein Name, der in der Vergangenheit selten mit Logik und Mathematik in Verbindung gebracht wurde. Mit dem 1788 in Danzig geborenen und 1860 in Frankfurt am Main gestorbenen Philosophen werden meist andere Assoziationen verbunden: Er gilt als Nachfolger Kants, als jemand, der erste Ideen für den Tierschutz formuliert, die eurozentristische Perspektive auf die Philosophie überwunden und die aufklärerisch-atheistische Religionsphilosophie auf den Weg gebracht hat. Seine Meinungen zur Sexualität haben ihm aber nicht selten – und auch nicht unberechtigt – den Vorwurf der Misogynie eingetragen.

Dem Anspruch der Systemphilosophie folgend behandelt Schopenhauer in seinem Werk die damals wichtigsten Disziplinen der Philosophie wie Erkenntnislehre, Metaphysik, Naturphilosophie, Ästhetik und praktische Philosophie. Einzelne Abhandlungen Schopenhauers zur Optik, Farbenlehre und zur Evolution haben auch in den Naturwissenschaften des 19. Jahrhunderts Spuren hinterlassen.

Das Werk Schopenhauers polarisiert bis heute. Das gilt selbst für die Schopenhauer-Forschung. Einige dieser Streitpunkte, die für die folgenden Kapitel relevant sind, betreffen 1) Schopenhauers Hochschulkarriere, 2) seine Beziehung zu Logik und Mathematik, 3) die verspätete Rezeptionsgeschichte. Zuerst sollen die oftmals tradierten Vorurteile zu Wort kommen, danach das revisionierte Bild der gegenwärtigen Forschung.

2.1 Die übliche Geschichtsschreibung

Die übliche Geschichtsschreibung zur schopenhauerschen Philosophie hat sich im späten 19. Jahrhundert entwickelt und bis zur Mitte des 20. Jahrhunderts gefestigt, so dass man heutzutage nahezu unisono in vielen Lexika, Philosophiegeschichten und Biographien dieselben Vorurteile und Gemeinplätze zu Schopenhauer findet. In Hinblick auf die drei oben genannten Themen liest man meist folgendes:

1) Zunächst finden sich zahlreiche Legenden über Schopenhauer als Hochschullehrer. Schopenhauer hat sich Anfang 1820 mit seinem Hauptwerk *Die Welt als Wille und Vorstellung* an der Universität in Berlin habilitiert. Bereits bei seiner Probevorlesung sei es zu einem Streitgespräch mit Georg Wilhelm Friedrich Hegel (1770–1831) gekommen, und Schopenhauer habe dann absichtlich seine Vorlesung als Konkurrenzveranstaltung zu Hegel gehalten. Er sei als 'Rächer' aufgetreten, der alle anderen Philosophen seiner Zeit verhöhnt habe. Da aber nur drei Studenten diese Vorlesung besucht haben, habe Schopenhauer sie nie wieder gehalten und schnell von seiner Hochschulkarriere Abstand genommen. Schopenhauer sei daher eine Art 'Künstlerphilosoph', der sich nie ernsthaft für seine akademische Karriere und damit auch für fachphilosophische oder wissenschaftliche Themen interessiert habe.

2) Zu Mathematik und Logik habe Schopenhauer zudem auch eine schlechte Beziehung: Erstens habe Schopenhauer kaum etwas zu beiden Disziplinen geschrieben,

höchstens ein paar einzelne Absätze oder Paragraphen, die aber im Gesamtwerk schnell untergehen. Zweitens habe er sich in diesen wenigen Kapitel immer negativ über den Wert der Logik und Mathematik geäußert. Drittens sei seine Philosophie eher ein Ausdruck eines Irrationalismus, da Schopenhauer im Unterschied zu Hegel oder Kant der Vernunft keinen besonderen Wert beilegt, sondern alles auf einem irrationalen Willen basieren lässt. Schopenhauer sei daher kein Logiker, und auch zur Mathematik könne er keine profunden Aussagen geliefert haben, da er selbst keine Kenntnisse von der Mathematik besaß.

3) Schopenhauer hat 1818 sein Hauptwerk *Die Welt als Wille und Vorstellung* publiziert, es wurde spärlich rezensiert und dabei zwischen wohlwollend bis vernichtend beurteilt. Erst in den 1840er Jahren wuchs dann der Zuspruch zu seiner Philosophie; Anhänger unterschiedlicher Disziplinen und Lebensbereiche schlossen sich Schopenhauer an und ab 1850 wuchs sein Ruhm so stark, dass er bis zum Ende des 19. Jahrhunderts einer der meistgelesensten Philosophen Deutschlands wurde.

Derartige Aussagen findet man selbst in den sehr verdienstvollen Biographien und historischen Arbeiten zu Schopenhauer aus dem späten 20. und frühen 21. Jahrhundert, wie z. B. bei (Safranski 1987, S. 237, 387, 484ff.), (Cartwright 2010, 380ff.), (Jacquette 2012).

2.2 Die revidierte Geschichtsschreibung

Allen drei genannten Punkten kann man mit eindeutigen Fakten oder zumindest mit stichhaltigen Interpretationen begegnen, die in der Forschung der letzten Jahrzehnte entstanden sind:

ad 1) Wie viele Studenten tatsächlich Schopenhauers Vorlesung besucht haben, ist nicht bekannt. Zwar gibt es nur Hinweise auf wenige eingeschriebene Studenten, aber oftmals saßen in Berliner Vorlesungen des frühen 19. Jahrhunderts auch viele Gäste. Schopenhauer hat sich zudem intensiv darum bemüht, seine akademische Karriere an anderen Universitäten fortzuführen. In dieser Zeit hat er sich intensiv mit Themen beschäftigt, die für die akademische Philosophie relevant waren: Seiner Meinung nach war dies vor allem Logik (Schopenhauer 1913, S. 72).[1] Eine neue und sehr differenzierte Betrachtung dieses ersten Punktes gibt (Schubbe 2022).

1. Im Folgenden wird die frei im Internet zugängliche Mockrauer/Deussen-Edition der *Berliner Vorlesungen* zitiert (Schopenhauer 1913). Zur intensiveren Lektüre eignet sich aber die Neuedition (Schopenhauer 2022) weitaus besser. Mit Hilfe der dort befindlichen Seitenkonkordanz lassen sich die Referenzen schnell wiederfinden.

ad 2) Wie zuvor beschrieben, hat sich Schopenhauer in der Zeit, als er an seiner akademischen Karriere festhielt, d.h. bis zum Beginn der 1830er Jahre, sehr intensiv mit Logik beschäftigt. Er hat in dieser Zeit sein Hauptwerk, *Die Welt als Wille und Vorstellung*, für ein akademisches Publikum ausgearbeitet. Dabei entstand ein etwa 150seitiges Manuskript zur Logik, das als Druckfassung einer ganzen Monographie gleichgekommen wäre. In diesem Zusammenhang hat Schopenhauer auch seine Philosophie der Mathematik überarbeitet. Wenn Schopenhauer zudem der Mathematik und Logik einen Wert abspricht, dann tut er dies gegenüber seinem nicht-akademischen Publikum. Er ist nämlich der Meinung, dass sich der Bildungsbürger nicht intensiv mit diesen beiden Disziplinen beschäftigen muss, um ein Urteil über die Sachverhalte fällen zu müssen, mit denen man im Alltags- und Berufsleben konfrontiert ist. An der Universität, also in Gegenwart eines akademischen Publikums, hat Schopenhauer allerdings das Gegenteil gelehrt. Und da er selbst in Göttingen ein Semester Mathematik bei Bernhard Friedrich Thibaut studiert hat und ein intensives Studium der Logik betrieben hat, ist das Vorurteil (2) ungerechtfertigt. Neue und sehr differenzierte Betrachtungen zu diesem zweiten Punkt geben (Heinemann 2020) und (Segala 2020).

ad 3) Tatsächlich setzt die breite Aufnahme aller schopenhauerschen Schriften erst zunehmend ab den 1840er Jahren ein. Allerdings ist es falsch, wie Historiker und Biographen immer wieder behauptet haben, dass Schopenhauer zuvor gar nicht zur Kenntnis genommen wurde. Bereits die wenigen kleineren Schriften zur Logik und Mathematik Schopenhauers wurden in den 1820er Jahren rezipiert und zum Teil sehr produktiv fortgeführt. Da Schopenhauer sich aber nach dem Ende seiner Universitätskarriere fast gar nicht mehr für Logik interessiert hat, sind ihm selbst auch die Diskussionen um seine Schriften in diesem Bereich entgangen. Als Beispiel für die frühe Rezeption kann man Johann Friedrich Herbart (*Lehrbuch* 1821, §72), August Twesten (*Logik* 1825, §24), Carl Friedrich Bachmann (*Logik* 1828, §26) nennen. Herausragende Beispiele für die Anwendung der Logikdiagramme sind zum einen die Eristik in der 1824 von Ignaz Denzinger (1782–1862) publizierten *Institutiones Logicae* und zum anderen die Mathematiklehrbücher von Adolph Diesterweg ab den frühen 1820er Jahren. Eine differenzierte Betrachtung der schopenhauerschen Philosophie der Mathematik und Logik findet sich im folgenden Kapitel.

3 Schopenhauers Philosophie der Mathematik und Logik

Schopenhauers Philosophie der Mathematik und Logik zeichnet sich dadurch aus, dass der Anschauung eine zentrale Rolle zukommt (3.1). Im besonderen wird dies deutlich, wenn man den Fokus auf die Urteilslehre in der Logik legt (3.2). Dabei zeigt sich, wie Schopenhauer anhand von Schweins Mathematiklehrbuch eine geometrische Formenlehre auf die Logik anwendet, um damit eine transzendentalphilosophische Urteilslehre zu entwickeln. In dieser wird ein von Schopenhauer entwickelter Typus von Logikdiagrammen vorgestellt, der zur Analyse mathematischer Begriffe eingesetzt werden kann (3.3). Diese Idee wird später von Diesterweg aufgegriffen und fortgeführt.

3.1 Anschauung und Begründung in Schopenhauers Philosophie der Mathematik

Eine Besonderheit von Schopenhauers Philosophie der Logik und Mathematik ist die Anschauungsbezogenheit. Zunächst scheint dies nicht untypisch für das frühe 19. Jahrhundert zu sein. Nimmt man einen sehr generellen Standpunkt ein, so kann man sagen, dass man damals zwischen zwei grundsätzlichen Vermögen des Geistes unterschieden hat: Verstand und Vernunft. Der Verstand (und damit auch die Sinnlichkeit) ist anschaulicher, die Vernunft begrifflicher Natur. Je nach Gewichtung lassen sich somit die jeweiligen Philosophien des frühen 19. Jahrhunderts klassifizieren: Während Rationalisten und Autoren, die dem deutschen Idealismus zugerechnet werden, insbesondere Hegel, die Rolle der Anschauung abgewertet haben, setzen sich in der Nachfolge Kants mehrere Strömungen im 19. Jahrhundert durch, die der Anschauung eine zentrale Rolle zuweisen, z.B. Herbartianer, Krausianer, Trendelenburgianer oder Schopenhauerianer (Mach 1906, S. 402).

Schopenhauer nimmt unter den anschauungsbezogenen Philosophen zudem eine Extremposition ein. Während einige versuchen, entweder die Logik auf die Mathematik zu gründen oder die Mathematik auf die Logik, so versucht Schopenhauer beide auf die Anschauung zurückzuführen. Wie extrem Schopenhauers Position dabei war, wird besonders an den Reaktionen des späten 19. Jahrhunderts und frühen 20. Jahrhunderts deutlich, als durch Aufkommen der nicht-euklidischen Geometrie und der Monsterkurven in der Analysis der Anschauung immer weniger Beachtung geschenkt wurde (Volkert 1986).

Um Schopenhauers Extremposition genauer zu verstehen, muss man sich seine Wissenschaftslehre ansehen, bei welcher der Satz vom Grund (principium rationis) eine zentrale Rolle spielt. Schopenhauer differenziert diesen Grundsatz in vier Klassen oder auch ‘Wurzeln’, von denen jeder durch ein anderes subjektives Vermögen organisiert wird, jeder Bereich einer anderen Gesetzmäßigkeit unterliegt und in unterschiedlichen Wissenschaften angewandt wird. Die nachfolgende Tabelle gibt eine Übersicht über diese vier Grundsätze:[2]

Satz vom Grunde	**Subjektives Vermögen**	**Bereiche**	**Wissenschaft**
des Werdens	Verstand	Kausalität	Physik, Chemie, Geologie
des Erkennens	Vernunft	Begriffe	Botanik, Zoologie, Mineralogie
des Seins	Reine Sinnlichkeit	Raum und Zeit	Geometrie, Arithmetik
des Handelns	Selbstbewusstsein	Motive	Geschichte, Politik, Ethik, Recht

Wie anhand der Tabelle zu erkennen ist, sind für Schopenhauer Begründungen in der Mathematik einer anderen Wurzel des Satzes vom Grund zugeordnet als Begründungen in der Logik. Die Logik ist das begriffliche Vermögen und ihr kommt der Satz vom Grunde des Erkennens zu. Geometrie und Arithmetik basieren für ihn aber auf dem apriorischen Vermögen der reinen Sinnlichkeit. Die Geometrie wird durch die Gesetze des Raumes, die Arithmetik durch die Gesetze der Zeit bedingt. Dabei ist aber zu beachten, dass die reine Sinnlichkeit nicht mit der empirischen verwechselt wird, welche dem Satz vom Grunde des Werdens unterliegt.[3]

Diese letzte Unterscheidung ist wichtig, um den Unterschied zwischen dem vorkantischen Empirismus und der Transzendentalphilosophie kenntlich machen zu können: Die empiristische Position würde besagen, dass mathematische Objekte durch Rezeption von Sinnesdaten und durch Abstraktion von Inhalten im Verstand entstanden sind. Dem transzendentalphilosophischen Standpunkt Schopenhauers nach müssen mathematische Objekte aber nur vorstellbar sein. Vereinfacht gesagt: Ich muss das Dreieck nicht in der Natur finden, um seine Eigenschaften kennenzulernen, sondern ich muss es nur im Geiste konstruieren können.

Mit dieser geistigen Kontruierbarkeit mathematischer Objekte geht aber auch eine

2. Eine detailliertere, aber dennoch kompakte Darstellung gibt (Birnbacher 2018).
3. Im Folgenden ist mit ‘Geometrie’ immer die euklidische Geometrie gemeint, ansonsten wird explizit auf die Ausnahme hingewiesen.

Schwierigkeit einher: Was ich im Geiste konstruiere, kann ich nicht ebenso unmittelbar kommunizieren. Wie kann ich also meine mentale Vorstellung eines Dreiecks jemand anderem mitteilen? Zwei Antworten sind üblich: Ich muss entweder auf Begriffe zurückgreifen (Erkenntnisgrund) oder auf Figuren, Diagramme oder Bilder (Werdensgrund). Schopenhauer zeigt dies am deutlichsten an der euklidischen Geometrie. In den *Elementen* Euklids ist beides vorhanden: Wir finden darin sowohl Figuren als auch verbale oder symbolische Beweise. Für Schopenhauer ist der symbolische Beweis aber nur ein Zusatz, den Euklid hinzugefügt haben soll, da die rationalistische Strömung der Eleaten damals sehr dominant gewesen ist – eine These, die man im 20. Jahrhundert wieder findet (z. B. bei Szabó 1969). Für Schopenhauer sind aber die Figuren in den *Elementen* höher zu bewerten, weil sie ein empirisches Abbild der reinen Sinnlichkeit sind. Sie entsprechen der geistigen Konstruierbarkeit mehr als die begriffliche Darstellung. Vereinfacht gesagt: Die Eigenschaft eines Dreieck lässt sich einfacher und deutlicher zeigen als mit Worten oder Symbolen beschreiben.

Man kann Schopenhauer schon deshalb einen strengen Vertreter der Anschauungsphilosophie bezeichnen, weil er fordert, dass alle mathematischen Ausdrücke geistig oder auch empirisch anschaubar sein müssen. Die verbale Beschreibung, die Axiomatisierung und auch die Forderung nach einem symbolischen Beweis sind für ihn unwichtig. Sie können höchstens erklären, was ein mathematisches Objekt ist, aber nicht, warum es so ist, wie es ist. Zwar ist sich Schopenhauer darüber im Klaren, dass mit zunehmender Abstraktheit der mathematischen Objekte, die Anschaubarkeit nach und nach verloren geht und der verbale oder symbolische Beweis sich durchsetzen muss, aber das bedeutet für ihn nicht, dass die Bestandteile dieser komplexen Objekte frei von jeglicher Anschauung seien. Alles beruht somit unmittelbar oder über mehrere Abstraktions- oder Konkretionsstufen vermittelt auf der Anschauung (Dobrzański 2017).

Ein ähnliches Verhältnis finden wir auch in der Logik wieder: Hier sind zunächst sowohl Konstruierbarkeit als auch Kommunizierbarkeit durch einen Satz vom Grunde, dem des Erkennens, möglich. Vereinfacht gesagt: Ein logisches Objekt, wie bspw. ein Urteil oder eine Schlussfolgerung, kann ich in Begriffen konstruieren und durch Worte kommunizieren. Das ist jedem Menschen bereits durch das Erlernen einer Sprache so intuitiv gegeben, dass wir Logik gar nicht als Disziplin erlernen müssen. Wie in Kap. 2 dargestellt, schreibt Schopenhauer seine Logik auch nicht für ein breites Publikum, sondern für ein akademisches. Daher muss das breite Publikum sich nicht für Logik interessieren, da dieses aufgrund muttersprachlicher Kompetenzen bereits unbewusst logische Regeln verinnerlicht hat.

Wenn man nun aber rechtfertigen muss, worauf die Logik als akademische Disziplin gründet, so scheitert man am sogenannten Agrippa Trilemma: Entweder bricht die Kette der Begründungen ab (Dogma), man findet immer weitere begründbare Voraussetzungen (infiniter Regress) oder logische Schlussfolgerungen erklären andere logische Schlussfolgerungen (Zirkel). Wenn man bspw. beim philosophischen Argumentieren nach Gründen für logische Sachverhalte oder Objekte verlangt, so kann man laut Schopenhauer zwar weitere logische Sachverhalte oder Objekte angeben, aber die gesamte Logik kann sich derart nicht selbst rechtfertigen. Die axiomatische Methode ist für ihn ein Dogma, und ein Regelkalkül wäre für ihn wahrscheinlich ein Spagat zwischen einem Zirkel und einem infiniten Regress.

3.2 Der transzendentalphilosophische Ansatz der Urteilslehre

Um aus dem zuvor beschriebenen Agrippa-Trilemma herauszugelangen, entwickelt Schopenhauer eine Strategie, bei der die reine Anschauung die zentrale Rolle spielt: Wie die Geometrie, so gründet auch die Logik auf der reinen Sinnlichkeit, die sich durch Formen der empirischen Sinnlichkeit kommunizieren lässt.

Die Lösung dieses Problems lässt sich gut am Beispiel der Urteilslogik exemplifizieren. Schopenhauers Logik ist kompositionalistisch: Sie baut aus kleinsten Einheiten, den Begriffen, immer komplexere Formen wie Urteile und zuletzt Schlussfolgerungen. Obwohl die Genese kompositional ist, ist die Frage nach der Geltung für Schopenhauer kontextuell. Man muss nämlich nicht nur Begriffe zusammensetzen können, sondern auch Bedeutungen verstehen, indem man fragt: Was ist die Bedeutung kleinerer Einheiten im Kontext von größeren? Wir können Urteile also dadurch formulieren, dass wir sie kompositional aus kleineren Einheiten zusammenbauen und wir können bereits bestehende Urteile begreifen, indem wir die darin enthaltenen Begriffe kontextuell aus dem Zusammenhang verstehen.

Schopenhauer geht aber noch einen Schritt weiter. Er entwickelt in dem Kapitel über die Urteile eine Frage transzendentalphilosophischer Natur: Was ist die Bedingung der Möglichkeit von Urteilen? Vereinfacht lässt sich die Frage umschreiben als Suche nach den Grundformen des Urteilens: Welche Formen des Urteilens gibt es überhaupt? Was ist Bedingung der Möglichkeit, damit wir Urteile zusammensetzen oder im Zusammenhang verstehen können?

Schopenhauer erkennt bei der Beantwortung dieser Fragen, dass Begriffe in Urteilen (und Schlussfolgerungen) sich genauso verhalten, wie Kreise im euklidischen Raum. Diese Einsicht hatten schon viele Logiker vor Schopenhauer, obwohl die Idee erst durch Euler und dann durch Kantianer im 19. Jahrhundert populär wurde. Die einzige Möglichkeit um aus dem Trilemma herauszukommen, ist die Analogie oder Isomorphie, die Schopenhauer zwischen den Begriffsumfängen (in Urteilen und Schlussfolgerungen) und den Umfängen von Kreisen sieht: Begriffe verhalten sich in Urteilen ebenso wie sich Kreise als geometrische Figuren konstruieren lassen. Und da die Logik als Disziplin sich nicht selbst begründen kann, kann es vielleicht die reine Sinnlichkeit mit Blick auf die Lagebeziehungen von Kreisen im euklidischen Raum.

Um die Möglichkeiten zu ermitteln, die sich für Begriffsbeziehungen in Urteilen ergeben, knüpft Schopenhauer an ein Projekt von Schweins an, das er zumindest aus dessen *Mathematik für den ersten wissenschaftlichen Unterricht*, Bd. II, kennt. Schopenhauer hatte zwar ein Semester Mathematik in Göttingen bei Thibaut studiert, aber Schweins Lehrbuch zu Schulzeiten intensiv verwendet. Bereits 1818, in der *Welt als Wille und Vorstellung* § 15, bespricht er zwei Lehrbücher von Thibaut und Schweins wohlwollend: Mit Schweins teilt Schopenhauer seine Abneigung gegen einen axiomatischen Aufbau der Mathematik und eine Fokussierung auf die symbolischen Beweise. Besonders zu Schweins zeigt sich dann eine Ähnlichkeit in der Logik, sowohl in §9 der *Welt als Wille und Vorstellung* als auch in der sogenannten großen Logik der *Berliner Vorlesungen* der frühen 1820er Jahre.

Schweins geometrischer Ansatz ist streng kompositionalistisch: Aus Punkten werden Linien; aus geraden Linien werden Dreiecke, Vierecke und Polygone; aus gekrümmten Linien werden, wenn ihre Krümmung gleichmäßig ist, Kreise; aus diesen Figuren lassen sich Flächen und schließlich Körper konstruieren. Bei den Kreisen stellt Schweins zunächst die Eigenschaften und Bestandteile eines Kreises dar, dann die Beziehungen, die zwei oder mehrere Kreise zueinander haben sowie deren Bestandteile. Betrachtet man beispielsweise nur die Haupteigenschaften, die Schweins aufzählt, wenn es um zwei Kreise in Relation geht, so können diese entweder ineinander (Abb. 1: Fig. 74), auseinander liegen (Abb. 1: Fig. 76) oder sind durch zwei Durchschnittspunkte verbunden (Abb. 1: Fig. 79).

Schopenhauer greift nun aus diesen Lagebeziehungen von Kreisen diejenigen heraus, bei denen er eine Isomorphie zu den Verhältnissen von Begriffen im Urteil sieht. Wie bereits oben erwähnt, ist diese Methode Schopenhauers transzendentalphilosophisch begründet: Kant hatte in seiner transzendentalen Logik bei seinem Leitfaden der reinen Verstandesbegriffe auf eine Tafel zurückgegriffen, die mit den Urteilsformen der formalen Logik korrespondiert, wie man sie in Textbüchern des 18. Jahrhunderts findet (Menne 1989). Schopenhauer kamen gegenüber dieser Methode schon frühzeitig Zweifel. Da es ihm aber gar nicht um Verstandesbegriffe oder Kategorien ging, sondern um die Bedingung der Möglichkeit des Urteilens, so entwickelt er mit Hilfe von Schweins eine ganz neue Methode: “Leitfaden sind

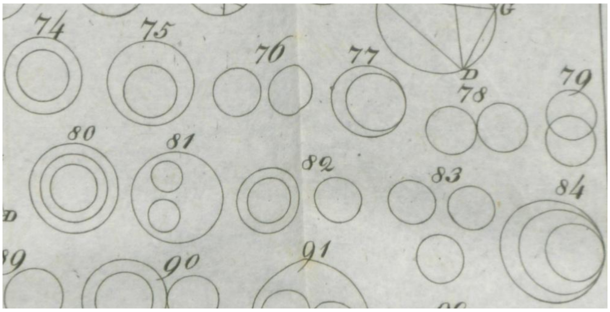


Abbildung 1: Schweins: Mathematik für den ersten wissenschaftlichen Unterricht II, Tafel II.

die Schemata" heißt es bei Schopenhauer an entsprechender Stelle (Schopenhauer 1913, S. 272).

Dieses Vorgehen bzw. diesen Leitfaden kann man sich so vorstellen: Unter Berücksichtigung der Isomorphie von Kreisen und Begriffen und mit Hilfe von Schweins konstruiert Schopenhauer alle möglichen Lagebeziehungen von Kreisen und kontrolliert, ob eine Änderung der Lagebeziehung eine semantische Bedeutung besitzt, also ein mögliches Urteil abbilden kann. Dies ist beispielsweise der Fall bei den Figuren 74, 76 und 79 der Abb. 1. Wie Schopenhauer schnell feststellt, korrespondieren diese Formen mit den bekannten Euler-Diagrammen für die Syllogistik (Bernhard 2001). Ob ein Kreis aber nun tangential (Abb. 1, Fig. 77 u. 78) an einem anderen oder nicht-konzentrisch in einem anderem liegt (Abb. 1, Fig. 75) hat keine semantische Signifikanz.[4]

Schopenhauer ergänzt dann Schweins Ansatz zum einen noch dahingehend, dass ein Kreis einen anderen ganz überschneiden kann, so dass nur ein Kreisumfang zu sehen ist. Zum anderen untersucht er auch, ob das Lageverhältnis von zwei Kreisen zu einem dritten, eine Signifikanz für das Urteilen besitzt. Dabei bemerkt Schopenhauer, dass die Einbeziehung eines dritten Kreises größtenteils keine urteilslogische, sondern bereits schlusslogische Signifikanz besitzt: Bspw. würde Abb. 1: Fig. 80 (oder ferner 84) kein Urteil mehr darstellen, sondern den sogenannten modus Barbara in der Syllogistik. Allerdings sieht Schopenhauer zwei Ausnahmen. Abb. 1: Fig. 81 kann ein Urteil beschreiben, wenn zwei sich gegenseitig ausschließende Begriffe (wie Fig. 76) in einem anderen Begriff vollständig enthalten werden (wie ein Kreis in einem anderen bei Fig. 74, 75 oder 77). Da diese beiden Krei-

4. Die Bewertung der semantischen Signifikanz der Tangente unterscheidet Schopenhauers Formenlehre von mehreren modernen Logiken, bspw. dem Region connection calculus.

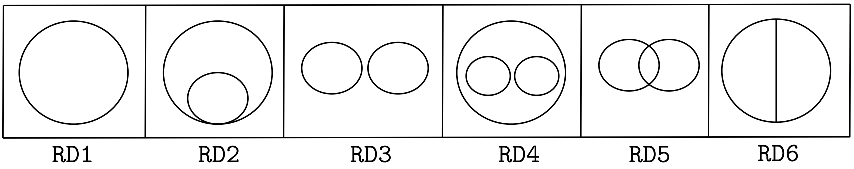


*Abbildung 2: Schopenhauers Relationsdiagramme (*RD*) nach Schopenhauer 1913, S. 269–284*

se aber nie den gesamten größeren Kreis ausfüllen können, ergänzt Schopenhauer noch eine Figur, in der ein Kreis in zwei Hälften geteilt wird.

Das Resultat dieser transzendentalphilosophischen Untersuchung der Urteilslehre zeigt sich in sechs geometrischen Grundfiguren (Abb. 2), von denen jedes mindestens eine urteilslogische Signifikanz aufweist (Schopenhauer 1913, S. 272ff.). Da in Abb. 2 jede der sechs geometrischen Figuren eine Relation zwischen mindestens zwei Begriffen in einem Urteil darstellen soll, werden diese auch als Relationsdiagramme (RD) und die Kreise eines RD als 'Sphären' bezeichnet. Für die sechs RD gilt:

RD1 Zwei begriffliche Sphären, A und B, überschneiden sich genau, so dass nur eine Sphäre zu sehen ist, $A = B$.

RD2 Eine begriffliche Sphäre A enthält einen andere B vollständig, $A \subsetneq B$.

RD3 Zwei begriffliche Sphären, A und B sind vollständig voneinander getrennt, $A \cap B = \varnothing$.

RD4 Eine begriffliche Sphäre A umfasst zwei (oder mehrere) weitere Sphären, B, C, so dass die eingeschlossenen Sphären voneinander getrennt sind, aber die erste Sphäre nicht erschöpfen, $(B \cup C) \subsetneq A$, $B \cap C = \varnothing$.

RD5 Zwei begriffliche Sphären, A und B, überschneiden sich teilweise, $A \cap B \neq \emptyset$.

RD6 Eine begriffliche Sphäre, A, umfasst zwei (oder mehrere) weitere Sphären, B und C, so dass sich die eingeschlossenen Sphären nicht gegenseitig schneiden, sondern die erste Sphäre ausschöpfen, $A = B \dot{\cup} C$.

Im Vergleich mit den Figuren aus Schweins Geometrie ergibt sich nun folgendes Bild für die Relationsdiagramme: RD1 ist Schopenhauers eigener Zusatz; RD2 entspricht Abb. 1, Fig. 74 (oder 75 oder 77); RD3 entspricht Abb. 1, Fig. 76 (oder 78); RD4 entspricht Abb. 1, Fig. 81; RD5 entspricht Abb. 1, Fig. 79; RD6 ist Schopenhauers eigener Zusatz.

Im Vergleich mit den damals und heute bekannten Logikdiagrammen lässt sich folgendes festhalten: `RD2`, `RD3`, `RD5` können als *Euler-Diagramme* eingesetzt werden, wodurch die traditionelle Syllogistik abgebildet werden kann; zusammen mit `RD1` stellen die Euler-Diagramme auch die *Gergonne Relationen* dar (Moktefi 2020, S. 119); `RD4` und `RD6` werden heutzutage als *Partitionsdiagramme* bezeichnet (Lemanski und Demey 2021). Bei Schopenhauer und seinen Nachfolgern sollen diese zur Erklärung der stoischen Logik eingesetzt werden, die heutzutage als ein Fragment der Aussagenlogik interpretiert werden kann.

Bereits in seinem 1818 veröffentlichten Hauptwerk *Die Welt als Wille und Vorstellung* hat Schopenhauer in §9 fünf der später auf sechs erweiterten `RD` kurz skizziert und folgende kryptische Anmerkung dazu hinterlassen:

> Auf diese Fälle [sc. `RD1-6` ohne `RD3`] möchten alle Verbindungen von Begriffen zurückzuführen seyn, und die ganze Lehre von den Urtheilen, deren Konversion, Kontraposition, Reciprokation, Disjunktion (diese nach der dritten Figur [sc. `RD6`]) läßt sich daraus ableiten: ebenso auch die Eigenschaften der Urtheile, auf welche Kant die vorgeblichen Kategorien des Verstandes gründete [. . .]. Ueber die angegebenen möglichen Begriffsverbindungen ist nur noch zu bemerken, daß sie auch unter einander mannigfaltig verbunden werden können, z.B. die vierte Figur [sc. `RD3`] mit der zweiten [sc. `RD2`].

Wie man an dem Zitat sieht, hat Schopenhauer hier bereits den Grundstein für seine viel ausführlicheren Darstellungen in den Berliner Vorlesungen gelegt: (1) Die `RD` haben eine transzendentale Funktion, da sie die Bedingungen für die Möglichkeiten von Begriffsverhältnissen in Urteilen anzeigen; (2) alle Urteile lassen sich auf irgendein `RD` reduzieren und (3) `RD` sind kompositional zu verwenden, d.h. sie können miteinander kombiniert werden, um komplexere Diagramme aus ihnen zu bilden. Diese drei Thesen können als (1) transzendental, (2) reduktional und (3) kompositional beschrieben werden.

3.3 Partitionsdiagramme in der Philosophie der Mathematik

Wie zuvor angedeutet, haben die beiden Partitionsdiagramme `RD4` und `RD6` die Besonderheit, das Verhältnis von zwei Begriffssphären zu einer dritten zu kennzeichnen. Schopenhauer verwendet diese Diagramme zum einen, um die stoische Logik abzuhandeln, zum anderen aber auch zur Begriffsanalyse. Bereits in der *Welt als Wille und Vorstellung* § 9 findet sich ein `RD6`, das die mathematische Begriffsanalyse mit Hilfe von vier Begriffen illustrieren soll: In Abb. 3 sehen wir

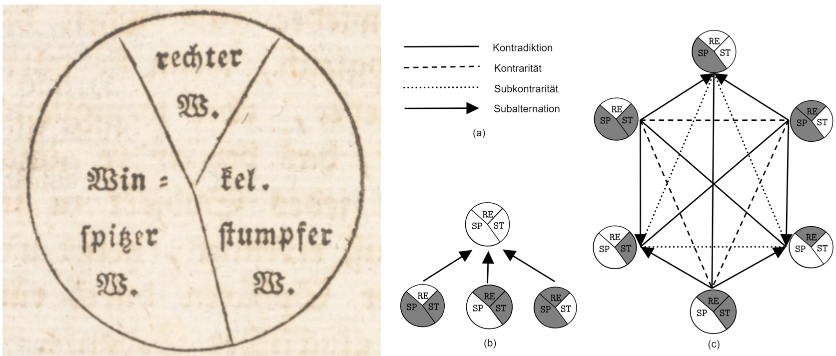


Abbildung 3: (a) Partitionsdiagramm von §9, (b) Baumdiagramm für den Winkelbegriff, (c) JSB-Hexagon

einen Kreis, der den Winkel W darstellt und drei Bereiche, in denen 'rechter' RE, 'spitzer' SP und 'stumpfer' ST eingetragen sind. Schopenhauer weist selbst in dem zuletzt angegebenen Zitat darauf hin, dass `RD6` besonders für die Darstellung von Disjunktionen eingesetzt werden könne.

Greift man nun, wie im Detail bei (Demey 2020) beschrieben, auf eine Boolesche Algebra mit der ganzen Menge und der leeren Menge zurück, so gilt sowohl $\cap = $, $\cap = $, $\cap = $, als auch $\cup \neq $, $\cup \neq $, $\cup \neq $, aber dafür $\cup \cup = $.

Ein Partitionsdiagramm wie Abb. 3 hat nun den Vorteil, zum einen die Gattungs- und Artverhältnisse wie in Baumdiagrammen, zum anderen die Oppositionsverhältnisse wie im logischen Quadrat und deren Erweiterungen anzuzeigen.

Greift man nun auf ein Baumdiagramm zurück, bei dem die jeweils oben dargestellten Begriffe eine Gattung und die jeweils darunter, mit Linie verbundenen Begriffe die Arten darstellen, wobei die Arten die der Gattung untergeordneten Begriffe sind, so lässt sich Abb. 3b heranziehen. Hier sieht man, dass der Gattungsbegriff ist, , , die Artbegriffe darstellen.

Greift man auf eine Erweiterung des logischen Quadrates zurück, nämlich auf ein sogenanntes 'JSB-Hexagon',[5] wie in Abb. 3c, so lassen sich die Oppositionsverhältnisse (a) noch genauer anzeigen. Hier sieht man, unter anderem, dass , , in einem Kontraritätsverhältnis und , , in einem Subkontraritätsverhältnis

5. 'JSB' steht für die drei Logiker Paul Jacoby (1915–1993), Augustin Sesmat (1885–1957) und Robert Blanché (1898–1975), die diese Erweiterung in den 1950er Jahren bekannt gemacht haben. Detaillierte Informationen bietet (Moretti 2009).

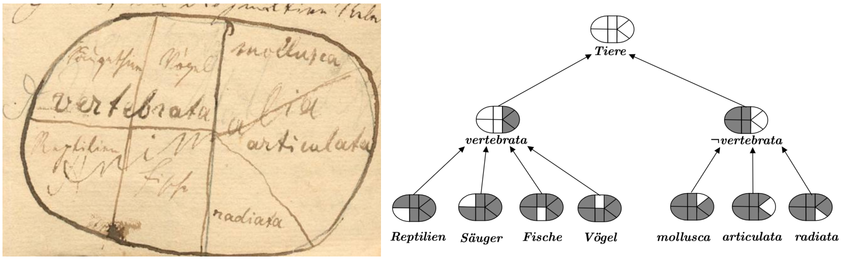


Abbildung 4: Animalia-Partition und Baumdiagramm nach BL

und dass und , und , und in einem Kontradiktionsverhältnis stehen.

Schopenhauer gelingt es mit diesen Verhältnisbestimmungen nun Schlussregeln kenntlich zu machen, wie beispielsweise den modus tollendo ponens: Nimmt man an, dass x ein Winkel ist, dann kann man dem Gattungs-Art-Verhältnis gemäß annehmen, dass x oder oder ist. Weiß man nun, dass x nicht und nicht ist, dann kann x nur sein.

Schopenhauers Ausführungen für solche Schlüsse in (Schopenhauer 1913, S. 278ff.) sind leider lückenhaft überliefert und nicht immer deutlich. Man tut daher gut daran, sie zu interpretieren und dabei zu modernisieren. Hier ist nicht der entsprechende Ort, um ein formales System dieser Partitionsdiagramme zu entwickeln, aber ich möchte auf der Grundlage des Gentzen-Systems das obige Beispiel kurz skizzieren. Eine Interpretation wäre es, Einführungs- (E) und Beseitigungsregeln (B) für die Schnittmenge ($\cap$), Vereinigungsmenge ($\cup$) und Negation ($\neg$) einzuführen[6]:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{x \in \neg}{x \in}\,(\neg\text{-B}) \quad \dfrac{x \in \neg}{x \in}\,(\neg\text{-B})}{x \in (\quad \cap \quad)}\,(\cap\text{-E})}{x \in}\,(\cap\text{-B}) \qquad \dfrac{\dfrac{x \in (\quad \cup \quad \cup \quad)}{x \in}\,(\cup)\text{-B}}{}\,(\cap\text{-E})}{\dfrac{x \in (\quad \cap \quad)}{x \in}\,(\cap\text{-B})}$$

Alle Relationsdiagramme sind insofern Grunddiagramme, da mit ihnen komplexere Urteile geformt und dann auch wiederum Schlussfolgerungen gezogen werden sol-

6. Die Schnittmenge entspricht dabei weitestgehend der logischen Konjunktion, die Vereinigungsmenge der Disjunktion und die Negation den Regeln der Kontradiktion bzw. reductio per contradictionem. Die Regeln orientieren sich an (Prawitz 1965, §2) und (Bernhard 2001, p. 25).

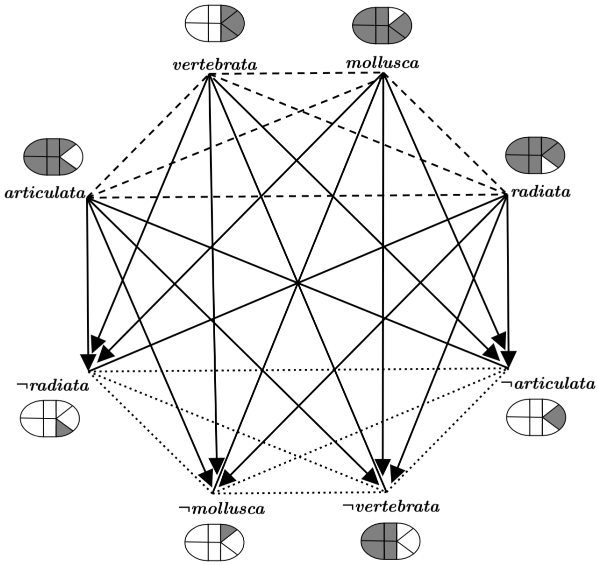


Abbildung 5: Moretti-Oktagon für $\mathcal{I}2$

len. Schopenhauer greift als Beispiel eines komplexeren `RD6` auf Abb. 4 zurück, das keinen Begriff aus der Mathematik verwendet, sondern eine biologische Taxonomie skizziert. In Fig. 4 wird der Begriff 'animalia' (Tier) partitioniert. Bei dieser Partitionierung ergeben sich mehrere Interpretationsmöglichkeiten ($\mathcal{I}$): ($\mathcal{I}1$) Nimmt man die dicke, doppelte Linie als oberste Zerlegung an, so stellt der linke Bereich die 'vertebrata' dar, die anderen die 'nicht-vertebrata', wie in Abb. 4 angegeben. Jeder dieser Bereich wird dann noch einmal partitioniert, nämlich in vier Bereiche auf der linken Seite und drei auf der rechten. ($\mathcal{I}2$) Liest man aber Abb. 4 so, dass es vier Bereiche auf der ersten Partitionsstufe gibt und davon nur 'vertebrata' weiter zerlegt werden kann, so ergibt sich ein Morretti-Oktagon wie in Abb. 5. ($\mathcal{I}3$) Liest man Abb. 4 so, dass der Begriff 'Tier' direkt in sieben Bereiche unterteilt wird, so ist dies analog zu einem starken α_7-Diagramm, das genauer in (Lemanski und Demey 2021) beschrieben wurde.

4 Diesterweg als Schopenhauerianer

Adolph Diesterweg wurde 1790 in Siegen geboren und starb 1866 in Berlin. Sein Lebensweg ist eng mit dem mittel- und norddeutschen Bildungssystem des 19.

Jahrhunderts verbunden, wie man an den Stationen seiner Ausbildung und Wirktätigkeit sieht: Herborn, Tübingen, Worms, Mannheim, Frankfurt a. M., Wuppertal, Moers, Berlin. Diesterwegs Bedeutung für die Pädagogik und Mathematikdidaktik sind bis heute nicht zu unterschätzen, wie man an den zahlreichen Diesterweg-Schulen und -Denkmälern im mittel- und norddeutschen Raum zu Beginn des 21. Jahrhunderts noch sieht.

Diesterweg hat zahlreiche Schriften, insbes. Schulbücher, für den Mathematik-, Pädagogik-, Deutsch- sowie Geographie- und Heimatunterricht verfasst. Die wichtigsten Schriften sind in Goebel 1995, S. 98ff. genannt, und für die Geometrie sind vor allem zu nennen:

- *Geometrische Combinationslehre*, 1820;
- *Leitfaden für den Unterricht in der Formen-, Größen- und räumlichen Verbindungslehre*, 1822;
- *Raumlehre oder Geometrie nach den jetzigen Anforderungen der Didaktik für Lehrende und Lernende*, 1828.
- *Anweisung zum Gebrauche des Leitfadens für den Unterricht in der Formen-, Größen- und räumlichen Verbindungslehre*, 1829.

Bevor in Kapitel 5 gezeigt werden soll, wie Diesterweg Schopenhauers Partitionsdiagramme angewandt und erweitert hat, soll in diesem Kapitel Diesterwegs Affinität zur Anschauung in der Mathematik (4.1) und seine Schopenhauer-Rezeption (4.2) vorgestellt werden.

4.1 Anschauung in Diesterwegs Philosophie der Mathematik und Logik

Diesterweg teilt nicht nur mit Schopenhauer, sondern auch mit vielen anderen Mathematikern in der nachkantischen Philosophie eine Affinität zur Anschauung.

Diese Affinität der Anschauung ist bereits in der Einleitung seines ersten Buchs, die *Geometrische Combinationslehre*, deutlich ausgesprochen worden: Die bisherigen Bücher "über Formen= Größen= Construktions= und Anschauungslehre" würden nicht den Forderungen genügen, die man derzeit an sie stellen würde. Denn der wissenschaftliche Charakter der Mathematik bestehe vor allem in "Anschaulichung und Evidenz" (Diesterweg 1820, S. If.). Dass Diesterweg dabei nicht an die empiristische Philosophie, sondern an einen transzendentalphilosophischen

Ansatz anknüpft, wird am Ende des Buchs deutlich. Hier kritisiert er eine Methode, die mit der sinnlichen oder empirischen Anschauung beginnt und dann per Abstraktion geometrische Formen aufstellt.

> Ich halte dagegen die Weise für richtiger, ja für allein richtig, welche sich an die innere Anschauung zuerst wendet, und demnächst die äußere nur als Probe der Versinnlichung des Gedachten anwendet. (Diesterweg 1820, S. 177)

Wie in Schweins Lehrbuch ist auch Diesterwegs Ansatz kompositionaler Natur: Er möchte "mit dem Einfachsten beginnen [...] und zu immer Zusammengesetzterem" übergehen (Diesterweg 1820, S. IV). Tatsächlich weist damit Diesterwegs Lehrbuch einen ähnlichen kompositionalen Gang auf wie zum Beispiel Schweins: Diesterweg beginnt mit Punkten, diese werden zu Linien zusammengesetzt und aus den unterschiedlichen Arten von Linien lassen sich Winkel, Kreise usw. bilden. Ebenso wie Schweins bildet dann auch Diesterweg die jeweiligen Arten von Kreisen, Dreiecken usw. ab, benutzt dabei nicht nur eine logische Beschreibung der Verhältnisse der Arten, sondern auch Baumdiagramme, um die Vollständigkeit der Kombinationsfälle zu gewährleisten (Diesterweg 1820, S. 88, 171).

In dem *Leitfaden für den Unterricht in der Formen-, Größen- und räumlichen Verbindungslehre* von 1822 führt Diesterweg diese Ideen fort und erweitert sie. Sein Ziel ist es, sowohl die Anschauung als auch die Logik miteinander zu verbinden (Diesterweg 1822, S. 2). Die Gewissheit, Untrüglichkeit und Evidenz der geometrischen Grundobjekte gründe auf der Anschauung (Diesterweg 1822, S. 4); da diese aber nicht empirischer, sondern mentaler Natur sei, d.h. "nicht aus der Erfahrung, sondern aus dem Geiste" stamme, habe er auf eine Vielzahl von Figuren und Diagramme verzichtet (Diesterweg 1822, S. 6). Schließlich soll der Leser sich auf die Konstruktion der Figuren im Geiste konzentrieren.

Neben dem Training der nicht-sinnlichen Anschauung ist aber auch die Anwendung der Logik das erklärte Ziel des Lehrbuchs. Logik, so Diesterweg, könne vor allem in zwei Bereichen angewandt werden und sich dort ausdrücken: entweder in der Sprache oder in der Mathematik (Diesterweg 1822, S. 6f.). Diesterweg plädiert zwar für den Einsatz der Logik sowohl im Deutsch- als auch im Mathematikunterricht, aber sein Votum bei einer Entscheidungsfrage ist eindeutig:

> Die Mathematik erscheint mir dazu passender als die Sprache, weil jene größere Anschaulichkeit, Klarheit und Evidenz in die Waageschale zu legen hat. [...] Der Versuch wird lehren, daß man alle einfachen Lehren der Logik sehr bequem an geometrischen, und überhaupt an mathematischen Gegenständen entwickeln kann. [...] Mathematik und Logik,

> Logik und Mathematik sind das für die Schule, was die Philosophie für die Universität. [...] Ohne Logik wird keiner ein denkender Lehrer, wie ohne Philosophie und Psychologie keiner ein Erzieher. (Diesterweg 1822, S. 7)

Diesterweg folgt auch 1822 seinem kompositionalen Ansatz in der Geometrie und weitet diesen auf die Logik aus: So wie aus Punkten Linien und aus Linien dann Dreiecke oder andere Figuren werden, so werden aus Begriffen Urteile und aus Urteilen Schlüsse (Diesterweg 1822, S. 7).

Die bislang skizzierten Thesen Diesterwegs stellen den Grundansatz dar, den man auch in den späteren Schriften zur Raumlehre findet. Wer genau liest, mag hier zwar einige Akzentverschiebungen beobachten, keine ist aber so gravierend, dass man eine Revision der bislang genannten Thesen dabei festmachen könnte. Insgesamt kann man somit resümieren, dass Diesterweg einer der wichtigsten Vertreter der anschauungsaffinen Mathematik des frühen 19. Jahrhunderts war und viele seine Thesen bis in die Moderne nachgewirkt haben.

4.2 Diesterwegs Schopenhauer-Rezeption

Das vorangegangene Kapitel dürfte bereits eine deutliche Nähe Diesterwegs zu Schopenhauer aufgezeigt haben. Beide setzen sich für die Anschauung insbesondere in der Geometrie ein, und beiden scheinen die Ansätze ihrer Vorgänger nicht radikal genug gewesen zu sein. Dennoch bleibt natürlich die Frage bestehen, ob Diesterweg nicht eher zufällig eine nur systematische Ähnlichkeit mit Schopenhauer aufweist – evtl. weil die Anschauungsaffinität sozusagen am Anfang des 19. Jh. 'in der Luft lag' – oder aber ob Diesterweg tatsächlich sich auf Schopenhauer bei seinen Thesen beruft. Der allgemeinen Geschichtsschreibung zufolge, wie sie in Kap. 2 dargestellt wurde, dürfte sich eine Rezeption Schopenhauers ausschließen, da viele Historiker und Biographen immer darauf hingewiesen haben, dass Schopenhauer erst langsam ab den 1840er Jahren 'entdeckt' wurde und Sympathisanten gefunden hat.

Diesterweg kannte aber Schopenhauers Schriften gut und hat diese vielleicht sogar deutlicher gelobt als viele andere. In Diesterwegs ersten Schrift zur Raumlehre, die *Geometrische Combinationslehre* aus dem Jahr 1820, findet man kaum Referenzen zu anderen Autoren. Positiv wird von Diesterweg eigentlich nur Justus Graßmanns *Raumlehre* von 1817 genannt (Diesterweg 1820, S. VI). Ganz anders verhält es sich dagegen 1822 in Diesterwegs *Formen-, Größen- und räumlichen Verbindungslehre.* Hier begegnet man zu Beginn einem ausführlichen Bericht über die Literatur zur Didaktik, Geometrie und Anschauungsphilosophie aus den letzten 20 Jahren. Ein elementarische, ich mögte sagen einseitige Weise gefundenen und gesicherten Wahrheiten. Die Gegner dieser Schrift verweise ich auf das tiefgedachte Wort:

Die Welt als Wille und Vorstellung
von Arthur Schopenhauer.
Leipzig 1819. S. 102 und Flg.

Abbildung 6: Hinweis auf Schopenhauer in Diesterweg 1822, S. 51

Autor taucht im Verlauf dieses Berichtes auffällig oft und mit besonderer Betonung auf: "ein bedeutender Schriftsteller [. . .], nämlich Schopenhauer in seinem: die Welt als Wille und Vorstellung, Leipzig 1819" (Diesterweg 1822, S. 7). An anderer Stelle heißt es:

> Es möchte gut seyn, gegenwärtig den mathematisch=philosophischen Streit zu schlichten, den neuerdings Wagner und Schopenhauer gegen die Euclidischen Mathematiker angeregt haben. Die genannten Herrn verlangen in der Raumlehre intuitive Anschauung, intuitive Erkenntniß die auf logischen Regeln ruhende discursive Erkenntniß in Begriffen verpönend. In dem ersten Theil dieser Forderung haben sie unbedingt recht, und die Mathematiker verstehen sie nicht, welche das bestreiten wollen. (Diesterweg 1822, S. 8)

Etwa in der Mitte des Buchs weist Diesterweg dann noch einmal darauf hin, dass die anschauliche Gewissheit einen weitaus höheren Stellenwert beim Beweisen besitze als die diskursive. Dabei verweist er nicht nur erneut auf Schopenhauer, sondern stellt Schopenhauers Hauptwerk in exponierter Weise dar, wie man in Abb. 6 sieht.

Meines Wissens findet man in keinem anderen Buch Diesterwegs so eindeutige und lobende Referenzen zu Schopenhauer. Dennoch kann man in dem *Leitfaden* von 1822 und auch in späteren Büchern Diesterwegs zur Raumlehre mehrere, fast wörtliche Übernahmen Schopenhauers entdecken, die zum Beispiel die Frage nach dem Warum (Diesterweg 1822, S. 9), die Kritik am indirekten Beweis (Diesterweg 1822, S. 50), die Verfälschung der euklidischen Geometrie durch die diskursive Logik (Diesterweg 1828, S. XI) oder die Vorstellungslehre (Diesterweg 1829, S. 1) betreffen. Auch in anderen Schriften, die nicht die Geometrie zum Thema haben, ist ein Einfluss Schopenhauers implizit oder explizit ersichtlich. So nennt Diesterweg zum Beispiel in einem Aufsatz die vier in Kap. 3.1 genannten Wurzeln des Satzes vom Grund aus der Dissertationsschrift Schopenhauers (Diesterweg 1878).

Eine genauere Aufspürung aller Einflüsse und Übernahmen Schopenhauers bei Diesterweg könnte ein vielleicht interessantes Projekt sein. Hier reichen aber wohl diese Hinweise, um kenntlich zu machen, dass Diesterweg von Schopenhauer deutlich beeinflusst war und dass er an mehreren Stellen so auf ihn verweist, wie es nur wenige andere Autoren vor den 1840er/ -50er Jahren öffentlich getan haben. Bemerkt werden muss aber, dass es neben den in Kap. 2 genannten Logikern auch mehrere Mathematikdidaktiker gab, die sich zwischen 1820 und 1880 intensiv mit Schopenhauer beschäftigt haben (Lemanski 2022, Kap. 2.3.3) – darunter auch Weggefährten Diesterwegs wie etwa Karl Wilhelm Eduard Mager (1810–1858).

Bevor wir aber den deutlichsten Einfluss Schopenhauers auf Diesterweg in Kap. 5 darstellen, soll abschließend noch die Frage gestreift werden, ob Diesterweg Schopenhauerianer und vielleicht sogar der erste Anhänger Schopenhauers war. Auf diese Frage können gewiss unterschiedliche Antworten gegeben und vertreten werden, je nachdem was man unter 'Anhänger' oder 'Schopenhauerianer' versteht. Zwei Perspektiven scheinen dabei ein breites Spektrum an Antwortmöglichkeiten abzustecken: 1) Ein Anhänger eines Systemphilosophen wie Arthur Schopenhauer muss alle Teile dieses Systems kennen und befürworten. Wenn man diese Definition von ‚Anhänger' akzeptiert, dann kann man wahrscheinlich nicht sagen, dass der erste Anhänger Schopenhauers ein Mathematikdidaktiker war – schon allein, weil Mathematikdidaktiker sich meistens nicht mit Disziplinen des schopenhauerschen Systems wie Erkenntnistheorie, Metaphysik oder Ethik beschäftigen. 2) Ein Anhänger eines Philosophen wie Arthur Schopenhauer begeistert sich für dessen Ideen und Argumente und führt bestimmte davon produktiv fort. Wenn man dies unter einem ‚Anhänger' versteht, dann kann man die Frage, ob Diesterweg ein Anhänger Schopenhauers war, bejahen und rechtfertigen.

5 Diesterwegs Partitionsdiagramme

Der vermutlich stärkste Einfluss Schopenhauers auf Diesterweg betrifft die Anwendung der Partitionsdiagramme auf die Philosophie der Mathematik. Diese Übernahme und Fortführung der Partitionsdiagramme sind insofern eine Kuriosität, da es meines Wissens vor Schopenhauer nur zwei Autoren gab, die Partitionsdiagramme verwendet haben, nämlich Johann Christian Lange im *Nucleus Logicus Weisianae* und Kant in der *Jäsche-Logik*. Die Methode Kants unterscheidet sich aber so stark von Schopenhauer, dass ein Einfluss Kants auf Schopenhauer oder Diesterweg kaum sinnvoll erklärbar ist (Lemanski und Demey 2021). Auch Langes *Nucleus* kann keine wesentliche Rolle für Schopenhauer gespielt haben, da dieses Buch bereits Mitte des 18. Jahrhunderts kaum noch verfügbar war. Darüber hinaus unterscheiden sich die Diagramme Langes von denen Schopenhauers und Diesterwegs sehr stark im Aufbau und damit auch in der Form.

Da – wie im Folgenden dargestellt werden soll – Diesterweg nicht nur Schopenhauers diagrammatische Prinzipien übernimmt, sondern auch dessen Beispiel aus der Philosophie der Mathematik (Abb. 3), ist der Einfluss Schopenhauers wohl solange die plausibelste Erklärung, solange keine weitere Quelle vor 1819 gefunden wird, die sowohl Schopenhauers Partitionsdiagramme als auch die von Diesterweg erklärt. Wie im Folgenden zudem zu sehen sein wird, greift Diesterweg nicht nur das Partitionsdiagramm aus der *Welt als Wille und Vorstellung* §9 wieder auf, sondern auch das animalia-Diagramm aus Schopenhauers *Berliner Vorlesungen*.

Glaubt man aber der in Kap. 2 dargestellten 'üblichen Geschichtsschreibung' hätte Diesterweg diese Diagramme gar nicht kennen können, da in Schopenhauers Vorlesung angeblich kaum Studenten saßen. Ob Diesterweg nun aber in den 1820er Jahren selbst in Berlin war und in Schopenhauers Vorlesung 'gestolpert' ist oder einen Studenten kennengelernt hat, der ihm von dem animalia-Diagramm berichtete, oder ob Diesterweg nur aus dem in Kap. 3.3 angegebenen, kryptischen Zitat Schopenhauers zur transzendentalphilosophischen, reduktionistischen und kompositionalen Natur der `RD` durch Zufall dasselbe Diagramm (nur mit anderem Inhalt) konstruiert hat, wird hier leider nicht geklärt werden können. Die folgenden Unterkapitel, die zunächst die Rezeption des schopenhauerschen Grunddiagramms (5.1) und dann deren Erweiterung darstellen (5.2), bleiben somit zuletzt ein Rätsel der Mathematik- und Logikgeschichte.

5.1 Diesterwegs Partitionsdiagramme

Diesterwegs Partitionsdiagramme finden sich im *Leitfaden für den Unterricht in der Formen-, Größen- und räumlichen Verbindungslehre* von 1822. Die Ausgabe von 1845 hat den Vorteil, dass die Diagramme direkt im Text eingebunden sind und nicht als Anhang gedruckt wurden, wie in den vorangegangenen Auflagen. Daher orientiere ich mich an der späteren Edition, die inhaltlich mit der 1822-Auflage identisch ist. Die *Anweisung zum Gebrauche des Leitfadens für räumlichen Verbindungslehre* (1. Aufl. v. 1829) stellt einen Kommentar zur Schrift von 1822 dar.

§19 des *Leitfadens* trägt den Titel "Zerlegung und Verhältniß geometrischer Begriffe (Logisch-mathematische Uebungen)". Diesterweg argumentiert in diesem Paragraphen, dass Inhalt und Umfang von Begriffen in einem antiproportionalen Verhältnis stehen. Dieses sogenannte Reziprozitätsgesetz wurde durch Kants Logik bekannt: “Inhalt und Umfang eines Begriffes stehen gegen einander in umgekehrtem Verhältnisse. Je mehr nämlich ein Begriff unter sich enthält, desto weniger enthält er in sich und umgekehrt.” (AA IX, S. 95.31–33) Dieses Gesetz hielt sich insbesondere in der deutschsprachigen Philosophie bis zur Einführung der Typentheorie durch Bertrand Russell (1872–1970) und wurde in dieser Zeit prominent von Schopenhauer, Hegel, Bolzano oder auch Frege vertreten (Centrone 2010).

Wie Schopenhauer diskutiert Diesterweg dieses Gesetz zunächst anhand von alltagssprachlichen Begriffen wie ‘Pferd’ oder ‘Säugetier’. ‘Tier’ ist ein allgemeinerer Begriff als Pferd und besitzt daher mehr Umfang, aber weniger Inhalt. Das bedeutet, dass die Menge an Individuen, die dem Begriff ‘Tier’ untergeordnet sind, größer ist als die Menge der Individuen, die dem Begriff ‘Pferd’ subsumiert werden. Es gibt nun mal mehr Tiere als Pferde. Die Menge der Eigenschaften, die man aber dem Begriff ‘Pferd’ zuspricht, ist größer als die Menge, die man unter dem Begriff ‘Tier’ subsumiert. Alle Pferde haben zum Beispiel die Eigenschaft Hufe zu haben, aber das trifft halt nicht auf alle Tiere zu. Versteht man nun unter ‘Umfang’ die Menge der Individuen oder Objekte und unter ‘Inhalt’ die Menge an Eigenschaften und Merkmalen, so lässt sich das antiproportionale Verhältnis beider Begriffe bestimmen (Lemanski 2022, S. 436 – 440).

Diesterweg weitet seine Überlegungen schließlich auch auf geometrische Begriffe aus. Bereits Schopenhauer hatte in Abb. 3 ein Exempel mit geometrischen Begriffen verwendet. Diesterweg greift zunächst aber ein anderes Beispiel aus der Geometrie auf, das sich dennoch deutlich an Schopenhauers `RD` orientiert. Er verwendet dafür ein `RD3`, das allerdings nicht zwei, sondern drei begriffliche Sphären zeigt, die in einer vierten enthalten sind. Diese vierte Sphäre soll den Begriff ‘geradlinige Figur’ anzeigen. Darin sind nun die Begriffe ‘Dreieck’, ‘Viereck’, ‘Vieleck’ enthalten, wobei diese die umgebende Sphäre nicht vollständig füllen. Das entsprechende `RD3` ist in Abb. 7 angegeben, zusammen mit dem korrespondierenden schwachen JSB-Hexagon, das in (Demey 2020, S. 200ff.) genauer beschrieben wird.

Abb. 7 folgen mehrere weitere Partitionsdiagramme, die sich dann aber nicht mehr an `RD4`, sondern an `RD6` orientieren. Diesterweg spricht dabei nicht von ‘Logik-’ oder ‘Partitionsdiagrammen’, so wie wir es heutzutage tun, sondern von “figürlichen Darstellungen”, die “sinnlich anschaulich” sind. Schopenhauer selbst verwendet mehrfach den Begriff ‘bildliche Darstellung’ oder ‘räumliche Figuren’ – all diese Ausdrucksweisen sind aber nicht untypisch für das frühe 19. Jahrhundert. Untypisch sind hingegen die von Schopenhauer eingeführten und dann von Diesterweg vollständig auf die Geometrie übertragenen Diagramme.

Als nächstes Beispiel verwendet Diesterweg nun eine Sphäre, die vollständig von drei Begriffen ausgefüllt wird. Damit soll der Unterschied zwischen `RD4` und `RD6`

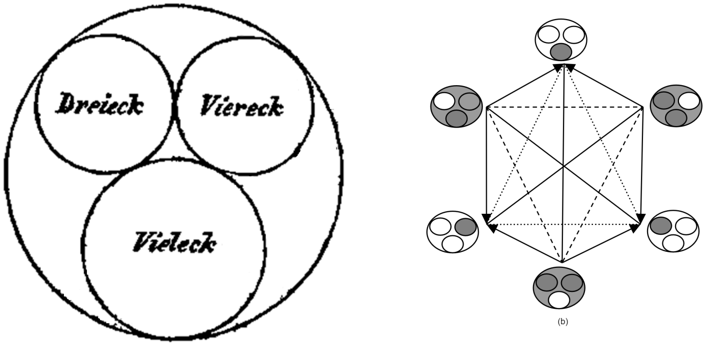


Abbildung 7: (Diesterweg 1845, S. 38), (b) korrespondierendes schwaches JSB-Hexagon

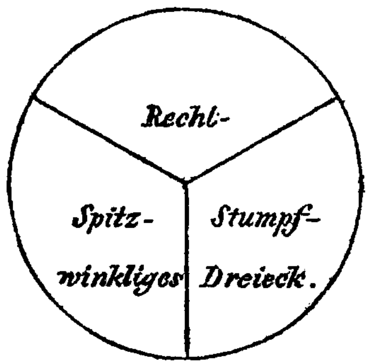


Abbildung 8: (Diesterweg 1845, S. 38)

deutlich werden. Diesterweg wählt dafür dasselbe Beispiel, das Schopenhauer auch in *Die Welt als Wille und Vorstellung* angeführt hatte und das oben bereits als Abb. 3 angegeben wurde. Die diesterwegsche Adaption dieses Diagramms zeigt Abb. 8. Die Abbildung veranschaulicht, wie die Begriffe ‘recht-’, ‘spitz-’ und ‘stumpfwinkeliges Dreieck’ in der sie umgebenden Sphäre ‘geradliniges Dreieck’ enthalten sind. Geradliniges Dreieck hat somit mehr Umfang, aber weniger Inhalt als die ihm untergeordneten Begriffe, die in seiner Sphäre eingezeichnet sind.

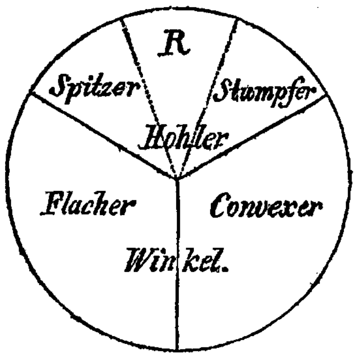


Abbildung 9: (Diesterweg 1845, S. 38)

5.2 Diesterwegs Erweiterung der schopenhauerschen Partitionsdiagramme

Überaus ungewöhnlich sind die beiden Partitionsdiagramme, die nun in Diesterwegs *Leitfaden* folgen. Beide basieren auf den Prinzipien der *RD6*, gehen aber weit über die Darstellungsformen hinaus, die Schopenhauer in seinen bis 1822 veröffentlichten Schriften verwendet hat. Damit drängen sich zwei Möglichkeiten auf, die das Verhältnis zwischen Diesterweg und Schopenhauer bestimmen: Entweder hat Diesterweg Schopenhauers kryptische Anregung, die RD kompositional zu verwenden (siehe Kap. 3.3), genauso verstanden wie Schopenhauer sie auch im Sinn hatte, oder Diesterweg kannte direkt oder indirekt das animalia-Diagramm (Abb. 4) aus Schopenhauers Berliner Vorlesung. Zwar lässt sich zum jetzigen Zeitpunkt keine These untermauern, die eine der Alternativen favorisieren könnte, aber man kann zeigen, wie ähnlich sich Diesterwegs erweiterte Partitionsdiagramme und das animalia-Diagramm Schopenhauers sind.

Das erste der beiden Partitionsdiagramme integriert Abb. 8 in einen Begriff mit einem weiteren Umfang: ‘Geradlinige Winkel’ umfasst zum einen ‘rechte’, ‘spitze’ und ‘stumpfe Winkel’, die alle zusammen die Klasse der ‘hohlen Winkel’ bilden und diesem untergeordnet sind. Die übergeordnete Klasse wird dann den Begriffen ‘flacher’ und ‘konvexer Winkel’ nebengeordnet. ‘Hohler’, ‘flacher’ und ‘konvexer Winkel’ sind also Gattungsbegriffe, während ‘rechter’, ‘spitzer’ und ‘stumpfer Winkel’ Artbegriffe von ‘hohler Winkel’ sind. Auch hier haben die Gattungsbegriffe mehr Umfang, aber weniger Inhalt als die Artbegriffe.

Während in Abb. 8 bzw. 3 nur Begriffe abgebildet waren, die einem Begriff untergeordnet sind und untereinander nebengeordnet waren, zeigt Abb. 9 hingegen eine Partition, also die Zerlegung des Umfangs des Begriffs ‘Winkel’ in disjunkte Teilmengen, bei denen der Begriff ‘hohler Winkel’ wiederum in drei disjunkte Teilmengen unterteilt wird. Diesterweg schreibt:

> Alle geradlinigen Winkel sind:
> entweder convex,
> oder flach,
> oder hohl; a) spitz; b) R; c) stumpf.

Auffällig ist, dass Diesterweg bei diesem Partitionsdiagramm auch symbolische Elemente von Schopenhauers animalia-Diagramm übernimmt: Wie ‘vertebrata’ und ‘animalia’ in Abb. 4 über mehrere Sektionen des Diagramms in Sperrschrift geschrieben wurde, um die Zerlegung dieser Begriffe in weitere Unterklassen deutlich zu machen, so wurde auch in Abb. 9 die Worte ‘Hohler’ und ‘Winkel’ ähnlich gestreckt über mehrere Segmente eingefügt. Darüber hinaus übernimmt Diesterweg auch die Methode der zwei unterschiedlichen Linienarten, um die Unterordnung von der Nebenordnung der Begriffe kenntlich zu machen: Zwischen den Arten des hohlen Winkels wurden gepunktete Linien gezogen, zwischen den Gattungsbegriffen ‘hohl’, ‘flach’ und ‘konvex’ hingegen durchgezogene Linien. Das erinnert an die vielen einfachen und an die dicke, doppelte Linie im animalia-Diagramm Schopenhauers.

Noch deutlicher sind diese beiden symbolischen Elemente in dem letzten Partitionsdiagramm Diesterwegs zu erkennen. In diesem Diagramm, nämlich Abb. 10 ist der Begriff ‘geradliniges ebenes Viereck’ in seine Partitionen zergliedert worden. Diesterweg schreibt dazu Folgendes im *Leitfaden*:

> In dem geradlinigen ebenen Viereck sind:
> entweder die Seiten paarweise $\|$:
> a) Quadrat; b) Rechteck; c) Rhombus; d) Rhomboides;
> oder nur 1 Paar Seiten ist $\|$ = Paralleltrapez;
> oder kein Paar = Trapez.

Diesterweg hat mit diesen vier Diagrammen mehrere Grundlagen in seinem Lehrbuch geschaffen: Zum einen fordert er seine Leser nun auf, komplexere Partitionsdiagramme zu weiteren geometrischen Begriffen zu konstruieren; zum anderen verwendet er die Partitionsdiagramme, um damit verschiedene logische Übungen durchzuführen. Beide Vorgehensweisen sind stark interpretationsbedürftig, da Diesterweg keine explizite Auflösung der Übungen gibt. Zwar sind die Beschreibungen in der *Anweisung* nützlich, aber Partitionsdiagramme findet man dort nicht.

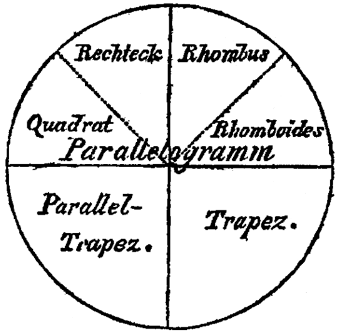
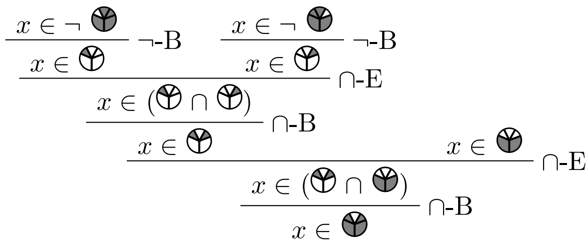


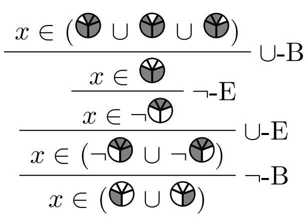
Abbildung 10: (Diesterweg 1845, S. 39)

Die Konstruktion der komplexeren Diagramme müssen an anderer Stelle intensiver diskutiert werden. Ich möchte abschließend nur zwei Beispiele für logische Schlüsse geben, die in ähnlicher Weise dem Leser in (Diesterweg 1845, §22) als Aufgabe gestellt werden. Dabei verwende ich die bereits in Kapitel 3.3 skizzierten Regeln.

1) Wenn nach Fig. 9 x ein hohler Winkel ist, aber es nicht der Fall ist, dass dieser ein spitzer oder ein stumpfer ist, dann ist x ein rechter Winkel .



2) Wenn nach Fig. 9 x ein spitzer , rechter oder stumpfer Winkel ist, dann ist x ein nicht-konvexer und ein nicht-flacher Winkel .



6 Fazit

Diesterweg gibt noch viele weitere logisch-mathematische Übungen an, die mit Hilfe der Diagramme bearbeitet werden sollen. Für diesen Aufsatz sollte es aber reichen, gezeigt zu haben, dass Diesterweg Schopenhauers `RD` kannte, erweiterte und Anwendungen für sie in der Geometrie fand.

Das dargebotene Material sollte belegt haben, dass es

- bereits eine frühe Schopenhauer-Rezeption in der Logik und Mathematik, also vor den 1840er Jahren, gab,
- dass Schopenhauers Ideen in der Mathematik des 19. Jahrhunderts fruchtbar angewandt wurden, und
- dass Schopenhauers und Diesterwegs Anwendungen sich auch Modernisierungen nicht versperren und heute noch sinnvoll interpretiert werden können.

Trotz der hier dargebotenen Erkenntnisse steckt die Forschung zu Schopenhauers Logik und Mathematik erst in den Kinderschuhen. Die Antworten, nach denen die zukünftige Forschung suchen dürfte, betreffen einige der folgenden Fragen: Wie einflussreich war Diesterwegs und damit Schopenhauers Ansatz, insbes. die Anwendung von Logik auf die Mathematik? Gab es weitere Partitionsdiagramme in der (Philosophie der) Mathematik des 20. Jahrhunderts? Inwieweit waren Diesterwegs Ideen insgesamt von Schopenhauer beeinflusst? Warum haben Schopenhauer und seine Anhänger, die so akribisch nach einer Rezeptionen der schopenhauerschen Lehre gesucht haben, keine Hinweise auf Diesterweg gefunden oder festgehalten? Wie kam Diesterweg zu den Kenntnissen über Schopenhauers diagrammatische Techniken aus den Berliner Vorlesungen, die angeblich kaum jemand besucht und gekannt haben soll? Inwieweit sind Schopenhauers und Diesterwegs Ansätze modernisierungsfähig? Lässt sich beispielsweise ein vollständiger und widerspruchsfreier Kalkül des natürlichen Schließens auf Basis der Partitionsdiagramme entwickeln?

Danksagung

Ich danke den Teilnehmerinnen und Teilnehmern des Zwanzigsten Treffens des *Rheinisch-Westfälisches Seminar zur Geschichte und Philosophie der Mathematik* am 28. Januar 2022 in Paderborn sowie Daniel Schubbe und Gregor Nickel für viele wichtige und interessante Hinweise und Denkanregungen. Ich danke zudem der

Thyssen-Stiftung, die durch die Förderung des Projekts 'History of Logic Diagrams in Kantianism' die Publikation dieses Aufsatzes ermöglicht hat.

Literaturverzeichnis

Bernhard, Peter. 2001. *Euler-Diagramme: Zur Morphologie einer Repräsentationsform in der Logik.* Paderborn: mentis.

Birnbacher, Dieter. 2018. Erkenntnis- und Wissenschaftstheorie. In *Schopenhauer-Handbuch. Leben – Werk – Wirkung. 2. Aufl.* Herausgegeben von Daniel Schubbe und Matthias Koßler, 51–60. Stuttgart: Metzler.

Cartwright, David E. 2010. *Schopenhauer: A Biography.* Cambridge: Cambridge University Press.

Centrone, Stefania. 2010. Der Reziprozitätskanon in den Beyträgen und in der Wissenschaftslehre. *Zeitschrift für philosophische Forschung* 64 (3): 310–330.

Demey, Lorenz. 2020. From Euler Diagrams in Schopenhauer to Aristotelian Diagrams in Logical Geometry. In *Language, Logic, and Mathematics in Schopenhauer,* herausgegeben von Jens Lemanski, 181–205. Cham: Springer.

Diesterweg, Friedrich Adolf Wilhelm. 1820. *Geometrische Combinationslehre: Zur Beförderung des Elementar-Unterrichts in der Formen- und Grössenlehre.* Elberfeld: Friedrichs.

———. 1822. *Leitfaden für den Unterricht in der Formen-, Größen- und räumlichen Verbindungslehre.* Elberfeld: Büchler.

———. 1828. *Raumlehre oder Geometrie nach den jetzigen Anforderungen der Didaktik für Lehrende und Lernende.* Bonn: Weber.

———. 1829. *Anweisung zum Gebrauche des Leitfadens für den Unterricht in der Formen-, Größen- und räumlichen Verbindungslehre.* Elberfeld: Büchler.

———. 1845. *Leitfaden für den Unterricht in der Formen-, Größen- und räumlichen Verbindungslehre. 4. verb. Aufl.* Leipzig: Friedlein & Hirsch.

———. 1878. Über die richtige Methode des Forschens und Lehrens. In *Ausgewählte Schriften, Bd. 3,* herausgegeben von E. Langenberg, 322–333. Frankfurt am Main: Diesterweg.

Dobrzański, Michał. 2017. *Begriff und Methode bei Arthur Schopenhauer.* Würzburg: Königshausen & Neumann.

Goebel, Klaus. 1995. *Wer die Schule hat, der hat die Zukunft. Gesammelte Aufsätze zur rheinisch-westfälischen Schulgeschichte. Hg. v. Herausgegeben von H. G. Kirchhoff.* Bochum: Brockmeyer.

Heinemann, Anna-Sophie. 2020. Schopenhauer and the Equational Form of Predication. In *Language, Logic, and Mathematics in Schopenhauer,* herausgegeben von Jens Lemanski, 165–179. Cham: Springer.

Jacquette, Dale. 2012. Schopenhauer's Philosophy of Logic and Mathematics. In *A Companion to Schopenhauer,* herausgegeben von B. Vandenabeele, 43–59. Oxford: Wiley-Blackwell.

Lemanski, Jens. 2022. *Welt und Logik.* London: College Publications.

Lemanski, Jens, und Lorenz Demey. 2021. Schopenhauer's Partition Diagrams and Logical Geometry. In *Diagrams 2021: Diagrammatic Representation and Inference,* herausgegeben von A. Basu, G. Stapleton, S. Linker, C. Legg, E. Manalo und P. Viana, 149–165. Cham: Springer.

Mach, Ernst. 1906. *Erkenntnis und Irrtum: Skizzen zur Psychologie der Forschung. 2. durchges. Aufl.* Leipzig: Barth.

Menne, Albert. 1989. Die Kantische Urteilstafel im Lichte der Logikgeschichte und der modernen Logik. *Journal for General Philosophy of Science* 20:317–324.

Moktefi, Amirouche. 2020. Schopenhauer's Eulerian Diagrams. In *Language, Logic, and Mathematics in Schopenhauer,* herausgegeben von Jens Lemanski, 111–127. Springer.

Moretti, Alessio. 2009. The Geometry of Logical Opposition. Diss., Neuchâtel.

Prawitz, Dag. 1965. *Natural Deduction: A Proof-Theoretical Study.* Stockholm, Sweden: Dover Publications.

Safranski, Rüdiger. 1987. *Schopenhauer und die wilden Jahre der Philosophie.* München: Carl Hanser.

Schopenhauer, Arthur. 1913. *Philosophische Vorlesungen (Sämtliche Werke IX. Ed. by P. Deussen and F. Mockrauer).* München: Piper & Co.

———. 2022. *Vorlesung über Die gesamte Philosophie oder die Lehre vom Wesen der Welt und dem menschlichen Geiste Teil 1: Theorie des gesamten Vorstellens, Denkens und Erkennens. Hrsg. v. Daniel Schubbe unter Mitarbeit von Judith Werntgen-Schmidt und Daniel Elon.* Hamburg: Meiner.

Schubbe, Daniel. 2022. Zum biographischen Kontext der Vorlesung. In *Arthur Schopenhauer: Vorlesung über Die gesamte Philosophie oder die Lehre vom Wesen der Welt und dem menschlichen Geiste, 1. Teil: Theorie des Vorstellens, Denkens und Erkennens,* herausgegeben von Daniel Schubbe, Judith Werntgen-Schmidt und Daniel Elon, XI–XXIV. Hamburg: Meiner.

Segala, Marco. 2020. Schopenhauer on Intuition and Proof in Mathematics. In *Language, Logic, and Mathematics in Schopenhauer,* herausgegeben von Jens Lemanski, 287–305. Cham: Springer.

Szabó, Árpád. 1969. *Anfänge der grieschischen Mathematik.* München, Wien: Oldenbourg.

Volkert, Klaus. 1986. *Die Krise der Anschauung: Eine Studie zu formalen und heuristischen Verfahren in der Mathematik seit 1850.* Göttingen: Vandenhoeck und Ruprecht.

Frege über Merkmale von Begriffen

Dolf Rami

Zusammenfassung In diesem Aufsatz möchte ich zeigen, dass zwei in der Literatur vorgeschlagene Bestimmungen von Merkmalen von Begriffen bei Frege vor unterschiedlichen Schwierigkeiten stehen und entweder kontraintuitive Konsequenzen haben oder nicht auf die von Frege selbst ins Spiel gebrachten Beispiele von komplexen Begriffen sinnvoll anwendbar sind. Die erste Konzeption fasst Merkmale als analytische Komponenten von Begriffen auf, die zweite als definitorische Teilbegriffe. Ich werde zeigen, dass man nur die zweite Auffassung sinnvoll so modifizieren kann, dass man dadurch zu einer halbwegs angemessenen Bestimmung von Merkmalen von Begriffen gelangt, die mit Freges Erläuterungen und Beispielen übereinstimmt.

Abstract In this paper I want to show that two proposals to determine Frege's notion of a mark (Merkmal) of concepts that are made in the relevant literature face some serious interpretative and systematic problems. The first of these conceptions interprets *marks* as analytic components of a concept, the second as defining parts of a concept. I will show that only the second conception can be modified in a somehow meaningful way such that we get a conception of marks as result that fits with Frege's general characterizations and examples.

Frege unterscheidet in strikter und berühmter Weise zwischen den *Eigenschaften* und den *Merkmalen* von Begriffen. Die wichtigsten und bekanntesten Erläuterungen zu dieser Unterscheidung finden sich in Frege (1884) und Frege (1892) und sie lauten wie folgt:

> Unter Eigenschaften, die von einem Begriffe ausgesagt werden, verstehe ich natürlich nicht die Merkmale, die den Begriff zusammensetzen. Diese sind Eigenschaften der Dinge, die unter den Begriff fallen, nicht des Begriffes. So ist „reckwinkelig“ nicht eine Eigenschaft des Begriffes „rechtwinkeliges Dreieck“; aber der Satz, daß es kein rechtwinkeliges,

> geradliniges, gleichseitiges Dreieck gebe, spricht eine Eigenschaft des Begriffes „rechtwinkeliges, geradliniges, gleichseitiges Dreieck“ aus; diesem wird die Nullzahl beigelegt.[1]

> Nach meiner Redeweise kann etwas zugleich Eigenschaft und Merkmal sein, aber nicht von demselben. Ich nenne die Begriffe, unter die ein Gegenstand fällt, seine Eigenschaften, so dass
>
> „Φ zu sein ist eine Eigenschaft von Γ“
>
> nur eine andere Wendung ist für
>
> „Γ fällt unter den Begriff des Φ“.
>
> Wenn der Gegenstand Γ die Eigenschaften Φ, Χ und Ψ hat, so kann ich diese in Ω zusammenfassen, so daß es dasselbe ist, ob ich sage, Γ haben die Eigenschaft Ω oder ob ich sage, Γ habe die Eigenschaften Φ und Χ und Ψ. Ich nenne dann Φ, Χ und Ψ Merkmale des Begriffs Ω und zugleich Eigenschaften von Γ.[2]

Welche Thesen und Bestimmungen bezüglich des Begriffs eines Merkmals von Begriffen kann man aus diesen beiden Zitaten explizit extrahieren? In jedem Fall zumindest die folgenden:

(T1) Zumindest manche Begriffe setzen sich aus (ihren) Merkmalen zusammen.

(T2) Die Merkmale eines Begriffs treffen auf alle Gegenstände zu, die unter diesen Begriff fallen.

(T3) Eigenschaften eines Gegenstands können zumindest unter bestimmten Umständen zu einem Begriff zusammengefasst werden, der diese Eigenschaften als Merkmal hat.[3]

(T4) Eigenschaften, die von einem Begriff ausgesagt werden, sind keine Eigenschaften der Merkmale eines Begriffs, sondern der Gegenstände, die unter diesen Begriff fallen.

1. Frege (1884, §53).
2. Frege (1892, 201-202).
3. Frege verwendet durchgängig die Ausdrücke „Eigenschaft“ und „Begriff“ als füreinander austauschbar. Für ihn sind auch die Ausdrucksweisen „x fällt unter den Begriff F“ und „x hat die Eigenschaft F zu sein“ Varianten voneinander. Das ist allerdings völlig unproblematisch, weil Frege diese beiden Ausdrücke als technische Ausdrücke verwendet, ähnlich wie „Bedeutung“ oder „Gedanken“. Intuitiv mag man eine Unterscheidung zwischen Begriffen und Eigenschaften ziehen wollen. Aber unsere natürlichsprachliche Verwendung ist für Frege irrelevant und philosophisch gesehen, ist die betreffende Unterscheidung auch kontrovers und gar nicht leicht im Detail zu verteidigen.

Auf der Basis dieser Thesen erhält man eine relativ gute Abgrenzung zwischen *Eigenschaften* und *Merkmalen* von Begriffen, das Wesen von Merkmalen wird dadurch aber noch nicht hinlänglich genau bestimmt. D.h. es bleiben noch eine Menge von Fragen offen. Wichtige Fragen wie bspw. die folgenden:

(F1) Haben nur komplexe Begriffe Merkmale?

(F2) Ist jeder Begriff Merkmal seiner selbst?

(F3) Sind universelle Begriffe, die auf alle Dinge zutreffen, Merkmale *jedes* Begriffs?

(F4) Können auch widersprüchliche oder unmöglich erfüllbare Begriffe Merkmale haben?

(F5) In welchem konkreten Sinn *setzen sich* manche Begriffe aus Merkmalen *zusammen*?

Eine vollständige Konzeption des Wesens von Merkmalen von Begriffen muss diese Fragen klar beantworten können. Es fragt sich allerdings, ob Frege über solch eine Konzeption wirklich verfügt, oder ob er zumindest Antworten auf manche der angeführten Fragen gegeben hat.

In der Literatur zum Thema gibt es unterschiedliche Angebote, Freges Ausführungen mit einer allgemeinen Konzeption von Merkmalen zu unterfüttern. Was aus den oben angeführten zwei Zitaten nicht klar hervorgeht, aber aus anderen Ausführungen von Frege zum Thema entnommen werden kann, ist der Umstand, dass Merkmale in irgendeinem Sinn *Teile* von komplexen Begriffen sind. Der Begriff eines Teils ist allerdings mehrdeutig und kann für verschiedene Arten der Zerlegung stehen. Die entscheidende Frage ist nun, in welchem Sinn Merkmale *Teile* von komplexen Begriffen sind. Die folgenden drei unterschiedlichen Antworten auf diese Frage scheinen mir die nennenswertesten zu sein.

(K1) Merkmale sind metaphysisch-konstitutive Teilbegriffe von komplexen Begriffen.

(K2) Merkmale sind analytische Konstituenten von Begriffen.

(K3) Merkmale sind definitorische Teilbegriffe von komplexen Begriffen.

Die erste Auffassung wird in Künne (2010) diskutiert und als unangemessen verworfen. Die zweite Auffassung wird in Kutschera (1989) Frege zugeschrieben und in Künne (2010) Frege empfohlen. Die dritte Auffassung hat Gabriel (1980) zufolge Frege vertreten.

Ich werde die angeführten Auffassungen kurz darlegen und einer kritischen Prüfung unterziehen.

Bevor ich das tue, möchte ich noch kurz die Frage beantworten, warum das Thema von Freges Konzeption von Merkmalen interessant ist. Die Auffassung, dass sich manche Begriffe in ihre Merkmale zerlegen lassen, ist eine sehr traditionelle Auffassung, die typischer Weise mit einer traditionalen Auffassung von Begriffen als mentalen Konzepten oder Universalien einhergeht. Frege selbst hat eine gänzlich andere, viel grobkörniger Auffassung der Individuation von Begriffen. Vor diesem Hintergrund ist es eine interessante Frage, wie er versucht die traditionelle Auffassung der Begriffsmerkmale, die für ihn philosophisch nützlich ist, mit seiner eigenen Konzeption der Begriffe vereinbar zu machen.

1 Merkmale als metaphysisch-konstitutive Teile von komplexen Begriffen

Der Auffassung (K1) zufolge ist der Begriff der Bläue ein metaphysisch-konstitutiver Teil des Begriffs eines blauen Schals in einem analogen Sinn so wie ein blauer Legostein Teil einer Legokonstruktion aus mehreren unterschiedlichen Legosteinen sein kann. D.h. so wie sich eine Legokonstruktion aus Lego-Teilen metaphysisch zusammensetzt oder eine strukturierte Propositionen aus Propositionskomponenten, so setzt sich auch ein komplexer Begriff als metaphysischer Komplex aus anderen Begriffen zusammen. Merkmale sind daher Teile eines Begriffs in einem metaphysisch-konstitutiven Sinn. Dieses Verständnis von Merkmalen von Begriffen mag seit Locke die Standardauffassung unter Philosophen sein.[4] Man findet sie wohl auch noch bei Kant und Bolzano.[5] Allerdings kann diese Auffassung nicht sinnvoll von Frege übernommen werden, wie Künne meiner Ansicht nach überzeugend darlegt:

> Seit 1890 versteht er [Frege] unter einem Begriff (offiziell) immer die Bedeutung eines einstelligen Prädikats, und diese Bedeutung ist in seinen Augen eine Funktion. Will er gewissen Funktionen nachsagen, dass sie aus Teilen zusammengesetzt sind? Und dass diese Teile selber wiederum Funktionen sind? Wohl kaum, und er sagt so etwas m. W. auch nie. Wenn man unter einem Begriff den Sinn eines einstelligen Prädikats versteht, dann ist die Rede von Teilbegriffen weniger problematisch, vielleicht sogar unproblematisch: Der Sinn von „ξ ist schwarz" ist eine Komponente des komplexen Prädikats „ξ ist ein Pferd und ξ ist schwarz" [.] Wenn Eigenschaften Begriffe im technischen Verstande dieses Wortes sind, dann ist der Sinn von „ξ ist schwarz" eine Art

4. Siehe dazu: Locke (1690, Buch 3, Kapitel 3).
5. Siehe dazu: Kant (1800, Buch 1, Abschnitt 1) und Bolzano (1837, Band 1, §73).

> des Gegebenseins des Begriffs ξ *ist schwarz.* [...] Wenn man den Sinn eines monadischen Prädikats als ein Konzept bezeichnet, könnte die Neufassung dann so aussehen: ‚Die Merkmale eines Konzeptes K sind Konzepte, die Teile von K sind und unter die etwas fallen muss, wenn es unter K fallen soll?' Nein, denn die Relation des Fallens-unter besteht zwischen Gegenständen und Begriffen. Der mereologische Charakter müsste ganz aufgegeben werden. So wenig wie Teile eine Satzes Teile der Bedeutung des Satzes bedeuten [..], so wenig bedeuten Teile eines Prädikats Teile der Bedeutung des Prädikats.[6]

Kurz zusammengefasst lautet diese Kritik wie folgt: Begriffe sind für Frege ab 1890 Funktionen von Gegenständen in Wahrheitswerte. Eine Funktion ist metaphysisch gesehen eine unvollständige, aber einfache Entität. (Logisch gesehen können Funktionen durch bspw. das (boolesche) Produkt zweier einfacher Funktionen konstruiert werden.)

Funktionen setzen sich metaphysisch-konstitutiv nicht aus anderen Funktionen zusammen, sie haben für Frege auch nicht ihre Argumente oder Werte als metaphysische Teile.[7]

Vor diesem Hintergrund kann die Auffassung (K1) nicht sinnvoll auf den späteren Frege angewendet werden.

Soweit kann ich Künne zustimmen. Er unterstellt Frege allerdings *vor* 1890 eine Konzeption von Begriffen auf der Basis von (K1) explizit im Sinn gehabt zu haben.[8] Ich bin mir nicht sicher, ob wir so weit gehen müssen, oder ob es dazu nicht eine durchgehende sinnvolle Alternative gibt. Ich glaube ich kann sinnvolle Alternativen dazu anbieten, die auf (K3) basieren.

2 Merkmale als analytische Komponenten

Eine andere Alternative besteht in (K2). Künne bringt diese selbst ins Spiel und bietet diese Frege an, ohne ihm diese Alternative explizit zuzuschreiben. Zuvor wurde diese Alternative schon in von Kutschera (1980) Frege explizit zugeschrieben:

6. Künne (2010, 219-220); siehe dazu auch: Künne (2001).
7. Nach einer reduktiven mengentheoretischen Auffassung von Funktionen, die Frege aber ablehnt, könnte man dafür argumentieren, dass Funktionen ihre Argumente und Werte als metaphysische Teile haben, weil Funktionen demnach Mengen von geordneten Paaren sind, die aus Argument-Wert-Paare bestehen.
8. Siehe dazu: Künne (2010, 219, 220).

> Für einen einstelligen Begriff 1. Stufe F ist eine *Eigenschaft* von F ein einstelliger Begriff G 2. Stufe, der auf F zutrifft. Ein Merkmal von F ist dagegen ein (einstelliger) Begriff G 1. Stufe, für den der Satz ∀x(Fx → Gx) analytisch gilt[.][9]
>
> Zum theoretischen Arsenal der GL [*Die Grundlagen der Arithmetik*], in denen Frege das Merkmalskonzept einführt, gehört nicht das Konzept der Notwendigkeit, aber das der analytischen Wahrheit. Mit seiner Hilfe könnte Frege die Erklärung des Merkmalskonzepts so formulieren: Die Merkmale eines Begriffs (erster Stufe) sind die Begriffe von denen gilt: es ist eine analytische Wahrheit, dass ein Gegenstand, wenn er unter jenen Begriff fällt, auch unter diesen fällt. Beim Beweis der Wahrheit, dass Bukephalos schwarz ist, wenn er ein Rappe ist, „stößt man … nur auf die allgemeinen logischen Gesetze und auf Definitionen"; also ist sie im Sinne von GL §3 analytisch.[10]

Auf den ersten Blick scheint man mit dieser Konzeption einen sehr guten Ersatz für (K1) gefunden zu haben. Aber ein genauerer Blick auf Freges Erläuterungen zum Begriff von Merkmalen und die von ihm gewählten Beispiele zeigt, dass es sich beim (K2) nicht wirklich um eine geeignete Ausbuchstabierung von Freges Konzeption von Merkmalen von Begriffen handelt.

Um diese Spannung feststellen zu können, müssen wir uns bestimmter Konsequenzen von (K2) bewusst werden.

Erstens folgt aus (K2), dass jeder Begriff ein Merkmal seiner selbst ist. Denn die Behauptung, dass für alle x gilt, dass wenn x F ist, dann ist x F, ist eine allgemeine logische Wahrheit und somit in Freges Sinn auch eine analytische Wahrheit.

Zweitens gilt als Konsequenz daraus, dass alle Begriffe und somit auch alle nichtkomplexen Begriffe zumindest sich selbst als Merkmal haben.

Drittens ist eine weitere Konsequenz von (K2), dass zumindest manche Begriffe, die auf alles zutreffen, Merkmale von *allen* Begriffen sind. Das Gesetz der Identität „Für alle x gilt: x=x" ist bei Frege ein logisches Gesetz. Wenn „Für alle x gilt: x=x" ein Gesetz der klassischen Logik ist, dann ist auch „Für alle x gilt: Wenn x F ist, dann x=x" für beliebige F eine logische Wahrheit. D.h. aber nun auch, dass der Begriff der Selbst-Identität als Konsequenz von (K2) ein Merkmal jedes Begriffs ist. Es ist nicht klar, ob man das ohne weiteres auf andere universelle Begriffe, die auf alles zutreffen, übertragen kann. Denn bei Frege ist der Satz „Für alle

9. Kutschera (1989, 100).
10. Künne (2010, 221).

x gilt: x ist ein Gegenstand" keine logische Wahrheit. Darüber hinaus definiert Frege den Begriff des Gegenstands *nicht* mittels des Begriffs der Selbst-Identität. Daher ist aber auch „Für alle x gilt: Wenn x F ist, dann x ist ein Gegenstand" für beliebige F weder eine logische noch eine analytische Wahrheit. Ähnliches gilt für den Begriff der Existenz, wenn dieser als universeller Begriff erster Stufe verstanden wird.[11] [12]

Eine weitere *vierte* Konsequenz besteht nun darin, dass alle logisch widersprüchlichen Begriffe nach dieser Auffassung Merkmale *aller* logische widersprüchlichen Begriffe sind. Das ergibt sich aus zweierlei: Erstens sind Sätzen der logischen Form „$\forall$x(($\neg$Fx & Fx) $\rightarrow$ ($\neg$Gx & Gx))" logische Wahrheiten im Rahmen der klassischen Logik, egal was wir inhaltlich für „F" und „G" einsetzen. Zweitens lassen sich Sätze dieser logischen Form aus allgemeinen logischen Gesetzen und Definitionen ableiten, weil sie selbst logische Wahrheiten sind und nach Frege alle logischen Wahrheiten auch analytische Wahrheiten sind.[13]

Eine *fünfte* damit enge verwandte Konsequenz besagt, dass *alle* Begriffe Merkmale aller widersprüchlichen Begriffe sind. Das ergibt sich erneut aus zweierlei: Erstens sind Sätzen der logischen Form „$\forall$x(($\neg$Fx & Fx) $\rightarrow$ Gx)" logische Wahrheiten im Rahmen der klassischen Logik, egal was wir inhaltlich für „F" und „G" einsetzen. Zweitens lassen sich Sätze dieser logischen Form somit erneut aus allgemeinen logischen Gesetzen und Definitionen ableiten, weil sie selbst logische Wahrheiten sind und nach Frege alle logischen Wahrheiten auch analytische Wahrheiten sind.

Zumindest manche dieser Konsequenzen stehen in einer Spannung zu bestimmten Annahmen und Ausführungen von Frege. Darüber hinaus erweisen sich alle diese

11. Vgl. dazu: Frege (?1879-85[1969], 69-75).

12. Man könnte hier einwenden, dass es genau genommen bei Frege nur einen einzigen universellen Begriff gibt. Durch welchen Ausdruck dieser Begriff ausgedrückt wird, sollte aber irrelevant sein. In diesem Sinn sollte etwas entweder für alle Ausdrücke für universelle Begriffe gelten oder für keinen.

13. Interessant ist bei Frege, dass im Rahmen seiner Konzeption von analytischen Wahrheiten, logisch widersprüchliche Begriffe einen anderen Status haben als semantisch widersprüchliche Begriffe wie der Begriff eines „hölzernen Eisens" oder eines „runden Vierecks". Denn der Satz „Jedes hölzerne Eisen ist ein rundes Viereck" ist weder intuitiv noch logisch wahr. D.h. die aufgezeigten Konsequenzen gelten nur für logisch widersprüchliche Begriffe, nicht aber für semantisch widersprüchliche. Die Sache würde sich ändern, wenn man analytische Wahrheit nicht wie Frege analysiert, sondern mittels des Begriffs von begrifflich möglichen Welten. D.h. ein Satz der Form „Alle F sind G" wäre dann analytisch wahr, wenn er relativ zu allen begrifflich möglichen Welten wahr ist. Der Satz „Jedes hölzerne Eisen ist ein rundes Viereck" ist auf der Basis einer solche Analyse relativ zu allen begrifflich möglichen Welten in trivialer Weise wahr. D.h. er wird somit als analytisch eingestuft, was er intuitiv aber gar nicht ist. Auf einer solchen Grundlage würde sich die vierte und fünfte angeführte Konsequenz auch auf semantisch widersprüchliche Begriffe ausdehnen lassen. Freges Position hat gegenüber einer solchen Konzeption aber einen kleinen Vorteil.

Konsequenzen als kontraintuitiv, wenn man bestimmte Ausführungen von Frege zur Bestimmung des Merkmalbegriffs ernst nimmt.

Betrachten wir zuerst die folgenden wichtigen Ausführungen von Frege zur Bestimmung des Merkmalbegriffs:

> Begriffe sind meist zusammengesetzt aus Theilbegriffen, den Merkmalen. *Schwarzes*, *seidenes Tuch* hat die Merkmale *schwarz*, *seiden* und *Tuch*. Ein Gegenstand, der unter diesen Begriff fällt, hat diese Merkmale als Eigenschaften.[14]

> Wir sehen hier einen Begriff (der positiven Kubikzahl) zusammengesetzt aus Teilbegriffen (Kubikzahl und positiv). Diese nennen wir Merkmale jenes zusammengesetzten Begriffes.[15]

An diesen beiden Zitaten ist mehrerlei bemerkenswert: *erstens* drückt Frege sich nirgendwo anders so klar und deutlich aus, dass Merkmale *Teilbegriffe* von komplexen Begriffen sind, in einem noch zu klärenden Sinn von Teil. Auf der Grundlage beider Zitate können wir nun die folgende fünfte Kernthese von Frege zu Merkmalen aufstellen:

(T5) Merkmale sind Teilbegriffe von komplexen Begriffen.

Zweitens macht er hier die wichtige Einschränkung, dass nicht alle, sondern nur die meisten Begriffe Teilbegriffe bzw. Merkmale haben; *drittens* sind diese Bemerkungen aus den Jahren 1900 und 1914 und somit 10 bzw. 24 Jahre nachdem Frege sich Künne zufolge auf seine späte Begriffsauffassung festgelegt hat.

Die erste Beobachtung mag auf den ersten Blick Wasser auf Künnes Mühlen sein. Das ist aber nicht wirklich so, denn der Ausdruck „Teil“ ist mehrdeutig und er muss nicht zwangsweise als Teil in einem metaphysisch-konstitutiven Sinne gedeutet werden. Es gibt auch Teile in einem *logischen* oder *definitorischen* Sinn. D.h. Teile auf der Grundlage einer logischen oder definitorischen Zerlegung. Genau das betont Frege selbst wie folgt:

> ... denn Merkmale eines Begriffes sind Begriffe, die *logische* Teile jenes sind.[16]

14. Frege (1900 [1976], 150).
15. Frege (1914 [1969], 247).
16. Frege (1903, 273); meine Hervorhebung.

Unsere Aufgabe besteht nun darin zu klären, in welchen Sinn von *Teil* Frege nun Merkmale als Teilbegriffe von manchen Begriffen ansieht.

Geht man nun allein von der Annahme von Frege aus, dass Merkmale eines Begriffs nichts anderes als *Teilbegriffe* eines Begriffs sind, dann erweisen sich alle fünf angeführten Konsequenzen, der analytischen Auffassung von Merkmalen als kontraintuitiv. D.h. es macht auf dieser Grundlage wenig Sinn, (a) dass jeder Begriff Teilbegriff seiner selbst ist, (b) dass sogar nicht-komplexe Begriffe Teilbegriffe haben; (c) dass jeder universelle Begriff ein Teilbegriff jedes Begriffs ist, (d) dass jeder widersprüchliche Begriff ein Teilbegriff jedes logisch widersprüchlichen Begriffs ist und (e) dass jeder Begriff Teilbegriff jedes logisch widersprüchlichen Begriffs ist.

Frege sagt nicht explizit, welche Begriffe *keine* Teilbegriffe haben, aber auf der Basis aller Beispiele für Begriffe mit Merkmalen, die er in unterschiedlichen Schriften gibt und die allesamt komplexe Begriffe betreffen, scheinen *einfache* Begriffe wohl die Ausnahme darzustellen. Was auch die intuitiv naheliegendste Auffassung ist, wenn man wie Frege von einer fundamentalistischen Auffassung von Begriffen ausgeht. Was zu der folgenden Präzisierung von (T1) führt:

(T1*) Alle komplexen Begriffe und nur diese setzen sich aus (ihren) Merkmalen zusammen.

Wenn nun aber einfache Begriffe keine Teilbegriffe haben, dann ergibt sich daraus eine erste wichtige Spannung in Bezug auf (K2), denn laut (K2) kann jeder einfache Begriff sich selbst als Teilbegriff enthalten. Wenn aber einfache Begriffe nicht sich selbst als Teilbegriffe haben können, dann ist für Frege der Begriff eines Teilbegriffs der Begriff eines *echten* Teilbegriffs. Somit haben nicht nur einfache Begriffe keine Teilbegriffe, sondern obendrein hat auch kein komplexer Begriff sich selbst als Teilbegriff. Was intuitiv sehr sinnvoll ist. In diesem Sinn ist (K2) nicht nur in Bezug auf *einfache* Begriffe zu weit, sondern in Bezug auf *alle* Begriffe.

Auch wenn Frege das explizit angelehnt hat, könnte man, wenn es gute Gründe dafür gäbe, den Begriff eines Teilbegriffs so aufweichen, dass er nicht nur echte, sondern auch unechte umfasst. Damit würden aber nur die Probleme (a) und (b) verschwinden; und ich sehe auch nicht wie man diese Aufweichung gut rechtfertigen könnte. Es scheint mir eine bloße ad-hoc Reaktion zu sein, um (K2) um jeden Preis zu verteidigen.

Ein weiteres interpretatorisches Problem der Konzeption (K2) besteht darin, dass es überhaupt keine Belege dafür in den Werken von Frege gibt. Künne scheint sich dieses Umstandes im Gegensatz zu von Kutschera bewusst zu sein. Er bietet Frege (K2) als Alternative zu (K1) an, die er zumindest dem frühen Frege vor 1890 zuschreibt. Werfen wir nun einen Blick auf die dritte Alternative, diesbezüglich wird sich zeigen, dass es im Gegensatz zu (K1) und (K2) klare Belege für (K3) im Werk von Frege gibt.

3 Merkmale als definitorische Teilbegriffe

Wir haben gesehen, dass (K2) einige wichtige Vorzüge gegenüber (K1) hat, aber auch einige kontraintuitive Konsequenzen hat. Liefert die Auffassung (K3) hier vielleicht bessere Ergebnisse?

Gottfried Gabriel ist ein Vertreter dieser Auffassung. In einem Wörterbuchartikel zu Merkmalen bringt Gabriel Freges Konzeption von Merkmalen mit einer Konzeption von Teilbegriffen von Definitionen in Zusammenhang:

> Meistens versteht man unter den Merkmalen eines Begriffs nicht beliebige, sondern diejenigen Oberbegriffe, die zur Definition [...] des Begriffs verwendet werden. [...]
>
> Eine präzise Unterscheidung von ‹Eigenschaft› und ‹Merkmal› ist von G. FREGE [2] [= Frege (1884)] herausgearbeitet worden. Danach «kann etwas zugleich Eigenschaft und Merkmal sein, aber nicht von demselben». Die Begriffe, unter die ein Gegenstand fällt, sind Eigenschaften (des Gegenstandes). Gleichzeitig sind diese Eigenschaften Merkmale, aber nicht des Gegenstandes, sondern eines komplexeren Begriffes; z.B. fällt der Gegenstand Sokrates unter die Begriffe ‹vernünftig› und ‹Lebewesen›; Sokrates hat also die Eigenschaften, vernünftig zu sein und ein Lebewesen zu sein.[17]

Aus dem Zitat selbst geht nicht völlig eindeutig hervor, dass Gabriel Frege *selbst* die Position zuschreibt, dass Merkmale eines komplexen Begriffs diejenigen Oberbegriffe sind, welche den besagten komplexen Begriff definieren. Im Rahmen eines E-Mail-Austausches hat Gabriel seine Position zu Frege allerdings wie folgt präzisiert:

> Merkmale eines Begriffs F sind diejenigen Begriffe, die den Begriff F definieren (vgl. meinen kurzen Artikel „Merkmal I“ im *Historischen Wörterbuch der Philosophie*).

17. Gabriel (1980, 1153-1154).

Bevor wir uns den Vorzügen und Nachteilen dieser Auffassung zuwenden, wollen wir sie im Detail etwas genauer betrachten. Zuerst möchte ich mich mit der Frage beschäftigen, ob es überhaupt Belege dafür gibt, dass Frege (K3) vertreten hat. D.h. inwiefern die textuelle Evidenz überzeugender und klarer ist als in Bezug auf (K1) und (K2). Ich werde zuerst drei solcher Belege anführen und einen vierten Beleg nennen und später im Detail erläutern.

Danach möchte ich mich der Frage zuwenden, welche Arten von Definitionen Frege unterscheidet und in welcher Form diese Teilbegriffe von komplexen Begriffen bestimmen. Es gibt verschiedene Arten von Definitionen mit unterschiedlichen logischen Formen. Nicht allen Arten von Definition sind geeignet Teilbegriffe von komplexen Begriffen zu bestimmen. Wir werden daher im Detail die Frage diskutieren, welche Einschränkungen hier notwendig sind.

3.1 Vier Belege in Freges Werken, Merkmale als definitorische Teilbegriffe zu verstehen

Es finden sich nur wenige Belege, die sich dafür ins Feld führen lassen, dass Frege (K3) selbst vertreten hat. Aber im Gegensatz zu den beiden anderen Alternativen, die sich gar nicht belegen bzw. teilweise widerlegen lassen und darüber hinaus auch mit gehörigen Problemen zu kämpfen haben, gibt es zumindest Belege für (K3).

Einen ersten kleinen indirekten Beleg für den engen Zusammenhang des Begriffs des Merkmals mit dem der Definition gibt der folgende Ausschnitt aus dem Inhaltsverzeichnis eines von Frege verfassten frühen Logik-Fragments:

> D. Definition der Begriffe.
>
> Durch Merkmale. Verwickeltere.[18]

Leider hat Frege diesen Abschnitt nie geschrieben. Aber durch die zitierte Inhaltsangabe wird ein enger Zusammenhang zwischen bestimmten Definitionen und Merkmalen nahegelegt.

Ein wichtigerer zweiter Beleg findet sich an einer eigentlich unerwarteten Stelle, nämlich im Vorwort der *Grundgesetze der Arithmetik* (1893):

> Wenn man sagt: „Quadrat ist ein Rechteck, in dem zusammenstossende Seiten gleich sind", so definirt man den Begriff Quadrat, indem man angiebt, welche Eigenschaften etwas haben muss, um unter diesen

18. Frege (1879/1891, 1).

> Begriff zu fallen. Diese Eigenschaften nenne ich Merkmale des Begriffes. Aber, wohl gemerkt, diese Merkmale des Begriffes sind nicht seine Eigenschaften. Der Begriff Quadrat ist nicht ein Rechteck, nur die Gegenstände, die etwa unter diesen Begriff fallen, sind Rechtecke, wie auch der Begriff schwarzes Tuch weder schwarz noch ein Tuch ist. Ob es solche Gegenstände giebt, ist durch die Definition unmittelbar noch nicht bekannt.[19]

In diesem Zitat führt Frege zwei Beispiele für explizite Definitionen an. Durch eine explizite Definition wird allgemein ein komplexer Begriff in seine ihn definierenden Teilbegriffe zerlegt. Das erste dieser beiden Beispiel definiert in dieser Weise den Begriff eines Quadrats:

(B1) Für alle x gilt: x ist ein Quadrat gdw. x ist ein Rechteck und x hat gleichlange zusammenstoßende Seiten.

Dieser Definition zu folge sind zwei Begriffe Teilbegriffe des Begriffs des Quadrats, nämlich den Begriff des Rechtecks und der Begriff von gleichlangen zusammenstoßenden Seiten; und damit auch Merkmale dieses Begriffs im Sinne Freges.

Das zweite Beispiel, das Frege zum Vergleich bringt, ist der komplexe Begriff eines schwarzen Tuchs. Man könnte nun auf den ersten Blick der Meinung sein, dass man diesen Begriff analog wie folgt durch eine Definition bestimmen kann:

(B2) Für alle x gilt: x ist ein schwarzes Tuch gdw. x ist ein Tuch und x ist schwarz.

Auf dieser Grundlage scheint es in Analogie zu (B1) sinnvoll zu sein als Teilbegriffe dieses komplexen Begriffs den Begriff des Tuches und den Begriff der Schwärze anzusehen. Wie wir später noch im Detail darlegen werden, ist es allerdings nicht ganz klar, ob man (B2) genau so wie (B1) als explizite Definition ansehen kann.

Darüber hinaus formuliert Frege in dieser Passage eine wichtige (notwendige) Bedingung, die korrekte Definitionen erfüllen müssen, die er an anderer Stelle auch als Bedingung von Merkmalen anführt:

> Merkmal eines Begriffs ist eine Eigenschaft, die ein Gegenstand haben muss, wenn er unter den Begriff fallen soll.[20]

Diese Parallele unterstreicht meiner Ansicht nach zusätzlich den engen Zusammenhang zwischen Merkmalen und Definitionen nach Frege.

19. Frege (1893, Vorwort, XIV).
20. Frege (1903, 373).

Ein dritter ähnlicher Beleg, der auf die These hinausläuft, dass explizite Definitionen durch ihre Art der logischen Zerlegung von Begriffen bestimmen oder zumindest angeben, was Merkmale eines Begriffs sind, können wir der folgenden Passage in Freges Kritik in Bezug auf Hilberts Auffassungen von Definitionen entnehmen:

> Die Definition „Rechteck ist ein Parallelogramm mit einem rechten Winkel“ können wir so umformen:
>
> „Erklärung: Wir denken uns ebene Figuren, die wir Rechtecke nennen.
>
> Axiom 1: Alle Rechtecke sind Parallelogramme.
>
> Axiom 2: In jedem Rechtecke gibt es ein Paar Seiten, die senkrecht aufeinander stehen.“
>
> [...]
>
> Man kann annehmen, daß es sich nicht um die ganzen Axiome, sondern nur um diejenige ihrer Teile handele, welche Merkmale des zu definierenden Begriffes ausdrücken. In unserem Beispiel sind diese Merkmale *Parallelogramm* und *zwei aufeinander senkrechte Seiten habend.* [21]

Um diese Passage richtig zu verstehen, muss man den Diskussionskontext kennen. Hilbert hat in seinen Arbeiten eine alte in der Mathematik anerkannte Art der Definition auf der Basis neuer logischer Präzision wiederbelebt, nämlich die sogenannte implizite Definition durch Axiome. Dieser Auffassung zu folge, kann man durch Axiome, die einem bestimmten Begriffe in einer zentralen explanatorischen Rolle enthalten, implizit definieren. D.h. ohne diesen Begriff auf andere grundlegendere Begriffe zurückzuführen oder ihn als primitiv und unerklärbar anzusehen. Frege verteidigt demgegenüber eine konservativere philosophische Alternative, die strikt zwischen Axiomen und Definitionen unterscheidet und nur das als Definition verstehen will, was exakt dasselbe leistet, wie eine klassische explizite Definition. Vor diesem Hintergrund ist auch das angeführte Zitat zu verstehen. Frege führt in diesem Zitat nun zu Beginn ein weiteres, (B1) sehr ähnliches Beispiel einer Explizit-Definition an:

(B3) Für alle x gilt: x ist ein Rechteck gdw. x ist ein Parallelogramm und x hat mindestens einen rechten Winkel.

Auf dieser Grundlage betrachtet Frege nun Hilberts Methode der impliziten Definitionen durch Axiome und stellt dabei die Forderung auf, nur die Axiome in

21. Frege (1903, 322-324).

Betracht zu ziehen, die tatsächlich Merkmale des Begriffs des Recktecks zum Ausdruck bringen. In Bezug auf Hilbert bedeutet dies, dass Frege der Auffassung ist, dass eine axiomatische Bestimmung eines Begriffs nur dann angemessen ist, wenn sie dieselben logischen Konsequenzen wie eine explizite Definition nach sich zieht. Man sieht hieran klar wie stark Frege davon überzeugt ist, dass nur explizite Definitionen echte Definitionen sind. Für unsere Zwecke ergibt sich aber aus diesem Zitat wiederum die Einsicht, dass Frege der Auffassung ist, dass eine korrekte explizite Definition eines (komplexen) Begriffs, diesen in seine Teilbegriffe (=Merkmale) (logisch) zerlegt. Man kann dieses Zitat somit als weiteren Beleg für (K3) werten.

Als vierten und letzten Belege möchte ich auf die Diskussion von aufbauenden Definitionen in Frege (1914) hinweisen. In diesem Zusammenhang führt Frege auch die Unterscheidung zwischen Merkmalen und Eigenschaften ein. In Frege (1914 [1969], 247) wird ein Beispiel für eine aufbauende Definition gebracht, die (B2) sehr stark ähnelt. Auf dieser Grundlage führt Frege dann den Begriff des Merkmals von Begriffen ein. Bevor wir diesen weiteren Beleg für (K3) genauer betrachten können, sollten wir uns zuerst Freges allgemeiner Unterscheidung zwischen *aufbauenden* und *zerlegenden* Definitionen zuwenden.

In jedem Fall gilt, dass die bisher betrachteten drei Belege, genügen, um zu zeigen, dass es im Gegensatz zu (K1) und (K2) einige klare Belege für (K3) in Freges Schriften gibt.

3.2 Freges Unterscheidung zwischen aufbauenden und zerlegenden Definitionen

In „Logik in der Mathematik“ (1914) zieht Frege die folgende berühmte Unterscheidung zwischen aufbauenden und zerlegenden Definitionen:

> Wir haben also *zwei ganz verschiedene Fälle* zu unterscheiden:
>
> 1. Wir bauen einen Sinn aus seinen Bestandteilen auf und führen ein ganz neues einfaches Zeichen ein, um diesen Sinn auszudrücken. Man kann dies „aufbauende Definition“ nennen; wir wollen es aber lieber „Definition“ schlechtweg nennen.
>
> 2. Schon längst ist ein einfaches Zeichen im Gebrauch gewesen. Wir glauben seinen Sinn logisch zerlegen zu können und erhalten einen zusammengesetzten Ausdruck, von dem wir meinen, dass er denselben Sinn ausdrücke wie jener. Als Bestandteil eines zusammengesetzten

> Ausdrucks lassen wir nur etwas gelten, was selbst einen anerkannten Sinn hat. [. . .] Zum Unterschied vom ersten Falle könnte man „zerlegende Definition“ sagen.[22]

Bei beiden Arten von Definitionen handelt es sich um explizite Definitionen, welche in eine ähnliche Form gebracht werden können wie unsere Beispiele (B1) bis (B3). Die von Frege getroffene Unterscheidung entspricht in etwa der heute noch gängigen Unterscheidung zwischen stipulativen (=aufbauenden) und deskriptiven (=zerlegenden) Definitionen. Stipulative Definition legen die Bedeutung eines neuen Ausdrucks oder einen bekannten Ausdruck mit einer neuen Bedeutung fest. Frege beschränkt sich bei seiner Beschreibung auf die erste der beiden Optionen. Und wenn man die Sache aus der Perspektive seiner eindeutigen Begriffsschrift betrachtet, wo jedes Zeichen nur genau einen Inhalt hat, dann ist diese auch die einzig mögliche Option. Solche Definitionen sind vor allen in den Wissenschaften gebräuchlich, aber es gibt sie durchaus auch in alltäglicheren Zusammenhängen. Ein gutes Beispiel für eine stipulative Definition, stellt die einstmalige Einführung des Ausdrucks „UFO“ dar:

(B4) Für alle x gilt: x ist ein UFO $=_{\mathrm{df.}}$ x ist ein Flugobjekt von einem unbekannten, nicht-identifiziertem Typ.

Andere bekannte Beispiele aus der Wissenschaft stellen beispielsweise Definitionen des Ausdrucks „Masse“ oder „Primzahl“ dar. Wie wir sogleich sehen werden, wirft das Beispiel in Frege (1914) für aufbauende Definitionen einige Fragen auf.

Deskriptive Definitionen sind Bestimmungen der Bedeutung von Ausdrücken, die komplexe Begriffe ausdrücken und bereits einen etablierten Gebrauch haben. Bei Frege sind das Ausdrücke, die bereits im Gebrauch sind und einen Sinn ausdrücken, der sich logisch zerlegen lässt. D.h. *nur* etablierte Ausdrücke, die einen Sinn haben, der insofern komplex ist, als er sich logisch in unterschiedliche Bestandteile zerlegen lässt, können im Definiendum einer zerlegenden Definition auftauchen. Das wirft natürlich die Frage auf, welche Rolle die Sinne eines Ausdrucks genau bei einer zerlegenden Definition spielen. Begriffe sind für Frege ja die Bedeutungen von prädikativen Ausdrücken und nicht ihre Sinne. Die Sinne sind Arten des Gegebenseins der Bedeutungen. Welche Rolle spielen also die Sinne bei der Bestimmung der Merkmale von Begriffen? Mit dieser Frage müssen wir uns noch eindringlicher beschäftigen. In jedem Fall erfüllen unsere Beispiele (B1) und (B3) nicht nur die von Frege aufgestellte Bedingung, sondern gelten allgemein als gute Beispiele für zerlegende (=deskriptive) Definitionen.

22. Frege (1914 [1969], 227).

Darüber hinaus macht Frege in dem oben angeführten Zitat zwei weitere wichtige Feststellungen: *Erstens* macht er in Bezug auf beide Arten von expliziten Definitionen in dem angeführten Zitat die wichtige Einschränkung, dass es sich beim Definiendum um ein *einfaches* Zeichen handeln muss. Hier stellt sich nun die Frage, was Frege unter einem einfachen Zeichen genau versteht. Wie wir schon gesehen haben, stellt er in Frege (1914) Bedingungen für explizite Definitionen aus, die nur vor dem Hintergrund einer exakten Sprache wie seiner Begriffsschrift als vollständig angesehen werden können. Daher scheint es auch naheliegend „einfach“ im Sinne von „logisch einfach“ zu verstehen. D.h. das Definiendum einer expliziten Definition, die einen Begriff definiert, muss am besten durch ein einstelliges Prädikat im logischen Sinn repräsentiert werden können. Eindeutig erfüllen würden diese Forderung unsere Beispiele (B1), (B3) und (B4), wenn diese in der naheliegendsten Weise in Freges Begriffsschrift übersetzt würden.

Zweitens sind für Frege aufbauende Definitionen *Definitionen im eigentlichen Sinn*. Das zeigt sich durch seine Bemerkung im angeführten Zitat zu aufbauenden Definitionen: „wir wollen es aber lieber „Definition“ schlechtweg nennen“; und zusätzlich durch die folgende noch explizitere Behauptung:

> Das ist eine Definition im eigentlichen Sinne, nämlich eine aufbauende Definition.[23]

Was sind Freges Gründe für diese Bevorzugung aufbauender Definitionen? Der Hauptgrund dafür hat meiner Ansicht nach damit zu tun, dass man bei einer aufbauenden Definition sicher davon ausgehen kann, dass der erklärte Ausdruck denselben Sinn hat wie der erklärende Ausdruck. Wohingegen bei einer zerlegenden Definition diese Äquivalenz stets problematisch ist und „nur durch unmittelbares Einleuchten erkannt werden kann“.[24] Darüber hinaus interessiert sich Frege primäre für Definitionen im Rahmen seiner Begriffsschrift und diese haben dort ausschließlich aufbauenden Charakter.

Damit haben wir nun die wichtigsten Kennzeichen von expliziten Definitionen nach Frege dargelegt.

Freges bemerkenswerte Ausführungen zu aufbauenden Definitionen und Merkmalen

Wir haben schon kurz daraufhin gewiesen, dass man in Bezug auf (B2) intuitiv Zweifel haben kann, ob es sich dabei wirklich um eine explizite Definition handelt.

23. Frege (1914 [1969], 228).
24. Frege (1914 [1969], 227).

Diese Zweifel wollen wir nun ausführlicher in Bezug auf dieses und ein anderes mit (B2) eng verwandtes Beispiel vertiefen. Frege verwendet dieses weitere Beispiel (a) um die Natur von aufbauenden Definitionen zu erläutern und (b) den Zusammenhang zwischen aufbauenden Definitionen und den Merkmalen von Begriffen aufzuzeigen. Er legt dieses Beispiel wie folgt dar:

> Betrachten wir nun den Fall „8 ist eine Kubikzahl und 8 ist positiv"!
>
> In diesem zusammengesetzten Satze wird etwas ausgesagt von der Zahl 8. Was ausser dem Zahlzeichen „8" noch im Satze vorhanden ist, können wir als Zeichen eines Begriffes auffassen und dafür mittels einer Definition ein *neues* Zeichen einführen, etwa
>
> $$\left\{\begin{array}{c}\text{a ist eine Kubikzahl}\\ \text{und}\\ \text{a ist positiv}\end{array}\right\} = \text{a ist eine positive Kubikzahl.}$$
>
> Hier erscheint links der Buchstabe „a" zweimal. Dem steht nichts entgegen; aber auf der rechten Seite, wo der erklärte Ausdruck steht, darf „a" nur einmal vorkommen. [...]
>
> Wir sehen hier einen Begriff (der positiven Kubikzahl) zusammengesetzt aus Teilbegriffen (Kubikzahl und positiv). Diese nennen wir Merkmale jenes zusammengesetzten Begriffes.[25]

Das Beispiel des komplexen Begriffs einer positiven Kubikzahl ist eine Variation eines Beispiels, welches in Frege (1903) diskutiert wird; nämlich des Beispiels einer positiven Quadratwurzel aus 4. Beide Beispiele sind strukturell verwandt mit dem bereits erwähnten und eingeführten Beispiel des Begriffs eines schwarzen Tuches.

Besonders bemerkenswert an diesem Zitat ist nun zweierlei: *erstens*, dass Frege darin das folgende Beispiel als Beispiel für eine aufbauende Definition anführt:

(B5) Für alle x gilt: x ist eine positive Kubikzahl gdw. x ist eine Kubikzahl und x ist positiv.

Zweitens ist bemerkenswert, dass er auf der Grundlage dieser aufbauenden Definition erklärt, worin die Merkmale des komplexen Begriffs einer positiven Kubikzahl bestehen. Damit liefert dieses Zitat nun den bereits zuvor kurz angesprochenen vierten Beleg für die Konzeption (K3).

25. Frege (1914 [1969], 247); meine Hervorhebung.

Was nun aber an (B5) besonders bemerkenswert und problematisch ist, darauf will ich nun im Detail eingehen. Die bisher betrachteten Beispiele von scheinbaren expliziten Definitionen lassen sich in zwei Klassen einteilen: (B1), (B3), (B4) sind völlig unproblematisch und erfüllen alle Kriterien für explizite Definitionen. (B2) und (B5) sind problematisch, und zwar aus den folgenden Gründen: Im Gegensetz zum (B1), (B3), (B4), handelt es sich bei (B2) und (B5) eher um *kompositionale* als um *begriffliche* Zerlegungen. D.h. durch solche Bi-Konditionale *kann* man lernen oder erfahren, welche kompositionale Struktur, die nominalen Konstruktionen „schwarzes Tuch" und „positive Kubikzahl" mit einem Nomen und einem Adjektiven haben.[26] Man kann die Wahrheit dieses Konditionals einsehen, ohne zu wissen, was „schwarz", „positiv", „Tuch" und „Kubikzahl" bedeuten, man muss nur wissen, um welchen Typ von Adjektiv es sich bei „schwarz" und „positiv" handelt. D.h. wenn man weiß, dass „schwarz" und „positiv" *intersektive* Adjektive sind und „Tuch" und „Kubikzahl" Nomen, dann weiß man auch, dass (B2) und (B5) wahr sind. Denn intersektive Adjektive bilden logisch gesehen eine Konjunktion des Inhalts des Adjektivs mit dem Inhalt des Nomens, mit dem das Adjektive kombiniert wird.

Man könnte nun diesem Problem durch die Annahme zu entgehen versuchen, dass die Intersektivität der in (B2) und (B5) verwendeten Adjektive als Teil ihrer Definitionen zu betrachten ist.[27] Wenn die Adjektive „schwarz" und „positiv" intersektiv sind, dann gibt es natürlich prädikative Verwendungen dieser Adjektive und Definitionen dieser Adjektive als Prädikate selbst wären denkbar. Die Interesektivität wäre dann eine Folge daraus, dass diese Adjektive eine prädikative Verwendung haben. Das ist aber ganz unabhängig davon, ob sie definiert werden können oder nicht. Daher ist die Intersektivität wohl kein *Teil* der betreffenden Definitionen. Und selbst wenn das so wäre, würde das nichts am epistemischen Status von (B2) und (B5) ändern, welcher diese von (B1), (B3) und (B4) unterscheidet.

Diese Status-Unterschiede zwischen unseren beiden Klassen von Beispielen zeigen sich noch an weiteren wichtigen Details. Während (B1), (B3), (B4), klarerweise in logischer Hinsicht *semantisch einfache* Ausdrücke als Definiendum enthalten, gilt das für (B2) und (B5) nicht. Das sieht man daran, dass man im Rahmen des Ausdrucks „seidenes Tuch" oder „positive Kubikwurzel" die beiden semantischen Konstituenten dieses Ausdrucks unterschiedlich modifizieren kann. Es besteht ein wesentlicher semantisch Unterschied zwischen den folgenden drei Modifikationen: „x ist ein möglicherweise schwarzes Tuch" „x ist möglichweise ein schwarzes Tuch",

26. Solche kompositionalen Konditionale wie (B2) sind auch nicht in jedem Fall wahr, sondern nur im Fall sogenannter *interesektiver* Adjektive. Die Konstruktion „halluzinierter Drache" enthält kein intersektives Adjektiv. Daher ist das folgenden, (B2) analoge Konditional als falsch zurückzuweisen: Für alle x gilt: x ist ein halluzinierter Drache gdw. x halluziniert (von jemandem) ist und x ein Drache ist. In diesem Sinn ist (B2) auch nicht völlig trivial.

27. Dieser Einwand geht auf einen anonymen Gutachter zurück.

„x ist möglicherweise ein Tuch, welches schwarz ist". In ganz ähnlicher Weise besteht auch ein wichtiger semantischer Unterschied zwischen „schwarzes angebliches Tuch" und „angeblich schwarzes Tuch". Das zeigt, dass es sich bei dem Ausdruck „ist ein seidenes (schwarzes?) Tuch", um einen semantisch komplexen Term handelt. Selbiges gilt in genau gleicher Weise für den Ausdruck „ist eine positive Kubikzahl" oder das oben von Frege angeführte weitere Beispiel: „blaues seidenes Tuch". Solche unterschiedlichen semantischen Modifikationen sind in Bezug auf die Ausdrücke „ist ein UFO", „ist ein Rechteck" oder „ist ein Quadrat" nicht möglich. Das zeigt, dass die ersten Beispiele semantisch komplex sind und die zweiten nicht, und sie deshalb auch eine unterschiedliche logische Form haben müssen.

Auf den ersten Blick und auf der Basis einer groben formalen Repräsentation mag es so erscheinen, dass die betrachten Ausdrücke *alle* logisch einfach sind. Das wird auch durch den Umstand unterstrichen, dass alle angeführten Ausdrücke nur eine Argumentstelle haben, was man als Hinweis für ihre logische Einfachheit werten könnte. Der Schein trügt hier. Dieser Umstand ist nicht hinreichend dafür, dass ein Ausdruck wirklich auch logisch einfach ist. Und die unterschiedlichen Möglichkeiten der semantischen Modifikation zeigen, wo hier ein Unterschied liegen muss.

Wie lässt sich dieser wichtige Unterschied formal-semantisch realisieren? Eine sehr naheliegende Möglichkeit dem Umstand Rechnung zu tragen, dass bspw. „ist ein schwarzes Tuch" ein ein-stelliges, aber dennoch semantisches komplexes Prädikat ist, besteht darin, von einem Abstraktionsoperator wie bspw. dem berühmten Lambda-Operator Gebrauch zu machen. Der Operator „λy" erlaubt es uns, einstellige und doch komplexe Prädikate zu bilden. D.h. wir bilden die Prädikate „λy[(schwarz (y) & Tuch (y))](x)" und „λy[(positiv (y) & Kubikzahl (y))](x)", welche die beiden geforderten Eigenschaften in Bezug auf (B2) und (B5) liefern. Auf dieser Grundlage erhalten (B2) und (B5) nun die folgenden logischen Formen:

(B2L) $\forall$x λy[(schwarz (y) & Tuch (y)](x) $\leftrightarrow$ (schwarz (x) & Tuch (x)))

(B5L) $\forall$x λy[(positiv (y) & Kubikzahl (y)](x) $\leftrightarrow$ (positiv (x) & Kubikzahl (x)))

Diesen logischen Formen kann man nun zum Kontrast die logischen Formen von (B1), (B3) und (B4) gegenüberstellen:

(B1L) $\forall$x (Quadrat (x) $\leftrightarrow$ (Rechteck (x) & gleichseitig (x))

(B3L) $\forall$x (Rechteck (x) $\leftrightarrow$ (Parallelogramm (x) & rechtwinklig (x))

(B4L) $\forall$x (UFO (x) $\leftrightarrow$ (Flugobjekt (x) & (unbekannt (x) & unidentifiziert (x)))

In einer klassischen Prädikaten-Logik erster Stufe, die um die Lambda-Abstraktion erweitert wird, sind die Formeln (B2L) und (B5L) logische Wahrheiten. Es gibt umgekehrt keine sinnvollen Versionen der Prädikaten-Logik, die (B1L), (B3L) und

(B5L) als logische Wahrheiten ausweisen. Daraus ergibt sich nun auch klar, warum (B2L) und (B5L) keine logischen Formen von expliziten Definitionen haben. Explizite Definitionen sollen echte rein begriffliche Zerlegungen liefern und wie Frege selbst betont, müssen sie daher (a) sowohl logische einfach Ausdrücke als Definiendum haben als auch (b) hinsichtlich ihrer logischen Form nicht tautologisch, sondern nur begrifflich wahr sein.

Dieser Unterschied hinsichtlich der logischen Form der beiden Klassen von Beispielen erklärt nun auch den bereits aufgezeigten epistemischen Unterschied zwischen (B1) und (B2). Es gibt aber auf dieser Grundlage noch weitere wichtige epistemische Unterschiede, die sich aus dem aufgezeigten formalen Unterschied ergeben.

Ein weiterer Unterschied besteht darin, dass jemand bspw. den Ausdruck „Quadrat“ sinnvoll verwenden kann und Gegenstände unter den Begriff eines Quadrates korrekt einordnen kann, ohne dass er in der Lage wäre, eine korrekte zerlegende Definition dieses Begriffs zu geben oder die betreffenden Teilbegriffe einer solchen Definition anzuführen. Jemand, der in einer Welt leben würde, in der es nur Quadrate und keine anderen Rechtecke gibt, mag von dem Begriff eines Rechtecks noch nie etwas gehört haben, aber dennoch in der Lage sein, den Begriff des Quadrats auf alle Quadrate richtig anzuwenden. Umgekehrt scheint es unmöglich zu sein, den Ausdruck „schwarzes Tuch“ korrekt zu verwenden, ohne zu wissen, dass dieser als semantische Konstituenten die Prädikate „ist schwarz“ und „ist ein Tuch“ hat. Man kann auch den dadurch ausgedrückten Begriff nur sinnvoll anwenden, wenn man über die Teilbegriffe *Tuch* und *schwarz* verfügt. Das sind weitere wichtige intuitive epistemische Unterschiede zwischen unseren zwei Klassen von Beispielen, die sich auf der Grundlage der von uns unterschiedenen Arten von logischen Formen leicht erklären lassen.

Die aufgezeigten Unterschiede legen nicht nur gravierende semantische Unterschiede zwischen zwei Klassen von Beispielen von Frege offen, sie zeigen obendrein, dass sich Bi-Konditionale, die (B2) und (B5) hinreichend ähnlich sind, nicht als explizite Definitionen verstehen oder in solche überführen lassen. Damit müssen wir aber auch *a forteriori* Freges Einschätzung zurückweisen, dass es sich bei (B5) um eine *aufbauende* (explizite) Definition handelt.

Es lässt sich noch ein weiterer speziellere Grund gegen genau diese Einschätzung von Frege anführen. Die Wahrheit von (B2) basiert rein auf einer Festsetzung der Bedeutung bezüglich der logischen Zeichen, nicht aber auf einer Festsetzung in Bezug auf das Definiendum. Wenn (2) eine Festsetzung wäre, dann würde es auch zusätzliche Stipulationen für Ausdrücke wie „schwarzer Schal“, „seidenes Tuch“ bedürfen, damit diese bedeutungsvoll sind. Das wäre aber eine völlig unproduktive, unangemessene Beschreibung der semantischen Rolle intersektiver Adjektive.

Solche Adjektive können mit beliebigen anderen Adjektiven dieser Art und bestimmten Nomen zu sinnvollen komplexen Ausdrücken kombiniert werden. Diese semantische Produktivität kann durch den Rückgriff auf eine Vielzahl von Festsetzungen nicht sinnvoll erklärt werden.

Die aufgezeigte Fehleinschätzung von Frege hat nun aber gewichtige Auswirkungen in Bezug auf (K3). Die Begriffe, die durch die Vorderglieder der Bi-Konditionale (B2), (B5) und mit ihnen verwandter Bi-Konditionalen ausgedrückt werden, sind aber zweifelsohne komplexe Begriffe. Wenn unsere Einschätzungen in Bezug auf (B2) und (B5) richtig sind, dann er gibt sich der Umstand, dass diese Begriffe Teilbegriffe haben allerdings nicht daraus, dass es eine explizite Definition gibt, welche diese Begriffe als Teilbegriffe enthält. Zumindest aber sind (B2) und (B5) *keine* Kandidaten für explizite Definition, die diese explanatorische Rolle zur Bestimmung der Teilbegriffe eines komplexen Begriffs erfüllen können.

Interessanterweise ergibt sich daraus aber kein schwerwiegendes Problem für (K2). Denn unsere Analyse von (B2) und (B5) weist diese als Tautologien aus; und Tautologien sind laut Frege eine Unterklasse der analytischen Wahrheiten. Auf dieser Grundlage lassen sich die Teilbegriffe der im Vorderglied von (B2) und (B5) ausgedrückten Begriffe als analytische Teilbegriffe auffassen, weil entsprechende Konditionale aus dem Vorderglied und einem konjunktiven Teil der Hinterglieder von (B2) und (B5) sich somit ebenso als Tautologien erweisen. In Bezug auf Beispiele wie (B1), (B3) und (B4) könnte man auf dem Hintergrund von (K2) nun auch den Umstand ins Feld bringen, dass diesen Bi-Konditionalen echte explizite Definitionen entsprechen und dass man daher analoge analytisch wahre Konditionale aus diesen Definitionen ableiten kann.

Man könnte hier allerdings etwas penibel zweierlei einwenden. *Erstens* hat Freges Begriffsschrift keine Lambda-Abstraktion enthalten. D.h. die Begriffsschrift enthält zwar unterschiedliche Abstraktionsoperatoren, aber keinen, der die exakte Funktion der Lambda-Abstraktion erfüllt. Vor diesem Hintergrund sind (B2) und (B5) im strengen Sinn keine logischen Wahrheiten der Begriffsschrift. Man müsste zur Rettung von (K2) für die betrachteten Fälle die Begriffsschrift zumindest um die Lambda-Abstraktion erweitern. *Zweitens* fasst Frege genau genommen nur aufbauenden Definitionen als Definitionen im eigentlichen Sinn auf. Man kann sich jetzt darum streiten, ob man nicht nur (B4) als aufbauenden Definition verstehen kann, sondern auch (B1) und (B3). Man könnte (B1) und (B3) als stipulative Definitionen mathematischer Terme verstehen. Aber selbst, wenn man diese Option einräumt, dann bleibt immer noch das Problem, dass es andere klarere Beispiele für komplexe Begriffe gibt, die sich zerlegend definieren lassen, die auf der Grundlage einer strikten Frege'schen Auffassung von Definitionen ausgeschlossen werden müssten. Das betrifft vor allem das Beispiel, welches Künne selbst ins Spiel bringt, nämlich die Definition eines Rappens als ein schwarzes Pferd. Hierbei handelt es sich klarerweise um eine zerlegende Definition. Es ist aber fragwürdig, ob Frege solche Definitionen im weiten Sinn im Rahmen seiner Analyse von analytischen Wahrheiten mitaufgenommen hätte. In jedem Fall zeigen diese Ausführungen, dass die Beispiele (B2) und (B5) sowohl für (K2) und (K3) problematisch sind, weil sie in beiderlei Hinsicht Änderungen erfordern. Allerdings scheinen die Probleme für (K3) von substantiellerer Natur zu sein.

Auf eine interessante empirischen Aspekt möchte ich noch im Zusammenhang mit unserem Problem hinweisen: Frege führte überwiegend Beispiele für komplexe Begriffe, die den durch (B2) und (B5) ausgedrückten komplexen Begriffen sehr ähnlich sind, zur Erläuterung des Merkmalbegriffs ins Feld.[28] Hier seien dazu einige einschlägige Zitate aus verschiedenen Schriften nach 1891 angeführt:[29]

> Betrachten wir hierzu ein Beispiel! Statt zu sagen:
> „2 ist eine positive Zahl“ und
> „2 ist eine ganze Zahl“ und
> „2 ist kleiner als 10“,
> können wir sagen
> „2 ist eine positive ganze Zahl kleiner als 10“
> Hier erscheinen
> *eine positive Zahl zu sein*,
> *eine ganze Zahl zu sein*,
> *kleiner als 10 zu sein*
> als Eigenschaften des Gegenstandes 2, zugleich aber als Merkmale des Begriffs
> *positive ganze Zahl kleiner als 10*.[30]

> Aber, wohl gemerkt, diese Merkmale des Begriffes sind nicht seine Eigenschaften. Der Begriff Quadrat ist nicht ein Rechteck, nur die Gegenstände, die etwa unter diesen Begriff fallen, sind Rechtecke, wie auch der Begriff schwarzes Tuch weder schwarz noch ein Tuch ist. Ob es solche Gegenstände giebt, ist durch die Definition unmittelbar noch nicht bekannt.[31]

28. Mit der Ausnahme einer Stelle in Frege (1893) wo er sowohl (B1) als auch (B2) als Beispiele anführt, sind es in anderen Zusammenhängen *immer* strukturähnliche Beispiele wie (B2).
29. Die relevanten Beispiele wurden von mir durch Unterstreichung markiert.
30. Frege (1892, 202). Dasselbe Beispiel findet sich in Frege (1891/92 [1969, 122].
31. Frege (1893, Vorwort, XIV).

> Begriffe sind meist zusammengesetzt aus Theilbegriffen, den Merkmalen. *Schwarzes*, *seidenes Tuch* hat die Merkmale *schwarz*, *seiden* und *Tuch*.[32]

> Wir können statt „2 ist eine Quadratwurzel aus 4 und 2 ist positiv" sagen „2 ist eine positive Quadratwurzel aus 4", und wir haben als Merkmale des Begriffes *ist eine positive Quadratwurzel aus 4* die beiden Teilbegriffe *ist eine Quadratwurzel aus 4* und *ist positiv*.[33]

> [...] von dem Begriffe blaues seidenes Band sind Blau, Seiden, und Band Merkmale, nicht Eigenschaften, weil der Begriff weder blau, noch seiden, noch ein Band ist.[34]

Man könnte diese Datenlagen nun so interpretieren, dass sich Frege bei seiner Fehleinschätzung in Bezug auf (B5) in Frege (1914) so sicher war, dass er auf dieser Grundlage Teilbegriffe, die sich durch aufbauende Definitionen wie (B5) ergeben, als die sichersten und besten Beispiele zur Bestimmung von Merkmalen von komplexen Begriffen ansah. Dafür scheint auch seine bereits angeführte Einschätzung in Frege (1914) zu sprechen, die besagt, dass wir nur auf der Grundlage einer aufbauenden Definition mit Sicherheit die Teilbegriffe eines komplexen Begriffs bestimmen können. Anderseits könnte man aber auch auf die Idee kommen, dass es vielleicht einen allgemeineren Sinn einer logischen Zerlegung von Begriffen gibt, den Frege im Sinne hatte bei seiner Konzeption von Teilbegriffen, welche die logische Zerlegung mittels Definitionen als nur eine von mehreren möglichen Optionen ansieht. Auf diese Möglichkeit werden wir noch zu sprechen kommen. Vordergründig sieht es so aus, dass die herausgearbeitete Fehleinschätzung von Frege in Bezug auf (B5) Folgen für die sachliche Korrektheit von (K3) hat. Damit ist allerdings die interpretatorische Korrektheit von (K3) keineswegs in Frage gestellt.

[3.2.2] Das genaue Verhältnis zwischen expliziten Definitionen und Merkmalen von Begriffen

Bevor wir uns der Frage zuwenden werden, ob man (K3) so verändern oder verallgemeinern kann, dass man auch Problemfälle wie (B2) und (B5) in den Griff bekommt, möchte ich (K3) in diesem Abschnitt präzisieren und mit anderen Bedenken und Problemen konfrontieren.

32. Frege (1900 [1976], 150).
33. Frege (1903, 373).
34. Frege (1919 [1976], 154).

An *erster* Stelle möchte ich die Frage diskutieren, ob jedes Prädikat, welches im Definiens einer expliziten Definition vorkommt und einen Begriff ausdrückt, als Ausdruck eines Merkmals des definierten Begriffs angesehen werden sollte oder nicht. Selbst wenn man Definitionen wie Frege zuerst auf explizite Definitionen und dann im engeren Sinn sogar auf aufbauende explizite Definitionen einschränkt, dann gibt es unter diesen verbleibenden Definitionen eine Vielzahl von Varianten mit unterschiedlichen möglichen logischen Formen. Die angeführten Beispiele waren allesamt *konjunktive* Definitionen oder *konjunktive* kompositionale Zerlegungen. Sollen wir daher (K3) auf Definitionen einer bestimmten logischen Form einschränken? Das man hier wohl eine weitere Einschränkung vornehmen muss, darauf weist bereits die zitierte Inhaltsangabe aus einem frühen Fragment von Frege mit dem Titel „Logik“ hin, wo Frege zwischen Definitionen durch Merkmale und anderen Definitionen unterscheidet:

> D. Definition der Begriffe.
> Merkmale. Verwickeltere.[35]

Die entscheidende Frage ist nun, wie diese Einschränkung genau aussehen soll. Eines geht aus dem Zitat hervor, dass Frege nur eine bestimmte *Teilklasse* aller Definitionen als Definition mittels Merkmale ansieht und, dass er davon eine zweite Klasse von Definitionen gibt, die keine Definitionen durch Merkmale sind, wo sich meiner Ansicht nach, um *logisch* verwickeltere Definitionen handelt. Bei dieser zweiten Klasse handelt sich auch um die philosophisch gesehen weitaus fruchtbareren Definitionen und einige prominente Beispiele dieser Klasse finden sich bspw. in „Grundlagen der Arithmetik“. Was sind nun aber Definitionen durch Merkmale?

Um dieses Problem etwas genauer zu veranschaulichen, werfen wir einen Blick auf die folgende korrekte explizite Definition des Begriffs eines Wochentags:

(B6) ∀x(x ist ein Wochentag gdw. x ist ein Montag ∨ x ist ein Dienstag ∨ x ist ein Donnerstag ∨ x ist ein Freitag ∨ x ist ein Samstag ∨ x ist ein Sonntag).

Im Gegensatz zu allen anderen bisher angeführten expliziten Definitionen handelt es sich bei dieser expliziten Definition, um keine *konjunktive*, sondern eine *disjunktive.* Aber im Falle solcher korrekten disjunktiven expliziten Definitionen macht es keinen Sinn, die Begriffe, die im Definiens verwendet werden als Teilbegriffe oder Merkmale des definierten Begriffs zu verstehen. Ein Teilbegriff oder ein Merkmal ist für Frege ëine Eigenschaft, die ein Gegenstand haben muss, wenn er unter den Begriff fallen soll”. Dabei handelt es sich aber nur um eine *notwendige* Bedingung. Man könnte diese Bedingung in Bezug auf (B6) natürlich dadurch erfüllen, indem man die gesamte Disjunktion im Definiens zum Ausdruck eines Begriffs verwendet.

35. Frege (1879/1891, 1).

Der dadurch ausgedrückte disjunktive Begriff ist aber kein Teilbegriff des Begriffs eines Wochentags, sondern mit diesem ko-extensional. D.h. ein echter *Teilbegriff* G eines komplexen Begriffs F muss obendrein eine weitere Bedingung erfüllen, dass alles was unter F fällt, auch unter G fällt, aber nicht umgekehrt.

Vor dem Hintergrund dieses Problems ist also die von Gabriel getroffene Bestimmung von (K3) genauer zu präzisieren. Zu diesem Zweck scheint es zu genügen, den Begriff des *Teilbegriffs einer konjunktiven expliziten Definition* ins Spiel zu bringen. Das sind die Begriffe, die durch die Konjunkte des Definiens einer solchen expliziten Definition ausgedrückt werden. Zumindest in Anwendung auf alle bis hierhin betrachteten Beispiele für expliziten Definitionen scheint dieses Kriterium die richtigen Resultate zu liefern. Vielleicht gibt es aber auch konjunktive Definitionen, die auf dieser Grundlage kontraintuitive Resultate liefern?

Um dieses Problem zu vertiefen, werfen wir einen Blick auf die folgende scheinbare explizite Definition des Begriffs eines Bruders eines Königs:[36]

(B7) Für alle x gilt: x ist ein Bruder eines Königs gdw. es gibt ein y: x ist ein Geschwister von y & y ist ein König & x ist männlich.

Dieses Bi-Konditional ist eine interessante Mischung aus einer kompositionalen Zerlegung und einer expliziten Definition. Sie lässt sich aus den folgenden beiden Bi-Konditionalen herleiten:

(B7*) Für alle x gilt: x ist ein Bruder eines Königs gdw. es gibt ein y: x ist ein Bruder von y & y ist ein König.

(B7**) Für alle x gilt: x ist ein Bruder gdw. es gibt ein y: y ist ein Geschwister von x und x ist männlich.

Ähnlich wie (B2) und (B5) enthält das Beispiel (B7*) ein einstelliges, aber semantisch komplexes Prädikat. Will man die logische Komplexität von (B7*) angemessen darstellen, muss man wieder von der Lambda-Abstraktion Gebrauch machen und auf dieser Basis „ist ein Bruder eines Königs“ als einstelliges, komplexes Prädikat analysieren.

Im Gegensatz dazu scheint (B7**) allerdings eine echte explizite Definition zu sein. Sie unterscheidet sich aber von unseren bisher betrachteten Beispielen in einem *kleinen* Detail. Das Definiens von (B7**) ist zwar auch eine Konjunktion, aber diese hat ein Glied, das logisch komplex ist. Das ist ein kleiner Unterschied, der kaum ins Gewicht fällt. Das besagte Prädikat „es gibt ein y: y ist ein Geschwister

36. Ein anonymer Gutachter hat mich auf das Beispiel „Vater des Königs“ verwiesen und dafür argumentiert, dass der Begriff des Königs ein einer bestimmten Weise zur Definition dieses Begriffs gebraucht wird, aber intuitiv nicht als Merkmal dieses Begriffs durchgehen soll. Ein ähnliches Beispiel findet sich in Siebel (2011, 101), nämlich das Beispiel „Sohn eines Junggesellen“.

von x“ ist einstellig, aber semantisch komplex. Würde man sich nur auf explizite Definitionen im engeren Sinn beschränken, dann würde von den drei zuletzt angeführten Bi-Konditionalen nur (B7**) darunterfallen. Versteht man (K3) daher auf dieser Grundlage, dann würde nur (B7**) als Bestimmung davon gelten, was ein Merkmal eines komplexen Begriffs ist, nicht aber (B7*) und (B7). In Bezug auf (B7*) ist das nicht überraschend, es handelt sich nur um ein weiteres neues Beispiel für das im letzten Abschnitt aufgeworfene Problem. Aber intuitiv scheint (B7) zumindest große Ähnlichkeiten mit einer Definition zu haben und es fragt sich, ob man den Begriff einer Definition nicht so weit fassen sollte, dass auch Bi-Konditionale wie (B7) darunterfallen.

Das Beispiel (B7*) wirft aber auch ein neues Problem auf, welches die Ausweitung einer Bestimmung von Merkmalen in Bezug auf kompositionale Zerlegungen betrifft. (B7*) hat im Hinterglied zwei Konjunkte, aber nur *eines* dieser beiden Konjunkte scheint tatsächlich ein Merkmal des Begriffs eines Bruders eines Königs auszudrücken. Der Begriff des Bruders ist klarerweise ein Merkmal des Begriffs des Bruders eines Königs. In einem kompositionalen Sinn ist natürlich auch der Begriff des Königs ein Teil des Begriffs eines Bruders eines Königs, aber im klassischen Sinn und auch in dem Sinn, den Frege zu verteidigen sucht, ist der Begriff des Königs kein Merkmal des Begriffs eines Bruders eines Königs. Warum ist das so? Die Erklärung liefert erneut die bereits zuvor zitierte Bedingung von Frege:

> Merkmal eines Begriffes ist eine Eigenschaft, die ein Gegenstand haben muß, wenn er unter den Begriff fallen soll.[37]

Bezüglich paradigmatischer expliziter Definitionen wie (B7**) ergibt sich diese Konsequenz automatisch aus ihrer logischen Struktur. D.h. wenn wir es mit einer *reinen* konjunktiven expliziten Definition zu tun haben, dann ergibt sich aus diesem Status und aus der Struktur automatisch, dass die Konjunkte Merkmale ausdrücken, die Eigenschaften von Gegenständen sind, die unter den explizit definierten Begriff fallen.

Anders ist die Sache, wie wir gesehen haben, bei bestimmten kompositionalen Zerlegungen wie (B7*). Dieses Bi-Konditional enthält Konjunkte, die Begriffe ausdrücken, welche die von Frege aufgestellte notwendige Bedingung nicht erfüllen. Der Begriff des Königs ist kein Merkmal des Begriffs eines Bruders eines Königs. In diesem Sinn scheint das angeführte Problem vor allem ein Problem in Bezug auf die Generalisierung von (K3) hinsichtlich anderer möglicher logischer Zerlegungen zu sein. Es ist aber kein Problem für (K3) in seinem Kern. Um in dieser Hinsicht

37. Frege (1903, 373).

Klarheit zu schaffen und Beispiele wie (B6) auszuschließen genügt es, (K3) derart zu präzisieren:

(K3*) Der Begriff G ist ein Merkmal des komplexen Begriffs F gdw. es eine *konjunktive* explizite Definition D von F gibt, relativ zu der der Begriff G von einem der Konjunkte des Definiens von D ausgedrückt wird.

Wenn man allerdings den Begriff der expliziten Definition so erweitern möchte, dass auch (B7) darunter fallen soll, dann genügt (K3*) nicht und müsste wie folgt ergänzt werden:

(K3**) Der Begriff G ist ein Merkmal des komplexen Begriffs F gdw. es eine *konjunktive* explizite Definition D von F gibt, relativ zu der der Begriff G von einem der Konjunkte des Definiens von D ausgedrückt wird und alle Gegenstände, die unter G fallen auch unter F fallen.

D.h. wir müssten relativ zu einem solch loseren Verständnis dann Konjunkte ausschließen, welche *ausschließlich* andere Variablen enthalten als die Hauptvariable, über welche die gesamte Äquivalenz quantifiziert.

Wie wir aber später sehen werden, ist eine solche Ausweitung nicht nötig, wenn man es durch eine Verallgemeinerung von (K3*) schafft, kompositionale Zerlegungen zur Bestimmung von Merkmalen einzubeziehen. Dann kann man sagen, dass (B7) keine echte explizite Definition ist, und trotzdem gibt es dann einen Weg zu erklären, warum der Begriff des Bruders ein Teilbegriff des Begriffs des Bruders eines Königs ist. Dazu aber im nächsten Hauptabschnitt mehr.

An *zweiter* Stelle möchte ich nun eine Frage diskutieren, die durch das Beispiel (B7) schon leicht angedeutet wurde. Es kann unterschiedliche korrekte Definitionen von Begriffen geben, die unterschiedlich komplex sind und unterschiedliche Begriffe im Definiens enthalten. Wir können bspw. den Begriff eines Quadrats durch (B1) definieren, aber die folgende alternative Definition ist ebenso korrekt:

(B8) Für alle x gilt: x ist ein Quadrat gdw. x ist ein Parallelogramm und x ist gleichseitig und x ist gleichwinkelig.

Diese Definition ist ebenso korrekt wie (B1), aber sie greift (a) auf andere Begriffe im Definiens zurück als (B1), nämlich den Begriff des Parallelogramms und den Begriff der Gleichwinkeligkeit und (b) enthält das Definiens von (B8) mehr Teilbegriffe als das Definiens von (B1), nämlich drei statt zwei.

Wie soll man damit auf der Grundlage von (K3*) umgehen? Soll man annehmen, dass komplexe Begriffe *relativ* zu unterschiedlichen möglichen korrekten Definitionen unterschiedliche Merkmale haben können? D.h. sollen wir (K3*) durch eine relativierte Version ersetzen? Oder sollen wir alternativ die Formulierung von (K3*) so präzisieren, dass alle Merkmale zu allen möglichen Definitionen gleichwertig als absolute Merkmale eines Begriffs zählen? Die Relativierung würde nur dann Sinn machen, wenn es unvereinbare, aber korrekte Definitionen gibt, die auf ganz unterschiedlichen Voraussetzungen basieren. Unsere beiden Beispiel-Definitionen haben allerdings nur eine unterschiedliche Analysetiefe. Und selbst wenn wir ein und denselben Begriff in zwei ganz unterschiedlichen Weisen logisch zerlegen würde, würde nichts dagegen sprechen die Teilbegriffe beider Zerlegungen als absolute Merkmale anzusehen, weil es ja nicht darum geht die absoluten metaphysischen Konstituenten eines Begriffs zu bestimmen, sondern nur seine logischen Teile. Wenn man sich von dieser Idee löst, dass explizite Definitionen einen Begriff in seine metaphysischen Bestandteile zerlegen, dann spricht nichts gegen die folgende Nachbesserung von (K3*), welche als Teilbegriffe unterschiedlicher mögliche Definitionen eines komplexen Begriffs als Merkmale dieses Begriffs versteht:

(K3***) Der Begriff G ist ein Merkmal des komplexen Begriffs F gdw. es mindestens eine *konjunktive* explizite Definition D von F gibt, relativ zu der der Begriff G von einem der Konjunkte des Definiens von D ausgedrückt wird.

An *dritter* Stelle möchte ich die Frage diskutieren, inwiefern der Begriff des Sinns bei der Definition von Merkmalen von Begriffen bei Frege eine Rolle spielt oder spielen soll. Begriffe sind ja, wenn sie von Frege als Funktionen von Gegenständen in Wahrheitswerte aufgefasst werden, ziemlich grob-körnige Entitäten[38] und man könnte auf dieser Grundlage die Frage aufwerfen, ob es vor diesem Hintergrund überhaupt Sinn macht im alltäglichen oder klassisch philosophischen Sinn von *Merkmalen von Begriffen* zu sprechen. Künne führte auf der Grundlage einer solchen Überlegung den folgenden Einwand gegen die Idee ins Feld, dass Frege'sche Begriffe Merkmale in dem intuitiven Sinn haben:

> Nach der Einführung der Sinn/Bedeutung-Distinktion müsste die Merkmalslehre revidiert werden. Wenn man den Sinn eines monadischen Prädikats als Konzept bezeichnet, könnte die Neufassung dann so aussehen: „Die Merkmale eines Konzepts K sind Konzepte, die Teile von K sind und unter die etwas fallen muss, wenn es unter K fallen soll"? Nein, denn die Relation des Fallens-unter besteht zwischen Gegenständen und *Begriffen*. Die mereologische Charakterisierung müsste ganz aufgegeben werden.[39]

38. Begriffe werden auf dieser Basis rein extensional individuiert. Prädikate mit der gleichen Extension (Frege'schen Bedeutung) drücken dieselben Begriffe nach Frege aus.
39. Künne (2010, 220); siehe dazu auch: Künne (2001).

Künne formuliert diesen Einwand auf der Grundlage der bereits verworfenen Idee, dass Teile eines Begriffs oder Konzepts metaphysisch konstitutive Teile sind. Klar ist natürlich, dass wenn Begriffe keine *Konzepte* im Sinne Künnes sind, man in keinem direkten Sinn die Teile der Begriffe über die Teile der Konzepte bestimmen kann. Aber es gibt eine andere Möglichkeit, wenn man von einem abgeschwächten logischen Begriff der Zerlegung Gebrauch macht, auf den wir bereits verwiesen haben. Diese Art der Zerlegung bringt Frege in einem bereits angeführten Zitat zu zerlegenden Definitionen derart ins Spiel:

> Wir glauben seinen Sinn logisch zerlegen zu können und erhalten einen zusammengesetzten Ausdruck, von dem wir meinen, dass er denselben Sinn Ausdrücke wie jener.[40]

Sinne spielen daher zumindest im Rahmen von zerlegenden Definitionen eine wichtige Rolle. Aber natürlich geht es auch bei der aufbauenden Definition primär um den Sinn von Ausdrücken, der diesen erst durch eine Definition zugeordnet wird:

> Das Zeichen, das bis dahin keinen Sinn hatte, bekommt durch die Definition den Sinn jenes zusammengesetzten Ausdrucks.[41]

Interessant ist in diesem Zusammenhang auch, dass Frege immer primär von Definitionen von *Zeichen*, nicht aber von Definitionen von *Begriffen* spricht:

> Die Definition hat also eigentlich nur mit den Zeichen zu tun.[42]

Das liegt sicher an seiner Bevorzugung zerlegender Definitionen, bei denen es ja primär um die Zuordnung eines Sinnes zu einem neuen einfachen Zeichen geht. Erlauben uns diese Beobachtungen nun Künnes Voraussetzungen zu verwerfen und auf dieser Basis eine neue Version seines Einwands zu formulieren? Diese neue Version könnte vor diesem neuen Hintergrund wie folgt lauten: Eine logische Zerlegung der Sinne eines einfachen prädikativen Ausdrucks ist sowohl auf der Grundlage einer zerlegenden aber auch auf der Basis einer bereits etablierten aufbauenden Definition möglich bzw. gegeben. Wenn Definitionen aber Zerlegungen in Bezug auf die Sinne von Prädikaten darstellen, dann bestimmen Definitionen im eigentlichen Sinn nicht Teil*begriffe*, sondern Teilsinne. Daher scheint (K3) verfehlt zu sein.

Es besteht meiner Ansicht nach aber eine plausible Möglichkeit, diesen verbesserten Einwand zu entkräften.

40. Frege (1914, 227).
41. Frege (1914, 229).
42. Frege (1914, 224).

Bevor Frege zwischen dem Sinn und der Bedeutung von prädikativen Ausdrücken unterschieden hat, hatte er auch noch *keine* funktionale Auffassung von Begriffen als Funktionen von Gegenständen in Wahrheitswerte. Beide Innovationen wurden von Frege zumindest in seinen Schriften mehr oder weniger simultan eingeführt. Diese beiden Innovationen scheinen auch systematisch Hand in Hand zu gehen. Frege verteilt auf dieser Grundlage die explanatorischen Rollen, die vor ihm oft mit Begriffen allein verbunden wurden, auf Begriffe und Sinne. Das hat natürlich zur Folge, dass Frege'sche Begriffe nicht mehr Begriffe im zuvor philosophisch gebräuchlichen Sinn sind. Dennoch redet Frege scheinbar noch im klassischen Sinn vor und nach diesen Innovationen von Merkmalen von Begriffen. Bevor er seine berühmte Sinn/Bedeutung-Unterscheidung gezogen hat, scheint er Begriffe so verstanden zu haben, dass sie einige Rollen von Sinnen auch übernommen haben. Interessanterweise sind aber alle Zitate, die wir als Beleg für (K3) angeführt haben, aus Schriften, die nach der Einführung dieser Unterscheidung verfasst wurden.

Wie ist das zu erklären? Wenn man Begriffe als Funktionen von Gegenständen in Wahrheitswerte auffasst, dann kann man auf dieser Basis natürlich auch Begriffe konjunktiv definieren. Allerdings gibt es auf dieser Grundlage für jeden einzelnen Begriff eine große Vielzahl von Begriffen, deren logische Konjunktion uns erlauben würde, den betreffenden Begriff konjunktiv zu definieren. D.h. es gibt eine große Zahl von Funktionen, deren Konjunktionen dieselben Wahrheitswerte liefert. Nimmt man diese Vielzahl an Möglichkeiten auf der Basis von (K3) ernst, dann würde das mit einer Inflation des klassischen Begriffs eines Merkmals eines Begriffs einhergehen. Diese Inflation will Frege aber anscheinend vermeiden und so nimmt er wohl den Begriff des Sinnes als regulative Größe hinzu bei der Bestimmung von Merkmalen. D.h. in Freges Begriffsschrift drückt jedes prädikative Zeichen nur genau einen Sinn aus, und wenn wir nun im Rahmen der Begriffsschrift nur solche Definitionen zulassen, welche komplexe Sinne logisch zerlegen und bei der Bestimmung von Merkmalen von Begriffen wiederum auf diese Sinnzerlegungen zurückgreifen, dann können wir den Begriff des Merkmals eines Begriffs in einer relativ klassischen Weise einschränken, ohne ihn dadurch völlig inflationär zu machen. Frege schafft es also mit Hilfe von expliziten Definitionen die explanatorische Rolle von Sinnen für die Bestimmung der Merkmale von Begriffen fruchtbar zu machen. Die Sinne sind regulative Elemente bei solchen Definitionen, die mögliche konjunktive Definitionen von komplexen Begriffen sinnvoll einschränken; und Frege damit erlauben, am klassischen Begriff des Merkmals von Begriffen festzuhalten, trotz neuer funktionaler Auffassung von Begriffen.

Die Lösung unserer Modifikation von Künnes Einwand erfordert somit die folgende zweite Reformulierung von (K3*):

(K3****) Der Begriff G ist ein Merkmal des komplexen Begriffs F gdw. es mindestens eine *konjunktive* explizite Definition D von F gibt, relativ zu der der Begriff G von einem der Konjunkte des Definiens von D ausgedrückt wird <u>und durch diese konjunktive Definition von F der Sinn von F logisch zerlegt wird.</u>

Um daher sowohl die klassische Rolle von Definitionen von Begriffen als auch den klassischen Inhalt des Begriffs eines Merkmals eines Begriffs zu retten, vertritt Frege meiner Ansicht nach die Auffassung, dass Definitionen Zerlegungen von Begriffen im Rückgriff auf die Zerlegung von Sinnen liefern, die Arten des Gegenbenseins dieser Begriffe sind. Vor dem Hintergrund der Idee einer logischen Zerlegung durch Definitionen, im Gegensatz zu einer metaphysich-konstitutiven, erscheint eine solche eher *projektive* Auffassung der Merkmale von Begriffen im Rückgriff auf die Sinne, welche diese präsentieren, nicht abwegig zu sein.

An *vierter* Stelle will ich nun die Frage besprechen, ob die Bevorzugung von aufbauenden Definitionen gegenüber zerlegenden berechtigt ist und ob Frege daher eigentlich nur ein sehr eingeschränktes Verständnis von Merkmalen von Begriffen hatte. Wir haben dieses Problem schon im Zusammenhang mit (K2) kurz aufgeworfen. Wenn man (K3*) und seine Varianten auf Definitionen im eigentlichen Sinn nach Frege, nämlich aufbauende Definitionen einschränkt, dann haben viele komplexe Begriffe keine Merkmale im Sinne von (K3). Meiner Ansicht nach sollte man Frege diesbezüglich nicht allzu streng nehmen. Ihm ging es vor allem darum, im Rahmen einer Begriffsschrift auch in Bezug auf Definitionen Eindeutigkeit und Präzesion zu erzielen. Daher sind für solche Zwecke nur aufbauende Definitionen als echte Definitionen zugelassen, weil nur für solche die Wahrheit der Äquivalenz verbürgt und klar einsichtig ist. Wenn es also Frege im engen Sinn nur darum geht, Begriffe zu erfassen, die im Rahmen der Begriffsschrift zugelassen sind, dann genügt die eingeschränkte Auffassung von Definitionen und (K3*) (oder eine der besprochenen Varianten) ist dann auf dieser Grundlage völlig ausreichend. Wenn es aber auch darum geht, andere *alltägliche* Begriffe zu erfassen und deren Merkmale zu beschreiben, dann scheint es vor diesem Hintergrund auch völlig legitim zu sein, den Begriff der Definition auf zerlegende Definitionen auszuweiten. Die betreffende Einschränkung verfolgt einen ganz bestimmten auf die Begriffsschrift beschränkten Zweck und stellt somit kein echtes Problem für die intuitive Korrektheit von (K3*) dar.

4 Merkmale als Teilbegriffe logischer Zerlegungen

Wir haben im letzten Abschnitt gesehen, dass (K3) dreier unterschiedlicher Anpassungen bedurfte, um zumindest eine halbwegs angemessene Auffassung von Merkmalen nach Frege zu liefern. Mittels dieser Anpassungen konnten wir einige der aufgeworfenen Probleme ausräumen. Es verbleibt aber noch ein zentrales Problem übrig, nämlich, dass (K3****) zu eng ist, weil es auch komplexe Begriffe gibt, die sich nicht explizit definieren lassen, wie es sich bezüglich der von Frege bevorzugten Beispiele für komplexe Begriffe gezeigt hat. Als Lösung haben wir die Möglichkeit einer Generalisierung von (K3****) ins Auge gefasst. Freges scheinbarer Fehler besteht darin, logische Zerlegungen von Begriffen auf Definitionen eingeschränkt zu haben. Bi-Konditionale wie (B2) und (B5) sind, wie wir gesehen haben, zwar keine expliziten Definitionen, aber dennoch logische Zerlegungen eines Begriffs. D.h. der maßgebliche Oberbegriff zur Bestimmung von Merkmalen nach Frege ist der Begriff einer konjunktiven logischen Zerlegung. Definitionen sind eine Variante dieser Art, kompositionale Zerlegungen eine zweite wichtige unabhängige Variante. Wenn man diesen Verallgemeinerungsschritt akzeptiert, dass es eine gemeinsame Überkategorie von Definitionen und kompositionalen Zerlegungen gibt, dann kann man auf dieser Basis (K3****) so generalisieren, dass Problemfälle wie (B2) und (B3) damit ausgeräumt werden. Im Gegensatz zu den angeführten vier Belegen für (K3) gibt es auch die folgende Stelle in Frege (1903), die man so lesen kann, als würde sie der angestrebten Generalisierung das Wort reden:

> Was von den Begriffen gilt, gilt auch von den Merkmalen; denn Merkmale eines Begriffs sind Begriffe, die logische Teile jenes sind. Wir können statt „2 ist eine Quadratwurzel aus 4 und 2 ist positiv" sagen „2 ist eine positive Quadratwurzel aus 4", und wir haben als Merkmale des Begriffes *ist eine positive Quadratwurzel aus 4* die beiden Teilbegriffe *ist eine Quadratwurzel aus 4* und *ist positiv*. Wir können diese auch Eigenschaften der Zahl 2 nennen und demgemäß sagen: Merkmal eines Begriffes ist eine Eigenschaft, die ein Gegenstand haben muß, wenn er unter den Begriff fallen soll.[43]

In dieser Passage erläutert Frege den Begriff des Merkmals anhand der für ihn üblichen und für (K3) problematischen Beispiele. Aber er stellt hier keine enge Verbindung zu Definitionen her und verwendet stattdessen den allgemeineren Begriff der logischen Zerlegung. Darüber hinaus stellt er in dem Zitat eine wichtige notwendige Bedingung für logischen Zerlegungen auf, die als Bestimmungen von

43. Frege (1903, 373, meine Hervorhebung).

Merkmalen fungieren, die wir bereits anhand von einschlägigen Beispielen diskutiert haben.

Wenn man dieses Zitat als Leitschnur für die besagte Generalisierung nimmt, dann erfordert dies die folgenden Schritte: Der erste Schritt in diese Richtung besteht in der Ersetzung des Begriffs der Definition in (K3*) durch den Begriff der logischen Zerlegung. Zusätzlich müssen wir aber sowohl die oben angeführte notwendige Bedingung für Zerlegungen mit dem erforderten Zweck anführen als auch die im letzten Abschnitt ausgeführten Anpassungen von (K3*). Das Resultat ist die folgende neue Formulierung einer Frege'schen Auffassungen von Merkmalen:

(K3^{++}) Der Begriff G ist ein Merkmal des komplexen Begriffs F gdw. es mindestens eine wahre *konjunktive* logische Zerlegung Z von F gibt, relativ zu der der Begriff G von einem der Konjunkte von Z ausgedrückt wird und durch Z der Sinn von F logisch zerlegt wird und alle Gegenstände, die unter G fallen auch unter F fallen.

Diese Formulierung von Freges Auffassung von Merkmalen würde, wenn man sie ohne den dargelegten Diskussionskontext betrachtet, vielleicht einerseits ad hoc erscheinen, aufgrund der zwei zusätzlich „angehängten“ Bedingungen, und andererseits auch etwas inhaltsarm erscheinen, wegen der exzessiven Verwendung des Begriffs der logischen Zerlegung. Wenn man aber akzeptiert, dass es zwei fundamental unterschiedliche Arten der logischen Zerlegung von Begriffen gibt, wie wir hier aufgezeigt haben, nämlich *Definitionen* und *kompositionale Zerlegungen*, und wenn man darüber hinaus erkennt, dass die Rückkoppelung an den Sinnbegriff bei der Merkmalbestimmung der Frege'schen logischen Vereinfachung des Begriffs eines Begriffs auf der Basis seiner funktionalen Auffassung geschuldet ist und konjunktive kompositionale Zerlegung nicht zwangsweise zur Zerlegung in Merkmale führen, dann erscheint (K3^{++}) gar nicht mehr so abwegig und konstruiert. Aber natürlich muss man einräumen, dass (K3) auf der Grundlage von (K3^{++}) etwas seine Anziehungskraft gegenüber (K2) verliert. In jedem Fall zeigt es, dass eine Frege'sche Analyse von Merkmalen sich *sachlich* als ein doch relativ verzwicktes Vorhaben erweist, selbst wenn es an der *interpretatorischen* Richtigkeit von (K3) wenig Zweifel gibt.

Mit dieser Erweiterung sind wir nun in der Lage, alle von Frege vorgeschlagenen Beispiele von komplexen Begriffen samt ihren Merkmalen zu erfassen. Diese modifizierte Version von (K3) ist zwar versteckt disjunktiv, aber sie scheint wohlbegründet und nicht ad hoc zu sein. Auf ihrer Basis scheint sich der Merkmalbegriff in der von Frege intendierten Weise systematisch erfassen zu lassen.

4.1 Universelle Begriffe als Merkmale?

Zum Abschluss möchte ich noch zu der ganz am Anfang und im Zusammenhang mit (K2) aufgeworfenen Frage zurückkommen, inwiefern universelle Begriffe, die auf alles zutreffen, Merkmale von Begriffen sein können. Wir müssen hier zuerst zwei Sinne von universellen Begriffen unterscheiden: Im Rahmen einer Ontologie ohne Typen-Hierarchien trifft ein solcher Begriff auf allen Entitäten zu, die angenommen werden, ob diese Einzeldinge, Eigenschaften, Sachverhalte etc. sind, ist dann egal. In einer Ontologie mit Typen-Hierarchien wie bei Frege, wo strikt zwischen Entitäten verschiedener Stufen unterschieden wird, wobei die Stufe der Gegenstände die Stufe 0 darstellt, die Stufe der Funktionen von Gegenständen der Stufe 0 in Gegenstände dieser Stufe die Stufe 1 darstellt, usw., gibt es nur *relative*, universelle Prädikate, die relativ zu einer bestimmten Stufe auf alle Entitäten zutreffen. Das Prädikat „ist ein Gegenstand" ist beispielsweise ein Prädikat, welches auf alle und nur die Gegenstände auf der Stufe 0 zutrifft.

Kann nun ein solches relatives universelles Prädikat wie „ist ein Gegenstand" nach Frege Merkmal eines komplexen Begriffes sein? Die Frage ist auch deshalb in Bezug auf (K3) relevant, weil Frege sie selbst in einer relativ frühen Schrift thematisiert, nämlich in Frege (?1882?). Dort erörtert er u. a. die Frage, welche Gründe es dafür gibt anzunehmen, dass es sich bei dem Begriff, der durch „existiert" ausgedrückt wird, um einen universellen Begriff erster Stufe handelt. Frege versucht zu zeigen, dass ein solcher Begriff, obwohl inhaltlich redundant, dennoch eine bestimmte expressive Funktion bei der Umformung von Sätzen der Form „Es gibt Fs" in äquivalente Sätze der Form „Einige F sind G" oder „Fs sind G" haben kann.[44] In der folgenden Passage kontrastiert er diese Interpretation von „existiert" mit einer Interpretation, die „existiert" als Prädikat auffasst, das auch nur auf eine echte Teilmenge aller Gegenstände zutreffen kann. In diesem Zusammenhang fragt er auch nach der Rolle beider Begriffe als *Merkmale* von anderen Begriffen:

> Sobald man aber dem Worte „existieren" einen Inhalt gibt, der von einzelnem ausgesagt wird, kann dieser Inhalt auch zum Merkmal eines Begriffs gemacht werden, unter den das einzelne fällt, von dem das existieren ausgesagt wird. Wenn man z.B. alles in zwei Klassen teilt,
> 1. Was in meinem Geiste ist, die Vorstellungen, Gefühle etc.
>   und
> 2. Was ausser mir ist,
> und von dem Letzteren sagt, es existiere, so kann man als Merkmal des Begriffs Centaur die Existenz auffassen, obwohl es keine Centauren

44. Siehe: Rami (2018, 2021).

> gibt. Ich würde nichts als Centaur anerkennen, was nicht ausser meinem Geiste wäre[.]
>
> Der Inhalt des Wortes „existieren" kann nicht gut zum Merkmal eines Begriffs genommen werden, weil „existieren" keinen Inhalt hat, [so wie] es in dem Satze „Menschen existieren" gebraucht wird.[45]

Frege vertritt in dieser Passage die Auffassung, dass ein Begriff der Existenz erster Stufe, der durch das Prädikat „existieren" ausgedrückt wird, als ein Merkmal des Begriffs *Centaur* fungieren kann, wenn dieser ein diskriminierender Begriff erster Stufe ist, der zwischen rein mentalen Gegenständen und Gegenständen, die sich außer einem Subjekt in der Wirklichkeit befinden, unterscheidet. D.h. dieser Begriff schränkt auf dieser Grundlage den Begriff eines Centauren auf wirkliche Gegenstände außer mir ein und in diesem Sinn hat der Ausdruck „existiert" „einen Inhalt". Wenn man allerdings wie Frege selbst der Auffassung ist, dass der Begriff der Existenz, der durch „existiert" ausgedrückt wird, ein universeller Begriff ist, der auf alle Gegenstände zutrifft und somit für Frege „keinen Inhalt hat"[46], dann kann man diesen Begriff *nicht gut* in derselben Weise als Merkmal eines Begriffs wie bspw. des Begriffs eines Centauren verwenden. Frege bleibt uns eine genaue Begründung dafür schuldig. Er scheint aber davon auszugehen, dass nur nicht-universelle Begriffe (derselben Stufe) als Merkmale von Begriffen fungieren können, was sich aus der folgenden Passage ergibt, wenn man „x hat einen Inhalt, der von einem einzelnen ausgesagt wird" so versteht, dass es zumindest notwendig äquivalent mit „x drückt einen nicht-universellen Begriff aus" ist:

> Sobald man aber dem Worte „existieren" einen Inhalt gibt, der von einzelnem ausgesagt wird, kann dieser Inhalt auch zum Merkmal eines Begriffs gemacht werden, unter den das einzelne fällt, von dem das existieren ausgesagt wird. Frege (?1882?, 74).

Warum hängt der Umstand, ob ein Begriff als Merkmal fungieren kann, davon ab, ob der Begriff universell ist oder nicht? Lässt sich Freges dargelegte Auffassung begründen? Wie sieht die Sache auf der Grundlage von (K3^{++}) aus?

Wenn man die Sache auf der Grundlage von (K3*) und seinen besprochenen Varianten betrachtet, könnte man folgende Begründung in Betracht ziehen: Bei dem Begriff eines Centauren handelt es sich, wenn er Merkmale hat, um einen komplexen Begriff, der durch den atomaren Ausdruck „Centaur" repräsentiert wird.

45. Frege (?1882?, 74).
46. Siehe dazu: „Wenn man die Sache ganz allgemein machen will, muss man einen Begriff aufsuchen, der allen Begriffen übergeordnet ist. Ein solcher Begriff, wenn man es so nennen will, kann gar keinen Inhalt mehr haben [;] [...] denn jeder Inhalt kann nur in einer gewissen Beschränkung des Umfangs bestehen.", in: Frege (?1882?, 71)

Ein Begriff F kann auf dieser Grundlage nur ein Merkmal dieses Begriffs werden, wenn es eine sinnvolle aufbauende oder zerlegende Definition gibt, die diesen Begriff zur Definition des Begriffs *Centaur* verwendet. Ein diskriminierender Begriff der Existenz erster Stufe kann als Merkmal fungieren, weil er eine erklärende Rolle im Rahmen einer solchen Definition übernehmen kann. Ein universeller Begriff der Existenz hätte allerdings eine völlig *redundante* Rolle in einer solchen Definition und kann daher weder im Rahmen einer gehaltvollen aufbauenden noch einer gehaltvollen zerlegenden Definition des Begriffs *Centaur* verwendet werden. Vor diesem Hintergrund kann ein universeller Begriff „nicht gut als Merkmal eines Begriffs" wie des Begriffs eines Centauren fungieren.

Für explizite Definitionen gibt es bestimmte Normen der Korrektheit. Ein berühmtes Beispiel für solche Normen ist die Norm der *Zirkularität*: Eine Definition, die einen Begriff in expliziter oder implizierter Weise durch diesen Begriff selbst definiert, ist zirkulär und als unangemessen abzulehnen. Darüber hinaus gibt es auch die Norm der *Redundanz*: Eine angemessene Definition sollte im Definiens keine Ausdrücke enthalten, auf die verzichtet werden kann. D.h. Ausdrücke, die man weglassen kann, ohne an der Korrektheit der Definition etwas zu ändern. Jetzt gibt es aber wohl einen entscheidenden Unterschied zwischen einer Definition, welche die Norm der Zirkularität verletzt und einer, welche die Norm der Redundanz verletzt. Im ersteren Fall handelt es sich um keine Definition im eigentlichen Sinn mehr, im zweiten Fall scheint aber die Definition an sich korrekt zu sein, nur etwas zu umständlich formuliert zu sein. D.h. wenn die Frage, ob ein Begriff ein Merkmal eines Begriffs ist, nur davon abhängig wäre, ob eine Definition so einfach wie möglich formuliert ist, dann scheint der Unterschied zwischen dem Merkmal-sein und dem Nicht-Merkmal sein in einem solchen Fall als zu beliebig und unwesentlich zu erscheinen. Deshalb scheint die vorgebrachte Begründung nicht sehr überzeugend zu sein.

Man kann die vorgebrachte Begründung, aber noch aus einer anderen Perspektive rechtfertigen, die Frege womöglich im Sinne hatte, und die von Freges Unterscheidung von echten Begriffen und Quasi-Begriffen Gebrauch macht. Echte Begriffe diskriminieren und unterscheiden Klassen von Entitäten. Quasi-Begriffe treffen unterscheidungslos auf alles zu. Jetzt könnte man die Auffassung vertreten, dass eine Definition eines echten, unterscheidenden komplexen Begriffs eine logische Zerlegung in unterscheidende Teilbegriffe dieses Begriffs sein muss, weil diese sonst keine echte logische *Zerlegung* wäre. D.h. wir hätten dann noch die zusätzliche notwendig Bedingung für logische Zerlegungen zu bedenken, dass wenn der zu definierende Begriff F nicht auf alle Dinge zutrifft, die Teilbegriffe, in die dieser Begriffe logisch zerlegt werden kann, auch nicht auf alle Dinge zutreffen dürfte. Vielleicht noch einleuchtender ist dieses Prinzip in Bezug auf aufbauende

Definitionen, wenn man die Idee des *Aufbaues* eines diskriminierenden komplexen Begriffs aus Teilbegriffen, die ebenso diskriminieren, besonders ernst und wörtlich nimmt. Es fehlt den universellen Begriffen in beiden Fällen einfach die erforderte *explanatorische* Rolle und eine logische Zerlegung, die von einem Begriff Gebrauch macht, der das nicht leisten kann, was er soll, ist somit unangemessen.

Aber selbst, wenn man diesen neuen Rechtfertigungsversuch etwas besser als den zuerst angeführten Versuch findet, dann bleibt immer noch ein Problem in Bezug auf logische Zerlegungen, die kompositionale Zerlegungen sind. Hier scheint es keine guten Gründe zu geben, konjunktive kompositionale Zerlegungen zur Bestimmung von Merkmalen auszuschließen, die komplexe Begriffe in (a) einen oder gar (b) zwei universelle Begriffe zerlegen, wie die folgenden Beispiele zeigen:

(B9) Für alle x gilt: x ist ein roter Gegenstand gdw. x rot ist und x ein Gegenstand ist.

(B10) Für alle x gilt: x ist ein existierender Gegenstand gdw. x existiert und x ein Gegenstand ist.

Wenn wir wie Frege annehmen, dass „existiert“ ebenso wie „ist ein Gegenstand“ für einen universellen Begriff steht, dann ist nur (B9) ein Beispiel der Art (a) und (B10) ein Beispiel der Art (b). D.h. selbst wenn wir annehmen, in Bezug auf Definitionen eine gangbare Möglichkeit gefunden zu haben, universelle Begriffe als Teilbegriffe von definierten komplexen Begriffen auszuschließen, dann bräuchten wir noch einen *weiteren* aber ähnlichen Grund, um kompositionale Zerlegungen bei der Bestimmung von Merkmalen von komplexen Begriffen auszuschließen, die universelle Begriffe enthalten.

Man könnte wie folgt argumentieren: Definitionen liefern die *paradigmatischen* Bestimmungen für Teilbegriffe von komplexen Begriffen. Kompositionale Zerlegungen liefern nicht zwingenderweise die Teilbegriffe eines komplexen Begriffs. Frege hat selbst eine Bedingung in Bezug auf kompositionale Zerlegungen erkannt, die notwendig ist, um auf deren Grundlage die Teilbegriffe eines komplexen Begriffs zu identifizieren[47], er hat aber die Möglichkeit von kompositionalen Zerlegungen mit universellen Begriffen übersehen. Kompositionale Zerlegungen liefern uns nur dann Teilbegriffe, wenn sie Definitionen hinreichend ähnlich sind. D.h. neben der Bedingung, dass dieselben Gegenstände zwingend unter einen Begriff und seine Merkmale fallen müssen, gibt es eine weitere wichtige Bedingungen, welche die besagte Ähnlichkeit garantiert: Nur solche kompositionalen Zerlegungen, die in eine angemessene aufbauende Definition überführt werden können, wobei man den

47. Ein Begriff G ist nur dann Merkmal eines Begriffs F, wenn alles was unter F fällt, auch unter G fällt.

ein-stelligen, aber semantisch komplexen Ausdruck im Vorderglied einer kompositionalen Zerlegung mit einem ein-stelligen, semantisch einfachen Ausdruck ersetzt, sind echten expliziten Definitionen hinreichend ähnlich und können daher zur Bestimmung von Merkmalen von komplexen Begriffen herangezogen werden. Wenn wir diese zusätzlich modale Bedingung, welche eine nähere Heranführung der kompositionalen Zerlegungen an explizite Definitionen vollzieht, (K3**) hinzufügen, dann gelangen wir zu der folgenden angepassten Bestimmung von Merkmalen nach Frege im Lichte aller bisher diskutierten Beispiele:

(K3^{+++}) Der Begriff G ist ein Merkmal des komplexen Begriffs F gdw. es mindestens eine wahre *konjunktive* logische Zerlegung Z von F gibt, relativ zu der der Begriff G von einem der Konjunkte von Z ausgedrückt wird, durch Z der Sinn von F logisch zerlegt wird und alle Gegenstände, die unter G fallen auch unter F fallen und Z lässt sich in eine korrekte aufbauende Definition eines einfachen Ausdruck „H" überführen.

Dieses Kriterium würde (B9) und (B10) bei der Bestimmung von Merkmalen aus unterschiedlichen Gründen ausschließen: Wenn wir annehmen, dass (B10) nur Prädikate für universelle Begriffe enthält, dann würden bezüglich (B10) die beiden Teilbegriffe im Hinterglied, aus denen ein neuer Begriff aufgebaut werden soll, genau dieselbe Extension haben wie der aufzubauende Begriff selbst. Damit erfüllen diese Begriffe aber nicht die für aufbauende Definitionen notwendige explanatorische Rolle. D.h. es liegt hier keine echte Konstitution durch *beide* Teilbegriffe vor. Und eine aufbauende Definition, die nur durch einen Teilbegriff konstituiert wird, gibt es nicht.

Der zweiten Beispielfall (B9) kann auch nicht in eine angemessene aufbauende Definition überführt werden. Das liegt in diesem Fall daran, dass der betreffende aufzubauende Begriff zwar ein diskriminierender Begriff nach Frege ist, aber dieser dieselbe Extension hat wie einer der beiden Begriffe aus denen er begrifflich aufgebaut werden soll, nämlich wie der Begriff der Röte, würde hier keine angemessene aufbauende Definition vorliegen. Und zwar aus dem Grund, dass hier nur einer der beiden verwendeten Begriff eine konstituierende Rolle hätte; man aber nicht durch einen einzigen Begriff mit einer explanatorischen Rolle einen neuen Begriff durch eine aufbauende Definition einführen kann. Aufbauende Definitionen erfordert immer mindestens zwei unterschiedliche Begriffe, die den neuen aufzubauenden Begriff *konstituieren*.

Ich gebe zu, dass (K3^{+++}) etwas gezwungen erscheinen mag. Dieser Eindruck lässt sich aber meiner Ansicht vor dem Hintergrund von zwei Grundannahmen von Frege soweit entkräften, dass es nicht völlig unplausibel ist, zumindest Frege diese Konzeption als eine Konzeption in seinem Sinne anzubieten. *Erstens* hat Frege, wie unsere angeführten Belege zeigen, einen klaren Zusammenhang zwischen Definitionen und Merkmalen gesehen. Für ihn konstituieren die Teilbegriffe expliziter Definitionen die Merkmale von komplexen Begriffen. Leider hat er aber übersehen, dass nicht alles, was er für eine explizite Definition hält, wirklich eine solche ist. *Zweitens* favorisiert Frege aufbauende gegenüber zerlegenden Definitionen. D.h. in seinem Denken, auch über Merkmale, spielen diese Definitionen eine paradigmatische Rolle. Vor diesem Hintergrund ist (K3^{+++}) somit vielleicht gar nicht so abwegig.

4.2 Unerfüllbare Begriffe und ihre Merkmale

Ein Problem von (K2) bestand darin, dass dieser Auffassung zu Folge (a) widersprüchliche Begriffe sich als Merkmale aller widersprüchlichen Begriffe erwiesen haben und (b) alle Begriffe Merkmale aller widersprüchlichen Begriffe sind, was sicher kein intuitiv akzeptables Resultat ist. Wie sieht es nun aber mit widersprüchlichen oder unerfüllbaren Begriffen auf der Grundlage von (K3^{++}) oder (K3^{+++}) aus? Komplexe widersprüchliche Begriffe wie der Begriff eines weißen Rappens stellen weder auf der Grundlage von (K3^{++}) noch (K3^{+++}) ein Problem dar. Da beide Auffassungen feinkörniger als (K2) sind, teilen sie keines der Probleme von (K2). Nur durch eine korrekte Definition oder Zerlegung lizensierte Teilbegriffe sind Merkmale von komplexen Begriffen. Das gilt genauso für widersprüchliche wie für nicht widersprüchliche komplexe Begriffe. Darüber hinaus gibt es weder auf der Grundlage von (K3^{++}) noch auf der von (K3^{+++}) Probleme mit widersprüchlichen Begriffen und deren Teilbegriffen. Intuitiv würde man sagen, dass *nur* der Begriff der Weiße und der Begriff des Rappens Teilbegriffe des Begriffs eines weißen Rappens sind, und nicht alle Begriffe oder alle beliebigen widersprüchlichen Begriffen. Das liegt auch daran, dass auf der Grundlage von (K3^{+++}) aufbauende Definitionen aus nicht-widersprüchlichen aber unvereinbaren Begriffe völlig angemessen sind, weil es völlig angemessen ist zu sagen, dass der Begriff der Weiße und der Begriff des Rappen zusammen den Begriff eines weißen Rappens konstituieren. In dieser Hinsicht ist somit (K3) nicht nur interpretatorisch angemessener als (K2) in Bezug auf Freges eigene Sicht, sondern auch sachlich angemessener.

Unsere Untersuchungen haben gezeigt, wie schwierig es ist, eine allgemein akzeptable Konzeption von Merkmalen von Begriffen zu formulieren, die alle Ausführungen von Frege zu diesem Thema ernst nimmt, für wahr hält und philosophisch halbwegs akzeptabel ist. Es hat sich allerdings gezeigt, dass es sinnvolle Modifikationen von (K3) gibt, die dem Geiste von Freges intendierter Konzeption von Merkmalen näher kommen als (K3) selbst.

Literatur

Bolzano, B. (1837): *Wissenschaftslehre*, Band I, Sulzbach: Seidelsche Buchhandlung.

Frege, G. (1879/1891): „Logik“ in: Hermes, H.; Kambartel, F. und Kaulbach, F. (Hrsg.): *Nachgelassene Schriften*, Hamburg: Meiner, 1-8.

Frege, G. (?1882?[1969]): „Dialog mit Pünjer über Existenz“, in: Hermes, H.; Kambartel, F. und Kaulbach, F. (Hrsg.): *Nachgelassene Schriften*, Hamburg: Meiner, 60-75.

Frege, G. (1884 [1987]): *Grundlagen der Arithmetik*, Stuttgart: Reclam.

Frege, G. (1891/92 [1969]): „Über den Begriff der Zahl“, in: Hermes, H.; Kambartel, F. und Kaulbach, F. (Hrsg.): *Nachgelassene Schriften*, Hamburg: Meiner, 81-127.

Frege, G. (1892 [2008]): “Über Begriff und Gegenstand”, in: Patzig, G. (Hrsg.): *Funktion, Begriff, Bedeutung*, Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht, 47-60.

Frege, G. (1914 [1969]): „Logik in der Mathematik“, in: Hermes, H.; Kambartel, F. und Kaulbach, F. (Hrsg.): *Nachgelassene Schriften*, Hamburg: Meiner, 219-270.

Frege, G. (1976): *Wissenschaftlicher Briefwechsel*, Hrsg. von: Gabriel, G.; Hermes, H.; Kambartel, F., Thiel, C.; und Veraart, Hamburg: Meiner.

Gabriel, G. (1980): „Merkmal“, in: *Historisches Wörterbuch der Philosophie*, Band 5, 1153- 1154.

Kant, I. (1800): *Logik*, Akademieausgabe, Band IX, Berlin: de Gruyter.

Künne, W. (2001): „Constituents of Concepts: Bolzano vs. Frege“,in: Albert Newen, Ulrich Nortmann & Rainer Stuhlmann-Laeisz (Hg.), *Building on Frege. New Essays on Sense, Content, and Concept*, CSLI Publishing: Stanford, 267-286.

Künne, W. (2010): *Die Philosophische Logik Gottlob Freges*, Frankfurt am Main: Klostermann.

Locke, J. (1690 [1895]): *An Essay Concerning Human Understanding*, Oxford: Oxford University Press.

Rami, D. (2021): "Notions of Existence in Frege," *Journal of the History of Analytic Philosophy*, Vol 9. Nr. 8.

Rami, D. (2018): *Existenz und Anzahl. Eine kritische Untersuchung zu Freges Konzeption der Existenz*, Paderborn: mentis

Siebel, M. (2011): „'It falls somewhat short of logical precision'. Bolzano on Kant's Definition of Analytic Judgements", *Grazer Philosophische Studien*, 82, 91-127.

von Kutschera, F. (1989): *Gottlob Frege*, Berlin: de Gruyter.

Der Raum als Reihenbegriff – Ernst Cassirers Deutung der Geometrieentwicklung des 19. Jahrhunderts.

Daniel Koenig

Der Marburger Neukantianer Ernst Cassirer (1874-1945) galt zu Beginn des 20. Jahrhunderts als einer der bekanntesten, systematisch orientierten Historiker des Erkenntnisproblems. Als solcher wurde er beispielsweise im angelsächsischen Raum noch bis in die 1990er Jahre wahrgenommen und kaum für seine eigenständige, über eine reine Geschichte der Erkenntnistheorie hinausgehende systematische Kulturphilosophie rezipiert.[1] Tatsächlich ist aber eine Trennung von systematischen und historischen Untersuchungen in Cassirer Schriften kaum möglich; beide Perspektiven sind im Denken Cassirers immer schon verschränkt. So hat sich Cassirer beispielsweise zeitlebens mit philosophischen Fragen zur Mathematik beschäftigt und ist dabei durchgängig bemüht, systematische Schlussfolgerungen im „engen Zusammenschluß“ (PsF III, X) mit der Geschichte der Mathematik zu entwickeln, während zugleich seine historischen Untersuchungen immer von systematischem Interesse geleitet sind. Im Folgenden möchte ich diesen Zusammenschluss anhand von Cassirers Rezeption der Entdeckung der nicht-euklidischen Geometrien und ihren Konsequenzen für das Raumproblem explizieren.[2]

1. Die Geschichte der Cassirer-Rezeption ist deutlich länger und komplexer, als hier dargestellt. Vgl. hierzu beispielsweise Endres/Favuzzi/Klattenhoff (2016, 9-17).

2. Vgl. zum Thema auch Koenig/Koenig (2019), in dem allgemein verständlich die Entwicklung der Nicht-Euklidischen Geometrien sowie des Raumproblems skizziert wird und kurz auf Cassirers Rezeption vor dem Hintergrund seiner Kulturphilosophie eingegangen wird. Vgl. darüber hinaus auch Koenig (2019): Hier liegt der Fokus darauf zu zeigen, wie sich mit Cassirers Wende zur Kulturphilosophie der mathematische Raum am Ende einer Differenzierungsbewegung anderer Raumformen zeigt.

In einem ersten Schritt werde ich erläutern, warum bzw. inwiefern nach Cassirers Ansicht die nicht-euklidischen Geometrien für die Philosophie ein Problem darstellten. Der Kantischen Philosophie verpflichtet, sucht Cassirer zu zeigen, dass die neuen Entdeckungen dazu zwingen, die Grundfragen der Mathematik als *erkenntniskritische* statt als *ontologische* Fragen zu verstehen, und dass sie demnach eine „Revolution der Denkart“ (EP IV, 23) verkörpern. Vor diesem Hintergrund möchte ich anschließend skizzieren, wie Cassirer auf die Frage nach dem Ursprung der Geometrien und auf das damit verbundene Anwendungsproblem der Mathematik antwortet. Auch hier bleibt das Erbe Kants sichtbar, wird jedoch im Lichte der Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert transformiert: Die Mathematik bietet verschiedene universelle *Reihenformen*, die eine Ordnung der Erfahrung ermöglichen. Im letzten Teil meines Vortrags möchte ich versuchen, anhand von Cassirers Rezeption der projektiven Geometrie zu konkretisieren, inwiefern der mathematische *Raum* als *Reihenbegriff* verstanden werden kann.

1 Die nicht-euklidischen Geometrien und das Raumproblem

Erstmals setzt sich Cassirer 1910 in seiner ersten systematisch orientierten Monographie *Substanzbegriff und Funktionsbegriff* mit den nicht-euklidischen Geometrien auseinander. Deren Verbindung zum Raumproblem thematisiert Cassirer jedoch erst etwa 30 später im eher historisch orientierten, vierten Band des Erkenntnisproblems[3], auf den ich mich zunächst vor allem beziehen werde. Es ist Bernhard Riemann (1826-1866), der Cassirer zufolge den Wandel der Geometrie, der durch die Arbeiten von Nikolai Lobatscheffsky[4] (1792-1856) und János Bolyai (1802-1860) (und in gewisser Weise auch Carl Friedrich Gauß (1777-1855)[5]) angestoßen wurde, zu einem ersten Abschluss bringt: Während beispielsweise Bolyai noch glaubte mit den nicht-euklidischen Geometrien eine „absolut wahre Raumlehre“ (EP IV, 33) begründet zu haben, wandeln sich mit Riemann „bisher absolute, schlechthin notwendige Sätze [in] hypothetische Wahrheiten“ (EP IV, 23). Der revolutionäre Wandel besteht für Cassirer darin, dass die ursprünglich absoluten Wahrheiten der Geometrie hier nicht mehr also solche verstanden werden, sondern

3. Das Manuskript für den vierten Band des Erkenntnisproblems stellt Cassirer 1941 fertig, es erscheint jedoch erst postum 1950 zunächst auf Englisch und 1957 auf Deutsch. Vgl. hierzu den Editorischen Bericht in der Werkausgabe, EP IV, 447.

4. Ich übernehme hier Cassirers Transkription.

5. Vgl. für eine genauere Untersuchung der Rolle Gauß’ im Zusammenhang mit der Entwicklung der nicht-euklidischen Geometrien Mehrtens (1990, 46ff.) und Volkert (2013, 257)

nun „einem ganz anderen Erkenntnistypus“ (EP IV, 24) zugeordnet werden. Cassirers Argument ist das folgende: Indem Lobatscheffsky und Bolyai zeigten, dass sich auch mit einer Negation des Parallelenaxioms eine systematische Geometrie entwickeln lässt, kann dieses Axiom nicht notwendig wahr sein, denn sonst wäre eine solche systematische Entwicklung nicht möglich gewesen. Indem damit eines der euklidischen Axiom nicht mehr notwendig wahr sein kann, stand damit auch an der Status der Axiome überhaupt in Frage und die Sätze galten nur noch als hypothetische Wahrheiten.[6]

Eine solche Deutung der mathematischen Entwicklung wird jedoch laut Cassirer für die *Philosophen* insofern zum Problem, als dass seit der Antike zwischen dem geometrischen und dem philosophischen Wahrheitsbegriff nicht unterschieden worden sei. So bleibe noch Descartes dieser Einheit der Wahrheitsbegriffe treu: Wenn wahr ist, was klar und deutlich erkannt wird, dann bleibt die geometrische Anschauung eine Quelle „unmittelbare[r] Gewissheit“ (EP IV, 24). So setzt Descartes in seiner Einführung der analytischen Geometrie beispielsweise weiterhin die euklidische Geometrie voraus.[7] Tatsächlich wurde jedoch laut Cassirer ebenjene Einheit der Wahrheitsbegriffe nicht erst im 19. Jahrhundert mit dem Auftreten nicht-euklidischer Geometrien fraglich. Vielmehr habe schon Leibniz in der Zeit des klassischen Rationalismus Beweise für die geometrischen Axiome gefordert und somit an deren unmittelbarem Wahrheitswert gezweifelt. Leibniz habe bereits gesehen, dass „[d]ie bloße Berufung auf ein psychologisches Evidenzgefühl [. . .] niemals zureichen [könne]“ (EP IV, 25). Die Mathematik kannte bereits zu Leibniz’ Zeiten Beispiele, in denen dieses Gefühl täuschen und fehlleiten kann. Der Eindruck, eine Hyperbel müsste ihre Asymptoten irgendwann schneiden, dient Cassirer als ebenso einfaches wie eindrucksvolles Beispiel. Trotz dieser ersten Zweifel an der *unmittelbaren* Gewissheit der geometrischen Anschauung sei jedoch, so Cassirer, im Rationalismus nicht an der notwendigen Geltung der mathematischen Sätze überhaupt gezweifelt worden. Und auch Immanuel Kant (1724-1804), der mit vielen Selbstverständlichkeiten des Rationalismus bricht, teile noch diese Überzeugung. Er beschreibt „die reine Mathematik als eine Erkenntnis [. . .], die [. . .] absolute Notwendigkeit bei sich führt, also auf keinen Erfahrungsgründen beruht, mithin ein reines Produkt der Vernunft ist’ [AA IV, 280].“ (EP IV, 26) Laut Cassirer hat auch der klassische Empirismus an diesem Charakter der Mathematik nicht gezweifelt. So bestimmt beispielsweise Hume die Mathematik als Lehre von den Beziehungen zwischen Ideen, d.h. von „streng-notwendige[n] und unveränderliche[n] Verhältnisse[n]“, die in „der Tätigkeit des Denkens“ (EP IV, 26) selbst gründen.

6. Eine umfangreiche mathematikhistorische Untersuchung über die Rezeption der nicht-euklidischen in Deutschland liefert Volkert (2013).
7. Vgl. hierzu beispielsweise Spalt (2015, 19f.).

Mit den neuen Geometrien von Lobatscheffsky und Bolyai tritt nun das Problem auf: Wenn die Sätze der Mathematik unveränderliche Verhältnisse des Denkens ausdrücken, die entsprechend notwendige Geltung haben, wie kann es dann eine Vielzahl von Systemen geben, die einander widersprechende Axiome enthalten, und die dennoch alle wahr sein sollen? Um diese Widersprüche aufzuheben und zugleich der euklidischen Geometrie wieder eine Ausnahmestellung einzuräumen, konnte die Mathematik des 19. Jahrhunderts noch weniger als Leibniz auf eine naive Anschauung rekurrieren. Denn das mathematische Denken hatte eine Fülle von weiteren Beispielen entdeckt, die dazu veranlassten, von einer ‚Krise der Anschauung' zu sprechen. Cassirer rekurriert hier auf den gleichnamigen Vortrag Hans Hahns von 1933 und auf Felix Kleins Schrift zur Elementarmathematik aus dem Jahr 1925 und nennt die folgenden Beispiele: Weierstraß' Funktion, die überall stetig, aber nirgends differenzierbar ist, Peanos Kurve, die ein Quadrat ausfüllt, und Möbius' Polyeder, der keinen Rauminhalt besitzt.[8] Laut Cassirer zeigen diese Beispiele, dass eine Rechtfertigung der euklidischen Geometrie durch die naive Anschauung den Ansprüchen der Mathematik nicht mehr genügt. Denn wenn „nicht einmal [mehr] die Idee der Kurve etwas in sich Evidentes" (EP IV, 27) ist, so ist nicht mehr klar, was die Anschauung überhaupt noch leistet. Darüber hinaus stellt die Mathematik laut Cassirer fest, dass sich die verschiedenen Geometrien eigentlich gar nicht gegenseitig ausschließen, es sich in Wahrheit also nur um einen *scheinbaren* Widerspruch handelt. So habe Felix Klein (1849-1925) zeigen können, dass sich alle nicht-euklidischen Systeme in die euklidische Geometrie abbilden lassen, und Hilbert im Anschluss bewiesen, dass sich die Widerspruchsfreiheit ‚aller' Geometrien auf die der reellen Zahlen zurückführen lässt, so dass wenn *eine* Geometrie wahr ist, es auch die anderen sein müssen.[9]

Dass die Anerkennung dieser Schlussfolgerungen der Philosophie so schwer fiel, sieht Cassirer darin begründet, dass sie es nicht vermochte, einen „scharfen Trennungsstrich zwischen der logisch-erkenntniskritischen und der ontologischen Fragestellung zu ziehen" (EP IV, 30f.): Trotz Kants Forderung, dass „die Philosophie auf den stolzen Namen einer Ontologie" (EP IV, 30) verzichten sollte, hätten die nachkantischen Systeme des 19. Jahrhunderts ihren Ausgang wieder „von der Ontologie und Metaphysik" (EP IV, 30) genommen. In der Art wie sie ihre Begriffe bilden, zeigten sie sich einem substantiellen Begriffsverständnis verpflichtet: Begriffe fungieren hier wie Abbilder ewiger Substanzen. Mit Blick auf das Raumproblem nennt Cassirer hier vor allem Descartes, in dessen „Metaphysik [...] der Raum nicht sowohl als eine bestimmte *Ordnungsform*, [...] sondern [...] in der Art eines

8. Vgl. zur Krise der Anschauung in der Mathematik auch Volkert (1986), der insbesondere betont, dass diese ‚Krise' nicht nur durch die Nicht-Euklidischen Geometrien ausgelöst wurde, hierzu bes. XIX.

9. Vgl. EP IV, 28.

absoluten Dinges, in der Art der ‚ausgedehnten *Substanz*'" (EP IV, 30)[10] erscheint. Auch wenn Leibniz den *idealen* Charakter des Raumes bereits betont habe, so habe sich die entgegengesetzte Auffassung Newtons in der Folge durchgesetzt:

> Der Raum blieb als ‚absoluter Raum' bestimmt, und die Wirklichkeit dieses ‚absoluten' Raumes bildete, bei Physikern wie bei Philosophen, den eigentlichen Gegenstand der Untersuchung. Man begreift, welche Paradoxie die Tatsache der Nicht-Euklidischen Geometrien für eine Auffassung, die in diese Richtung ging, in sich schließen musste. (EP IV, 30)

Insofern also die ersten Philosophen, die sich mit den nicht-euklidischen Geometrien beschäftigten, nicht zwischen logisch-erkenntniskritischen und ontologischen Fragen unterschieden, stellte sich ihnen folgendes Problem: Akzeptierte man verschiedene Geometrien, so gab es verschiedene Räume, welche selbst verschiedene Welten beinhalten mussten. Eine solche Pluralität von Welten widersprach aber dem Selbstverständnis der Philosophie, insofern sie sich als „streng einheitliche und universale Wirklichkeitserkenntnis" (EP IV, 31) verstand. Für einige Philosophen bedeutete also die Ablehnung der neuen Geometrien nichts anderes, als den Versuch, der Philosophie ihren Status als Wissenschaft zu sichern. Hermann Lotze (1817-1881), der sich mit den nicht-euklidischen Geometrien bezeichnenderweise in seiner Metaphysik und nicht in seiner Logik auseinandersetzt, bezeichnete sie als „einen einzigen großen und zusammenhängenden Irrtum [(Lotze 1879, 234)]" (EP IV, 31). Laut Cassirer, besteht wiederum *Lotzes* Irrtum darin, dass er fragt, wie ein absolutes Ding namens ‚Raum' zugleich unvereinbare Eigenschaften haben kann. Auch Wilhelm Wundt (1832-1920) bezweifelt, dass die neuen Geometrien irgend einen „*erkenntnistheoretischen* Wert" (EP IV, 31) haben könnten. Er argumentiert, laut Cassirer, dass auch wenn „die Erwägung von Möglichkeiten ein anziehendes Gedankenspiel sein möge, [. . .] aber solche Erwägungen über die Wirklichkeit nicht das geringste aussagen könnten" (EP IV, 31f.). Wundt bindet, so Cassirer, die objektive *Gültigkeit* von Begriffen noch daran, dass sie „aus der Wirklichkeit geschöpft sein müssen" (EP IV, 32). Lotze und Wundt vertiefen damit, so Cassirer, den von ihnen selbst beklagten Graben zwischen Philosophie und Mathematik, anstatt ihn zu überwinden.

10. Wobei Cassirer selbst in seiner Diskussion von Descartes analytischer Geometrie betont, dass diese bereits eine „echte philosophische ‚Revolution der Denkart'" darstellt, denn die „substantiellen *Formbegriffe* der antiken Geometrie [. . .] verwandeln sich [hier] in reine ‚Reihenbegriffe', die nach einem bestimmten Grundprinzip aus einander erzeugbar werden." (SuF, 75) Cassirer selbst sieht hier eine gewisse Dissonanz zwischen Descartes Auffassung zur Ontologie und Erkenntnistheorie, vgl. hierzu SuF, 74f. Zur zentralen Bedeutung Descartes für Cassirer und dessen intensive Beschäftigung mit diesem vgl. das Vorwort von Rainer A. Bast in Cassirer (1995, bes. XXXf.).

Hingegen wurde von Seiten der Mathematik, so Cassirer, versucht diese Missverständnisse zu klären. So fordere Klein bereits im Jahr 1872, also fünf Jahre vor dem Erscheinen von Lotzes Metaphysik, in seinem *Erlanger Programm*, dass zwischen Struktur- und Existenzfragen zu unterscheiden sei und die Mathematik sich nur mit ersteren zu beschäftige habe. Laut Klein stellten die einzelnen Geometrien nur noch Invariantentheorien einer bestimmten Mannigfaltigkeit zu einer bestimmten Transformationsgruppe dar, womit der Anspruch aufgegeben werde, dass eine Geometrie von den Eigenschaften des einen Raumes unserer Lebenswelt handelt. Cassirers Deutung des Erlanger Programms ist insgesamt aufschlussreich für seine Philosophie der Mathematik, die ich hier nicht im Detail verfolgen kann.[11] Entscheidend für das Folgende ist: Nicht nur zeigt sich erneut, dass alle Geometrien gleich streng sind, da sie jeweils nur verschiedenen Invariantentheorien entsprechen. Darüber hinaus lässt sich nun aber auch eine Ordnung der Geometrien bestimmen, die nicht mehr nach ihrer Wahrheit, sondern nach ihrem Grad der Allgemeinheit fragt. Eine Geometrie gilt hier als allgemeiner als eine andere, wenn die entsprechende Transformationsgruppe die andere Transformationsgruppe als eine Untergruppe enthält. Die so gegebene (partielle) Ordnung der Transformationsgruppen induziert also eine (partielle) Ordnung der Geometrien. Damit ist nicht nur ein Zusammenhang zwischen der projektiven Geometrie und den metrischen Geometrien gegeben, sondern es gilt auch, dass die Transformationsgruppen aller metrischen Geometrien, d.h. die der euklidischen und auch die der nicht-euklidischen, in der der projektiven Geometrie enthalten sind, sich aber nicht gegenseitig enthalten. Es handelt sich also, mathematisch gesprochen, tatsächlich um eine partielle und keine totale Ordnung. Man kann dies auch so ausdrücken, dass in den allgemeineren Geometrien weniger Gesetze gelten als in den spezielleren, welche wiederum Gesetze enthalte, die sich nicht aufeinander reduzieren lassen. Mit dieser von den Transformationsgruppen induzierten Ordnung, durch die nicht nur die projektive, sondern auch die affine[12] Geometrie in einem Zusammenhang mit der euklidischen und den nicht-euklidischen Geometrien stehen, zeigt sich auch für die letzteren, worin die eigentliche Charakteristik ihrer Begriffsbildung liegt. Werden nämlich in der projektiven Geometrie mittels der Zentralprojektion Gebilde miteinander identifiziert, die verschiedenen sinnlich-anschaulichen Gestalten angehören können, so entscheidet hier allein „das Prinzip der Zusammenfassung [...] darüber, was wir als ‚dasselbe' oder ‚nicht-dasselbe' anzusehen haben." (EP IV, 38)[13] Und

11. So stellt beispielsweise Ihmig (1997) Cassirers Rezeption des ‚Erlanger Programm' ins Zentrum seiner Analyse von Cassirers „System der Erfahrung", indem ihm für Cassirers „Systembegriff eine paradigmatische Bedeutung zukommt." (Ihmig 1997, IX). Vgl. hierzu zudem Ihmig (1999), Biagioli (2018).

12. In SuF erwähnt Cassirer interessanterweise die affine Geometrie noch nicht.

13. Die projektive Geometrie und ihre Bedeutung für Cassirers Auffassung vom Raum wird im letzten Abschnitt noch im Detail thematisiert.

auch den metrischen Geometrien, d.h. der euklidischen und den nicht-euklidischen Geometrien, liegen solche Prinzipien der Zusammenfassung zugrunde. So spiele für ein bestimmtes euklidisches Dreieck die spezielle Lage im Raum keine Rolle. Es bleibt das *gleiche* Dreieck, auch wenn es gedreht, an eine andere 'Stelle' bewegt oder gespiegelt wird. Alle anschaulichen Dreiecke, die sich lediglich in ihrer Lage unterscheiden, gelten jeweils als *gleiche* Dreiecke. Dieser Form der Begriffsbildung liegt, laut Cassirer, allen Geometrien, ja der ganzen Mathematik zugrunde:

> Diese Art der ‚Äquivalenz'-Setzung oder der ‚Definition durch Abstraktion' gehört zu den fundamentalen Bestimmungen des mathematischen Denkens überhaupt. Aber der Prozeß dieser Begriffsbildung geht als solcher über den Gebrauch, den die Euklidische Geometrie von ihm macht, weit hinaus. Was in dieser letzteren als feste unübersteigliche Grenze, als ein Unterschied zwischen geometrischen ‚Wesenheiten' erscheint, das kann in einer anderen Art der Betrachtung selbst wieder relativiert und vom Standpunkt der geometrischen Begriffsbildung als unerheblich erklärt werden. (EP IV, 38)

Cassirer erläutert diese Relativität bzw. diesen „Bedeutungswandel" (EP IV, 38) der geometrischen Objekte u.a. an dem Begriff des Kegelschnitts. So seien in der euklidischen Geometrie Kreis, Ellipse, Hyperbel und Parabel verschiedene Objekte, so dass der Begriff des Kegelschnitts verschiedene Kegelschnitttypen umfasst. Dadurch, dass aber in der affinen Geometrie Entfernungen und Winkel keine Rolle mehr spielen, lasse sich hier nicht mehr zwischen Kreis und Ellipse unterscheiden, sodass zwei Typen der Kegelschnitte zusammenfallen. Zugleich werden hier aber unendliche-ferne Punkte noch nicht zugelassen, sodass „die Einteilung aller Kegelschnitte in Ellipsen, Hyperbeln, Parabeln in Kraft" (EP IV, 38) bleibe. In der projektiven Geometrie, die unendlich-ferne Punkte und Geraden zulässt, gibt es schließlich nur noch einen Kegelschnitttyp. Geht man über diese speziellen Geometrien hinaus und betrachtet, wie die Topologie, nur noch stetige Transformationen ohne weitere Bedingungen, so verschwinde hier sogar die Unterscheidung zwischen Kegeln, Würfeln und Pyramiden, da sie alle durch die stetige Transformationen ineinander überführbar sind.

Vom Standpunkt einer substantiellen Auffassung der Begriffsbildung, der Vorstellung, dass Begriffe sich durch Abstraktion bestimmter Merkmale von Substanzen ergeben, muss dieses mathematische Verfahren äußerst widersprüchlich erscheinen. Denn der Begriff des Kegelschnitts, um im obigen Beispiel zu bleiben, scheint sich je nach Betrachtungsweise zu wandeln und somit jede feste Bedeutung zu verlieren. Einer substantiellen Auffassung nach sind Begriffe nichts anderes als Sammlungen von Merkmalen: wandeln sich diese, wandelt sich auch der Begriff und wir haben es im obigen Beispiel eigentlich mit verschiedenen Begriffen des Kegelschnitts zu tun. Insofern dies aber der Praxis der Mathematik nicht gerecht wird, deutet sich hier an, dass die substantielle Art der Begriffsbildung zumindest dem Verfahren der Mathematik nicht angemessen ist. Cassirer betont jedoch, dass dieses Problem „nicht erst beim Übergang von der euklidischen Geometrie zu den anderen, 'höheren' Formen“ (EP IV, 39), also ‚abstrakteren‘ Geometrien entsteht:[14]

> Der wirkliche ‚*hiatus*‘ liegt hier nicht zwischen der Euklidischen und der anderen Geometrie, sondern er liegt zwischen der sinnlichen Anschauung und der Welt des geometrischen Begriffs. In dem Maße als der geometrische Begriff an Schärfe und Feinheit gewinnt, wandelt sich für uns die ‚Welt des Raumes‘; [. . .] beim Fortgang von der metrischen Geometrie zur affinen und der projektiven [legen wir] gewissermaßen immer tiefere Schichten der räumlichen Gebilde bloß[]. (EP IV, 39)

Laut Cassirer müssten mit einer solchen Auffassung der (mathematischen) Begriffsbildung die zentralen Bedenken der Philosophen aus dem Weg zu räumen sein. Diese bestanden in der Position: „Der Raum muss *Einheit* sein, während er durch die Anerkennung der nicht-euklidischen Geometrie in eine bunte Vielheit verwandelt würde.“ (EP IV, 39) Die implizite Voraussetzung dieser Ansicht besteht in einer substantiellen Auffassung vom Raum: Er gilt hier als etwas für sich Existierendes, von dem nur *eine* Geometrie „ein vollständiges und getreues *Abbild*“ (EP IV, 39) liefern kann. Wendet man sich jedoch von der Abbildtheorie der Erkenntnis ab und geht, wie Cassirer fordert, zu einer funktionalen Auffassung der Erkenntnis und Begriffsbildung über, so löst sich die obige Antinomie auf. Demnach lassen sich Begriffe nicht als einfache Abstraktionen von etwas Gegebenen verstehen, sondern ihnen liegen immer erzeugende Prinzipien der Begriffsbildung zugrunde, d.h. funktionale Zusammenhänge die – im kantischen Sinne – die Struktur der Gegenstände erst ermöglicht. Damit setzt Cassirer der substantiellen Form der Begriffsbildung eine funktionale entgegen, in deren Sinne Begriffe nicht als Verallgemeinerungen gemeinsamer Eigenschaften von isoliert betrachteten Objekten gelten, sondern als ursprüngliche Setzung von Relationen. In *Substanzbegriff und Funktionsbegriff* bestimmt Cassirer die so gebildeten Funktions- bzw. Relationsbegriffe wie folgt:

> [Die Relationsbegriffe] ermöglichen und verbürgen die Einsicht in Einzelverhältnisse, wenngleich sie sich niemals in der Art isolierter Objekte anschauen lassen. [. . .] Die Identität der Reihenform – und diese ist es,

14. Dieser Sprung zwischen sinnlicher Anschauung und Welt der geometrischen Begriffe ist auch der Grund für Cassirers Ablehnung aller empiristischen Begrüdungsversuche. Vgl. hierzu den folgenden Abschnitt.

> die sich hinter jeder Annahme identischer Objekte in der Naturwissenschaft verbirgt – ist nur an der Mannigfaltigkeit der Reihenglieder [...] aufzeigbar. Zwischen der allgemeinen Geltung der Prinzipien und dem besonderen Dasein der Dinge besteht somit kein Widerspruch: [...] Sie gehören verschiedenen logischen Dimensionen an, so daß keines versuchen kann, sich unmittelbar an die Stelle des anderen zu setzen. (SuF, 250)

Bezogen auf die Geometrie bedeutet dies, dass sie „eine reine ‚Beziehungslehre' [ist]; in ihr handelt es sich nicht um Feststellung von [...] Substanzen und deren Eigenschaften, sondern um reine Ordnungsbestimmungen" (EP IV, 40). Die verschiedenen Geometrien entsprechen hier verschiedenen Ausgestaltungen einer allgemeinen Ordnungsbestimmung überhaupt. Diese allgemeine Ordnung geht, laut Cassirer, auf Leibniz' Auffassung des Raumes als *Ordnungsform des Beisammen* zurück. Die geforderte Einheit des Raumes ist hier bloß eine formale (des Geistes) und keine substantielle (des Objekts). Es ist Cassirer zufolge Klein, der genau diese Leibnizsche Auffassung aufnimmt und mit seinem Erlanger Programm konkretisiert:

> Ein Blick auf die Kleinsche Darstellung der Geometrie lehrt, dass in ihr die rein ideelle, die *systematische* Einheit des Raumes keineswegs aufgegeben, sondern dass sie vielmehr fester als je zuvor begründet erscheint. Denn die allgemeine Raumform, die Form des ‚möglichen Beisammenseins', wird von jeder Geometrie als ein unableitbarer Grundbegriff benutzt und vorausgesetzt. In dieser Hinsicht stehen die verschiedenen Geometrien einander gleich; aber sie differenzieren diese Raumform, indem sie mit verschiedenen Fragen an sie herantreten, indem sie sie sub specie verschiedener Transformationsgruppen betrachten. (EP IV, 40)

Cassirer sieht demnach die verschiedenen Geometrien durch ein *Prinzip* miteinander verbunden, das somit die Rede von *einer* Geometrie wieder rechtfertigt:

> Dieses Prinzip erlaubt uns die ganze Reihe der möglichen Geometrien, von der gewöhnlichen Maßgeometrie angefangen bis zur Analysis situs und zur Mengenlehre, mit einem Blick zu überschauen und sie als ein gegliedertes Ganzes zu verstehen. (EP IV, 40f.)[15]

15. Interessanterweise nennt Cassirer hier auch die Mengenlehre eine Geometrie. Auch wenn es Cassirer nicht expliziert, lassen sich auch Mengen mit der Gruppe der bijektiven Abbildungen in die obige Definition der Geometrien eingliedern. Klein hatte dies wohl zu Beginn nicht im Blick, schließlich entwickelt sich die Mengenlehre im strengen Sinne erst später. Neben einer solchen Einordnung der Mengenlehre, erkennt Cassirer aber auch explizit den technischen Wert der mengentheoretischen Grundlegung der Mathematik an, bezweifelt jedoch, dass hiermit beispielsweise

Dem Inhalt nach sind die Geometrien damit von der Anschauung gelöst worden, denn es geht nicht mehr darum, *welche* sinnlich-anschaulichen Gestalten jeweils äquivalent gesetzt werden, sondern um die verschiedenen Weisen der Äquivalenz-Setzung. Stehen damit verschiedene, gleichermaßen 'wahre' Geometrien zur Auswahl, besteht eigentlich erst die Möglichkeit zu fragen, welche von ihnen den wirklichen Raum beschreibt. Ob also nicht doch durch einen Ursprung in der Anschauung bzw. im Sinnlichen die euklidische Geometrie ausgezeichnet werden kann.[16] Nimmt die euklidische Geometrie in dieser Hinsicht eine entscheidende Sonderstellung ein, so dass sie die anderen Geometrien in diesem Sinne *begründet*?

2 Das Scheitern aller empiristischen Begründungsversuche

Bevor die Konsequenz eines empirischen Ursprungs der Geometrien nach dem Aufkommen der nicht-euklidischen Formen vorgeschlagen wurde, hatte bereits John Stuart Mill (1806-1873) versucht, „mathematische Begriffe aus [. . .] einer bloßen Summe einzelner Sinneswahrnehmungen“ (EP IV, 43) zu bilden. Mills Versuch war jedoch mathematisch nicht zufriedenstellend und wird von Cassirer hier wohl nur der Vollständigkeit halber genannt. Aus den nicht-euklidischen Geomerien zog dann Gauß beispielsweise die Konsequenz, dass die „Geometrie [zur] empirischen Naturwissenschaft“ (EP IV, 42) wird. Aber erst der Mathematiker Moritz Pasch (1843-1930) habe 1882 eine strenge „empirische Begründung der mathematischen Begriffe“ (SuF, 108) geliefert, die Cassirer in *Substanzbegriff und Funktionsbegriff* denn auch ausführlich diskutiert. Cassirer zufolge *scheint* Paschs neue Art der Begründung sogar eine neue Strenge zu implizieren, insofern er ein neues Axiom einführt, das der euklidischen Geometrie noch ‚fehlte‘.[17] Für diesen ersten „konkreten Versuch [. . .] eine empirische Geometrie“ (EP IV, 45) vorzulegen, muss Pasch jedoch die euklidischen Definitionen einschränken, da es in der Erfahrung keine ausdehnungslosen Punkte, Geraden, usw. gibt. Entsprechend ist nun der Punkt „ein materieller Körper [. . .], der sich innerhalb der jeweiligen gegebenen Beobachtungsgrenzen nicht mehr als teilbar erweist“ (SuF, 109) und Strecken bestehen aus endlich vielen solcher Punkte. Diese Einschränkungen implizieren wiederum eine Änderung in den euklidischen Axiomen: So gilt beispielsweise das erste Axiom nur

schon das eigentliche Prinzip der Mathematik benannt ist. Vgl. hierzu SuF, 56 und PsF III, 422-435.

16. Vgl. hierzu bspw. Gray (1989, 122).

17. Vgl. für die Entwicklung der Axiomatik den Kommentar von Klaus Volkert in Hilbert (2015, 2-26, zur Rolle Paschs besonders 4 und 17).

noch in solchen Fällen, in denen sich tatsächlich noch eine Strecke zwischen zwei Punkten ziehen lässt und diese nicht zu dicht beieinander liegen.[18]

Als Kritiker Paschs führt Cassirer Giuseppe Veronese (1854-1917) ins Feld, der einwendet, dass mit Pasch nicht der „Grundriß des Gesamtgebäudes der wissenschaftlichen Geometrie, wie er sich geschichtlich gestaltet hat," (SuF, 109) zu gewinnen ist. Im Erkenntnisproblem wiederholt Cassirer diesen Einwand, diesmal ohne Verweis auf Veronese, um ihm aber noch eine prägnante Wendung zu geben: „Warum ist die Geometrie [...] den Weg der ‚Idealisierung' gegangen [...]? Wenn sie eine Naturwissenschaft ist, [...] so müsste [... dies] als bedenklicher Irrweg erscheinen." (EP IV, 46) Cassirer fragt hier zurecht: Wenn die Geometrie tatsächlich eine empirische Wissenschaft ist, warum verfährt sie dann nicht wie eine? Auch wenn Pasch bei der Genese der Begriffe „*mit* der Erfahrung anhebt" (EP IV, 46), so steht auch bei ihm das Deduzieren und nicht Experimentieren im Zentrum. Laut Veronese brauche es für diese strengen und allgemeingültigen Beweise „ideelle[] Konstruktionen, die man ursprünglich auszuschalten versuchte." (SuF, 110) Insofern müsse jede empirische Geometrie auf Voraussetzungen zurückgreifen, „die sie der »reinen« Geometrie entnimmt" (SuF, 110). Veroneses Argument laute entsprechend, dass die „sinnliche Inhalte [...] zwar den ersten Anlaß, aber keineswegs die Grenze der mathematischen Begriffsbildung, noch den eigentlichen Bestand" (SuF, 110) bilden. Vielmehr müssten sie vom Geist verarbeitet werden, damit sie in echte mathematische Schlussfolgerungen eingehen können. Ein weiterer Kritikpunkt von Veronese an Paschs System laute, dass dort höherdimensionale Geometrien „methodisch ausgeschlossen" (SuF, 111) sind, da sie „jenseits unserer räumlichen Anschauungsmöglichkeit" (SuF, 111) liegen. Um zu diesen zu gelangen, ist gemäß Veronese „ein reiner Akt der Konstruktion" (SuF, 111) nötig, der aus dem Gegebenen durch „gewisse allgemeine[] Relationsgesetz[e]" neue Elemente erzeugt. Veronese betone allerdings, dass die so erzeugten Elemente nicht zu „absolute[n] Existenzen" (SuF, 111) hypostasiert werden sollten, um so dem Mathematiker eine „grösstmögliche logische Freiheit" (SuF, 111) zu bewahren und sich von Paul DuBois-Reymonds Idealisten[19] abzugrenzen.[20]

18. Vgl. SuF, 109 und EP IV, 45.

19. Paul DuBois-Reymonds geht in seiner Schrift *Die allgemeine Funktionentheorie* davon aus, dass sich zwei Positionen zur Existenz von mathematischen Gegenständen unversöhnlich gegenüber stehen: Während der Empirist davon ausgeht, dass nur das existiert, was in wirklichen Vorstellungen vorzufinden ist, geht der Idealist von der Existenz solcher Objekte aus, die die gedachten Grenzen zu Vorstellungsreihen sind, welche aber nicht mehr vorstellbar sind. Cassirer setzt sich in *Substanzbegriff und Funktionsbegriff* mit DuBois-Reymonds Auffassung ausführlich auseinander. Vgl. SuF, 132-141.

20. Im *Erkenntnisproblem* diskutiert Cassirer auch Helmholtz' empiristische Lösung: Dieser sieht in den Axiomen der Geometrie den Ausdruck gewisser Grunderfahrungen, die der allgemeine Raumform hinzugefügt werden. Jedoch beruhe Helmholtz' Auffassung wiederum auf dem Gruppenbegriff, dessen „logischer Charakter [...] kaum zweifelhaft sein" (EP IV, 48) kann. Vgl.

Laut Cassirer, ist mit Veroneses Umdeutung der Bedeutung der Erfahrungsinhalte jedoch die „logische Rolle der Erfahrung" (SuF, 110) verschoben und damit die Frage nach dem Verhältnis von Erfahrung und Denken in der Geometrie für die Erkenntniskritik entschieden. Insofern nämlich diese im Sinne Cassirers nach der Bedeutung der Begriffe „als Elemente der wissenschaftlichen Begründung" (SuF, 111) fragt und es nach Veronese eine „spezifische Leistung des *Intellekts* [ist], auf die man sich [. . .] zur Ableitung der Geometrie von mehreren Dimensionen berufen muß" (SuF, 111), ist damit für die Geometrie der Primat der erzeugenden Relation anerkannt und gerade nicht empiristisch begründet. Im Gegensatz zu Veronese, für den die Freiheit des Mathematikers erst bei den höherdimensionalen Räumen beginnt und nicht den dreidimensionalen euklidischen einschließt, betont Cassirer zurecht, dass diese Art der Formung auch „in den Methoden der gewöhnlichen euklidischen Geometrie anerkannt werden" (SuF, 112) muss. Denn deren Raum unterscheidet sich vom sinnlichen in fundamentalen Bestimmungen. So ist, wie Cassirer mit Verweis auf Ernst Mach und Carl Stumpf[21] herausstellt, „für die sinnliche Auffassung [. . .] jede Unterscheidung des *Ortes* notwendig an einen Gegensatz im *Inhalt* der Empfindung geknüpft. »Oben« und »unten«, »rechts« und »links« sind hier nicht gleichwertige Richtungen, die ohne Änderung miteinander vertauschbar wären" (SuF, 112). Der Raum der Sinneswahrnehmung ist also nicht homogen, wie der der Geometrie. Man kann Cassirer hier so verstehen, dass beispielsweise unsere Unterscheidung von ‚Oben' und ‚Unten' gebunden ist an unseren Gleichgewichtssinn, der sich nicht ohne weiteres ‚auf den Kopf stellen' lässt. Gleiches gilt für die Stetigkeit und Unendlichkeit des euklidischen Raumes, die, laut Cassirer, ebenfalls ideale Ergänzungen sein müssen. So sei etwa aus der Perspektive der sinnlichen Anschauung nicht zu unterscheiden, ob ein Raum stetig im Sinne der reellen Zahlen ist oder nur dicht im Sinne der rationalen Zahlen:

> Die psychologischen Untersuchungen über den Ursprung der Raumvorstellung [. . .] zeigen unverkennbar, dass der Raum unserer Sinneswahrnehmung mit dem Raum unserer Geometrie nicht gleichbedeutend, sondern gerade in den entscheidenden, konstitutiven Merkmalen von ihm getrennt ist. [. . .] Wie das Gebiet der rationalen Zahlen sich durch eine Folge von *Denkschritten* allmählich zum kontinuierlichen Inbegriff der reellen Zahlen erweiterte, so geht auch der Raum der Sinnlichkeit erst durch eine Reihe gedanklicher Umprägungen in den unendlichen, homogenen und stetigen Begriffsraum der Geometrie über. (SuF, 112f.)

EP IV, 46-48.

21. Vgl. die Fußnote 108 in SuF, 113.

Aufgrund dieser fundamentalen Unterschiede müsse also, von jeder empiristischen Begründung der Geometrie Abstand genommen werden, und Cassirer befindet es als erstaunlich, dass „aus der Möglichkeit der Metageometrie auf die empirische Bedingtheit des euklidischen Raumes geschlossen“ (SuF, 113f.) wurde. Nur weil es weitere geometrische Systeme gibt, hört, so Cassirer, die „euklidische Geometrie [...] nicht auf, ein rein *rationales* System von Bedingungen und Folgerungen zu sein“ (SuF, 114). Vor diesem Hintergrund wird nun jedoch die Frage der Anwendung der Mathematik zu einem echten Problem: Wie kann es sein, dass die durch und durch rationalen Systeme Vorhersagen in unserer Erfahrung ermöglichen?

3 Das Anwendungsproblem der Geometrien

Kants Raumauffassung könnte so charakterisiert werden, dass sie versucht, die skizzierte Problemlage aufzulösen: der Raum ist als „reine Form sinnlicher Anschauung“ bestimmt, also eine „notwendige Vorstellung a priori“ (KrV, B 36), und die Anwendbarkeit der euklidische Geometrie erklärt sich dadurch, dass sie die Wissenschaft vom Raum als Form unserer äußeren Anschauung ist. Laut Cassirer wurden gegen Kants Raumauffassung vor dem Hintergrund der Entdeckung der nicht-euklidischen Geometrien zwei entgegengesetzte Einwände erhoben. Einerseits sei der Raum gar nicht apriorisch bestimmbar und andererseits habe Kant nicht deutlich genug die „apriorische Freiheit der mathematischen Begriffe und ihre mögliche Ablösung von jeder sinnlichen Verdeutlichung“ (SuF, 114) herausgestellt, seine Raumauffassung sei noch begründet in einem „‘Erdenrest von Sensualismus‘ [Weber/Wellstein (1905, 143)][22].“ (SuF, 114) Dass Cassirer den ersten Einwand für haltlos erachtet, ergibt sich unmittelbar aus den bereits vorgestellten Überlegungen, lediglich der zweite „besitzt einen völlig konsequenten und klaren Sinn.“ (SuF, 114)

Wenn Cassirer argumentiert, dass die Funktion der Anschauung nicht mehr in der „*Begründung* der einzelnen Systeme, sondern in der *Auswahl*“ (SuF, 114) besteht, so ist damit erst einmal nicht entschieden, ob er sich diesem zweiten Einwand anschließt oder nicht; er positioniert sich hier nicht explizit.[23] Mit der Auswahl einer

22. Cassirer zitiert die *Enzyklopädie der Elementarmathematik* von Weber/Wellstein häufiger. Sie steht in einer Reihe von Veröffentlichung, die die Inhalte für den Mathematikunterricht an Schulen vom Standpunkt der universitären Mathematik einführen. Vgl. hierzu Allmendinger (2014).

23. Es ist durchaus naheliegend, dass Cassirer hier u.a. seine Marburger Lehrer im Blick hat. Deren Neuinterpretation der Kantischen Philosophie beruht gerade darauf, das allein das Denken und nicht zusätzlich noch die Anschauung als ein „Erkenntnisfaktor [...] stehen zu lassen“ (Natorp 1912, 201). Vgl. allgemein zur Marburger Schule die Übersicht Ollig (1979, 29-53).

der Geometrien ist dabei gemeint, dass die Beobachtung und das wissenschaftliche Experiment den „Weg von der Wahrheit der Begriffe zu ihrer Wirklichkeit" (SuF, 114) weisen, d.h. von den verschiedenen „Raumformen der Geometrie zu dem eindeutigen Raum der physikalischen Gegenstände." (SuF, 114) Cassirer merkt hier selbst an, dass er mit diesen Betrachtungen an die „Grenzen der reinen Mathematik" gelangt, an die sich eine „erkenntniskritische Zergliederung des Verfahrens der *Physik*" (SuF, 114) anschließen müsse. Ohne dass Cassirer hier bereits auf die Physik im engeren Sinne eingeht, betont er jedoch schon, dass die Vorstellung von der eindeutigen Zuordnung einer bestimmten mathematischen Raumform zu dem einen eindeutigen Raum der physikalischen Gegenstände fehlgehe. Denn eine solche Erwartung impliziere noch ganz im „*Baconischen* Sinne [. . . , dass d]ie Erfahrung und die Hypothese" (SuF, 115) voneinander getrennt werden können. In der Ablehnung genau dieser Erwartung zeigt sich, so würde ich behaupten, in welcher Hinsicht man Cassirer als Idealist bzw. Kantianer verstehen kann:

> Die kritische Zergliederung des Erfahrungsbegriffs zeigt dagegen, dass die Trennung, die hier vorausgesetzt wird, einen inneren Widerspruch in sich schließt. Niemals steht auf der einen Seite die abstrakte Theorie, während ihr auf der andern Seite das Beobachtungsmaterial, so wie es an und für sich und ohne jegliche begriffliche Deutung sich ausnimmt, gegenübersteht. Vielmehr muß dieses Material, wenn anders wir ihm irgendeine Bestimmtheit zusprechen sollen, stets bereits die Züge *irgendeiner* begrifflichen Formung in sich tragen. Wir können den Begriffen, die es zu prüfen gilt, die Erfahrungsdaten niemals als nackte »Fakta« entgegenstellen: Sondern es ist zuletzt stets ein bestimmtes *logisches System* der Verknüpfung des Empirischen, das an einem anderen derartigen System gemessen und von ihm aus beurteilt wird. (SuF, 115)

Dass Cassirer selbst der Auffassung ist, dass hier die These der begrifflichen Geformtheit des Beobachtungsmaterials noch nicht eingehend begründet ist, zeigt sich darin, dass er auf das Folgekapitel in *Substanzbegriff und Funktionsbegriff* verweist, das die naturwissenschaftliche Begriffsbildung zum Inhalt hat.[24] Nichtsdestotrotz ist hier aber bereits auf eine Richtung hingewiesen, in der er seine Antwort auf die Frage nach der Möglichkeit der Anwendung der Mathematik geben wird. Für Cassirer bestätigt sich in der untersuchten Entwicklung der Mathematik immer aufs neue, dass sie nur als ein rein rationales Geschäft zu verstehen ist und entsprechend eine Antwort auf die Frage ihrer Anwendbarkeit nicht durch eine Umdeutung ihres

24. Vgl hier zu noch einmal Ihmig (1997) und vor allem Ihmig (2001), das ausführlich Cassirers Idealismus und Auffassung vom Experiment sowie der Wissenschaftsentwicklung diskutiert, aber auch ein Kapitel zum Problem der Anwendung der Mathematik enthält.

Gehalts zu geben ist. Vielmehr gehen, so Cassirer, in jedes „messende Experiment [...] rein geometrische Grundannahmen über den Raum wie konkret physikalische Annahmen über das Verhalten der Körper“ (SuF, 115) ein. Wenn der Fall eintritt, dass gemessene Werte nicht den berechneten Werten der Theorie entsprechen, so „bleibt es [laut Cassirer] uns überlassen, ob wir die geforderte Einstimmigkeit zwischen Begriff und Beobachtung dadurch wiederherstellen, dass wir den mathematischen oder aber den physikalischen Teil unserer abstrakten Hypothese einer Änderung unterwerfen.“ (SuF, 115) Wobei diese Änderung bestimmten Regeln folgen müsse: so sei zunächst zu versuchen, die geforderte Einstimmigkeit zwischen Theorie und Messung durch eine Abwandlung der physikalischen Hypothesen zu erreichen und erst danach auf die mathematischen zurückzugreifen.

Henri Poincaré (1854-1912) war, laut Cassirer, der erste, der eine solche Position vertreten hat. Anfang des 20. Jahrhunderts ist es vor dem Erscheinen der Einsteinschen Allgemeinen Relativitätstheorie noch üblich, dass der physikalische Raum im Sinne der Newtonschen Physik noch durch die euklidische Geometrie beschrieben wird. Hierzu passend zitiert Cassirer 1910 in *Substanzbegriff und Funktionsbegriff* durchaus affirmativ Poincarés Position, dass ehe man „aufgrund der Ergebnisse astronomischer Messungen von der *Geometrie* Euklids zur Geometrie Lobatschefskis“ (SuF, 116) übergehe, zunächst versuchen müsse, die physikalischen Hypothesen abzuändern, „indem [man] etwa die Annahme der streng geradlinigen Fortpflanzung des Lichts einer Revision“ (SuF, 116) unterziehe. Etwa 30 Jahre später, im vierten Band des Erkenntnisproblems und nach der zwischenzeitlich veröffentlichten Allgemeinen Relativitätstheorie schreibt Cassirer, dass sich Poincarés Voraussage nicht erfüllt habe und die Physiker doch die nicht-euklidische Geometrie anwendeten, ohne aber zu erwähnen, dass er sich dessen Prognose zuvor durchaus angeschlossen hatte. Nichtsdestotrotz betont Cassirer, dass Poincarés Theorie „in rein erkenntniskritischer Hinsicht [...] weit genug [sei], um auch diesem Sachverhalt Rechnung zu tragen.“ (SuF, 53) Hier verdeutlicht Cassirer, wie er die rationalistischen und empiristischen Lösungen für das Anwendungsproblem zu unterlaufen gedenkt:

> Nimmt man [Poincarés] Anschauung an, so braucht man, um das Rätsel der ‚Anwendbarkeit‘ der Mathematik zu lösen, weder mit dem Rationalismus auf irgend eine ‚prästabilierte Harmonie‘ zwischen Vernunft und Wirklichkeit zurückgehen, noch braucht man mit dem Empirismus in den mathematischen Begriffen einfache Abbilder dieser Wirklichkeit oder Auszüge und ‚Abstraktionen‘ aus ihr zu sehen. Die Eigengesetzlichkeit des mathematischen Denkens kann jetzt in vollem Maße anerkannt werden, und gerade in der Möglichkeit der Aufstellung einer

> Mehrheit ganz freier Systeme von Axiomen dürfen wir den überzeugenden Beweis für diese ‚Autonomie' sehen. (EP IV, 51f.)

Insofern nun aber laut Cassirer „die Objekte, von welchen die Erfahrung handelt, von gänzlich anderer Art als die Gegenstände sind, von denen die Aussagen der Geometrie" (SuF, 116) gelten, werde die Erfahrung nicht einzelne geometrische Axiome oder Sätze auszeichnen können. Poincaré, dem Cassirer hier weiter folgt, sei hier wohl so zu verstehen, dass man mit den Begriffen, die in die mathematischen Urteile eingehen, dass man also mit Geraden oder Kreisen schlicht keine Experimente machen kann.[25] Erneut ist es lediglich der Vergleich zwischen einem ‚logischen System der Verknüpfung des Empirischen'[26] mit den geometrischen Systemen, der zu gehaltvollen Ergebnissen führen kann.

Cassirer fragt nun mit Poincaré, ob es nicht noch ein „*rationales* Kriterium der Unterscheidung" (SuF, 116) zwischen verschiedenen Geometrien gebe müsse, so dass für die Auswahl bei der Frage der Anwendung zwischen ihnen nicht bloß nach „subjektive[r] Willkür" (SuF, 116) entschieden werde. Die bloße logische Widerspruchsfreiheit könne hierbei nur ein notwendiges Kriterium darstellen: Hilbert hatte ja gezeigt, dass die euklidische und nicht-euklidischen Geometrien gleichermaßen widerspruchsfrei sein müssen.[27] Dennoch gebe es eine rationale Unterscheidung, die zwar vor dem Hintergrund des Satzes der Identität und des Widerspruchs nicht von Bedeutung sei, die jedoch eine Differenzierung zwischen den Geometrien liefere. Mit dem „Begriff der Gleichförmigkeit [und] Ungleichförmigkeit" (SuF, 116) erhalten wir eine notwendige und eindeutige Abfolge der Geometrien, insofern der euklidische Raum „in demselben Sinne »einfacher« [ist] als irgendeine andere Raumform, wie innerhalb der Algebra ein Polynom ersten Grades einfacher ist als ein Polynom zweiten Grades." (SuF, 117) Liegt der euklidische Raum zudem den anderen Maßgeometrien insofern zugrunde, als dass „im Infinitesimalen [...] ohne weiteres die Euklidische Norm" (SuF, 117) gilt, so zeigt sich hier:

> Die Gleichförmigkeit des euklidischen Raumes ist in der Tat nur der Ausdruck dafür, dass er lediglich als reiner Relations- und Konstruktionsraum gefaßt ist, alle sonstige inhaltliche Bestimmtheit aber, die auf einen Unterschied der *absoluten Größe* und der absoluten Richtung führen könnte, von ihm ferngehalten ist. [...] So bleibt der euklidische

25. Vgl. EP IV, 49f.
26. Vgl. erneut (s.o.) SuF, 115.
27. Interessanterweise verweist Cassirer in SuF nicht auf Hilberts Grundlagen der Geometrie, die ja durchaus bereits beweisen, dass die absolute Geometrie widerspruchsfrei ist, wenn es die reellen Zahlen sind. Vgl. hierzu auch PsF III, 409. Vgl. darüber hinaus Cassirer über Hilberts Formalismus PsF III, 435-448 und für die Bedeutung der Hilbertschen Axiomatik für Cassirers Wissenschaftsverständnis Ihmig (1997a).

> Raum freilich eine begriffliche *Hypothese*, die sich einem System möglicher Hypothesen überhaupt einreiht: Aber er besitzt nichtsdestoweniger innerhalb dieses Systems einen eigentümlichen Vorzug des Wertes und der Geltung. (SuF, 117)

Für die Anwendung der Geometrien bedeutet dies, dass wir die euklidische Form nach dem Kriterium der Gleichförmigkeit auswählen „und versuchen mit ihrer Hilfe die Bestimmtheit des *Realen* darzustellen und durchsichtig zu machen.“ (SuF, 117f.) Dass die anderen System auch eine Anwendung finden können, schließt Cassirer explizit nicht aus. Die Einbettungen der nicht-euklidischen Geometrie in die euklidische zeigen dies beispielsweise eindrücklich, und auch höherdimensionale Räume ließen sich zur Anschauung bringen; so bilde z.B. die Menge „aller Kugeln eine lineare Mannigfaltigkeit von vier Dimensionen.“ (SuF, 118) Aber nicht nur solche innermathematischen ‚Anwendungen‘ bezieht Cassirer explizit ein. Auch innerhalb der Physik sei es möglich, so Cassirer bereits 1910, dass die nicht-euklidischen Geometrien eine Anwendung finden könnten. Voraussetzung hierfür ist jedoch erneut eine funktionale Auffassung der Geometrien bzw. der Mathematik überhaupt:

> Die Punkte, von denen [die nicht-euklidischen Geometrien] handeln, sind nicht selbstständige *Dinge*, denen an und für sich irgendwelche *Beschaffenheit* zukäme, sondern sie sind lediglich die vorausgesetzten Termini der Relation selbst und erhalten in ihr und durch sie erst all ihre Eigenart. Wo uns daher irgendein Inbegriff entgegentritt, der den Regeln der Verknüpfung in irgendeiner dieser allgemeinen Beziehungslehren gemäß ist, da ist damit [...] ein Gebiet der *Anwendung* der abstrakten Sätze nachgewiesen und abgegrenzt. (SuF, 118f.)

Liefert die Physik nun Systeme, die nur durch „eine Mehrheit von *Bestimmungsstücken*“ darstellbar sind, die sich ggf. nicht in den euklidischen Raum abbilden lassen, so kann man hier laut Cassirer durchaus „von einem Mannigfaltigen mehrerer »Dimensionen« sprechen“ (SuF, 119). Diese Beschreibung passt bspw. wunderbar zu den zuvor eingeführten aber von Cassirer nicht gekannten Phasenräumen der Physik. Cassirer fasst das Verhältnis der Mathematik zu ihren Anwendungen wie folgt, und wie ich finde prägnant, zusammen:

> Nur die reinen *Bedingungszusammenhänge* selbst, die die Mathematik aufstellt, gelten unbeschränkt, während die Behauptung, daß es Existenzen gibt, die diesen Bedingungen in allen Stücken entsprechen, stets nur relative und somit problematische Bedeutung besitzt. Das

> System der allgemeinen Geometrie beweist indes, daß diese Problematik den logischen Charakter des mathematischen *Wissens* als solchen nicht berührt. Es zeigt, daß der reine *Begriff* für alle nur erdenklichen Änderungen in der empirischen Beschaffenheit der Wahrnehmungen seinerseits vorbereitet und gerüstet ist; die universellen Reihenformen bieten die Handhabe, jegliche Ordnung des Empirischen zu verstehen und logisch zu beherrschen. (SuF, 119f.)

Bisher ist jedoch weiterhin unklar, worin genau diese *Bedingungszusammenhänge* bestehen bzw. was unter Reihenbegriffen zu verstehen ist, die die Mathematik aufstellt, und wie genau sich der Raum hierin eingliedert. Für die Reihenbegriffe gibt Cassirer, wie mir scheint, keine explizite Definition, sondern charakterisiert sie vielmehr implizit. Eine solche Charakterisierung gibt Cassirer besonders prägnant in seiner Auseinandersetzung mit der projektiven Geometrie. Hier verdeutlicht Cassirer, inwiefern der projektive Raumbegriff in das System der Reihenbegriffe einzuordnen ist und wie er sich vom Zahlbegriff abgrenzt.

4 *Raum* als Reihenbegriff

Dass die Mathematik es nur mit *Bedingungszusammenhängen* zu tun hat, arbeitet Cassirer besonders prägnant und detailliert anhand der Anfänge der projektiven Geometrie[28] heraus. Laut Cassirer folgt Jean-Victor Poncelet (1788-1867), einer der Begründer der projektive Geometrie, noch in einem gewissen Sinne dem Cartesischen Erkenntnisideal. Dieses besagt, dass nur etwas als erkannt gilt, wenn es als Glied in einer deduktiven Folge verstanden wird, d.h. sein notwendiger Zusammenhang mit Anfangssetzungen bestimmt ist. In Descartes' analytischer Geometrie werden so die geometrischen Objekte auf die Zahl zurückgeführt, indem sie aus arithmetischen Gesetzen hervorgehen. Im Gegensatz dazu fordern die Begründer der projektiven Geometrie, dass der Raum nicht im Zahlbegriff aufgehen soll, sondern vielmehr mit einer eigenständigen Methode aufgebaut werden muss. Laut Poncelet ist eine solche Methode gegeben, wenn die Forschung in der sinnlich-anschaulichen Gestalt „nur einen ersten *Ansatzpunkt* [sieht], von dem aus wir kraft

28. Heis (2011) diskutiert Cassirers neukantischen Ansatz einer Philosophie der Geometrie, stellt dabei auch die zentrale Bedeutung der projektiven Geometrie heraus und behandelt ausführlich instruktive Beispielen für Cassirers Beschäftigung mit der projektiven Geometrie. (bes. 774-784) Auch wenn er betont, dass entlang des Dedekindschen Zahlverständnisses die Geometrie arithmetisiert wird, hebt er, so scheint mir, den hier entscheidenden Punkt nicht hervor: Es zeigt sich bereits mit der projektiven Geometrie, wie der Raum sich in die Reihenbegriffe einordnet und wie sein Verhältnis zum Zahlbegriff zu bestimmen ist.

einer bestimmten Regel der *Variation* ein gesamtes System möglicher Gestaltungen deduktiv herleiten.“ (SuF, 84) In diesem Sinne wären die „Grundrelationen [. . .] in ihrer Gesamtheit das wahre geometrische Objekt.“ (SuF, 84) Cassirer hebt bei Poncelet hervor, dass die Regeln nicht aus den Einzelfällen abgeleitet werden können, wie es bei einem Induktionsschluss der Fall wäre. Vielmehr haben die Grundbeziehungen den eigentlichen Primat und gemäß dieser Beziehungen ist „auch der einzelne Fall erst in seinem Gehalt bestimmbar“ (SuF, 85).

Worin nun genau die neue, synthetische Methode der projektiven Geometrie besteht, lässt sich, so Cassirer, an ihrem grundlegenden Verfahren, der Projektion, verdeutlichen. Das Verfahren zielt darauf, diejenigen „»metrischen« und »deskriptiven« Momente einer Figur [herauszuheben], die in ihrer Projektion unverändert fortbestehen.“ (SuF, 87) So bleibt beispielsweise bei der Zentralprojektion eines Dreiecks die Ordnung der Eckpunkte erhalten, während sich ihr Abstand ändert. Ebenso bleibt das Doppelverhältnis von vier Punkten auf einer Geraden erhalten. Alle Gestalten, die durch eine Projektion als zusammengehörig erkannt werden, sind Cassirer zufolge „verschiedene Ausprägungen *ein und desselben Begriffs*.“ (SuF, 87) Bei diesem Prozess der Identifikation können dann durchaus Gestalten identifiziert werden oder eine Einheit bilden, die einem von „ihrer sinnlich-anschaulichen Struktur [. . .] völlig verschiedenen »Typus«“ (SuF, 87) angehören oder denen sogar „überhaupt keine geometrische *Existenz* im Sinne der direkten Anschaubarkeit mehr entspricht.“ (SuF, 87) So werden hier beispielsweise unendlich ferne Punkte bzw. Geraden als Schnittobjekte für parallele Geraden und Ebenen eingeführt oder auch die komplexen Zahlen finden hier eine Anwendung.[29] Die Eigenschaft, dass sich zwei Geraden in einem Punkt bzw. zwei Ebenen in einer Geraden schneiden, wird hier festgehalten, auch wenn die Geraden oder Ebenen parallel sind. Es werden neue Objekte als ‚ideale‘ Schnittpunkte bzw. -geraden eingeführt, die sich nicht mehr direkt ‚anschauen‘ lassen. Von diesen Objekten kann dann gezeigt werden, dass sie alle die geometrischen Axiome erfüllen, die in keinem Verhältnis zu einem Maß stehen.

Für das Ideal eines vollständig eigenständigen Aufbaus der Geometrie durch die neue Methode muss Cassirer zufolge noch gezeigt werden, „dass es lediglich kraft [einer] ersten Grundbeziehung und ihrer wiederholten Anwendung möglich ist, sämtliche Punkte des Raumes zur Ableitung zu bringen und ihnen eine bestimmte eindeutige *Ordnung* aufzuprägen, die sie zu Gliedern eines systematischen Inbegriffs macht.“ (SuF, 91) Dieses Ideal sieht Cassirer damit erfüllt, dass Arthur Cayley und Klein zeigen können, wie sich mit einer iterierten, metrikfreien harmonischen Konstruktion aus drei ursprünglich gegeben Punkten eine „unendliche

29. Vgl. SuF, 88 und erneut Heis (2011, 781).

Mannigfaltigkeit einfacher Lagebestimmungen gewinnen [lässt], deren jede einer ganzen Zahl eindeutig zugeordnet ist“ (SuF, 92).

Auf die mathematischen Details dieses Verfahrens geht Cassirer hier nicht ein[30], sondern konzentriert sich auf das „*philosophische* Ergebnis“ (SuF, 92). Mit ihm sei endlich eine Geschlossenheit der Geometrie gegeben. Erhält man durch das Verfahren der Konstruktion harmonischer Punktpaare eine *geordnete* Mannigfaltigkeit, deren Elemente ‚den‘ Zahlen zugeordnet werden können, so könnte, laut Cassirer, zunächst der Eindruck entstehen, dass hiermit wieder auf metrische Bestimmung zurückgegangen wird. Unter der Voraussetzung, dass Zahlen immer Vielheiten sind, scheinen die gewonnen Punkte der geordneten Mannigfaltigkeit und deren Verbindungen doch wieder nur Größen zu sein. Jedoch verkenne dieser Schluss die Allgemeinheit des Dedekindschen Zahlbegriffs, der für Cassirer von entscheidender Bedeutung ist: Zahl ist hier lediglich „Ausdruck der *Ordnung in der Folge*“ (SuF, 93) und bedeutet keine Vielheit im Sinne der Kardinalzahl.[31] Auf diesen allgemeinen Zahlbegriff verweist Cassirer auch bei seiner Diskussion des Verfahrens der Konstruktion harmonischer Punktpaare. Hier sei die „Einfügung der Raumbegriffe in das Schema der Reihenbegriffe [...] endgültig vollzogen.“ (SuF, 92f.)

Cassirer deutet also das projektive Verfahren so, dass mit diesem gezeigt sei, dass es neben der Ordinalzahl auch weitere Ausgestaltungen des allgemeineren Reihenbegriffs gibt, und zwar den Raumbegriff der projektiven Geometrie. Auch wenn Cassirer selbst keine allgemeine Definition für den Reihenbegriff gibt, lässt sich aus seinen Bestimmungen des Raum- und Zahlbegriffs eine vorläufige Charakterisierung geben. So verfahren beide, Raum und Zahl, wie folgt: Beginnend mit einem Anfang wird eine Regel gesetzt, aus der durch iterierte Anwendung die Gesamtheit der ‚Gegenstände‘ entsteht. Offensichtlich unterscheiden sich Anfangssetzung und Regeln bei der Dedekindschen Definition der Ordinalzahl und der projektiven Definition des Raums. Während bei Dedekind ein einziges Element am Anfang steht, dem die Regel genau einen Nachfolger zuordnet, setzt die projektive Geometrie mehrere, unterscheidbare Elemente voraus sowie eine Regel zwischen diesen Elementen, die weitere konstruiert. Auch diese projektive Bestimmung des Raumes lässt sich, so Cassirer, auf Leibniz rückbeziehen:

> Wie bei der Zahl lediglich von einer ursprünglichen Einheitssetzung ausgegangen wurde, aus der sich sodann vermöge einer bestimmten erzeugenden Relation die Allheit der Glieder in fester Ordnung entwickelte, so wird hier zunächst eine Verschiedenheit von Punkten und

30. Cassirer verweist hier für die mathematischen Details zur Einführung einer projektiven Metrik erneut auf Weber/Wellstein (1905, §18).

31. Vgl. für das Verhältnis von Dedekinds Zahlbegriff und Cassirers Philosophie der Mathematik bzw. sein Verständnis von Begriffsbildung beispielsweise Yap (2017), Reck (2020).

> ein bestimmtes Lageverhältnis zwischen ihnen postuliert und in diesem ersten Ansatz bereits ein Prinzip entdeckt, dessen allseitige Anwendung den Inbegriff der möglichen räumlichen Setzungen aus sich hervorgehen läßt. [...] Der Raum ist hier in der Tat lediglich in seiner allgemeinsten Form als »Möglichkeit des Beisammen« überhaupt abgeleitet [...]. (SuF, 93)

Ausgehend von Cassirers Betrachtungen des projektiven Raums lässt sich allgemein das Verhältnis zwischen Zahl-, Raum-, Größen- und Reihenbegriff wie folgt darstellen: Der Reihenbegriff bildet die Grundlage für den Zahl- und Raumbegriff, die damit bestimmte Ausgestaltungen des Prinzips strenger Beziehungen sind. Auf der Grundlage des projektiven Raums lassen sich dann durch Hinzufügung eines Maßes, das die reellen Zahlen voraussetzt, metrische Räume und damit Größen definieren. Nach Cassirer beruht die Arithmetik ebenfalls auf einer synthetischen Methode und der gemeinsame Boden, auf dem die Mathematik bzw. hier die Geometrie und Arithmetik gründen, besteht in der *Art* der ‚allgemeinen *deduktiven* Methodik', auf der Reihenform oder den Funktionsbegriffen schlechthin. Dieses Verhältnis bleibt auch bestehen, wenn Cassirer in einem weiteren Abschnitt in *Substanzbegriff und Funktionsbegriff* die projektive Sicht noch einmal mit der *Allgemeinen Ausdehnungslehre* von Hermann Graßmann (1809-1877) verallgemeinert.[32]

Cassirers Deutung der Entwicklung der Geometrie und des Raumproblems stellt sich also wie folgt dar: Mit dem Aufkommen der nicht-euklidischen Geometrien wird ein substantielles Raumverständnis zunehmend problematischer und so sei die Mathematik zu einem funktionalen Verständnis übergegangen. Damit stellte sich jedoch die Frage, ob sich die euklidische Geometrie, wenn sie sich von den anderen Geometrien nicht in ihrem Geltungsanspruch unterscheide, nicht durch einen empiristischen Ursprung auszeichnen lassen könne. Auch wenn diese Versuche laut Cassirer alle fehlgehen, da sie immer auf ideale Ergänzungen zurückgreifen müssen, ließ sich dennoch die euklidische Raumform auszeichnen, indem sie sich als gleichförmiger als die anderen metrischen Geometrien herausstellte. Eine Erklärung der Anwendung wird laut Cassirer nun dadurch möglich, dass der Raumbegriff nicht mehr substantiell, sondern funktional gebildet wird, d.h. ihm liegen Bildungprinzipien zugrunde, sodass er sich in das System der Reihenbegriffe eingliedert. Interessant wäre es von hieraus weiter zu verfolgen, wie Cassirer in *Substanzbegriff und Funktionsbegriff* und anderen Schriften, die Mathematik tiefergehend untersucht und über die Mathematik hinaus auch die Begriffe der exakten

32. Vgl. SuF, 103-105. Cassirer behandelt darüber hinaus den Raum nicht nur als Reihenbegriff, sondern er spielt eine zentrale Rolle in seiner gesamten Kulturphilosophie. Vgl. hierzu bspw. Bohr (2008) und Koenig (2019).

Naturwissenschaften auf funktionale Verhältnisse zurückführt, um dann auch das Verhältnis zwischen beiden zu bestimmen. Der hier von Cassirer festgestellte Primat der Beziehung bleibt aber nicht auf die exakten Wissenschaften beschränkt, sondern wird auch auf andere Weisen der Wirklichkeitserkenntnis, auf andere symbolische Formen ausgeweitet. Damit steht seine Mathematikbetrachtung immer im Kontext einer Theorie der exakten Erkenntnis und darüber hinaus im Kontext einer allgemeinen Kulturtheorie. Darüber hinaus rückt mit Cassirers Wendung zur Kulturphilosophie die Rolle der Zeichen in den Fokus, insofern die These vertreten wird, dass die verschiedenen Formen der Objektivierung nichts anderes als verschiedene Formen der Zeichengebung sind. Eine detaillierte Konkretisierung und Spezifizierung der Form der Zeichengebund der Mathematik und ihrer Verhältnisse zu anderen exakten Erkenntnisformen sowie anderen symbolischen Formen verspricht eine Bestimmung der Mathematik, die all ihre systematisch und historischen Verflechtungen ernst nimmt und zugleich offen für weiteren Entwicklungen ist.

Literatur

Verwendete Siglen

AA IV	Immanuel Kant. *Kants Gesammelte Schriften. Bd. IV.*
EP IV	Ernst Cassirer. *Das Erkenntnisproblem in der Philosophie und Wissenschaft der neueren Zeit. Bd. 4.* (ECW 5)
SuF	Ernst Cassirer. *Substanzbegriff und Funktionsbegriff.* (ECW 6)
PsF III	Ernst Cassirer. *Philosophie der symbolischen Formen. Dritter Teil. Phänomenologie der Erkenntnis.* (ECW 13).

Primärliteratur sowie kritische und ergänzende Literatur

Allmendinger, Henrike. 2014. „'Über die Notwendigkeit regelmäßiger Vorlesungen über elementare Mathematik' – Lehramtsspezifische Vorlesungen Anfang des 20. Jahrhunderts". In: *Mathematik und Anwendungen.* Bad Berka: Thüringer Institut für Lehrerfortbildung, Lehrplanentwicklung und Medien. 146-152.

Biagioli, Francesca. 2018. „Articulating Space in Terms of Transformation Groups: Helmholtz and Cassirer“. In: *Journal for the History of Analytical Philosophy.* 6 (3): 115-131.

Bohr, Jörn. 2008. *Raum als Sinnordnung bei Ernst Cassirer.* Erlangen: Filos.

Cassirer, Ernst. 1995. *Descartes. Lehre – Persönlichkeit – Wirkung.* Hamburg: Meiner.

Cassirer, Ernst. 1997ff. *Gesammelte Werke. Hamburger Ausgabe* (ECW). Hg. von Birgit Recki, Hamburg: Meiner.

Cassirer, Ernst. 2000. *Substanzbegriff und Funktionsbegriff. Untersuchungen über die Grundfragen der Erkenntniskritik.* In: ECW 6. Hamburg: Meiner.

Cassirer, Ernst. 2000a. *Das Erkenntnisproblem in der Philosophie und Wissenschaft der neueren Zeit. Band 4. Von Hegels Tod bis zur Gegenwart.* In: ECW 5. Hamburg: Meiner.

Cassirer, Ernst. 2002. *Philosophie der symbolischen Formen. Dritter Teil. Phänomenologie der Erkenntnis.* In: ECW 13. Hamburg: Meiner.

Endres, Tobias, Pellegrino Favuzzi, und Timo Klattenhoff. 2016. *Philosophie der Kultur- und Wissensformen: Ernst Cassirer neu lesen.* Frankfurt am Main: Peter Lang Edition.

Gray, Jeremy. 1989. *Ideas of Space. Euclidean, Non-Euclidean, and Relativistic* [1979]. 2. Aufl. Oxford: Clarendon Press.

Hilbert, David. 2015. *Grundlagen der Geometrie (Festschrift 1899).* Herausgegeben und kommentiert von Klaus Volkert. Berlin/Heidelberg: Springer.

Heis, Jeremy. 2011. „Ernst Cassirer's Neo-Kantian Philosophy of Geometry". In: *British Journal for the History of Philosophy.* 19(4): 759-794.

Ihmig, Karl-Norbert. 1997. *Cassirers Invariantentheorie der Erfahrung und seine Rezeption des ‚Erlanger Programms'.* Hamburg: Meiner.

Ihmig, Karl-Norbert. 1997a. „Hilberts axiomatische Methode und der Fortschritt in den Naturwissenschaften. Zu Cassirers Wissenschaftsphilosophie". In: Enno Rudolph und Ion O. Stamatescu (Hgg.). *Von der Philosophie zur Wissenschaft. Cassirers Dialog mit der Naturwissenschaft.* Hamburg: Meiner. 63-92.

Ihmig, Karl-Norbert. 1999. „Ernst Cassirer and the Structural Conception of Objects in Modern Science: The Importance of the ‚Erlanger Programm'". In: *Science in Context.* 12 (4): 513-529.

Ihmig, Karl-Norbert. 2001. *Grundzüge einer Philosophie der Wissenschaften bei Ernst Cassirer.* Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

Kant, Immanuel. AA IV. *Prolegomena zu einer jeden künftigen Metaphysik, die als Wissenschaft wird auftreten können.* Akad.-Ausg. IV.

Koenig, Heike und Daniel Koenig. 2019. „Mensch und Raum in der Mathematik. Der Mensch als Schöpfer mathematischer Räume?" In: Julia Gruevska (Hg.) *Körper und Räume.* Wiesbaden: Springer Nature. 69-94.

Koenig, Daniel. 2019. „Ernst Cassirer und der mathematische Raum – vom Erkenntnisproblem zum Symbolproblem". In: *Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik.* Bd. 11. 35-54.

Lotze, Rudolf Hermann. 1879. *Metaphysik. Drei Bücher der Ontologie, Kosmologie und Psychologie. (System der Philosophie, Zeiter Teil: Drei Bücher der Metaphysik).* Leipzig: S. Hirzel.

Mehrtens, Herbert. 1990. *Moderne – Sprache – Mathematik. Eine Geschichte des Streits um die Grundlagen der Disziplin und des Subjekts formaler Systeme.* Frankfurt a.M.: Suhrkamp Verlag.

Natorp, Paul. 1912. „Kant und die Marburger Schule". Kant-Studien 17, 193-221.

Ollig, Hans-Ludwig. 1979. *Der Neukantianismus.* Stuttgart: Metzler.

Reck, Erich H. 2020. „Cassirer's Reception of Dedekind and the Structuralist Transformation of Mathematics". In: Erich H. Reck and Georg Schiemer (Hgg.). *The Prehistory of Mathematical Structuralism.* Oxford: Oxford University Press.

Spalt, Detlef. 2015. *Die Analysis im Wandel und im Widerstreit. Eine Formierungsgeschichte ihrer Grundbegriffe*, Freiburg/München: Karl Alber.

Volkert, Klaus. 1986. *Die Krise der Anschauung. Eine Studie zu formalen und heuristischen Verfahren in der Mathematik seit 1850.* Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Volkert, Klaus. 2013. *Das Undenkbare denken. Die Rezeption der nichteuklidischen Geometrie im deutschsprachigen Raum (1860–1900).* Berlin/Heidelberg: Springer.

Weber, Heinrich und Josef Wellstein. 1905. *Enzyplopädie der Elementar-Mathematik. Ein Handbuch für Lehrer und Studierende. Bd. II: Elemente der Geometrie.* Leipzig: Teubner.

Yap, Audrey. 2017. „Dedekind and Cassirer on Mathematical Concept Formation". *Philosophia Mathematica*, 25 (3). 369–389.

Zum 100-jährigen Jubiläum des Ernst Abbe-Gedächtnispreises

Renate Tobies

Zusammenfassung Im September 2021 jährte sich die Begründung des *Ernst Abbe-Gedächtnispreises zur Förderung der mathematischen und physikalischen Wissenschaften und deren Anwendungsgebiete* zum 100. Male. Aufgrund der Analyse von Akten aus dem Thüringischen Haupt-Staatsarchiv Weimar und aus dem Carl-Zeiss-Archiv in Jena wird dargestellt, wer diesen Preis warum initiierte, wie die Carl Zeiss-Stiftung in Jena auf diese Initiative reagierte, wer die Preise im Zeitraum bis 1942 erhielt und welcher politische Einfluss seit 1933 darauf ausgeübt wurde.

1 Die Begründung des Preises

1.1 Mitteilung in wissenschaftlichen Zeitschriften

Der Ministerialbeamte des Thüringer Volksbildungsministeriums Geheimer Regierungsrat Ernst Wuttig (1876-1935) – der schon am 1. Juli 1914 vom damaligen Großherzog Sachsen-Weimar zum Ministerialdirektor im Kultusdepartment des Staatsministeriums in Weimar ernannt worden war[1] – verkündete am Montag, den 19. September 1921, auf der Jahrestagung der Mathematiker und Physiker in Jena die Begründung des Ernst Abbe-Gedächtnispreises (*Jahresbericht der DMV* 30 (1921) Abt. 2, S. *74*). Ein Jahr später wurde in Fachzeitschriften 1922 ausführlich darüber berichtet, z. B. in den *Mathematische Annalen*:

> Die Carl Zeiss-Stiftung in Jena hat gelegentlich der Deutschen Mathematiker- und Physiker-Tagung in Jena (September 1921) die Stiftung eines *Ernst Abbe-Gedächtnispreises* zur Förderung der mathematischen und

1. Vgl. *Kirchen- und Schulblatt* 63 (1914), Heft 12, S. 1.

> physikalischen Wissenschaften und deren Anwendungsgebiete bekannt gegeben. Es sollen alle zwei Jahre die Zinsen von 100 000 Mark für hervorragende Leistungen in den oben genannten Gebieten nach den Vorschlägen von Fachausschüssen verliehen werden. Diese fällige Summe kann jedoch in jedem einzelnen Falle durch besonderen Beschluß der Carl Zeiss-Stiftung erhöht werden, da die Bestimmung getroffen ist, daß auch das Kapital selber im Laufe der Jahre aufgebraucht werden kann. Dem Preise soll eine *Ernst Abbe-Gedächtnis-Medaille*[2] beigegeben werden, die auf der einen Seite das Bildnis Abbes, des Begründers der Carl Zeiss-Stiftung, zeigt, auf der anderen Seite das Verdienst des Empfängers mitteilt. Zur Ausführung sind folgende Fachausschüsse gebildet worden:
>
> a) für Mathematik: Fricke (Braunschweig), Koebe (Jena), Weyl (Zürich),
> b) für Physik: Lenard (Heidelberg), Sommerfeld (München), M. Wien (Jena),
> c) für angewandte Mathematik und Physik: Hecker (Jena), Prandtl (Göttingen), Zenneck (München).
>
> Die erstmalige Verleihung des Preises soll für Mathematik Ende des Jahres 1924, für Physik 1926, für angewandte Mathematik und Physik 1928 erfolgen. Die einzelne Preissumme wird 10 000 Mark betragen, kann aber nach oben Gesagtem unter Umständen auch erhöht werden. Bei der Entscheidung des Preisgerichts sollen nicht nur solche Arbeiten, die erst nach dieser Bekanntmachung erscheinen, sondern auch frühere Arbeiten in Betracht gezogen werden. Besondere Bewerbung ist nicht erforderlich. (*Math. Ann.* 86 (1922) 328)

Aus den publizierten Mitteilungen geht jedoch nicht hervor, wie es zur Begründung des Preises gekommen war.

1.2 Zur Initiative des Preises

Die Initiatoren waren der Mathematiker Paul Koebe (1882-1945) und der Physiker Max Wien (1866-1938), die oben im Zitat als Jenaer Mitglieder der Fachausschüs-

2. Anlässlich Abbes 80. Geburtstag am 23. Januar 1920 war 1919 beim Leipziger Bildhauer und Medailleur Franz Robert Adolf Lehnert (1862-1948) eine Ernst Abbe-Medaille in Auftrag gegeben worden, die sich heute in der Kustodie der Friedrich-Schiller-Universität Jena befindet (Durchmesser: 60 mm; Gewicht: 98,67 g). Die Bildnis-Seite dieser Medaille sollte für die Gedächtnis-Medaille benutzt werden. Lehnert übernahm auch im Folgenden die Gestaltung der jeweiligen Rückseiten (vgl. z. B. Abb. 1).

Abbildung 1: Ernst Abbe-Medaille für Felix Klein, 1924 [UBG]

se Mathematik bzw. Physik zur Begründung des Ernst Abbe-Gedächtnispreises erwähnt wurden. Beide fungierten als Vorsitzende der Ortsausschüsse (für Mathematik bzw. Physik), welche die Jahrestagung der Mathematiker und Physiker vorbereiteten, die vom 18. bis 24. September 1921 in Jena stattfinden sollte. Die mathematischen und physikalischen Gesellschaften, d. h. die Deutsche Mathematiker-Vereinigung (DMV, gegr. 1890), die Deutsche Physikalische Gesellschaft (DPG, 1899 hervorgegangen aus der Berliner Physikalischen Gesellschaft, gegr. 1845) und die Deutsche Gesellschaft für technische Physik (gegr. 1919), wollten erstmals unabhängig von der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte (gegr. 1822) zusammenkommen, denn Letztere hatte 1920 in Bad Nauheim – auf ihrer ersten Jahresversammlung nach dem Ersten Weltkrieg – beschlossen, nur noch im zweijährigen Rhythmus zu tagen. Die Mathematiker und Physiker trafen sich seit 1921 auch in den Zwischenjahren (vgl. Tobies 1996).

Paul Koebe und Max Wien beantragten die Preisstiftung im Namen ihrer Ortsausschüsse am 24. Juli 1921 mit einem ausführlichen Schreiben an die „Carl Zeiss-Stiftung beim Kultusministerium Weimar“ (abgedruckt in Tobies 2020: 12). Sie begründeten die Notwendigkeit des Preises damit, das Andenken von Ernst Abbe (1840-1905) und dessen Leistungen ehren zu wollen, dessen Wirksamkeit weit über seinen Tod hinausragte.

Ernst Abbe war als Wissenschaftler (Physiker und Mathematiker) und Erfinder im Gebiet des optisch-wissenschaftlichen Gerätebaus, beim Erkennen und Fördern von Begabungen, als Firmenleiter mit Weitblick und Verantwortungsgefühl nahezu einmalig in seiner Zeit. Es existieren inzwischen eine Reihe Biografien über ihn. Seine *Gesammelten Abhandlungen* liegen in fünf Bänden vor (Jena: G. Fischer). Er stammte aus ärmlichen Verhältnissen, aber aufgrund seiner überdurchschnittlichen Begabung hatte er das Abitur ablegen und studieren können. Mit unermesslichem Fleiß eignete sich Abbe bereits als Gymnasiast zusätzlich Wissen in täglichem Selbststudium an. Nach Studium in Jena und Göttingen promovierte er 1861 in Physik (*Erfahrungsmässige Begründung des Satzes von der Aequivalenz zwischen Wärme und mechanischer Arbeit*) unter Wilhelm Weber (1804-1891) in Göttingen, erwarb auch tiefe mathematische Kenntnisse, u. a. bei Bernhard Riemann (1826-1866). Nicht nur in der Optik, auch in der Mathematik sind Begriffe nach Abbe benannt. In seiner mathematischen Habilitationsschrift *Ueber die Gesetzmässigkeit in der Vertheilung der Fehler bei Beobachtungsreihen* (Jena: Frommann, 1863) entwickelte er – anknüpfend an C. F. Gauß' Methode der kleinsten Quadrate – ein Kriterium, um den Wahrscheinlichkeitsgrad, die Zufälligkeit, eines Fehlers numerisch zu bestimmen. Dies ging als *Abbesches Kriterium* in die Literatur ein (Naas/Schmid 1961: 595; Schneider 1988: 219, 293–97). Dass Abbe als einer der Ersten den Poissonschen Punktprozess genauer analysierte, gilt als Pionierleistung in der Stochastik und ist bisher wenig bekannt (vgl. Seneta 1983). Diese Arbeiten ergaben sich im Zusammenhang mit der Entwicklung optischer Mess- und Beobachtungsinstrumente.

Die zweite Seite von Abbe, auf die Paul Koebe und Max Wien mit dem Gedächtnispreis aufmerksam machen wollten, war dessen besondere soziale Haltung, die in der Carl Zeiss-Stiftung ihren Ausdruck fand. Diese Stiftung beruhte auf Abbes eigenem Geld. Carl Zeiß (1816-1888) hatte Abbe (als schlecht bezahlten Privatdozenten in Jena) ab 3. Juli 1866 mit finanziellen Zuwendungen in seine optische Werkstätte einbezogen und mit Vertrag vom 22. Juli 1876 zum (stillen) Teilhaber/Mitinhaber der Firma erklärt. Zeiß honorierte damit Abbes Erfindungen und Erkenntnisse, die zum *wissenschaftlichen* Mikroskopbau, zum Erfolg und Ausbau der optischen Werkstätte geführt hatten. Abbe konnte deshalb an der Universität nur eine Honorarprofessur annehmen, wollte aber – seine soziale Herkunft nicht vergessend – das durch die optische Firma Zeiss und das Glaswerk Schott & Gen. (seit 1884) verdiente Geld nicht allein für sich und seine Familie behalten. Im Mai 1886 stiftete Abbe einen geheim gehaltenen „Ministerialfonds für wissenschaftliche Zwecke" und verfügte schließlich nach dem Tode von Carl Zeiß im Jahre 1889 die Carl Zeiss-Stiftung, womit in Jena bevorzugt Mathematik, Physik, Astronomie und – nach Erweiterung der Stiftung auf soziale Aspekte – viele weitere Gebiete und Gebäude von Universität und Stadt gefördert wurden (vgl. Tobies 1984; Stolz/Wittig 1993).

Die engen Beziehungen zwischen Universität und den Stiftungsunternehmen (Optische Firma Carl Zeiss und Glaswerk Schott & Gen.) waren damals im Vergleich mit anderen deutschen Universitäten ein Alleinstellungsmerkmal für Jena. Die ähnlich agierende, 1898 von Felix Klein (1849-1925) initiierte *Göttinger Vereinigung zur Förderung der angewandten Physik und Mathematik* war 1920/21 gerade im Auflösen begriffen.[3] Im Unterschied zur Göttinger Vereinigung, wo der Vorsitzende der Vereinigung, der Chemieindustrielle und Mäzen Henry Theodore von Böttinger (1848-1920), die Stiftungsgelder selbst verwaltete und sein Tod in den Auflösungsprozess der Vereinigung mündete, hatte Abbe die Verwaltung seiner Stiftung beim Ministerium angesiedelt und damit für den dauerhaften Fortbestand, auch nach seinem Tode, gesorgt. Die Carl Zeiss-Stiftung existiert noch heute.

Im Sommer 1921 war es höchst bemerkenswert, wie außerordentlich schnell im Thüringer Ministerium für Volksbildung und in den weiteren Gremien der Carl Zeiss-Stiftung auf den Antrag der beiden Professoren reagiert wurde.

1.3 Die Reaktion der Carl Zeiss-Stiftung

Das Land Thüringen war jung. Es beruhte auf dem Zusammenschluss der thüringischen Freistaaten Sachsen-Weimar-Eisenach, Sachsen-Meiningen, Sachsen-Altenburg, Sachsen-Gotha, Schwarzburg-Rudolstadt, Schwarzburg-Sondershausen sowie des Volksstaates Reuß, der am 1. Mai 1920 erfolgte. Der Regierungssitz war in Weimar. Dort im „Ministerium für Volksbildung im Volksstaat Thüringen" fungierte der erwähnte Ministerialdirektor Dr. jur. Heinrich *Ernst* Wuttig als Zuständiger für die Verwaltung der Carl Zeiss-Stiftung. Auf dem Amtsweg wandte sich Wuttig am 4. August 1921 schriftlich an den Stiftungskommissar der Carl Zeiss-Stiftung, ein Amt, das Friedrich Ebsen (1871-1934), Präsident des Oberverwaltungsgerichts in Jena, von 1921 bis 1933 nebenher ausübte. Wuttig bat Ebsen, die Ansicht der Geschäftsleitung der Stiftungsbetriebe (die Firmen Carl Zeiss und Schott & Gen.) zu dem Antrag der Professoren einzuholen. Aus den Ministerialakten [LATh] ist ersichtlich, dass dort ebenfalls außerordentlich schnell entschieden wurde. Dies war vor allem Rudolf Straubel (1864-1943) zu danken.

Straubel hatte 1888 – angeregt durch Abbe – mit der Dissertation „Über die Berechnung der Fraunhoferschen Beugungserscheinungen durch Randintegrale mit besonderer Berücksichtigung der Theorie der Beugung im Heliometer" beim Mathematiker Johannes Thomae (1840-1921) an der Universität Jena promoviert, sich 1893 ebenda habilitiert und erstrebte eine wissenschaftliche Karriere (vgl. Schielicke 2017). Abbe hatte ihn 1901 als wissenschaftlichen Berater für die Firma Carl Zeiss gewonnen und zum 1. April 1903 als einen Geschäftsleiter, als er selbst aus Gesundheitsgründen ausschied. Straubel erhielt zudem einen Sitz in der Geschäftsleitung des Glaswerkes Schott & Gen. und wurde zunächst stellvertretender Bevollmächtigter der Carl Zeiss-Stiftung und nach dem frühen Tod von

3. Vgl. Tobies 2019, S. 475–78; Tobies 2021, S. 560–64.

Abbes engstem Mitarbeiter Siegfried Czapski (1861-1907) Bevollmächtigter dieser Stiftung. Damit konnte Straubel 1921 maßgeblich entscheiden.

Rudolf Straubel gehörte seit 1899 der Deutschen Physikalischen Gesellschaft und seit 1900 auch der Deutschen Mathematiker-Vereinigung an. Er stand dem Projekt Gedächtnis-Preis für Abbe aufgeschlossen gegenüber. Wie Ebsen am 12. August 1921 an Wuttig in Weimar mitteilte, hatte Straubel seinen Urlaub unterbrochen und für den 9. August eine Geschäftssitzung anberaumt. Hier wurde bestimmt, dass für die Preisverleihung ein Kuratorium zu schaffen sei, dem ein Mitglied der Carl Zeiss-Stiftung angehören solle. Hinsichtlich der finanziellen Basis wurde verfügt: „100.000 M Kriegsanleihe (nominal) zur Begründung eines alle zwei Jahre zu vergebenden Abbe-Gedächtnispreises.“ [LATh, Bl.6] Bei dem Geld handelte es sich um im Ersten Weltkrieg gezeichnete Anleihen zur Finanzierung des Krieges; nun sahen die Verwalter der Stiftung offensichtlich mit der Preisverleihung eine Möglichkeit, diese schlecht verkaufbare Anleihe sinnvoll zu nutzen (vgl. auch Kiehling 1998). Es sei aber hier schon angemerkt, dass dieses Geld bis zur ersten geplanten Preisvergabe 1924 durch die Inflation verfiel [CZA, BACZ 26932]. Dennoch stellte die Carl Zeiss-Stiftung das Geld (einen Dispositionsfonds) für den Preis zur Verfügung.

2 Die Preisverleihungen bis 1932

Die Geschäftsleitung der Stiftungsunternehmen hatte unter Rudolf Straubels Management veranlasst, dass ein Kuratorium für die Preisverleihung errichtet wird. Der Mathematiker Paul Koebe übernahm die Geschäftsführung des Kuratoriums. Rudolf Straubel trat als Vertreter der Stiftungsbetriebe dem Kuratorium bei. Zu den weiteren Mitgliedern des Kuratoriums gehörten die (in Jena ansässigen) Geschäftsführer der oben im Zitat genannten Fachausschüsse: Max Wien für Physik; der Jenaer Geophysiker Oskar Hecker (1864-1938) für angewandte Mathematik und Physik; Koebe, der auch Vorsitzender des Fachausschusses für Mathematik war, gehörte dem Gremium in doppelter Funktion an. Er behielt diese Positionen (Geschäftsführer des Kuratoriums und Geschäftsführer des Fachausschusses Mathematik) auch, als er im Jahre 1926 als Professor an die Universität Leipzig wechselte. Als fünftes Kuratoriumsmitglied fungierte der jeweilige Thüringische Volksbildungsminister als oberste Verwaltungsspitze der Carl Zeiss-Stiftung. Diese fünf Kuratoriumsmitglieder entschieden über die Preisverleihung, basierend auf dem Vorschlag des jeweils zuständigen Fachausschusses. Diese fünf Namen sind auf den Urkunden der Preisträger verewigt (vgl. Abb. 2).

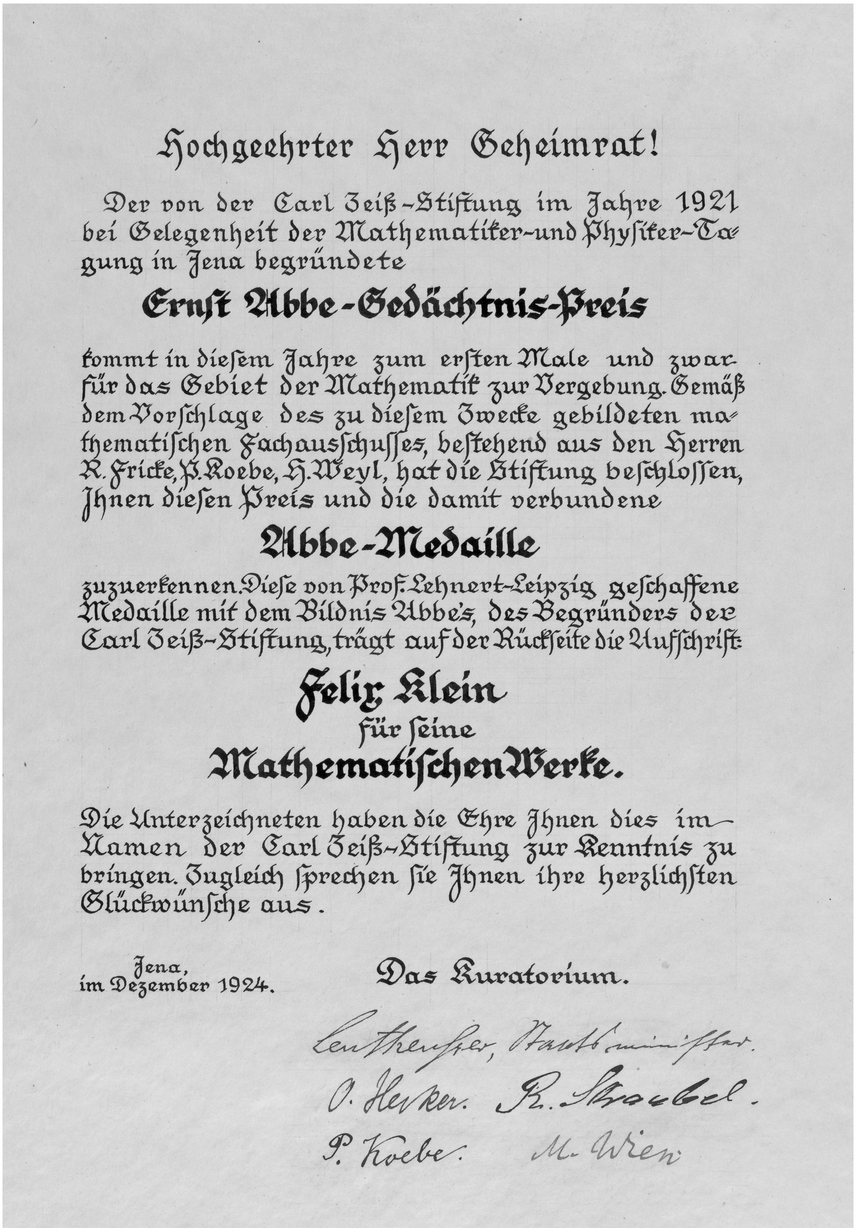
2.1 Erster Preisträger für Mathematik 1924: Felix Klein

Der Fachausschuss für Mathematik unter dem Vorsitz Paul Koebe und mit den Mitgliedern Robert Fricke (1861-1930) und Hermann Weyl (1885-1955) schlug Felix Klein als ersten Preisträger vor. Die Urkunde ist auf Dezember 1924 datiert. Klein war inzwischen 75 Jahre alt, aber noch immer wissenschaftlich aktiv. Seit 1919 hatte er, veranlasst und unterstützt durch jüngere Mathematiker/innen, an der kommentierten und ergänzten Herausgabe seiner *Gesammelten Mathematischen Abhandlungen* gearbeitet, die 1921, 1922, 1923 in drei Bänden (Berlin: Julius Springer) erschienen waren. Fricke, ein Doktorschüler Kleins, war an der Edition beteiligt gewesen und hatte zuvor bereits wichtige Vorlesungen von Klein (zur Theorie der elliptischen Modulfunktionen; zur Theorie der automorphen Funktionen) herausgebracht. So wie Fricke seine Karriere maßgeblich Klein zu danken hatte (vgl. Tobies 2019; 2021), waren auch Koebe und Weyl maßgeblich durch Klein gefördert worden. Koebe hatte – im Austausch mit Klein – vor allem dessen Beweisideen für die bereits zu Beginn der 1880er Jahre formulierten Uniformisierungssätze (Klein in Korrespondenz mit Henri Poincaré (1854-1912) stehend) realisieren können (vgl. Tobies 2021a). Hermann Weyl hatte als Privatdozent in Göttingen Vorlesungen zur Riemannschen Fläche gehalten; er baute das Jahrzehnte zuvor auch von Felix Klein bearbeitete Thema mit neueren Methoden aus. Dass er dabei von Diskussionen mit Klein profitierte, hinterließ er in seiner Schrift *Die Idee der Riemannschen Fläche* (Leipzig/Berlin: B.G.Teubner, 1913, ^{2}1923), deren 1. und 2. Auflage er „Felix Klein in Dankbarkeit und Verehrung“ widmete.

Klein wurde zu Lebzeiten – und auch danach – vielfältig geehrt. Bei der Ehrung mit dem Ernst Abbe-Gedächtnis-Preis sollten wir bedenken, dass Klein Abbe in besonderem Maße schätzte, mit ihm in persönlichen Kontakt stand, selbst kleinere Arbeiten zu optischen Problemen publizierte, die er nach Jena sandte und in denen er vor allem die bereits bei dem Iren William Rowan Hamilton (1805-1865) vorhandenen Erkenntnisse propagierte: das *Prinzip der variierenden Wirkung* bzw. die *charakteristische Funktion* (vgl. hierzu Tobies 2020: 40-49).

Wie Abbe in Jena verfolgte Klein an der Universität Göttingen das Ziel, hervorragende mathematisch-physikalische Grundausbildung mit Technik zu verknüpfen. Um den Ingenieuren das in Göttingen etablierte Gebiet technische Physik (ab 1895) zu erklären, hielt er am 6. Dezember 1895 eine Rede im Bezirksverein des Vereins Deutscher Ingenieure in Hannover und argumentierte u. a. mit dem Beispiel Ernst Abbe:

> Die Entwicklung unserer culturellen Verhältnisse drängt immer mehr darauf hin, daß eine gewisse Zahl von Persönlichkeiten gebraucht wird,



Hochgeehrter Herr Geheimrat!

Der von der Carl Zeiß-Stiftung im Jahre 1921 bei Gelegenheit der Mathematiker- und Physiker-Tagung in Jena begründete

Ernst Abbe-Gedächtnis-Preis

kommt in diesem Jahre zum ersten Male und zwar für das Gebiet der Mathematik zur Vergebung. Gemäß dem Vorschlage des zu diesem Zwecke gebildeten mathematischen Fachausschusses, bestehend aus den Herren R. Fricke, P. Koebe, H. Weyl, hat die Stiftung beschlossen, Ihnen diesen Preis und die damit verbundene

Abbe-Medaille

zuzuerkennen. Diese von Prof. Lehnert-Leipzig geschaffene Medaille mit dem Bildnis Abbe's, des Begründers der Carl Zeiß-Stiftung, trägt auf der Rückseite die Aufschrift:

Felix Klein
für seine
Mathematischen Werke.

Die Unterzeichneten haben die Ehre Ihnen dies im Namen der Carl Zeiß-Stiftung zur Kenntnis zu bringen. Zugleich sprechen sie Ihnen ihre herzlichsten Glückwünsche aus.

Jena,
im Dezember 1924.

Das Kuratorium.

Leutheußer, Staatsminister.
O. Hecker. R. Straubel.
P. Koebe. M. Wien

Abbildung 2: Urkunde zum Ernst Abbe-Gedächtnis-Preis für Felix Klein, 1924 [UBG]

> welche die mathematisch-physikalische Universitätsbildung in technischer Richtung zur Geltung zu bringen haben. [...] Sie wissen Alle, dass Siemens bei seinen grossen Unternehmungen nicht zu seinem Schaden fortgesetzt theoretische Physiker mit beschäftigt hat. Ein anderes besonders interessantes Beispiel in dieser Hinsicht gibt Zeiß' optisches Institut in Jena, dessen immer neue und überraschende Leistungen die Bewunderung des Auslandes bilden. Dieser Erfolg ist nur dadurch erreicht worden, daß ein so hervorragender Mathematiker und Physiker wie Prof. Abbe sein ganzes theoretisches Können dem [...] Zwecke des Instituts dienstbar gemacht hat. (Zitiert in Tobies 2019, S. 382)

Klein sandte seine Rede auch an den damaligen preußischen Kultusminister Robert Bosse (1832-1901) in Berlin und wurde ein Vorreiter für das Ziel, Mathematik und naturwissenschaftlich-technische Gebieten zu verknüpfen. An der Universität Göttingen gelang es Klein schließlich, Institute und o. Professuren für angewandte Mathematik und angewandte Physik u. a. einzurichten. Klein förderte aber auch, unterstützt durch den Mathematiker August Gutzmer (1860-1924), dass Abbe und die Carl Zeiss-Stiftung Geld verfügten, damit an der Universität Jena angewandte Mathematik und technische Physik etabliert werden konnten – dies gab es vor dem Ersten Weltkrieg an keiner anderen deutschen Universität.[4]

2.2 Erster Preisträger für Physik 1926: Wilhelm Wien

Die erste Preisverleihung für Physik an Wilhelm Wien (1864-1928) zeigt, dass wiederum ein bereits hoch Geehrter mit der Auszeichnung bedacht wurde. Er hatte 1911 den Physik-Nobelpreis für seine Arbeiten über die Gesetzmäßigkeiten der Wärmestrahlung erhalten. Seit 1920 bekleidete er in der Nachfolge von Conrad Wilhelm Röntgen (1845-1923) den Lehrstuhl für Experimental-Physik an der Universität München. Es sei erwähnt, dass Wilhelm Wien ein zwei Jahre älterer Cousin von Max Wien war, dem Jenaer Vorsitzenden des Fachausschusses Physik. Ausschussmitglied Arnold Sommerfeld (1868-1951) agierte an der Universität München als Professor für theoretischen Physik neben dem Experimentalphysiker Wilhelm

4. Ausgehend von Extraordinariaten (in den 1890er Jahren) konnte Klein in Göttingen o. Professuren für angewandte Gebiete erreichen (1904 für angewandte Mathematik; und durch die Kreation von sog. *persönlichen* Ordinariaten (an die Person gebunden) 1904 auch für Geophysik, 1907 für technische Physik, 1907 für angewandte Elektrizitätslehre), vgl. Tobies 2019: 387–90. Jena begann 1902 mit einer a. o. Professur für das Gesamtgebiet angewandte Mathematik und technische Physik; ab 1909 getrennte a. o. Professuren für die beiden Gebiete; o. Professuren seit den 1920er Jahren (vgl. Tobies 2020).

Wien. Ausschussmitglied Philipp Lenard (1862-1947), Universität Heidelberg, war Nobelpreisträger des Jahres 1905 gewesen.[5]

2.3 Erster Preisträger für angewandte Mathematik und Physik 1928: Alexander Meißner

Der in Wien geborene Physiker Alexander Meißner (1883-1958) schuf als Mitarbeiter der Gesellschaft für Drahtlose Telegraphie m.b.H. (Telefunken) in Berlin eine nach ihm benannte „Einrichtung zur Erzeugung elektrischer Schwingungen". Die „Meißner-Schaltung" bildete eine maßgebliche Basis für die Nachrichtenübermittlung, Grundlage für die Rundfunktechnik. Das auf der Medaille festzuhaltende Kurzurteil über den Geehrten hieß: „Professor Dr. Dr.-Ing. h. c. Alexander Meißner – Berlin, dem *Erfinder des Röhrengenerators*" (*Math. Ann.* 101 (1929) 608). Der Preis wurde im Februar 1929 verliehen; die Preissumme betrug – wie 1926 – 3000 Reichsmark [CZA, BACZ 26932] und wurde „als Ehrenausgabe der Firma verbucht" [LATh C 440, Bl.24].

Der Vorschlag für die Jenaer Auszeichnung kam von den Ausschussmitgliedern Oskar Hecker (1864-1938), seit 1922 Direktor der Reichsanstalt für Erdbebenforschung in Jena und seit 1923 o. Honorarprofessor an der Universität Jena; vom Strömungsphysiker Ludwig Prandtl (1875-1953), der 1904 durch Felix Klein als Professor für angewandte Mechanik an die Universität Göttingen geholt worden war (seit 1907 pers. o. Professur), seit 1922 als Vorsitzender der neu gegründeten *Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik* (GAMM) und seit 1925 als Direktor des Kaiser-Wilhelm-Instituts für Strömungsforschung in Göttingen fungierte; und von Jonathan Zenneck (1871-1959), TH München, ein Funkpionier und Miterfinder der Kathodenstrahlröhre.

Zur damaligen Zeit wurde an der Universität Jena ebenfalls zu Funktechnik und Elektronenröhren geforscht, insbesondere unter dem Experimentalphysiker Max Wien und dem technischen Physiker Abraham R. Esau (1884-1955). Esau hatte hier 1925 die a. o. Professor für technische Physik erhalten und war 1927 zum o. Professor ernannt worden.[6] Er war 1906-09 an der Technischen Hochschule Danzig Assistent von Max Wien gewesen, hatte 1908 an der Universität Berlin promoviert und 1909/10 als Einjährig-Freiwilliger in einer Funkabteilung eines Telegraphenbatallions gearbeitet. Im Jahre 1912 bei Telefunken eingetreten – wo

5. Lenards Kontakte mit Hitler seit 1923, seine öffentliche Unterstützung der NSDAP und sein massiver Antisemitismus – den ebenso Max Wien vertrat – dürfen allerdings nicht verschwiegen werden.

6. Zu Esaus Verhalten und Positionen während der NS-Zeit siehe unten, Abschnitt 3.

seit 1903 das erste Röhrenforschungslaboratorium bestand –, arbeitete Esau in den Gebieten Funkempfang und drahtloser Überseeverkehr. Im Jahre 1925 realisierte er die erste UKW-Übertragung der Welt, zwischen Jena und Kahla. Mit seinen Schüler/innen griff er in weitere Entwicklungen der Bereiche Funkmesstechnik, Senderöhren- und speziell Magnetfeldröhrentechnik ein (vgl. Tobies 2009).

2.4 Zweiter Preisträger für Mathematik 1930: Philipp Furtwängler

Das Ausschussmitglied Robert Fricke verstarb am 18. Juli 1930, sodass nur noch Koebe und Weyl über den nächsten mathematischen Preisträger entschieden. Ihre Wahl fiel auf den Zahlentheoretiker und Felix-Klein-Schüler Philipp Furtwängler (1869-1940). Dieser hatte 1896 bei Klein in Göttingen mit der Dissertation „Zur Theorie der in Linearfaktoren zerlegbaren ganzzahligen ternären kubischen Formen“ promoviert, hatte sich als Autor mehrerer Beiträge an „Kleins“ *Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen* beteiligt und war nach verschiedenen Zwischenstufen 1912 o. Professor der Mathematik an der Universität Wien geworden, wo er weitere herausragende Ergebnisse in der Zahlentheorie fand und zahlreiche bedeutende Schüler/innen hervorbrachte. Seine 1929 veröffentlichte berühmteste Arbeit mit dem Beweis des Hauptidealsatzes[7] bildete den maßgeblichen Ausgangspunkt für die Ehrung mit dem Abbe-Preis.

Die Preisverleihung sollte zu Beginn einer „Gästetagung“ der Jenaer Mathematischen Gesellschaft erfolgen, die anlässlich der Einweihung des Abbeanums für den 26. bis 28. Oktober 1930 organisiert wurde. Das Abbeanum war ein 1929/30 mit Mitteln der Carl Zeiss-Stiftung im Bauhausstil errichtetes Gebäude, in dem das Institut für angewandte Mathematik und das Institut für angewandte Optik untergebracht wurden. Die angewandte Mathematik leitete der Felix Klein-Schüler Max Winkelmann (1879-1946), unterstützt durch seine Assistentin Dorothea Starke (1902-1943), die bei ihm 1929 als erste Jenaer Mathematikerin promoviert worden war (mit s.c.l.) und deren Assistentenstelle aus den Mitteln der Carl Zeiss-Stiftung finanziert wurde (vgl. Bischof 2014). Das Institut für angewandte Optik stand unter der Leitung von Felix Jentzsch (1882-1946).

Die Tagung wurde von ca. 70 Mathematiker/innen und theoretischen Physikern deutscher Universitäten – von Hamburg bis München – sowie Forschern der Firma Zeiss besucht. Vortragende waren die Mathematiker Koebe, Weyl, Ludwig

7. Furtwängler, Ph.: „Beweis des Hauptidealsatzes für die Klassenkörper algebraischer Zahlkörper“. *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität* 7: 14–36.

Bieberbach (1886-1982), Wilhelm Blaschke (1885-1962), Richard von Mises (1883-1953); die Physiker Georg Joos (1894-1959), Walther Bauersfeld (1879-1959), Arnold Sommerfeld, Felix Jentzsch und der Geochemiker Viktor Moritz Goldschmidt (1888-1947), Professor in Göttingen von 1929 bis zum erzwungenen Ausscheiden.[8] Philipp Furtwängler konnte aus Gesundheitsgründen nicht nach Jena reisen; ihm wurden Medaille, Urkunde und Scheck für das Preisgeld (3000 Mark) in Wien übergeben.

2.5 Zweiter Preisträger für Physik 1932: Victor Franz Hess

Der Fachausschuss Physik bestand jetzt aus Max Wien, Arnold Sommerfeld und dem Göttinger Physiker Robert W. Pohl (1884-1976), *the real father of solid state physics*, der hinzugebeten worden war, nach Ausscheiden von Lenard (Emeritierung in Heidelberg, 1932). Sie hatten zwei Kandidaten vorgeschlagen, „in gleicher Linie Prof. Back – Hohenheim und Prof. Hess – Innsbruck“, aber „die endgültige Entscheidung zwischen den beiden Anwärtern der Zeiss-Stiftung“ überlassen. [LATh C 440, Bl. 34] Somit entschied Rudolf Straubel. Der Name von Ernst Back (1881-1959) ist mit dem Paschen-Back-Effekt verknüpft, wichtig für die Atomforschung mittelst Spektralanalyse. Straubel wählte den österreichischen Physiker Victor Franz Hess (1883-1964), weil dessen Leistung grundlegender und der eigene Anteil besser identifizierbar sei. Von der Qualität der Wahl zeugt die Tatsache, dass Hess im Jahre 1936 auch den Nobelpreis für Physik erhielt, für diejenigen Arbeiten, die in Wien 1912 zur Entdeckung der kosmischen Strahlung geführt hatten. Hess, der die Nazis ablehnte, emigrierte 1938 mit seiner jüdischen Frau in die USA.

3 Die Preisvorschläge nach 1933

Trotz des drastischen politischen Einschnittes 1933 in Deutschland wurde die Verleihung des Preises fortgesetzt. Doch zuerst wurde Rudolf Straubel hinausgedrängt. Die anderen drei Zeiss-Geschäftsleiter, Walther Bauersfeld, Paul Henrichs (1882-

8. Zum Programm und den Teilnehmer/innen vgl. Tobies 2020: 24–25.

1962)[9] und August Kotthaus (1884-1941)[10], stellten ihn – veranlasst durch massiven Druck vom NS-Ministerium in Weimar – im Juni 1933 vor die Alternative, sich von seiner aus jüdischem Elternhaus stammenden Ehefrau Marie Straubel geb. Kern (1865-1944)[11] scheiden zu lassen oder aus der Geschäftsleitung auszuscheiden. Straubel wählte Letzteres (vgl. Schielicke 2017).

Bauersfeld übernahm 1934 Straubels Position im Preis-Kuratorium. Er hatte an der TH Berlin-Charlottenburg Maschinenbau studiert und war mit der Dissertation *Die automatische Regulierung der Turbinen* (1905) zum Dr.-Ing. promoviert worden. Am 1. August 1905 erhielt er die Leitung eines Konstruktionsbüros bei Zeiss in Jena, übernahm aber 1907/08 noch einen Spezialauftrag (Studium des mechanischen und dynamischen Fliegens) des Sonderausschusses der Jubiläumsstiftung der Deutschen Industrie in Berlin, bevor er sich endgültig in Jena niederließ. Straubel hatte Bauersfeld zum 1. April 1908 als Czapskis Nachfolger in die Geschäftsleitung geholt, wo er zugleich 2. Bevollmächtigter der Carl Zeiss-Stiftung wurde. Von seinen Leistungen sei die Idee und Entwicklung einer freitragenden Kuppel für Projektionszwecke (Basis für die Zeiss-Planetarien) hervorgehoben. Die Carl Zeiss-Stiftung schuf für ihn zum 1. April 1927 eine „a. o. Stiftungsprofessur für Sondergebiete der technischen Physik“ (Schwerpunkte „Planetarien und Optik“) an der Universität Jena.

Aufgrund der NS-Politik ergaben sich weitere personelle Änderungen in Positionen, die Bezug zur Carl Zeiss-Stiftung hatten: Der parteipolitisch neutrale *Stiftungskommissar* Friedrich Ebsen starb am 9. Januar 1934 im Alter von 63 Jahren. Der NS-Minister Fritz Wächtler (1891-1945)[12] hatte zum 1. Juni 1933 den NS-Gefolgsmann Julius Dietz als Stiftungskommissar eingesetzt. Das Statut der Carl Zeiss-Stiftung wurde ohne Rücksicht auf den Stifterwillen „politisch“ angepasst. U. a. entfiel das darin verankerte Gebot der Toleranz gegenüber Abstammung, Bekenntnis und Parteistellung von Mitarbeitern (§ 56).

9. Henrichs hatte 1901 in der Firma Zeiss eine kaufmännische Lehre absolviert, 1906 eine Zweigniederlassung in London übernommen und baute nach dem Ersten Weltkrieg die (nationale und internationale) Vertriebsorganisation erneut auf. 1926 war er in die Geschäftsführung von Zeiss eingetreten und wurde – nachdem Straubel herausgedrängt worden war – 1934 auch Mitglied der Geschäftsleitung des Glaswerkes Schott & Gen. Nach 1945 mit in die amerikanische Besatzungszone transportiert, konnte Henrichs ab 1948 seine Karriere in Oberkochen fortsetzen. (Schreiner 2012)

10. Kotthaus, der wie Bauersfeld an der TH Berlin Maschinenbau studiert hatte, kam 1910 als Betriebsingenieur zu Zeiss und war 1920 zum Mitglied der vierköpfigen Geschäftsleitung avanciert.

11. Marie Straubel engagierte sich in der Jenaer Frauenbewegung, übernahm 1902 den Vorsitz der Jenaer Abteilung des Vereins „Frauenbildung – Frauenstudium“ und war Gründungsmitglied des Jenaer Kunstvereins. Als die Deportation drohte (ihr Mann verstarb am 2.12.1943), wählte sie am 20. April 1944 den Freitod.

12. NSDAP-Mitglied seit April 1926, Volksbildungsminister in Thüringen seit 1932, von 1933-35 zugleich Innenminister; ab Dezember 1935 NS-Positionen in Bayreuth u. a.

Eine Denkschrift der Zeiss-Geschäftsleitung an die Thüringische Landesregierung bewirkte, dass Wächtler versetzt und Abraham Esau zum Stiftungskommissar ernannt wurde (vgl. David 1980). Der technische Physiker Esau gehörte seit 1. Mai 1933 der NSDAP an, war von 1932-35 und 1937-39 Rektor der Universität Jena. Ab 1939 agierte er in Berlin als Präsident der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt und bekleidete eine Professur für Militärtechnik an der TH Berlin. Als Koebe von seinen Ämtern zurücktrat (vgl. Abschnitt 4), übernahm Esau auch den Vorsitz des Kuratoriums für den Abbe-Preis [LATh, C 440 Bl.95-96], ohne tatsächlich aktiv zu werden.

Paul Koebe fungierte bis Frühjahr 1942 als Geschäftsführer des Kuratoriums der Preisstiftung sowie als Vorsitzender des Fachausschusses Mathematik und blieb bei seiner Haltung, die Auszeichnung an höchste wissenschaftliche Leistung zu knüpfen. Er kümmerte sich wie bisher in Leipzig darum, dass die Medaillen und die Urkunde künstlerisch gefertigt wurden und stimmte dafür Texte und die Namen der Unterzeichner mit dem Ministerium in Weimar ab. Am 9. Oktober 1935 schrieb Koebe an Dr. Stier in Weimar, wer bis 1932 die Urkunde für den Preis unterzeichnet hatte; er nannte die Namen, die oben auf der Urkunde in Abb. 2 stehen. Noch vor Dezember 1935 wurde vom Ministerium verfügt, dass nun die Urkunde unterzeichnen würden: Staatsminister Fritz Wächtler sowie die Professoren Koebe, Max Wien, Hecker und Bauersfeld. [LATh, C 440 Bl. 51-52; 56].

Nachdem Wächtler in ein NS-Amt nach Bayern gewechselt war, wurde Fritz Sauckel (1894-1946) – der wegen seiner NS-Verbrechen 1946 in Nürnberg zum Tode durch den Strang verurteilt werden sollte – oberste Verwaltungsspitze der Carl Zeiss-Stiftung. Als sich im April 1937 der „Reichs- und Preußische Minister des Innern“ in Berlin dafür interessierte, ob der Ernst Abbe-Gedächtnis-Preis eine staatliche oder eine private Auszeichnung sei, ließ das Thüringische Ministerium übermitteln, dass es eine private Auszeichnung sei, und dass jetzt auf der Urkunde formuliert sei „Für die Verwaltung der Carl Zeiß-Stiftung gez. Sauckel, Reichsstatthalter in Thüringen“. [LATh, C 40 Bl.67-69]

Der langjährige Ministerialbeamte Ernst Wuttig, bis 1933 für die Carl Zeiss-Stiftung zuständig, verstarb 1935 im Alter von 59. An dessen Stelle trat Friedrich Stier (1886–1966), der seit 1921 Regierungs- und Vortragender Rat im Thüringischen Volksbildungsministerium und seit 1922 De Facto-Kurator der Universität Jena und Leiter der Abteilung Hochschulen im Volksbildungsministerium war. Stier trat 1933 der NSDAP bei und sah sich veranlasst, für die potentiellen Träger des Ernst Abbe-Gedächtnis-Preises zusätzlich politische Urteile einzuholen. Entscheidungsprozesse dauerten länger und wurden davon bestimmt. [LATh, C 40]

Mitten im Krieg gab es weitere Änderungen. Das Mitglied der Zeiss-Geschäftsleitung Paul Henrichs wurde am 31. August 1941 Bevollmächtigter der Carl Zeiss-Stiftung [CZA, BACZ 84443] und ließ eine neue Satzung erarbeiten. Gemäß dieser Satzung vom 27. Juli 1942 übernahm Abraham Esau den Vorsitz des Ausschusses (bisher Kuratorium genannt) der Abbe-Preis-Stiftung [LATh, C 440 Bl.95-96]. Als Vorsitzender wurde er befugt, Ausschussmitglieder zu berufen – was letztlich keine Wirkung mehr hatte. Die Verleihung des Abbe-Gedächtnis-Preises sollte nun jeweils an Abbes Geburtstag (23. Januar) erfolgen. Dies wurde am 23. Januar 1943 (für 1940) zum ersten und letzten Male vollzogen.

3.1 Zweiter Preisträger für angewandte Mathematik und Physik 1934: Ludwig Prandtl

Der oben als Mitglied des Fachausschusses für angewandte Mathematik und Physik bereits erwähnte Ludwig Prandtl wurde nun als Preisträger vom „zuständigen satzungsmäßigen Fachausschuß“ vorgeschlagen. Für ihn waren ebenfalls 3000 RM und die Medaille (mit der von Koebe entworfenen Aufschrift „Meister der Strömungsforschung“) vorgesehen. Prandtls Leistungen im Gebiet der Strömungsphysik (Hydro- und Aerodynamik) sind unbestritten (vgl. Eckert 2017). Anlässlich der Preisvergabe erhielt er „ein politisches Unbedenklichkeits-Zeugnis von der NSDAP“, welcher Prandtl nicht angehörte. Die Prozesse verzögerten sich dennoch. Koebe durfte die Entscheidung über die Preisverleihung schließlich im September 1935 auf der Tagung der Mathematiker und Physiker in Stuttgart verkünden; die Preisverleihung an Prandtl (für 1934) erfolgte auf einer Festsitzung der Mathematischen Gesellschaft zu Jena am 6. Februar 1936. Friedrich Karl Schmidt (1901-1977), ein mathematischer Enkel Emmy Noethers (1882-1935), hatte damals den Vorsitz dieser Gesellschaft inne. In der Festsitzung gab Prandtl einen „Überblick über den heutigen Stand der Kenntnis von den turbulenten Strömungen“; als Zweiter sprach Koebe über „Konforme Abbildung und Hydrodynamik". [LATh, C 440, Bl.41-58] [CZA, BACZ 26932]

3.2 Dritter Preisträger für Mathematik 1936: Wilhelm Blaschke

Der Geometer Wilhelm Blaschke, oben als Vortragender bei der Festsitzung 1930 erwähnt, wurde für 1936 als Preisträger vorgeschlagen, aufgrund „seiner Verdienste auf dem Gebiete der Integralgeometrie“. Der in Graz (Österreich) geborene Blaschke hatte das mathematische Institut der Universität Hamburg seit Begründung

1919 zu einem bedeutenden Zentrum ausgebaut. Er verfasste auch zahlreiche ausgezeichnete Lehrbücher, u. a. drei Bände Vorlesungen über Differentialgeometrie (J. Springer, 1921-29), bei denen er sich an Felix Kleins *Erlanger Programm* orientierte (Reichardt 1967: 6). Abgestimmt mit Klein edierte Blaschke auch Kleins *Vorlesungen über höhere Geometrie* neu (J. Springer, 1926). Im Vorwort schrieb er: „*Kleins* gruppentheoretischer Aufbau der Geometrie, wie er ihn zuerst 1872 in seinem *Erlanger Programm* entworfen und dann 1893 in seiner *Einleitung in die höhere Geometrie* näher ausgeführt hat, ist für die Weiterentwicklung der Geometrie, ja auch der Physik heute so wichtig und lebendig als je.“ 1931 und 1932 übernahm Blaschke Gastprofessuren in den USA (Baltimore; Chicago).

Ministerialrat Friedrich Stier schrieb am 29. Dezember 1936 an Adolf Rein (1885-1979), der Historiker und damals Rektor der Universität Hamburg war, um „vertrauliche Auskunft über die Person und die politische Zuverlässigkeit“ von Blaschke zu erhalten. [LATh, C 40, Bl.61] Adolf Rein – ein Sohn des verstorbenen Jenaer Reformpädagogen Wilhelm Rein (1847-1929) – gehörte wie Stier der NSDAP an. Da Blaschke 1933 ebenfalls der NSDAP beigetreten war, wurde die Preisvergabe aus politischer Sicht bedenkenlos akzeptiert. Nach 1945 erhielt Blaschke weitere wissenschaftliche Ehrungen in Ost und West; 1946 wurde er entnazifiziert und seine politische Haltung nicht mehr erwähnt (Reichardt 1967).

Für die Preis-Verleihung (3000 Reichsmark) am Samstag, den 12. Juni 1937, veranstaltete die Mathematische Gesellschaft zu Jena wiederum eine Festsitzung im großen Hörsaal des Abbeanum, wobei Blaschke als einziger Vortragender „Über die Stellung der Mathematik im neuen Deutschland“ sprach. [LATh C 40, Bl.73] Seine Rede wurde im *Jenaer Volksblatt* vom 14. Juni 1937 referiert. Er schloss mit den Worten von Leonardo da Vinci: „Wer die erhabene Weisheit der Mathematik tadelt, nährt sich von Verwirrung“. [Ebd., Bl.79]

3.3 Dritter Preisvorschlag für Physik 1938: Walther Bothe

Der Fachausschuss für Physik hatte vorgeschlagen, Walther Bothe (1891-1957) „in Anerkennung seiner Verdienste um die Entdeckung der Beryllium-Strahlen“ auszuzeichnen, wie in einer Niederschrift über eine Sitzung der Carl Zeiss-Stiftung (20/1938) notiert wurde [LATh, C 440, Bl.78]. Bothe lieferte insgesamt wichtige Beiträge zur Begründung der modernen Kernphysik. Im Jahre 1954 sollte er mit dem Physik-Nobelpreis geehrt werden. Die Verleihung des Ernst Abbe-Gedächtnis-Preises wurde jedoch verhindert.

Bothe war ein Schüler von Max Planck (1858-1947) und 1932 gegen Lenards Wunsch auf dessen Lehrstuhl an der Universität Heidelberg gelangt. Der emeritierte Lenard und dessen Schüler agierten dort derart unerträglich, sodass Bothe seinen Lehrstuhl aufgegeben und 1934 das Direktorat des physikalischen Teilinstituts am Kaiser-Wilhelm-Institut für medizinische Forschung in Heidelberg übernommen hatte (vgl. Eckart et al. 2006: 1043, 1098–103).

Als Ministerialrat Stier das politische Urteil über Bothe einzuholen hatte, wandte er sich am 6. Januar 1939 an Heinrich Vogt (1890-1968), Direktor der Sternwarte Königsstuhl in Heidelberg. Stier fragte Vogt, der bereits seit 1931 der NSDAP angehörte, „ob Sie politisch oder sonst in der Person des Auszuzeichnenden irgendwelche Bedenken sehen." [Ebd., Bl.79] Vogt antwortete am 11. Januar 1939: „In wissenschaftlicher Hinsicht hat Herr Bothe sicher die Auszeichnung verdient. Und in politischer Hinsicht ist er zwar nie hervorgetreten, aber ich glaube, dass man da auch keine Bedenken gegen die Verleihung des Preises an ihn zu haben braucht." [Ebd., Bl. 80] Stier leitete diese Antwort am 12. Januar 1939 zustimmend an Esau und Koebe [ebd., Bl. 81].

Der als „Stiftungsführer" fungierende Thüringer „Reichsstatthalter" Fritz Sauckel verhinderte jedoch die Preisverleihung. Stier informierte Koebe am 28. April 1939, dass er am 1. April folgende Antwort vom Ministerium erhalten habe: „Der Herr Reichsstatthalter hat nicht viel Meinung für den Professor Dr. Bothe in Heidelberg und wirft die Frage auf, ob der Preis nicht auch dem Professor Esau oder einem anderen Jenaer Gelehrten zugeteilt werden könne." [Ebd., Bl.85]

Koebe bestand für die Preisverleihung auf hohem wissenschaftlichem Niveau und hatte daraufhin noch einmal ein Urteil vom Physikalischen Institut in Leipzig erbeten. Gerhard Hoffmann (1880-1945), seit 1937 o. Professor für Experimentalphysik in Leipzig und inzwischen „Schriftwalter" für die Fachkommission Physik zum Ernst Abbe-Gedächtnis-Preis, gab wiederholt ein herausragendes fachliches Urteil für Bothe ab. Koebe sandte dies nach Weimar und arrangierte für den 11. Juni 1939 ein Treffen mit Stier und Hoffmann. [Ebd., Bl.88-89] Letztlich wurde dieser Preis nicht verliehen. Aus der Ministeriums-Akte ist nicht ersichtlich, worauf die politische Intrige konkret beruhte.

3.4 Dritter Preis für angewandte Mathematik und Physik 1940: Heinrich Barkhausen

Koebe ergriff als Geschäftsführer des Kuratoriums Ende März 1940 die Initiative, die Wahl des Preisträgers für 1940 in Angriff zu nehmen. Neben ihm bildeten Ludwig Prandtl und Walther Bauersfeld (als „Schriftwalter“) die Auswahlkommission. Sie schlugen Heinrich Barkhausen (1881-1956), Professor für Telegraphie und Telephonie und Direktor des Instituts für Schwachstromtechnik an der TH Dresden, vor.

Mit dem Namen von Barkhausen sind zahlreiche Erfindungen in der Nachrichtentechnik verknüpft. Er hatte in Göttingen u. a. bei Felix Klein studiert, dessen Vorlesung *Einleitung in die Theorie der Differentialgleichungen* (SS 1904) gehört und zweimal in Kleins „Seminaren zur angewandten Mathematik“ vorgetragen (im Seminar Elastizitätslehre, 1904/05 und im Seminar Elektrotechnik, SS 1905) [Protokolle, Bd.21:60–72; Bd.22:60–71]. Das waren interdisziplinäre Seminare, in deren Leitung Klein jüngere Kollegen einbezogen hatte, um ihnen seine Art der Verbindung von Mathematik mit Naturwissenschaften und Technik nahezubringen. Barkhausen hatte somit Seminare erlebt, die Klein mit Carl Runge (1856-1927, o. Prof. angewandte Mathematik seit 1904), mit den erwähnten Ludwig Prandtl (a. o. Prof. angewandte Mechanik seit 1904), mit Hermann Th. Simon (1870-1918, a. o. Prof. angewandte Elektrizitätslehre, 1907 o. Prof.) und auch Woldemar Voigt (1850-1919, o. Professor für theoretische Physik) leitete. Beispielhaft sei erwähnt, dass Klein für das Seminar Elektrotechnik als Ziel benannte, „die Theorie derjenigen elektrischen Ströme in Drähten“ zu untersuchen, „welche mathematisch durch die Lösungen gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen mit constanten Coefficienten dargestellt werden“. Dabei wurden verschiedene Instrumente (harmonische Analysatoren; Transformator; Oszillograph) u. a. analysiert. (vgl. Tobies 2014)

Barkhausen promovierte angeregt durch Simon und erhielt nach Publikation seiner Dissertation „Das Problem der Schwingungserzeugung mit besonderer Berücksichtigung schneller elektrischer Schwingungen“ (1907) sofort ein Stellenangebot von Siemens (Berlin). Nach der Habilitation 1911 wurde er als Professor für Schwachstromtechnik an die TH Dresden berufen, wo das deutschlandweit erste Institut für dieses Gebiet für ihn gebaut wurde. Hier setzte er fort, was er in Göttingen gelernt hatte, Theorie und Praxis eng zu verknüpfen.

Barkhausen empfing den Preis (für 1940) im Rahmen einer Festveranstaltung im Abbeanum am Samstag, den 23. Januar 1943 (Abbes Geburtstag), und präsentierte den Vortrag „Der Siegeszug der Elektronenröhre und seine Grenzen“. [LATh, C 440 Bl.105]; [CZA, BACZ 26932].

Koebe hatte sich bereits zuvor von seinen Ämtern verabschiedet.

4 Der Rücktritt von Paul Koebe und der Ausklang

Paul Koebe richtete am 23. März 1942 einen Brief an den „Stiftungskommissar der Carl Zeiss-Stiftung, Herrn Staatsrat Dr. Esau“. Darin führte er sein Befremden darüber aus, dass die letzten beiden Vorschläge zur Verleihung des Ernst Abbe-Gedächtnis-Preises (an Bothe und an Barkhausen) bis zu diesem Zeitpunkt nicht realisiert worden waren. Er schrieb, dass sich im Verlaufe der Zeit „wichtige Veränderungen“ ergeben haben und dass er somit beabsichtige, „seine Ämter nunmehr zur freien Verfügung niederzulegen“. Koebe gab damit die Geschäftsverwaltung des Kuratoriums und den Vorsitz des Fachausschusses Mathematik auf. Er schlug vor, in Jena ein besonderes Archiv für die Akten zu begründen. Schließlich sandte er die bei ihm in Leipzig befindlichen Akten mit einem Schreiben vom 4. Mai 1942 an Walther Bauersfeld, der das Archiv dafür einzurichten gedachte. [CZA, ZA 26932]

Esau holte nun sein Versäumnis nach, die „Zusage des Reichsstatthalters“ für die Verleihung des Preises an Heinrich Barkhausen zu erhalten, was zum 14. Juli 1942 geschah. [Ebd.] Am 27. Juli 1942 wurde eine neue Satzung für die Preisstiftung verabschiedet, deren Ausarbeitung Paul Henrichs veranlasst hatte, nachdem er am 31. August 1941 Bevollmächtigter der Carl Zeiss-Stiftung geworden war [CZA, BACZ 84443]. Gemäß dieser Satzung übernahm Abraham Esau den Vorsitz des Ausschusses (bisheriges Kuratorium) der Preis-Stiftung [LATh, C 440 Bl.95-96]. Er veranlasste noch, dass Barkhausen mit dem Preis geehrt wurde.

Damit endeten diese Preisverleihungen, wenn sich auch das Thema noch 1944 und 1946 in den Akten spiegelte [ebd.]. Spätere Bestrebungen in Oberkochen, den Ernst Abbe-Gedächtnis-Preis wieder aufleben zu lassen, wurden nicht umgesetzt. [CZA, ZA MO 190; CZO 263].

Die Kammer der Technik, die von 1946 bis 1992 bestand, verlieh als höchste Auszeichnung eine Ernst Abbe-Medaille für besondere ingenieurtechnische Leistungen.

Im Freistaat Thüringen existiert seit 2009 ein „Ernst-Abbe-Preis für innovatives Unternehmertum“, der mit 100.000 Euro dotiert ist und vom Thüringer Ministerium für Wirtschaft, Wissenschaft und Digitale Gesellschaft, von der STIFT, dem TÜV Thüringen e.V. und der Ernst-Abbe-Stiftung getragen wird.

Literatur

[CZA] Carl Zeiss Archiv Jena.

[LATh] Landesarchiv Thüringen – Hauptstaatsarchiv Weimar, C 440: Stiftung eines Ernst-Abbe-Gedächtnispreises, 1921-1943.

[UBG] Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen, Handschriftenabteilung, Nachlass F. Klein.

Bischof, Thomas (2014): *Angewandte Mathematik und Frauenstudium in Thüringen: eingebettet in die mathematisch-naturwissenschaftliche Unterrichtsreform seit 1900 am Beispiel Dorothea Starke* (Schriftenreihe des Collegium Europaeum Jenense, 44). Jena: Garamond.

David, Walter (1980): "Kotthaus, August". In: *Neue Deutsche Biographie* 12, 621–22.

Eckart, Wolfgang U.; Sellin, Volker; Wolgast, Eike (Hg.) (2006): *Die Universität Heidelberg im Nationalsozialismus.* Heidelberg: Springer.

Eckert, Michael (2017): *Ludwig Prandtl. Strömungsforscher und Wissenschaftsmanager. Ein unverstellter Blick auf sein Leben.* Berlin/Heidelberg: Springer.

Kiehling, Hartmut (1998): „Der Funktionsverlust der deutschen Finanzmärkte im Weltkrieg und Inflation 1914-1923“. *Jahrbuch für Wirtschaftsgeschichte* 1: 11–58.

Naas, Josef; Schmid, Hermann Ludwig (Hg.) (1961): *Mathematisches Wörterbuch. Mit Einbeziehung der Theoretischen Physik.* Bd. 1. Leipzig: B.G. Teubner.

[Protokolle] Protokollbücher der Seminare Felix Kleins, Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen.

Reichardt, Hans (1967): „Wilhelm Blaschke†“. *Jahresbericht der DMV* 69 (1967) Abt. 1, S. 1-8.

Schielicke, Reinhard E. (2017): *Rudolf Straubel, 1864-1943.* Jena: Vopelius.

Schneider, Ivo (Hg.) (1989): *Die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie von den Anfängen bis 1933. Einführungen und Texte.* Berlin: Akademie-Verlag.

Schreiner, Katharina (1912), mit dem Jenaer Arbeitskreis und Hans Skoludek: *Zeiss Ost – Zeiss West.* Nerkewitz: Eigenverlag.

Seneta, E. (1983): „Modern Probabilistic Concepts in the Work of E. Abbe and A. de Moivre”. *Math. Scientist* 8: 75–80.

Stolz, Rüdiger; Wittig, Joachim (Hg.) (1993): *Carl Zeiss und Ernst Abbe. Leben, Wirkung, Bedeutung.* Wissenschaftshistorische Abhandlung. Jena: Universitätsverlag.

Schlote, Karl-Heinz; Schneider, Martina (2011): *Mathematische Naturphilosophie, Optik und Begriffsschrift. Zu den Wechselbeziehungen zwischen Mathematik und Physik an der Universität Jena in der Zeit von 1816 bis 1900.* Frankfurt a.M.: Harri Deutsch.

Tobies, Renate (1984): „Untersuchungen zur Rolle der Carl Zeiss-Stiftung für die Entwicklung der Mathematik an der Universität Jena". *NTM-Schriftenreihe für Geschichte der Naturwissenschaften, Technik und Medizin* 21, H. 1: 33–43.

Tobies, Renate (1996): „Physikalische Gesellschaft und Deutsche Mathematiker-Vereinigung". In: D. Hoffmann/F. Bevilacqua/R.H. Stuewer, eds., *The Emergence of Modern Physics.* Pavia: La Goliardica Pavese, 479–94.

Tobies, Renate (1996): „Physik: Berufsfeld für Frauen. Trends seit 1900, unter Berücksichtigung der ersten promovierten Physikerinnen in Jena." In: E. Wendler/A. Zwickies (Hg.), *100 Jahre Frauenstudium in Jena. Bilanz und Ausblick* (Texte zum Jenaer Universitätsjubiläum, Bd. 5), Jena: Verlag IKS Garamond, 55-81.

Tobies, Renate (2014): „Das Seminar Elektrotechnik innerhalb der Lehre von angewandter Mathematik an der Universität Göttingen, 1905". In: M. Fothe/M. Schmitz/B. Skorsetz/R. Tobies, *Mathematik und Anwendungen* (Forum 14). Bad Berka: Thillm, S. 42–49.

Tobies, Renate (2019): *Felix Klein: Visionen für Mathematik, Anwendungen und Unterricht.* Berlin: Springer Spektrum (574 S.). Revised and expanded in Engl. *Felix Klein: Visions für Mathematics, Applications, and Education* (Vita Mathematica, 20). Cham: Birkhäuser/ Springer Nature, 2021 (676 pp.)

Tobies, Renate (2020): „Symbiose von Wissenschaft & Industrie. Der Ernst Abbe-Gedächtnispreis und der Einfluss des ersten Preisträgers auf Entwicklungen an der Universität Jena." *Jenaer Jahrbuch zur Technik- und Industriegeschichte* 23: 11–67.

Tobies, Renate (2021a): „Felix Klein und Paul Koebe: *Durchführung eines im Grunde doch Kleinen Programms.*" In: H. Fischer/T. Sauer/Y. Weiss (Hg.), *Exkursionen in die Geschichte der Mathematik und ihres Unterrichts.* Münster: WTM-Verlag, 274–91.

Štefan Schwarz und die Entstehung der Halbgruppentheorie

Štefan Porubský

Zusammenfassung Štefan Schwarz war ein slowakischer Wissenschaftler, der während des 2. Weltkrieges in der Kriegsisolation als einer der ersten Mathematiker den Begriff der Halbgruppe definierte und aktiv als Gegenstand unabhängiger Forschung nutzte, die Grundeigenschaften studierte und den Ausbau ihrer Theorie nach dem Kriegsende maßgebend beinflusste.

1 Einleitung

Štefan Schwarz (1914-1996) war ein weltweit anerkannter slowakischer Mathematiker, der meist für seine Beiträge zur Theorie der Halbgruppen bekannt ist. Da die Halbgruppen, wie wir sie heute verstehen – als Mengen mit einer assoziativen Binäroperation – zu dem Komplex der einfachsten algebraischen Strukturen gehören, kann man ihre Spuren unabhängig voneinander in mehreren Zweigen der Mathematik finden. Obwohl der Begriff der Halbgruppe heute als einfacher als der der Gruppe angesehen wird, wurden Mathematiker zu seiner Definition erst durch eine detaillierte Analyse der verschiedenen möglichen Begriffsbestimmungen einer Gruppe geführt. Strukturen, die wir heute als Halbgruppen bezeichnen, hießen am Anfang der ‚Emanzipation' „Gruppen", und eine präzise Definition des Gruppenbegriffs war noch im ausgehenden 19. Jahrhundert keineswegs klar.

Eine der ersten systematischen Studien des Halbgruppenbegriffs wird in der Regel dem russischen Mathematiker Anton Kazimirovitsch Sushkevitsch (1889-1961) zugeschrieben, der Anfang 1920 gewisse verwandte Strukturen zu studieren begann. Als eigenständiger Zweig der Algebra ist die Halbgruppentheorie an verschiedenen Orten rund um den Globus entstanden, welche in der entscheidendsten Phase der begrifflichen Ausprägung durch den zweiten Weltkrieg voneinander getrennt waren und somit beinahe keinen Kontakt hatten: in den Vereinigten Staaten, in der Sowjetunion und in der Slowakei.[1]

2 Die Schuljahre

Štefan Schwarz wurde am 18. Mai 1914 in Nové Mesto nad Váhom (dt. Neustadt a.d.Waag auch Waag-Neustadtl), damals noch in Österreich-Ungarn, heute in der Slowakei, in einer jüdischen Familie geboren. Sein Vater Vojtech war Hausierer und seine Mutter Mária war Schneiderin. Das Ehepaar hatte drei Kinder, die älteste Tochter Kornélia, dann Sohn Štefan und die jüngste Tochter Viera.

Štefan Schwarz wurde wie üblich im Alter von 6 Jahren eingeschult. Nach der vierjährigen Grundschule setzte er die Schulausbildung in seinem Geburtsort am sogenannten reformierten Realgymnasium fort. Dies war ein Schultyp, der einen 8-jährigen Lehrgang anbot. Das Realgymnasium betonte Mathematik, Naturwissenschaften und moderne Sprachen. Im Gegensatz zum klassischen Gymnasium, dem ältesten Schultyp, wurden keine klassischen Sprachen unterrichtet. Die Schulform stammt aus dem Jahr 1908, wurde aber nach der Gründung der Tschechoslowakei teilweise neu organisiert. Sie hatte fast den gleichen Lehrplan wie das klassische Gymnasium, allerdings wurde Altgriechisch durch Französisch und darstellende Geometrie ersetzt. Auf Gymnasien und Realgymnasien war der Anteil der Stunden, die den Sprachen gewidmet waren, die Hälfte. Auf reformierten Realgymnasien existierte auch die Möglichkeit, als zweite lebende Sprache Russisch zu wählen. Das war der Fall in Nové Mesto nad Váhom. Wie Schwarz später erwähnte, waren die Russischkenntnise für ihn eine große Hilfe,[2] als 1935 die erste „unglaublich billige russische Literatur", wie er sagte, in Prag erhältlich war.

1. Für weitere Einzelheiten s. (Hollings 2014), obwohl manche Details zu den Ereignissen in der Slowakei nicht immer aus erster Hand stammen und deshalb verzerrt sind.

2. Russisch war nur eine der Möglichkeiten, aber Nové Mesto war eine der wenigen Städte in der Slowakei, in der Russisch angeboten wurde. Es wurde in den 7. und 8. Klassen vier Stunden pro Woche unterrichtet. Französisch dagegen wurde sieben Jahre lang unterrichtet.

Wie Schwarz später seine mathematischen Anfänge lachend kommentierte, begann er sie in seiner vierten Gymnasialklasse „als Dieb der Mathehefte meiner älteren Schwester“, die sich auf die Abschlussprüfung vorbereitete. Tatsächlich war sein erster richtiger mathematischer Mentor der Lehrer in der 5. Klasse. Er stellte ihm die Zeitschrift *Rozhledy matematicko-fyzikální* (Mathematisch-physikalische Horizonte) vor. Diese war[3] eine Zeitschrift der *Tschechoslowakischen Gesellschaft von Mathematikern und Physikern* seit 1921. Ihr Ziel war die Förderung der Mathematik, der darstellenden Geometrie sowie der Physik und Astronomie. Die Zeitschrift ging aus einer Beilage mit ähnlichen Inhalten zur Zeitschrift *Časopis pro pěstování matematiky a fyziky*,[4] hervor, wo sie seit 1892 erschien.

Rozhledy matematicko-fyzikální erschien viermal im Schuljahr. Ein wichtiger und regelmäßiger Bestandteil jedes Bandes war ein Fernwettbewerb für die Schüler. Pro Schuljahr wurden in dieser Zeit 20 mathematische Probleme, 10 aus der Physik und 5 aus der darstellenden Geometrie veröffentlicht. 1929, d. h. in der 5. Klasse, begann Schwarz die Karriere eines Wettbewerbsteilnehmers, indem er die Lösung eines einzigen Problems einsendete. Im nächsten Jahr löste er jedoch bereits 9 und 1931 alle 20 mathematischen Probleme und 4 aus der darstellenden Geometrie. Dies brachte ihm den ersten Preis.

1932 schloss Schwarz das Gymnasium mit der Reifeprüfung mit Auszeichnung und einem Vermerk ab, dass er überdurchschnittliche Kenntnisse aus der Mathematik nachgewiesen habe.

3 An der Karls-Universität

Zu dieser Zeit gab es in der Slowakei keine Möglichkeit, Mathematik an einer Universität zu studieren. Die einzigen Möglichkeiten in der damaligen Tschechoslowakei zum Studium der Mathematik waren die Tschechische Karls-Universität in Prag, die Deutsche Universität in Prag und die 1920 gegründete Masaryk-Universität in Brno. Schwarz entschied sich für die Karls-Universität. Als er sich im Herbst 1932 dort immatrikulierte, gab es in der mathematischen Abteilung der Naturwissenschaftlichen Fakultät 6 Professoren (K. Petr, B. Bydžovský, M. Kössler, V. Hlavatý, V. Jarník und E. Schönbaum), einen unbezahlten Professor (Q. Vetter für Geschichte und Didaktik der Mathematik), einen Assistenten (V. Knichal) und

3. Die Zeitschrift gibt es immer noch, jetzt aber als Organ der *Tschechischen Gesellschaft von Mathematikern und Physikern.*

4. „Zeitschrift für die Pflege der Mathematik und Physik“ frei übersetzt. Eine Zeitschrift der Gesellschaft der tschechischen Mathematiker und Physiker seit 1872, wahrscheinlich die älteste mathematische Zeitschrift in der gesamten Österreichisch-Ungarischen Monarchie.

einen Privatdozenten (V. Kořínek; seit 1935 Professor). Später schrieb Schwarz: *„An der Universität habe ich viel von meinen Lehrern wie Prof. B. Bydžovský, Prof. K. Petr, Prof. V. Jarník, Vl. Kořínek und anderen gelernt. Aber es war das Gymnasium und das Lösen der Probleme aus der Zeitschrift* Rozhledy*, die in mir die Liebe zur Mathematik und eine Art gesunden Ehrgeiz hervorbrachten.*“

Schwarz war ein eifriger Student. Sein Studienbuch enthält 34 Stunden an Vorlesungen und Seminaren im ersten Semester seines Studiums (Wintersemester 1932/33). Dann 42 im zweiten Semester, 47 im dritten, 38 im vierten, 57 im fünften, 65 !! im sechsten, 46 im siebten, 42 im achten, 30 im neunten und 11 im zehnten (Sommersemester 1936/37). Obwohl die Liste der belegten Vorlesungen und Seminare nicht unbedingt mit den tatsächlich besuchten identisch sein muss, zeigt der Vergleich mit anderen Studenten, dass Schwarz sein Studium sehr ernst nahm.

Ursprünglich wollte er Mathematik- und Physiklehrer an einem Gymnasium werden. Er hasste immer in der Ausbildung und Lehre die Trennung der Physik von der Mathematik. Hingegen schätzte er eine interdisziplinäre Auffassung der Wurzeln der klassischen Analysis, wie sie im ersten Drittel des 20. Jahrhunderts gelehrt wurde. Seine Vorlesungen in Bratislava über klassische Mechanik zu Beginn seiner Karriere während des Krieges und anfangs der fünfziger Jahre waren jahrzehntelang berühmt.

Es ist schwer einzuschätzen, wer an der Universität den größten Einfluss auf seine mathematischen Fortschritte hatte. Er lobte die Vorträge von Bydžovský (1880-1969) über algebraische Geometrie. Am meisten beeinflussten ihn vielleicht Karel Petr (1868-1950), Vojtěch Jarník (1897-1970) und Vladimír Kořínek (1899-1981). Kořínek war 33, Jarník 35, beide Schüler von Petr, der zu dieser Zeit 64 Jahre alt war. Schwarz beschrieb Jarník und Petr als Personen unterschiedlicher Natur. Jarníks Vorträge waren klar, und er verwendete einen sehr kultivierten Wortschatz. Petr hingegen demonstrierte alles anhand konkreter Beispiele. Er betonte den rechnerischen Hintergrund der Methoden, ein Stil, den Schwarz übernahm, wie seine späteren Arbeiten zeigen, die oft viele unterstützende Beispiele enthalten.

An der Universität wurde Schwarz sofort ein Bewunderer von Karel Petr, der einer der bekanntesten tschechischen Mathematiker der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts war und als Vater der tschechischen Mathematikschule ansehen werden kann. Seit seinem ersten Semester besuchte Schwarz alle seine Vorlesungen und Seminare, und wie er oft betonte, verpasste er während seines Studiums keine einzige Stunde. Andererseits besuchte Schwarz Jarníks Vorlesungen auch noch als Assistent.

Im Sommersemester 1936 belegte Schwarz das sogenannte *publicum*[5] von Petr, das unter dem Titel *Über Faktorisierung von Polynomen in irreduzible Faktoren über den Körper der rationalen Zahlen* einstündig jeden Freitag angeboten wurde. Von den elf Arbeiten, die Petr in den dreißiger Jahren verfasste, sind es zwei (Petr 1935) und (Petr 1937), die für die weitere mathematische Orientierung Schwarzs von Bedeutung waren und mit ziemlicher Sicherheit die Grundlage für diese Vortragsreihe bildeten. Was die eigentliche Motivation Petrs für diesen Fragenkomplex war, ist nicht bekannt, algebraische Gleichungen waren allerdings eine der Hauptforschungsinteressen von Petr.[6] In dieser Zeit standen die Probleme im Zusammenhang mit der Faktorisierung nicht so im Zentrum wie heute, was der Grund dafür sein dürfte, dass Petrs Ergebnisse im Ausland kaum Interesse fanden.

1936 richtete Petr Schwarzs Aufmerksamkeit auf die Forschungsprobleme aus der Theorie der Polynome über endlichen Körpern. Ob Petrs Vorschlag oder die obige Vorlesung zuerst kamen, kann man heute nicht mehr entscheiden. Es ist auch möglich, dass die Vorlesung als Einführung in das Thema für Schwarz bestimmt war, da Petr eine solche oder ähnliche Vorlesung weder zuvor noch später gehalten hat.[7] Die Tatsache, dass Petrs Vorschlag auf fruchtbaren Boden fiel, bewies Schwarz mit seiner Dissertation *Über die Reduzierbarkeit von Polynomen über endlichen Körpern* von 1937 (Schwarz 1939). Er verallgemeinerte Petrs Bedingung auf die Körper der algebraischen Zahlen. In dieser Zeit existierte der Begriff des Doktorvaters, wie wir ihn jetzt kennen, nicht. Trotzdem war Schwarz faktisch Petrs letzter Doktorand.[8]

Es sollte erwähnt werden, dass in Petrs Arbeit zum ersten Mal im Zusammenhang mit der Faktorisierung von Polynomen eine Matrix erscheint, die seit 1971 als Berlekamps bekannt ist. Die entsprechende Matrix spielte auch bei Schwarzs Verallgemeinerung eine zentrale Rolle. Aus historischen Gründen wäre es deshalb gerechter, die Matrix Petr zuzuschreiben und sie als Petrs oder Petr-Schwarzs Matrix zu bezeichnen. Für weitere Details s. (Porubský 2022a).

5. D.h. eine freie, nicht studiengebührenpflichtige Vorlesung. Zu den Aufgaben eines ordentlichen Professors gehörte, einmal in drei Semestern, eine Vorlesungsreihe abzuhalten, die sich nicht mit seinen regulären Vorlesungen deckte und die möglichst seine eigenen Forschungsinteressen spiegelte.

6. Er schrieb ungefähr 15 Artikel zu diesem Thema, wie z.B. über die Trennung der Wurzeln, Bedingungen unter denen die Wurzeln real sind, über dem Sturmschen Satz, usw.

7. Über diese Vorlesung erfuhr der Verf. erst während des Studiums von Dokumenten in den Archiven der Karls-Universität. Hier hat er auch gefunden, dass diese Vorlesung tatsächlich nur zwei Personen belegten! Die zweite war eine gewisse Gerda Lustigová. Interessanterweise schrieb sie sich, nachdem sie im Sommersemester 1935 das reguläre Acht-Semester-Studium der Mathematik und Physik abgeschlossen hatte, im darauffolgenden Wintersemester 1936 in eine einzige aber merkwürdige Vorlesung *Chemie der Kampfgase* ein. Im folgenden Sommersemester war Petrs Vorlesung wieder ihre einzige besuchte Vorlesung.

8. Über Arbeiten aus dem Gebiet der endlichen Körper s. (Lidl 1984).

Noch während seines Studiums hatte Schwarz seit Oktober 1934 eine bezahlte Stelle als studentische Hilfskraft. Nach seiner Promotion wurde er ab 1. Oktober 1937 Assistent am Mathematischen Institut der Karls-Universität. Es gab nur zwei Assistenten der Mathematik – ihn und V. Knichal. Diese Assistentenstelle hatte er bis zu seinem Wechsel zur Slowakischen Technischen Universität (STU) in Turčiansky Svätý Martin in der Zentralslowakei inne.

4 Zurück in der Slowakei

Der Wechsel in die Slowakei war das Ergebnis eines Regierungsdekrets vom Dezember 1938 im Zusammenhang mit der Erklärung der slowakischen Autonomie (in der Zeit der noch bestehenden Tschechoslowakei). Auf diese Weise wurden etwa 80-100 slowakische Staatsangestellte in mehreren Wellen in die Slowakei abgeschoben und „der slowakischen Autonomieregierung zur Verfügung gestellt“. Unter diesen Personen, die aus Prag zurück in die Slowakei versetzt wurden, befand sich auch der Physiker Dionýz Ilkovič (1907-1980). In Prag war Ilkovič in den Jahren 1930-32 der Assistent des Professors für physikalische Chemie Jaroslav Heyrovský, der 1959 den Nobelpreis für Chemie für die Erfindung der Polarographie erhielt. Hier formulierte er die nach ihm benannte Ilkovič-Gleichung, die in der Polarographie eine wichtige Beziehung zwischen dem Diffusionsstrom und der Konzentration des Depolarisators beschreibt. Am 19. 2. 1940 bekam er den Ruf als Professor der technischen Physik an die STU, die inzwischen von Martin nach Bratislava verlegt worden war. Später waren Schwarz und Ilkovič durch eine dauerhafte Freundschaft verbunden.

Wie schon erwähnt, gab es in der Slowakei keine Möglichkeit, Mathematik oder auch naturwissenschaftliche bzw. technisch orientierte Fächer zu studieren. Das war das Resultat eines nicht ganz verständlichen Verhaltens der tschechoslowakischen Regierungen. In der Slowakei war bis 1918 in den höheren Schulen aller Gattungen die Unterrichtsprache Ungarisch. Es gab hier eine einzige Universität, die *Elisabeth-Universität* in Bratislava.[9] Diese wurde 1921 endgültig geschlossen, nachdem am 21. September 1919 eine neue, *Tschechoslowakische staatliche Universität*

9. Die Elisabeth-Universität wurde im Jahr 1912 gegründet und begann ihren Betrieb mit 3 von geplanten 4 Fakultäten. An der Medizinischen Fakultät begann 1917 der spätere ungarische Nobelpreisträger Albert Szent-Györgyi seine medizinische Laufbahn. Die Naturwissenschaftliche Fakultät wurde bis Kriegsende nicht eröffnet. Obwohl nach dem I. Weltkrieg die Universität nach Pécs (Fünfkirchen) übersiedelt wurde, wurden die ungarischen Vorlesungen an der Juristischen Fakultät bis Sommersemester 1921 in Bratislava gehalten und das obwohl ihre Einrichtungen schon am 21. September 1919 die tschechoslowakische Administration übernommen hatte.

genannt,[10] in der Stadt eröffnet worden war. Sie sollte aus 4 Fakultäten bestehen: der medizinischen, juristischen, philosophischen und der naturwissenschaftlichen. Die letzte wurde aber erst 1940, nach dem Zerfall der Tschechoslowakei, hastig geöffnet. Das geschah unter dem Druck einer großen Zahl der slowakischen Studenten, die die tschechische Universität verlassen hatten, nachdem die deutschen Behörden alle tschechischen Universitäten geschlossen hatten. Den slowakischen Abgeordneten in der tschechoslowakischen Nationalversammlung gelang es nicht, die Erfüllung des Gesetzes über die Gründung der Universität in ganzem Umfang durchzusetzen. Ähnlich war auch die Situation bei der Gründung einer technischen Universität.

Seit 1919 versuchten die Slowaken mehrfach, in der ostslowakischen Stadt Košice (dt. Kaschau) eine technische Universität zu gründen. Von den Personen, die in unserer Geschichte eine Rolle spielen werden, erwähnen wir Jozef Sivák[11], einen Abgeordneten der Tschechoslowakischen Nationalversammlung für die slowakische Volkspartei und Jur Hronec[12], der seit 1928 Professor der Mathematik an der Tschechischen technischen Universität in Brno (Brünn) war. Nachdem nach einem beinahe 20-jährigen Tauziehen die STU in Košice am 25. Juni 1937 endlich gegründet wurde, musste sie dreimal umziehen. Das erste Mal nach dem ersten Wiener Schiedsspruch, in dem die Gebiete, inklusive Košice, mit ungarischer Bevölkerungsmehrheit in der Südslowakei und in der Karpatenukraine Ungarn zugesprochen wurden. Am 5. Dezember 1939 begannen die ersten Vorlesungen in Martin, wo Schwarz im April desselben Jahres seine Assistentenpflichten begonnen hatte. An ihren endgültigen Sitz in Bratislava übersiedelte die STU bereits 1939. Der Rek-

10. Nach sehr kurzer Zeit auf *Komenský Universität* umbenannt, aber in den Jahren 1939-1954 als *Slowakische Universität* bezeichnet.

11. Jozef Sivák (1886-1959) war ein slowakischer Politiker, Pädagoge, Schriftsteller und Journalist, der dem gemäßigten Flügel der Volkspartei angehörte. 1928 zeichnete ihn Papst Pius XI. mit dem Päpstlichen Orden des heiligen Silvester (Ordo Sancti Silvestri Papae) für die Entwicklung des kirchlichen Bildungswesens in der Slowakei aus. Am 9. März 1939 wurde er, noch von dem tschechoslowakischen Präsidenten Hácha, zum Ministerpräsidenten der Slowakischen Autonomen Regierung und neben dem Finanzminister auch zum Minister aller übrigen Ministerien ernannt. Zu dieser Zeit hielt er sich zur feierlichen Krönung von Papst Pius XII. in Rom auf. Als er von der Ernennung erfuhr, weigerte er sich, diese anzunehmen. Am 11. März 1939 wurde er dann zum Minister für Bildung und nationale Aufklärung ernannt. Später widersetzte er sich den Deportationen von Juden aus der Slowakei und war entschlossen, aus Protest als Minister zurückzutreten. Er trat aber erst am 5. September 1944 als Zeichen des Protestes gegen die Einladung deutscher Truppen zur Unterdrückung des Slowakischen Nationalaufstands zurück. Nach dem 2. Weltkrieg wurde er zu zwei Jahren Gefängnis verurteilt. 2002, anlässlich des 60. Jahrestages der Deportation von Juden aus der Slowakei, bedankte sich der Verband der tschechoslowakischen Juden in Israel bei seiner Tochter für die Hilfe ihres Vaters bei der Rettung von Juden.

12. Jur Hronec (1881–1959) war ein slowakischer Mathematiker. Er studierte Mathematik und Physik an der Universität Klausenburg (Ungarisch Kolozsvár, heute Cluj). 1912 verteidigte er seine Doktorarbeit unter der Leitung von Professor Ludwig Schlesinger in Gießen. 1923 habilitierte er sich an der Karls-Universität Prag.

tor der Universität wurde J. Hronec,[13] der auch einen der zwei mathematischen Lehrstühle inne hatte. Schwarz war sein Assistent bis zu seiner Verhaftung.[14]

Die Slowakische Republik mit der Hauptstadt Bratislava[15] war ein autoritärer Staat, welcher von 15. März 1939 bis 8. Mai 1945 existierte, alle faschistischen Merkmale trug und ein Verbündeter der Achsenmächte war (Kaiser 1969). Nach der Ausrufung der Slowakischen Republik ordnete die Regierung schon am 24. April 1939 an, Juden von allen staatlichen und öffentlichen Stellen auszuschließen. Adolf Eichmann wurde nach Bratislava geschickt, um die Umsetzung der Endlösung mit der Führung des Landes zu besprechen. Seit September 1941 traten in der Slowakei strenge antijüdische Gesetze in Form des sogenannten *Jüdischen Kodex* in Kraft (Lipscher 1980). Sie schlossen die Juden sehr umfassend vom öffentlichen Leben aus und öffneten später die Tür zu deren Deportation in die deutschen Konzentrationslager.[16]

Der allgemeine Mangel an Lehrern und Beamten in der Slowakei nach 1918 war behoben worden, indem man die Lücken mit tschechischen Fachkräften schloss. Nach der Gründung der Slowakischen Republik 1939 wurden diese auf schamlose Weise aus der Slowakei vertrieben. In seiner Funktion als Bildungsminister setzte sich Sivák für den Verbleib der tschechischen Professoren an der Universität und auch an der STU ein. Ein ähnliches Problem ergab sich, als qualifizierte Juden ihre Positionen verlassen mussten. Die auf diese Weise verursachten Lücken versuchte man mit den sogenannten Ausnahmen zu schließen, die die Minister oder der Präsident der Republik den zum Christentum übergetretenen Juden erteilten. Der Präsident Jozef Tiso bewilligte mehr als solche 800 Ausnahmen, wobei es Ende

13. Hronec wurde zweimal zum Rektor gewählt, für 1938/39 und 1939/40.

14. Den zweiten Lehrstuhl hatte der tschechische Mathematiker Josef Koucký (1895-1982) inne. 1925-26 war er bei N. E. Nørlund in Kopenhagen, dann Assistent am Institut für theoretische Physik in Brno, bis er 1938 den Ruf nach Bratislava bekam, wo er bis 1946 blieb.

15. Bratislava, bis 1919 slowakisch Prešporok, deutsch Pressburg bzw. vor der Rechtschreibreform 1996 Preßburg, ungarisch Pozsony, ist in Deutschland durch den Frieden von Pressburg bekannt, der 1805 zwischen dem Kaisertum Österreich unter Franz I. und dem Kaiserreich Frankreich unter Napoléon Bonaparte geschlossen wurde.

16. Die darauffolgende Zwangsumsiedlung von Juden aus Bratislava an bestimmte Orte in der Slowakei ab Herbst 1941 war ein großangelegter Test für die Massenvertreibung der Juden. Die erste größere Welle der Deportationen begann im März 1942. Bis Oktober 1942 hat man 57 752 Juden aus der Slowakei deportiert. Rabbi Weissmandel und Gisela Fleishmann (Hradská 2012; Frieder 1990; Kamenec 2000), die seit 1940 Leiterin der slowakischen Niederlassung der amerikanisch-jüdischen Organisation JOINT war, und ihre illegale *Arbeitsgruppe* schmierten Dieter Wisliceny, den deutschen Berater für jüdische Fragen in der Slowakei, in zwei Raten mit 50 000 Dollar (Hradská 2002). Die Deportationen hörten dann wirklich auf, aber nicht die Repressalien. Es ist jedoch unklar, ob das Eingreifen von Wisliceny die Ursache für die Unterbrechung der Transporte war. Nach dem slowakischen Nationalaufstand von August bis Oktober 1944 fielen die Wehrmacht und deutsche Sicherheitskräfte in die Slowakei ein und deportierten die verbliebenen Juden (Venohr 1979). Ungefähr 11 000 Juden aus der Slowakei überlebten den Krieg.

1943 rund 20 000 Anträge gab (Ward 2002). Zusätzlich wurden Ausnahmen in größerer Zahl von den Ministerien gewährt. Insgesamt umfassten die Ausnahmen bis zu 16 000 Juden, die nach der ersten Deportationswelle in der Slowakei blieben.

5 Mathematik im Weltkrieg

Das Schicksal von Schwarz' engster Familie war düster. Seine Eltern waren aus einem der ersten Transporte aus Nové Mesto am 24. April 1942 entlassen worden, seine Mutter wurde aber später deportiert. Sie überlebte den Holocaust. Ihre Schneiderei wurde schon im März 1941 arisiert. Sein Vater überlebte den Holocaust versteckt dank Hilfe verschiedener Menschen im Untergrund. Zum Beispiel duldete Hronec, dass sich beide im Gebäude der STU in Bratislava für einige Zeit verstecken konnten. Seine zwei Schwestern überlebten den Holocaust nicht.

Professor Hlavatý, der im 1937/38 auf Einladung Albert Einsteins an der Universität und dem Institute for Advanced Studies in Princeton wirkte, richtete schon am 15. Februar 1939 eine Bitte an Oswald Veblen in Princeton, für Schwarz eine Assistentenstelle in den USA zu finden. Schwarz selbst hat sich am 20. März 1939 an die *Society for the Protection of Science and Learning* in London, auf eine Anregung von Harald Bohr, mit der Bitte um Hilfe gewandt. Beide Gesuche blieben unerhört. In der Slowakei musste er sich vom Anfang an den antisemitischen Gesetzen stellen. Auf Antrag der höheren Funktionäre der Technischen Universität, insbesondere J. Hronec, erteilte der Kultusminister Sivák und später auch Präsident Tiso ihm wiederholt entsprechende Ausnahmegenehmigungen. Als nach der Niederlage des Slowakischen Nationalaufstands deutsche repressive Sicherheitsorgane ins Land kamen, wurde er am 29. November 1944 vom SD auf der Straße festgenommen und ins KZ, zuerst nach Oranienburg-Sachsenhausen, später nach Ohrdruf-Buchenwald gebracht. Noch an dem Tag der Verhaftung wandte sich D. Ilkovič als Dekan[17] der Naturwissenschaftlichen Fakultät der Slowakischen Universität (weiter NwFSU) an die entsprechende deutsche Behörde mit dem Gesuch um seine Freilassung und argumentierte mit den erteilten präsidentiellen Ausnahmen und mit der Unersetzlichkeit Schwarzs. Schwarz war nicht nur an der technischen Universität, sondern seit der Gründung der NwFSU auch dort tätig. In der Zeit

17. D. Ilkovič war Professor der Physik an der technischen Universität and gleichzeitig unbezahlter Professor der Physik an der NwFSU. Seit 1942 war er auch Dekan der NwFSU.

Im März 1943 kam Werner Heisenberg auf Ilkovičs Einladung nach Bratislava und hielt in dem Seminar *Physikalisch-chemische Gespräche* einen Vortrag. Wie sich nach dem Krieg M. Kolibiar (späterer Professor der Mathematik, damals noch ein Student) erinnerte, sprach er auch über gewisse „Kaskadenstrahlungen“, deren Erforschung wegen möglicher militärischer Anwendungen geheim gehalten werden musste.

hielt er dort als unbezahlter Dozent Vorträge zur Mathematik (2St/W) und zur theoretischen Physik (4St/W). Außerdem half er Ilkovič bei der Führung des Seminars der theoretischen Physik. Der Brief und die Telefonate blieben ohne Erfolg. Doch Schwarz überlebte das KZ. Während eines langen Evakuierungsmarsches aus dem Lager befreite ihn dann im April 1945 die amerikanische Armee.

Nach der Gründung der NwFSU 1940 erfolgte die erste Immatrikulation an der Naturwissenschaftlichen Fakultät im Wintersemester des akademischen Jahres 40/41. Mathematische Vorlesungen und Seminare wurden unbezahlt von den Mitarbeitern der Lehrstühle der STU in den Räumlichkeiten der STU gehalten. Schwarz schloss sich den Bemühungen, die Lehrtätigkeit an der NwFSU zu gewährleisten, von Anfang an aktiv an. Seine Seminare und Vorlesungen waren sehr beliebt und sehr gut bewertet.

Zoologie war eine weitere wissenschaftliche Disziplin, die vor der Gründung der NwFSU an der Philosophischen Fakultät gelehrt wurde. Am 1. September 1939 wurde an der Philosophischen Fakultät unter der Leitung von Professor M.M. Novikov das Institut für Zoologie geöffnet. Novikov, der ehemalige Rektor der Moskauer Universität, war einer der 250 Intellektuellen, die Lenin 1922 an Bord zweier „Philosophenschiffe“ aus Petersburg ausbürgerte. Novikov war maßgeblich an der Organisation und Veröffentlichung der ersten wissenschaftlichen Arbeiten beteiligt, die von der NwFSU unter dem Titel *Arbeiten der Fakultät für Naturwissenschaften der Slowakischen Universität in Bratislava* veröffentlicht wurden. Von 11 Nummern dieser Zeitschrift, die bis zum Ende des Krieges erschienen, war es das Heft 6, in dem Schwarz seine 64-seitige bahnbrechende Arbeit (Schwarz 1943) über Halbgruppen veröffentlichte.

6 Der Aufstieg der Halbgruppentheorie

Die Abhandlung trägt das Datum 12. Juni 1943. Eine Arbeit unter demselben Titel wird aber schon früher mehrmals in seinem Lebenslauf und Briefen an Behörden im Zeitraum 1941-42 mit der Bemerkung erwähnt, dass sie bei der *Mathematischen Zeitschrift* oder später beim *Časopis pro pěstování matematiky a fysiky* eingereicht worden sei. Warum es zu einer Änderung kam, ist unbekannt.[18] Die letztgenannte Zeitschrift erschien aber zwischen 1942 und 1945 nicht, da die Tschechische Mathematische Gesellschaft verboten wurde, was wahrscheinlich die

18. Eine genauere Beschreibung und Chronologie wird in (Porubský 2022b) veröffentlicht werden.

Publikation verhinderte. Die redaktionellen Unterlagen dieser Zeitschrift existieren nicht mehr.

In der Arbeit zitiert er Zassenhaus' *Lehrbuch der Gruppentheorie* (Zassenhaus 1937), aus dem er den Namen Halbgruppe übernahm und wörtlich ins Slowakische als *pologrupa* übersetzte. Er zitierte noch die Arbeit (Suschkewitsch 1928) von Suschkewitsch aus dem Jahr 1928, die in den *Mathematischen Annalen* erschienen war und die er als die einzige Arbeit beschrieb, die der Theorie der Halbgruppen gewidmet sei. Gleichzeitig bemerkte er, dass er die Resultate Suschkewitschs über Ideale im zweiten Kapitel wesentlich verallgemeinert habe. In der Arbeit kann man nur einen anderen Namen lesen, nähmlich den von Kořínek, bei dem er sich für eine Verbesserung in einem Beweis bedankt. Es ist zu vermuten, dass es ausgerechnet Kořínek war, der Schwarz zu diesem Themenkreis motivierte, obwohl dafür nur indirekte Indizien vorliegen. Kořínek unternahm 1935 eine einmonatige Reise in die Sowjetunion, wo er Kiew, Leningrad und Moskau besuchte. In Moskau lernte er A.G. Kurosch kennen, mit dem er dann in dauerhaftem Kontakt blieb. Nach der Rückkehr, als Bibliothekar der mathematischen Gesellschaft, sorgte er dann dafür, dass russische mathematische Bücher nach Prag kamen. So besaß Schwarz etwa die zweite russische Ausgabe des Buches *Abstrakte Theorie der Gruppen* des russischen Mathematikers Otto J. Schmidt aus dem Jahr 1933 (es ist aber leider nicht klar, seit wann er das Buch besaß).

Kořínek war im akademischen Jahr 1929/30 in Hamburg bei E. Artin. Nach seiner Rückkehr beschäftigte er sich mit der Theorie der assoziativen Algebren und der Arithmetik dieser Systeme und knüpfte an die Arbeit von H. Brandt an. Seit 1935 widmete er sich der Gruppentheorie und seit 1940 der Theorie der Verbände. Schwarz hörte während des Studiums sehr viele seiner Vorlesungen. In Koříneks Nachlass im Archiv der Tschechischen Akademie der Wissenschaften kann man mehrere detailliert verfasste Unterlagen seiner Vorlesungen über Gruppen und allgemeine Algebra finden. An keiner Stelle kann man aber den Begriff der Halbgruppe finden, obwohl er z.B. schon am 9. April 1929 einen Vortrag *Über Erweiterungen des Gruppenbegriffs* bei der Tschechoslowakischen Mathematischen Gesellschaft in Prag hielt, wo er über das „Brandtsche Groupoid" und die „Mischgruppe" von A. Loewy sprach.

Wenn man die erste Arbeit (Schwarz 1943) über Halbgruppen sorgfältig liest, bekommt man den Eindruck, dass er für seine Resultate Motivation aus der Theorie der Restklassenringe der ganzen Zahlen, der kommutativen oder nichtkommutativen Gruppen und Ringe als Vorbild nahm. Diese und auch spätere Arbeiten enthalten aber keine konkreten Indizien, was oder wer ihn dazu gebracht hat, sich der Halbgruppentheorie zu widmen.

Schwarzs Beitrag zur Theorie der Halbgruppen ist umfangreich. So wies er schon in seiner ersten Arbeit auf die wichtige Rolle der Idempotenten bei der Untersuchung der Struktur der Halbgruppen hin. Die spätere Entwicklung bestätigte dies auch.[19] Seine Resultate trugen zum besseren Verständnis der inneren Strukturen der Halbgruppen bei. Zusammen mit seinen Anwendungen der Halbgruppentheorie in der Zahlentheorie, der Matrixtheorie, der Kombinatorik oder der Topologie hatten seine Beiträge zur Folge, dass die Halbgruppentheorie zum wichtigen Teil der Algebra wurde.

Schlussbemerkung. Professor Štefan Schwarz war formell der Doktorvater des Verfassers, und nahm ihn als Direktor des Mathematischen Instituts der Slowakischen Akademie der Wissenschaften in Bratislava 1968 zuerst als studentische wissenschaftliche Kraft und ab 1971 auch als Mitarbeiter auf. Der Verf. erinnert sich gerne an die Zeit 1968-1988 mit Schwarz als Direktor. Ein außergewöhnlicher Zufall war es, dass Prof. Schwarz in dieser Zeit in der Porubský Straße wohnte. Die Straße ist nach dem ersten Direktor der slowakischen Abteilung der Tschechoslowakischen Presseagentur, einem Verwandten des Verfassers, benannt, die 1918 nach der Gründung der Tschechoslowakei errichtet wurde.

Danksagung. Die Arbeit wurde mit der institutionellen Unterstützung RVO: 67985807 gefördert. Den Archiven der Tschechischen Akademie der Wissenchaften in Prag, der Komenius Universität in Bratislava, der Slowakischen Technischen Universität in Bratislava und der Karls-Universität in Prag verdanke ich wichtige Erkenntnise. Dank gebührt auch Herrn Dr. Hans Fischer (KU Eichstätt-Ingolstadt) für seine uneigennützige Hilfe bei der Endbearbeitung des Manuskripts.

Literaturverzeichnis

Frieder, Emanuel. 1990. *To deliver their souls. The struggle of a young rabbi during the Holocaust.* New York: Holocaust Library.

Hollings, Christopher. 2014. *Mathematics across the Iron Curtain. A history of the algebraic theory of semigroups.* Providence, RI: Amer. Math. Soc.

Hradská, Katarína. 2002. Deutsche Berater und die „Lösung der Judenfrage“ in der Slowakei. *Theresienstädter Studien und Dokumente,* 300–317.

———. 2012. *Gizi Fleischmannová (Slowakisch) [Gisi Fleischmann].* Bratislava: Marenčin.

19. Über diesen Teil seiner Resultate s. (Porubský 2018).

Kaiser, Johann. 1969. Die Politik des Dritten Reiches gegenüber der Slowakei 1939 - 1945 : ein Beitrag zur Erforschung der nationalsozialistischen Satellitenpolitik in Südosteuropa. Diss., Uni Bochum.

Kamenec, Ivan. 2000. Die erfolglosen Versuche zur Wiederaufnahme der Deportationen der slowakischen Juden. *Theresienstädter Studien und Dokumente,* 318–337.

Lidl, Harald, Rudolf und Niederreiter. 1984. *Finite Fields. Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, Band 20.* Cambridge: Cambridge University Press.

Lipscher, Ladislav. 1980. *Die Juden im slowakischen Staat 1939 - 1945.* München: Oldenbourg.

Petr, Karel. 1935. O basi celých čísel v obecných tělesech algebraických (Tschechisch) [Über Basis der ganzen Zahlen in algebraischen Zahlkörpern]. *Čas. Mat. Fys.* 64:62–72.

———. 1937. Über die Reduzibilität eines Polynoms mit ganzzahligen Koeffizienten nach einem Primzahlmodul. *Čas. Mat. Fys.* 66:85–94.

Porubský, Štefan. 2018. Idempotents, group membership and their applications. *Math. Slovaca* 68:1231–1312.

———. 2022a. On Petr-Schwarz-Berlekamp matrix. In Vorbereitung.

———. 2022b. Semigroups – the Slovak connection. In Vorbereitung.

Schwarz, Štefan. 1939. Über die Reduzibilität eines Polynoms mit ganzen algebraischen Koeffizienten nach einem Primideal; Anwendung auf die Faktorzerlegung der Polynome in algebraischen Zahlkörpern. *Čas. Mat. Fys.* 68:112–126.

———. 1943. Teória pologrup (Slowakisch). [Zur Theorie der Halbgruppen]. *Sborník prác Prírodovedeckej fakulty Slovenskej univerzity v Bratislave* VII:64 S.

Suschkewitsch, Anton. 1928. Über die endlichen Gruppen ohne das Gesetz der eindeutigen Umkehrbarkeit. *Math. Ann.* 99:30–50.

Venohr, Wolfgang. 1979. *Aufstand in der Tatra : Der Kampf um die Slowakei 1939 - 44.* Königstein/Ts.: Athenäum.

Ward, James Mace. 2002. "People Who Deserve It": Jozef Tiso and the Presidential Exemption. *Nationalities Papers* 30:571–601.

Zassenhaus, Hans. 1937. *Lehrbuch der Gruppentheorie. Bd. I.* Leipzig: B.G. Teubner.

Ein dialektischer Weg zur Summe der Kubikzahlen

Stephan Berendonk

Zusammenfassung Dieser Beitrag enthält eine heuristisch orientierte Darstellung des elementarmathematischen Satzes, dass die Summe der ersten n Kubikzahlen mit dem Quadrat der Summe der ersten n natürlichen Zahlen übereinstimmt. Der dabei beschrittene Weg zur gesuchten Formel enthält einige interessante dialektische Momente, bespielsweise ein fruchtbares Zusammenspiel von Geometrie und Algebra, die im Beitrag besonders hervorgehoben werden. Zugleich liefert der Beitrag ein elementares Beispiel für einen Entdeckunsprozess, bei dem das Analogisieren von Sachverhalten als eine zentrale Vorgehensweise der Kunst des mathematischen Entdeckens erfahren werden kann.

1 Einleitung

Wie funktioniert mathematisches Entdecken? In Lisa Hefendehl-Hebekers Geleitwort zur dritten Auflage von Heinrich Winters (2016, S.ix) Buch „Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht“ lese ich dazu folgendes:

> „Mathematische Entdeckungen entwickeln sich im Wechselspiel zwischen konkretem Erfahren und theoretischem Entwerfen, experimentierendem Beobachten und begrifflichem Durchdringen, inhaltlichem Schließen und symbolischem Operieren. Dabei können heuristische Prinzipien wie Analogiebildung oder analysierendes Zurückschreiten den Gedanken eine produktive Richtung weisen.“

Hat die Mathematik, wenn sie als Tätigkeit betrieben wird, tatsächlich eine solche dialektische Natur? Ich möchte dies im Folgenden an einem von mir durchlaufenen Entdeckungsprozess überprüfen.

2 Der „kleine Gauß“ im geometrischen Gewand

Die Anekdote vom kleinen Gauß, der in der Schule die Zahlen von Eins bis Hundert addieren soll, ist ein Highlight des schulischen Mathematikunterrichts. Sie kann als Sieg der Schüler-Phantasie über die stupide Despotie des „Pädagogen“ gesehen werden. Statt die Hundert Zahlen Schritt für Schritt von links nach rechts zu addieren, was eine rein mechanische und langwierige Fleißarbeit gewesen wäre, verwendete der kleine Gauß den folgenden Trick und erhielt damit das Ergebnis blitzschnell:

$$\begin{array}{cccccccccccc} & 1 & + & 2 & + & 3 & + & 4 & + & ... & + & 100 \\ + & 100 & + & 99 & + & 98 & + & 97 & + & ... & + & 1 \\ \hline & 101 & + & 101 & + & 101 & + & 101 & + & ... & + & 101 \end{array}$$

Offenbar gilt:

$$1 + 2 + 3 + ... + 100 = \frac{100 \cdot 101}{2}.$$

Oder allgemein:

$$D_n := 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}.$$

So ein schlauer Trick! Da möchte ich mit Ihnen noch ein wenig verweilen. Ich stelle daher zur Vertiefung die folgende Frage: Wie lässt sich der Flächeninhalt eines Geodreiecks mit Hilfe des Gaußtricks bestimmen? Die Frage darf Ihnen merkwürdig erscheinen. Der Gaußtrick war eine Spielerei mit Zahlen, eine Anwendung des Kommutativgesetzes, etwas *Arithmetisches*. Die Frage nach dem Flächeninhalt des Geodreiecks ist dagegen *geometrischer* Art. Die Lösung des Konflikts besteht in einer hinreichend abstrakten Formulierung des Gaußtricks: Setze (zwei) Kopien des zu untersuchenden Objekts auf geschickte Weise zusammen, sodass sich ein einfacheres Objekt ergibt. Zwei Geodreiecke kann man beispielsweise zu einem Quadrat zusammensetzen (Abbildung 1). Damit ist der Flächeninhalt halb so groß wie der des Quadrats, bei Kathetenlänge n somit $\frac{n^2}{2}$.

Das Bild in Abbildung 2 zeigt, dass die Analogie zwischen der arithmetischen Situation und der geometrischen Situation tiefer geht: Die Zahlensummen D_n können mit ein wenig Wohlwollen selbst als Geodreiecke aufgefasst werden. Man bezeichnet diese Zahlen daher auch als *Dreieckszahlen*. Anstatt einer glatten Hypotenuse haben sie allerdings eine Treppe. Setzt man zwei solche *diskrete* Geodreiecke entlang ihrer Treppen zusammen, ergibt dies ein Rechteck mit den Seitenlängen n und $n+1$, also aufgrund der Treppen nur beinahe ein Quadrat. Der Flächeninhalt $\frac{n^2}{2}$ vom *stetigen* Geodreieck ist daher nur eine Näherung für D_n.

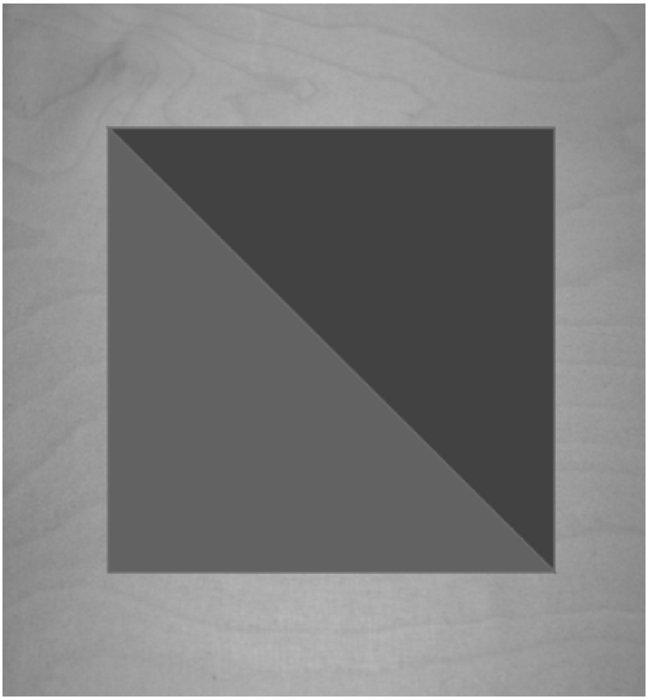


Abbildung 1: Quadrat aus zwei „stetigen“ Geodreiecken

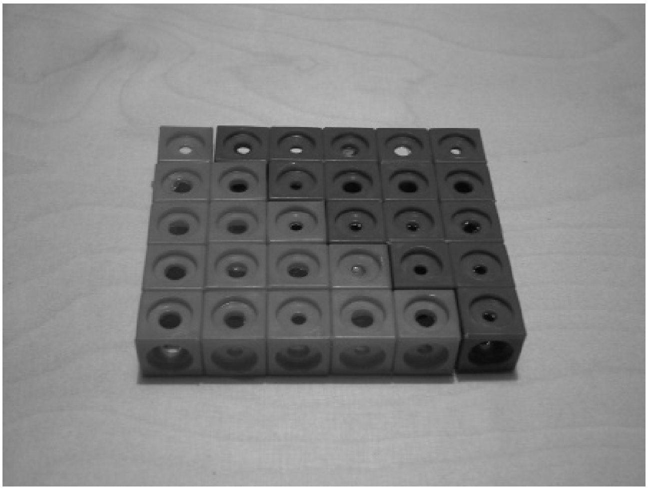


Abbildung 2: Rechteck aus zwei „diskreten“ Geodreiecken

3 Der Gaußtrick als heuristische Leitidee

Heinrich Winter (2001) schreibt in „Die Summenformel für Quadratzahlen“ über die geometrische Darstellung des Gaußtricks:

> „Es handelt sich hier um ein zwar sehr elementares, aber doch immer wieder frappierendes Resultat der figuralen Arithmetik, das bereits in der Primarstufe als Gaußaufgabe lösbar ist.“

Wie der Titel schon verrät, geht es in Winters Artikel um die Suche nach einer multiplikativen Formel für die Summe der ersten n Quadratzahlen. Der Weg zu dieser Formel führt bei Winter über die Geometrie: Die Summe der Quadratzahlen wird zunächst als Flächeninhalt einer Treppenfläche, die aus aneinandergelegten Quadraten besteht, interpretiert. Diese Treppenfläche wird dann zu einem Rechteck ergänzt und es wird nach dem Inhalt der Ergänzungsfläche gesucht (Abbildung 3). Auch bei Wolfgang Kroll (1989) findet man diesen Ansatz. Bei der Bestimmung der Ergänzungsfläche gehen Winter und Kroll dann aber unterschiedliche Wege.

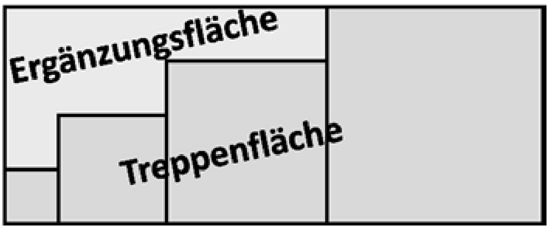


Abbildung 3: Treppenfläche

Ich wähle einen anderen Ansatz. Statt die Quadrate aneinanderzulegen, lege ich sie aufeinander (Abbildung 4). Dadurch erhalte ich eine andere Geometrisierung von

$$P_n := 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2.$$

Es entsteht dann nämlich eine quadratische rechtwinklige Treppenpyramide, die ich hier, um die Analogie zum Geodreieck zu betonen, als diskrete *Geopyramide* bezeichnen möchte. Der Analogie zu den Dreieckszahlen D_n weiter folgend, stellen wir die Frage: Wie lässt sich das Volumen der (stetigen) Geopyramide mit Hilfe des Gaußtricks bestimmen? Abbildung 5 gibt die Antwort.

Drei Kopien der Geopyramide lassen sich zu einem Würfel zusammensetzen. Das Volumen der Geopyramide mit Grundseiten und Höhe der Länge n beträgt daher

Abbildung 4: „diskrete" Geopyramide

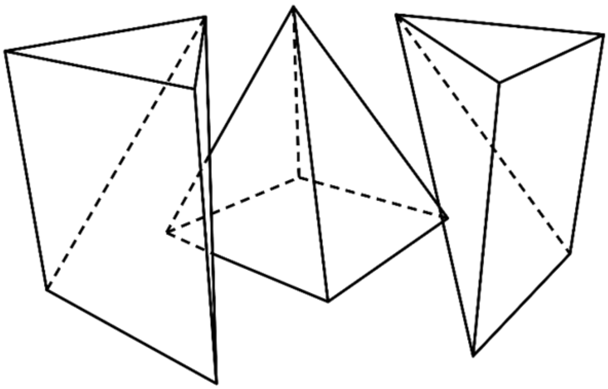


Abbildung 5: Zerlegung eines Würfels in drei kongruente Geopyramiden

$\frac{n^3}{3}$, was zugleich eine gute Näherung für die Summe P_n (das P steht für *Pyramidenzahl*) der ersten n Quadratzahlen sein dürfte. Ich bin natürlich auch an der exakten Formel interessiert. Wie schon bei den Dreieckszahlen versuche ich einfach das stetige Modell zu imitieren, also aus drei diskreten Geopyramiden einen Würfel zu bauen. Es sollte mich nicht wundern, wenn ich aufgrund der Treppen einen Quader erhalte, der nur beinahe ein Würfel ist. Ich könnte mich nun der Herausforderung stellen, das Zusammensetzen im Kopf durchzuführen. Ich genehmige mir jedoch an dieser Stelle ein wenig haptische Unterstützung in Form von Steckwürfelmodellen. Abbildung 6 zeigt das Ergebnis.

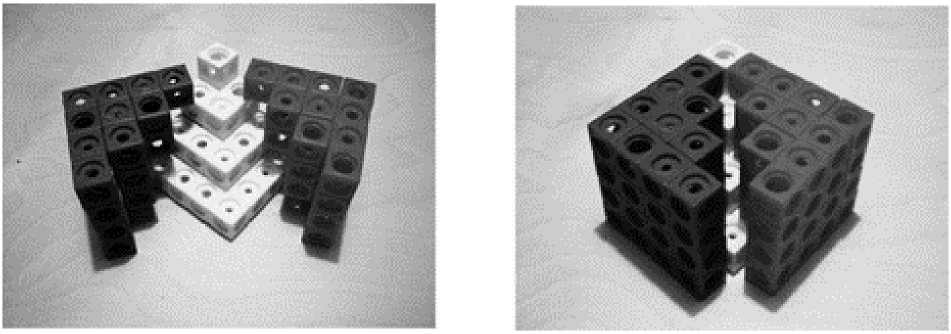


Abbildung 6: Zusammenfügung dreier diskreter Geopyramiden zu einem Quader

Ich erkenne zwar einen Quader der Längen $4 \times 5 \times 5$ bzw. allgemein $n \times (n+1) \times (n+1)$, doch dieser ist nicht vollständig mit Steckwürfeln ausgefüllt. Es fehlen dem Quader $1+2+3+4$ oder allgemein D_n Steckwürfel. Indem ich den Quader einmal als Ganzes und einmal als Summe seiner Bausteine betrachte, kann ich die folgende Gleichung aufstellen:

$$3 \cdot P_n + D_n = n \cdot (n+1)^2.$$

Also gilt:

$$P_n = \frac{n \cdot (n+1)^2 - D_n}{3}.$$

Das ist ja praktisch! Ich habe die Frage nach einer geschlossenen Formel für die Summe der ersten n Quadratzahlen mit Hilfe des Gaußtricks zurückgeführt auf die Frage nach einer geschlossenen Formel für die Summe der ersten n natürlichen Zahlen. Diese Frage hatte ich jedoch, ebenfalls mit Hilfe des Gaußtricks, bereits gelöst. Ein schönes Beispiel für Rekursion also. Als Formel erhalte ich sodann:

$$P_n = \frac{n \cdot (n+1)^2 - \frac{n\cdot(n+1)}{2}}{3} = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}.$$

Bevor ich mit Ihnen die Summe der Kubikzahlen in Angriff nehme, möchte ich mit Blick auf das Eingangszitat ein Zwischenfazit ziehen. Das Wort *dialektisch* im Titel dieses Aufsatzes soll andeuten, dass ich die hier dargestellten Entdeckungen als Resultat eines Wechselspiels verschiedener Gegensatzpaare sehe. Das Bauen bzw. Zusammensetzen des löchrigen $4 \times 5 \times 5$ Quaders aus Steckwürfeln und die Beobachtung, dass genau $1+2+3+4$ Steckwürfel zum vollen Quader fehlen, würde ich als *experimentierendes Beobachten* verbuchen. Ein Nachdenken, ob diese Situation speziell ist oder paradigmatisch für beliebige n, wie hier der Fall, markiert dann den Wechsel zum *begrifflichen Durchdringen*. Das Aufstellen der Formel $3 \cdot P_n + D_n = n \cdot (n+1)^2$ basierte auf *inhaltlichem Schließen*. Zur multiplikativen Formel für P_n gelangte ich von dort durch rein *symbolisches Operieren*. Die drei von Hefendehl-Hebeker genannten Gegensatzpaare beschreiben unterschiedliche Erkenntnisweisen. Sie sind gewissermaßen *prozessbezogen*. Der Mathematiker Egbert Brieskorn (1974) nennt in seinem Aufsatz „Über die Dialektik in der Mathematik“ folgende den Fortschritt der Mathematik antreibende Gegensatzpaare, die man demgegenüber als *inhaltsbezogen* bezeichnen könnte:

> „endlich – unendlich, kompakt – offen, diskret – kontinuierlich, konstant – variabel, quantitativ – qualitativ, algebraisch – geometrisch, regulär – singulär, lokal – global, analytisch – synthetisch, axiomatisch – konstruktiv“.

Im bisher Beschriebenen hat sich beispielsweise die *Geometrie* als mächtiger Diener der *Arithmetik* erwiesen. Zwar kann die Frage nach der Formel für D_n rein arithmetisch gelöst werden, bei den P_n wird es jedoch, was das Entdecken der Formel betrifft, ungleich schwieriger, ohne jegliche Figurierung der Zahlen auszukommen. Innerhalb der Geometrie hatte ich dann sowohl bei D_n als auch bei P_n ein idealisiertes *stetiges* Modell und ein exaktes *diskretes* Modell. Das einfachere stetige Modell diente dem diskreten Modell als Vorbild.

4 Enaktiv - ikonisch - symbolisch

Das hier angedeutete und beim Thema „figurierte Zahlen“ so vorbildliche Zusammenspiel von Geometrie und Algebra ist ein Stück mathematische Essenz. Der Mathematikphilosoph Ladislav Kvasz (2008) hat in seinem Buch „Patterns of Change“ die gesamte Mathematikgeschichte als ein Aufeinanderfolgen stets ausdrucksfähigerer und einander abwechselnder *ikonischer* und *symbolischer* Sprachen rekonstruiert. Beispielsweise führt der Weg vom Rechnen mit Zahlen (Arithmetik) zum

Rechnen mit Variablen (elementare Algebra) bei Kvasz über den Umweg der euklidischen Geometrie. Die Unterscheidung zwischen ikonischen und symbolischen Sprachen ist auch in der Mathematikdidaktik geläufig. Dort bezieht man sich in der Regel auf den Kognitionspsychologen Jerome Bruner und weiß zudem noch eine sogenannte *enaktive* Darstellungsform mathematischen Wissens zu unterscheiden. Den löchrigen Quader habe ich mir beispielsweise durch das Zusammenfügen der drei Steckwürfelpyramiden auf enaktive Weise erschlossen, bevor ich mit dem Aufstellen der Formel zur symbolischen Sprache wechselte. Was hätte ich tun können, wenn mir keine Steckwürfel zur Verfügung gestanden hätten und ich mich nicht auf meine Raumvorstellung hätte verlassen wollen? Dann hätte ich versucht als Ersatz für die enaktive Darstellung zu einer (zwei-dimensionalen) ikonischen Darstellung der Situation zu gelangen. Erich Wittmann (2009, 87) schreibt in seinen „Grundfragen des Mathematikunterrichts“ über die ikonische Form der Darstellung:

> „Besonders wertvoll sind stilisierte oder schematisierte bildliche Darstellungen, welche auf die Struktur des Mitzuteilenden zugeschnitten sind. Vor allem in solchen Fällen sind Bilder eine Art geometrischer Sprache.“

Abbildung 7 zeigt nun eine solche stilisierte ikonische Darstellung der Zusammensetzung des löchrigen Quaders aus den drei diskreten Geopyramiden. Die Zahlen in den Feldern geben an, wie viele Steckwürfel sich beim dargestellten Körper über dem jeweiligen Feld befinden. Es handelt sich also um eine Art *Höhenkarte* der Körper.

Um Verwirrungen zu vermeiden, möchte ich bemerken, dass die Trennlinie zwischen dem Ikonischen und dem Symbolischen bei einigen Mathematikdidaktiker*innen anders als bei Wittmann verläuft. So schreibt beispielsweise Anselm Lambert (2012) in seinem Artikel „Was soll das bedeuten?: Enaktiv – ikonisch – symbolisch“:

> „Die Unterscheidung zwischen ikonisch und symbolisch ist also in einem solchen Sprachesein von Mathematik zu suchen; die Symbole der Geometrie können dabei eben auch unwillkürlich unverfremdete Darstellungen der geometrischen Objekte sein, die durch ihre geometrisch-konstruktive Regelhaftigkeit symbolischen Charakter erwerben.“

Sobald man also mit den Darstellungen operiert, z.B. indem man die Höhenkarten zusammenfügt, und sich der Regeln dieser Operationen bewusst ist, z.B. dass die Höhen beim Überlagern addiert werden müssen, agiert man nach Lambert schon auf der symbolischen Ebene.

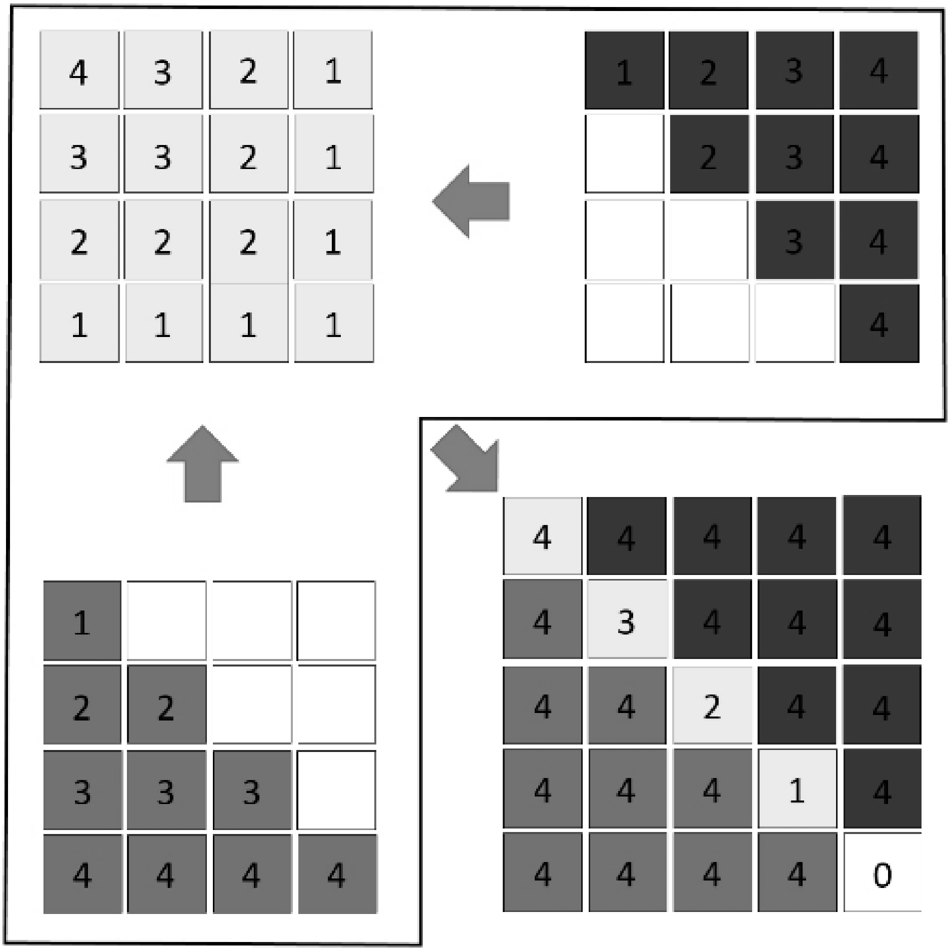


Abbildung 7: Die Höhenkarten der drei diskreten Geopyramiden und ihre Zusammenfügung

5 Mit Analogie durch unbekanntes Terrain

Ich versuche mich nun an den Kubikzahlen. Es liegt nahe, die bei den Quadratzahlen verwendete und dort erfolgreiche Vorgehensweise zu übernehmen. Zunächst wurde den Zahlen eine geometrische Gestalt zugewiesen. Bei den Quadratzahlen waren das die Quadrate mit dem jeweiligen Flächeninhalt. Bei den Kubikzahlen bieten sich die Würfel mit dem jeweiligen Volumen an. Um auch die Summe der ersten n Kubikzahlen durch ein geometrisches Objekt zu repräsentieren, stapele ich diese Würfel *aufeinander*. Dieses Stapeln muss allerdings, da ich der Analogie weiter folgen möchte, in einer vierten Dimension und also rein gedanklich stattfinden. Solange ich beim Türmen im dreidimensionalen Raum bleibe, habe ich die Würfel gewissermaßen nur *aneinander*gelegt, und nicht *aufeinander*gestapelt. Die Analogie besagt, es müsste durch das Stapeln eine vierdimensionale rechtwinklige Treppenpyramide entstehen, eine diskrete *Hypergeopyramide*, wenn man so will. Ohne jegliche Vor- bzw. Darstellung dieses Objekts dürfte es jedoch schwierig werden, zu erkennen, was es in diesem Fall heißen kann, den Gaußtrick anzuwenden. Erfreulicherweise kann ich die ikonische Darstellung (Höhenkarten) der Pyramidenzahlen auch für die *Hyperpyramidenzahlen*

$$HP_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3.$$

(also für die Summe der ersten n Kubikzahlen) verwenden (Abbildung 8). Die Zahlen geben hierbei an, wie weit das Objekt an einer bestimmten Stelle in die vierte Dimension ragt.

Die ikonische Darstellung drückt drei der Koordinaten durch ihre Lage im Bild, also auf geometrische Weise, und die vierte Koordinate durch eine Zahl, nämlich die Angabe der Höhe, also auf arithmetische Weise, aus.

Man benötigt *zwei* Geodreiecke um ein Quadrat zu legen und *drei* Geopyramiden um einen Würfel zusammen zu setzen. Sollten womöglich *vier* Hypergeopyramiden einen Hyperwürfel ausfüllen? Dann dürfte $\frac{n^4}{4}$ zumindest eine gute Schätzung für HP_n sein. Vertrauend auf diese nur induktiv gewonnene Vermutung, überlege ich, wie die Höhenkarten der *diskreten* Hypergeopyramiden aussehen könnten, die den vier *stetigen* Hypergeopyramiden entsprechen. So gelange ich (für den Fall $n = 3$) schließlich zu Abbildung 9.

Durch Zusammenschieben der vier diskreten Hypergeopyramiden erhalte ich die Höhenkarte in Abbildung 10. Den in Abbildung 9 unten rechts abgebildeten Würfel habe ich beispielsweise *von unten* so auf den dort oben rechts abgebildeten Würfel geschoben, dass die beiden oberen Ebenen des ersteren auf die beiden unteren

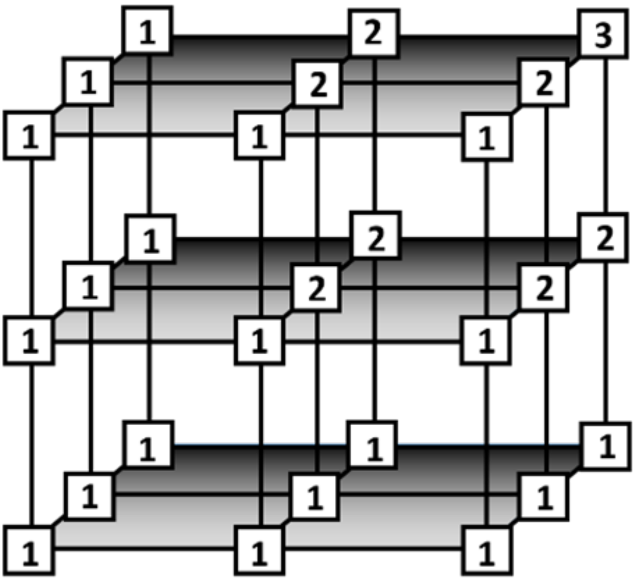


Abbildung 8: Höhenkarte einer diskreten Hypergeopyramide.

Ebenen des letzteren fallen. Auf analoge Weise habe ich den in Abbildung 9 unten links abgebildeten Würfel *von vorne* und den oben links abgebildeten Würfel *von links* auf den oben rechts abgebildeten Würfel geschoben.

Ich erkenne einen Hyperquader der Längen $3 \times 4 \times 4 \times 4$ bzw. allgemein $n \times (n+1) \times (n+1) \times (n+1)$, der allerdings an den grau markierten Stellen noch Lücken besitzt. Ich fülle diese Lücken nun auf, sodass am Ende alle Felder die Höhe 3 bzw. n haben. Um alle Felder, deren Zahlen *überstrichen* sind, – das sind die Felder auf der Raumdiagonale – auf die richtige Höhe zu bringen, muss ich insgesamt $1 + 2 + 3$ bzw. allgemein D_n addieren. Um alle Felder, deren Zahlen *unterstrichen* sind, aufzufüllen, muss ich insgesamt $1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = P_3$ bzw. allgemein P_n addieren. Dasselbe gilt für die Felder, deren Zahlen mit $\lfloor$, und die Felder, deren Zahlen mit $\rfloor$ markiert sind. Offenbar gilt die folgende Gleichung:

$$4 \cdot HP_n + D_n + 3 \cdot P_n = n \cdot (n+1)^3.$$

Damit habe ich das Problem (Formel für HP_n) auf die beiden schon gelösten Probleme (Formel für D_n und P_n) zurückgeführt. Jetzt ist es nur noch eine Übung

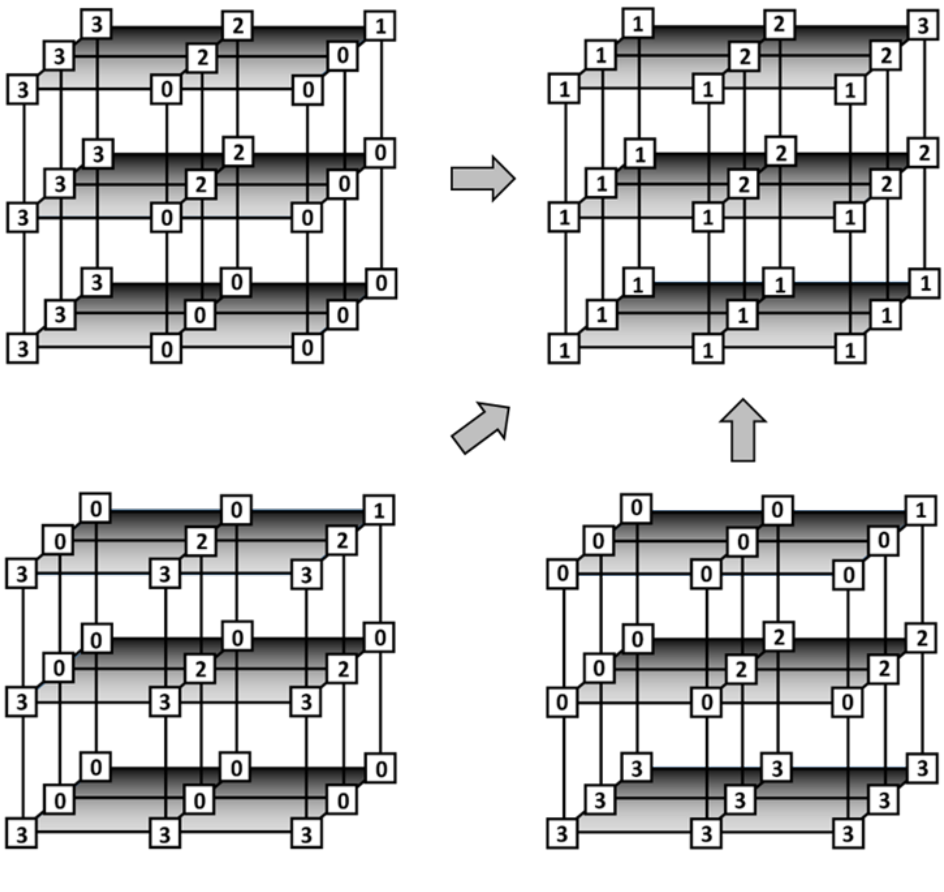


Abbildung 9: Die Höhenkarten der vier diskreten Hypergeopyramiden

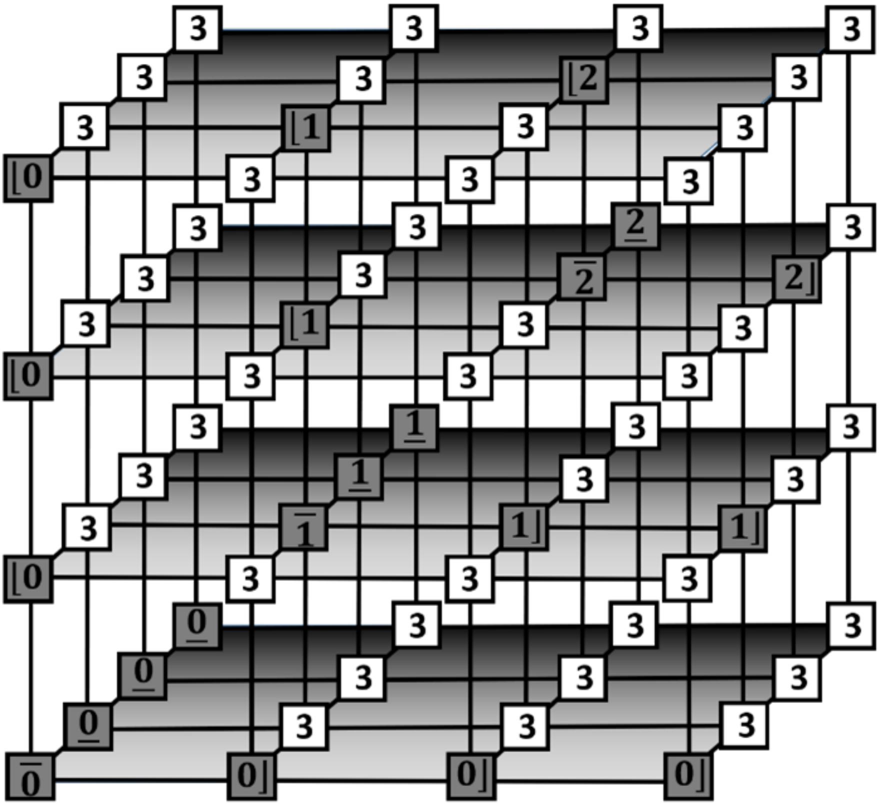


Abbildung 10: Höhenkarte der Zusammenführung der vier diskreten Hypergeopyramiden

im algebraischen Umformen, um die gewünschte Formel zu erhalten.

$$4 \cdot HP_n = n \cdot (n+1)^3 - \frac{n \cdot (n+1)}{2} - 3 \cdot \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} = ... = n^2 \cdot (n+1)^2.$$

Also gilt:

$$HP_n = (\frac{n \cdot (n+1)}{2})^2 = D_n^2.$$

Die Summe der ersten n Kubikzahlen ist offenbar immer eine Quadratzahl, genauer: das Quadrat der n-ten Dreieckszahl.

6 Fazit

Das schon bei den Quadratzahlen thematisierte Zusammenspiel zwischen *Arithmetik* und *Geometrie* sowie zwischen dem *Diskreten* und dem *Stetigen* konnte man auch bei den Kubikzahlen beobachten. Auch das im Eingangszitat von Lisa Hefendehl-Hebeker genannte Wechselspiel zwischen *konkretem Erfahren* und *theoretischem Entwerfen* spielte hier eine Rolle: Da, wo bei den Quadratzahlen noch mit Steckwürfeln gearbeitet und also auf eine hier so genannte enaktive Darstellung zurückgegriffen werden konnte, musste für die Behandlung der Kubikzahlen eine abstraktere ikonische Darstellung, nämlich die Höhenkarten, entworfen werden. Mit dem Eintritt in die vierte Dimension gesellte sich dann zwangsläufig noch ein weiterer Gegensatz hinzu, der zwischen *Empirie* und *Theorie*: Induktiv-analogisierend kam ich zu der Vermutung, dass vier Hypergeopyramiden einen Hyperwürfel bilden. Empirisch lässt sich diese Aussage anders als beim dreidimensionalen Analogon aufgrund fehlender Referenzobjekte nicht überprüfen und für eine geistige Überprüfung müsste ich mir zunächst begriffliche Klarheit über die Objekte Hypergeopyramide und Hyperwürfel verschaffen, also beispielsweise festlegen, wie diese Objekte definiert sein sollen. Alle danach folgenden Behauptungen, insbesondere die schließlich aufgestellte Gleichung, können aber wieder, beispielsweise durch Einsetzen von Zahlen, empirisch überprüft werden. Für meine Entdeckung war nun gerade dieser der Empirie unzugängliche Moment entscheidend, denn die Vermutung gab mir Anlass, die geeigneten Höhenkarten zu suchen und zugleich die nötige Intuition, um diese auch zu finden. Die hier dargestellte Entdeckungsgeschichte basiert offenbar auf dem Zusammenspiel verschiedener Mathematik-typischer Spannungsfelder und illustriert damit auf vielfältige Weise das *dialektische* Wesen der Mathematik. Ich schließe mit einem Zitat von Egbert Brieskorn (1974):

> „Die Entwicklung ist zu begreifen als Resultat der gegensätzlichen Wirkung der einander widersprechenden Kräfte und Tendenzen in jeder Erscheinung, als die Geschichte der Entstehung und Entfaltung der Gegensätze.“

Literaturverzeichnis

Brieskorn, E. (1974). Über die Dialektik in der Mathematik. In M. Otte (Hg.): *Mathematiker über die Mathematik*, Berlin: Springer-Verlag, 221-286.

Kroll, W. (1989). Eine einheitliche Methode zur Bestimmung der Potenzsummenformeln, *Praxis der Mathematik*, 31, 321 –325.

Kvasz, L. (2008). *Patterns of Change - Linguistic Innovations in the Development of Classical Mathematics.* Basel: Birkhäuser.

Lambert, A. (2012). Was soll das bedeuten?: Enaktiv – ikonisch – symbolisch. In: A. Filler, M. Ludwig (Hg.): *Vernetzungen und Anwendungen im Geometrieunterricht*, Hildesheim: Franzbecker, 5-32.

Winter, H. (2001). Die Summenformel für Quadratzahlen, *mathematik lehren*, 105, 60 –64.

Winter, H. (2016). *Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht. Einblicke in die Ideengeschichte und ihre Bedeutung für die Pädagogik.* Wiesbaden: Springer Spektrum.

Wittmann, E. (2009). *Grundfragen des Mathematikunterrichts.* Wiesbaden: Vieweg +Teubner.

Devilish prime factorization – fundamental theorem of arithmetic

Felicitas Pielsticker & Ingo Witzke

Abstract This paper gives interested readers the opportunity to look on the uniqueness of prime factorization in the field of number theory from different views. In this paper, the proof on the uniqueness of the prime factorization by Courant and Robbins (1996) is rehashed and connected to a narrative about mathematics. Enzensberger (1997) shows that mathematics can also be presented as a narrative in his book "The Number Devil". In this regard, the contribution should also give the opportunity to expand one's own image of mathematics.

Introduction

As Glatfeld (1993) pointed out, prime number theory is one of the most beautiful areas of mathematics, richest in ingenious ideas, which originated in antiquity and has lost none of its relevance to this day. Prime numbers find an important application in coding for example – which means that these atoms of the number world have also developed significance for (digital) society. Although prime numbers appear to be well-known, some of their peculiarities still puzzle mathematicians today. Maybe that's why the author Enzensberger, in the book "The Number Devil", has the number devil say: "'There are two types of numbers,' he whispered. 'The garden variety, which can be divided evenly, and the rest, which cannot. I much prefer the latter. You know why? Because they're such prima donnas'" (Enzensberger, 1997, p. 55). Some prime numbers are particularly exciting. For example, the number 739397 is the largest known two-sided prime number. Any number of digits can be omitted from the front or the back, the rest is always a prime number again. Or also the series with the numbers

31, 331, 3331, 33331, 333331, 3333331, 33333331. These numbers are prime numbers, but the following number 333333331 is divisible by 17 (Siegler & König, 1993). In the case of prime numbers it quickly becomes clear that mathematics is something that "has become" and still "is becoming".

The aim of this contribution is to deal with the indirect form of proof using the classical case of the uniqueness of the prime factorization in the sense of Winter's second basic experience ("Grunderfahrung"), which aims at experiencing mathematics as a mental creation and as a deductively ordered world. At the same time, we want to show with this contribution that the deductive structure of mathematics can also be embedded in a story and developed within it. For this purpose, this article will repeatedly refer to the book "The Number Devil". Enzensberger's (1997) aforementioned book embeds interesting mathematical questions in a story. The third chapter (the third night) deals with questions about divisibility and prime numbers. To give an impression of mathematics "told" in this way, we will give some excerpts from the third chapter here. To this end, we will quote some passages of the third chapter in the following section and summarize other passages. In doing so, we refer to pages 49-57 of the book "The Number Devil". In the third night, Robert dreams of the number devil again. The number devil announces to the boy in this third chapter that it is now about dividing. 'Rise and shine Robert!' he said. 'Today's our division day.' In this context, the number devil immediately raises the question of 'When you get a remainder and when you don't.' Robert immediately starts trying different numbers. In doing so, Robert names the even numbers until the number devil asks the boy to try nineteen. 'Now, nineteen. Try nineteen. See if you can divide it without a remainder.' The boy then quickly realizes: 'The only way I can come up with,' he said at last, 'is to divide it by nineteen. Or into nineteen equal parts.' 'Doesn't count,' the number devil replied. 'It's too easy.' 'Or divide it by zero.' 'Out of the question.' 'Out of the question? Why?' 'Because it's forbidden. Dividing by zero is strictly forbidden.' 'What if I did it anyway?' 'Then all mathematics would come apart at the seams!' Robert is undecided about the number nineteen. He notes: 'No matter what number I divide it by – two, three, four, five, six, seven, eight, or nine – I get stuck with a remainder.' Finally, the number devil explains that, in his opinion, there are two different types of numbers. 'The garden variety, which can be divided evenly, and the rest, which cannot. I much prefer the latter. You know why? Because they're such prima donnas. From the very first they've caused mathematicians no end of trouble. Wonderful numbers those! Like eleven, thirteen, or seventeen.' Robert is now to enumerate the first prima-donna numbers to the number devil. The boy first starts at zero, which the number devil forbids. Then Robert names One, which is not possible according to the number devil's statement. He holds: 'One doesn't count. How many times do I have to tell you?' Robert now names the five and is satisfied with that when he records 'And ... and so on.' The number devil, however, says: 'The wonderful thing about prima donnas is that no one knows their 'and so on'.' [...] 'Nobody! Never! The thing is, you can't know whether a number is a prima donna or not merely by looking at it. No ordinary mortal can know without testing it (Enzensberger, 1997, p. 49-57).[1]

According to the number devil it can be stated that one can't tell by looking at a number whether it is prime or not. Thus, these prima-donna numbers have been included in the third chapter of the book. The number devil explains these devilish numbers to Robert in the dream. Thereby the prima-donna numbers are devilish in several respects. First, one reason is that, as the number devil states, one "can't know whether a number is a prima donna or not merely by looking at it" (Enzensberger, 1997, p. 57). Secondly, according to the number devil, these prima-donna numbers cause "mathematicians no end of trouble" (Enzensberger, 1997, p. 55). Thirdly, these prima-donna numbers have long been decisive not only for the structure of our mathematics but have also become an integral part of everyday (digital) life, for example encryption.

Furthermore, the number devil insists that the number one does not count. This is a determination and something specific or typical for mathematics. If we look back to the 18th century, it was not always like this, but it has evolved.

In the next section, we will discuss the Goldbach's conjecture and will then look

1. „Aufstehen, Robert, sagt er. Heute geht's ans Dividieren! [...] Die Frage ist nur, wann. Was wann?, fragte Robert. Wann ein Rest übrig bleibt und wann nicht, erklärt der Zahlenteufel. Klar, sagt Robert. Bei den geraden Zahlen geht es immer glatt auf, wenn man sie durch zwei teilt. Kein Problem! Und genauso leicht lassen sich die Zahlen aus dem Dreier-Einmaleins teilen: [...] Neunzehn, murmelte er. Probier's mal mit der 19. Versuch sie in gleiche Teile zu teilen, aber so, dass nichts übrig bleibt. Robert überlegte. Das geht nur auf eine Weise, sagte er endlich. Ich teile sie in neunzehn gleiche Teile. Das zählt nicht, erwiderte der Zahlenteufel. [...] Aber was soll ich denn dann mit der 19 anfangen? Egal, wodurch ich sie teile, durch 2, durch 3, durch 4, 5, 6, 7, 8 – immer bleibt ein Rest. Komm mal her, sagte der Alte zu Robert, dann verrate ich dir etwas. [...] Du musst wissen, es gibt da diese hundsgewöhnlichen Zahlen, die sich teilen lassen, und dann gibt es die anderen, bei denen das nicht geht. Die sind mir lieber. Weißt du, warum? Weil sie prima sind. An denen beißen sich die Mathematiker schon seit über tausend Jahren die Zähne aus. [...] Und jetzt sag mir bitte, lieber Robert, was sind die ersten paar prima Zahlen? [...] Dann eben eins. Eins zählt nicht. Wie oft soll ich es dir noch sagen! Na schön, sagte Robert. Reg dich nicht auf. Dann eben die Zwei. Und die Drei auch, glaube ich jedenfalls. Die Vier nicht, das haben wir schon ausprobiert. Fünf sicher, die Fünf kann man nicht zerteilen. Na ja und so weiter. Ha, was heißt hier: und so weiter? [...] Das ist ja das Schöne an den prima Zahlen, sagte er. Kein Mensch weiß von vornherein, wie es weitergeht mit den prima Zahlen, außer mir natürlich, aber ich verrate es keinem. [...] Der Witz ist nämlich der: Man sieht es einer Zahl nicht an, ob sie prima ist oder nicht. Kein Mensch kann das vorher wissen. Man muss es ausprobieren“ (Enzensberger, 2019, pp. 50-57).

for the proof of the uniqueness of the prime factorization.

Goldbach's conjecture and uniqueness of the prime factorization

If we look back at letters from Goldbach to Euler, more precisely at a letter of June 7, 1742, we can see that Goldbach still allows the number one. This is evident in examples Goldbach presents in the letter.

$$4 = \begin{cases} 1+3 \\ 1+1+2 \\ 1+1+1+1 \end{cases} \qquad 5 = \begin{cases} 2+3 \\ 1+1+3 \\ 1+1+1+2 \\ 1+1+1+1+1 \end{cases} \qquad 6 = \begin{cases} 1+5 \\ 1+2+3 \\ 1+1+1+3 \\ 1+1+1+1+2 \\ 1+1+1+1+1+1 \end{cases}$$

Figure 1: Goldbach still allows the number 1

Mathematics is thus not invariant with regard to our present definition of the uniqueness of the prime factorization. The assumption made by the mathematician Christian Goldbach is still unproven. It says that every even number (> 2) can be written as a sum of two prime numbers. In the letter to Euler it says: It seems at least that every number greater than 2 is an aggregatum trium numerum primorum. The unitatem are included (Juškevič & Winter, 2022). I.e., each natural number larger than 2 is sum of three numbers, which are prime numbers or equal 1. The correctness of this conjecture was established in 1992 up to the number 20000000. At the same time, it is examined in how many ways a number $2n$ can be written as a sum of two prime numbers and which of the possible decompositions contains the smallest prime number.

With this we now want to come to the main theorem of elementary number theory. Similar to Courant and Robbins (1996) in "What is Mathematics?", we also assume the "existence of the prime factorization". It is interesting that the authors provide the proof of the uniqueness of the prime factorization – in the form of an indirect proof – already at the beginning of the book on the first twenty pages. The indirect proof, in which an assumption is led to a contradiction, is a typical type of proof for mathematics. Courant and Robbins (1996) state: If a number is represented as a product of prime numbers, we can arrange these prime factors in any order. A little trial and error leave no doubt that, apart from this arbitrariness in the arrangement, the decomposition of a number N into prime factors is unique: Any

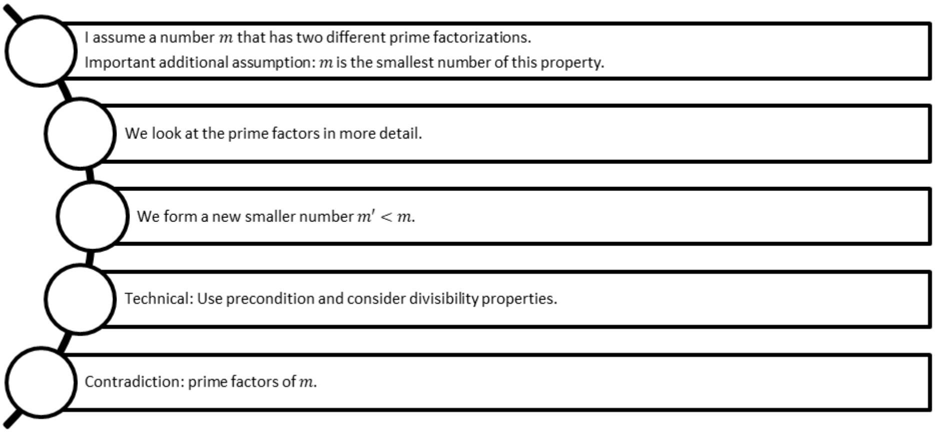


Figure 2: Steps of the proof for the uniqueness of the prime factorization

integer N greater than 1 can be written as a product of primes in only one way. Thus, for the proof on the uniqueness of the prime factorization, let us make the following assumption in the sense of Courant and Robbins: There is a natural number that is decomposable into primes "in two essentially different ways".

To this end, it is important to reconsider what is meant by in two essentially different ways. Let us give an example of this. Let's take the example of the number 30. We find six different prime factorizations for this number.

$$30 = 2{\cdot}3{\cdot}5 = 2{\cdot}5{\cdot}3 = 3{\cdot}2{\cdot}5 = 3{\cdot}5{\cdot}2 = 5{\cdot}2{\cdot}3 = 5{\cdot}3{\cdot}2$$

Courant and Robbins would note in this regard that these prime factorizations of the number 30 are not "essentially different" but are counted as one prime factorization.

For the proof of the uniqueness of the prime factorization Courant and Robbins choose an indirect form of proof. The above assumption will lead to a contradiction. This contradiction will show that the assumption of the existence of a number with two essentially different prime factorizations is untenable. To do this, proceed as shown in Figure 2.

I assume a number m that has two different prime factorizations

If there is a positive integer that can be decomposed into two substantially different products of primes, then there must be a smallest such number m, according to the principle of the smallest natural number: Every non-empty set $\mathcal{C}$ of positive integers contains a smallest number. This holds for the first step:

$$(1)\ p_1{\cdot}p_2{\cdot}\ldots{\cdot}p_r = m = q_1{\cdot}q_2{\cdot}\ldots{\cdot}q_s$$

in which the p and q are prime numbers.

We look at the prime factors in more detail

If we modify the order of p and q, we may assume that:

$$p_1{\le}p_2{\le}...{\le}p_r,$$

$$q_1{\le}q_2{\le}...{\le}q_s.$$

and $p_1{\neq}q_1$. For if that were the case, we could lift away the first factor from both sides of equation (1) and get two essentially different prime factorizations of a positive integer $< m$; this would be a contradiction to the fact that we had chosen m as the smallest number of this property.

We form a new smaller number $m' < m$

Suppose it is $p_1 < q_1$.

In the next step, we form the integer

$$(2)\, m' = m - p_1 \cdot q_2 \cdot q_3 \cdot \ldots \cdot q_s.$$

Consequently, apart from the order of the factors, the prime factorization of m' must be unique. Our additional assumption was that m is the smallest number possessing two essentially different prime factorizations, and $m' < m$ by definition.

Technical: Use precondition and consider divisibility properties

Substituting the two expressions of equation for m (1), we can write m' in the following two forms, next steps (3) and (4):

$$(3)\, m' = (p_1{\cdot}p_2{\cdot}\ldots{\cdot}p_r) - (p_1{\cdot}q_2{\cdot}\ldots{\cdot}q_s) = p_1(p_2{\cdot}p_3{\cdot}\ldots{\cdot}p_r - q_2{\cdot}q_3{\cdot}\ldots{\cdot}q_s),$$
$$(4)\, m' = (q_1{\cdot}q_2{\cdot}\ldots{\cdot}q_s) - (p_1{\cdot}q_2{\cdot}\ldots{\cdot}q_s) = (q_1 - p_1)(q_2{\cdot}q_3{\cdot}\ldots{\cdot}q_s).$$

Since $p_1 < q_1$, it follows from (4) that m' is a positive integer, while m' must be less than m because of (2). Consequently, apart from the order of the factors, the prime factorization of m' must be unique.

It follows from (3) that p_1 is a factor of m', so according to (4) p_1 must be a divisor of either $q_1 - p_1$ or of $q_2{\cdot}q_3{\cdot}\ldots\ {\cdot}q_s$.We thereby use: if a prime is the divisor of a product ab, then p must be a divisor of either a or of b. That p divides $q_2{\cdot}q_3{\cdot}\ldots{\cdot}q_s$ is impossible since all q are greater than p_1. Thus, $q_2{\cdot}q_3{\cdot}\ldots{\cdot}q_s$ is greater than and not equal to p and q is prime. From this follows that p_1 is not a divisor of it. Consequently, p_1 must be a divisor of $q_1 - p_1$, so there must be a positive integer h for which

$$q_1 - p_1 = p_1{\cdot}h \Longleftrightarrow q_1 = p_1{\cdot}\,(h+1)\,.$$

Contradiction: prime factors of m

But according to this, p_1 would have to be a divisor of q_1, which contradicts the fact that q_1 is a prime number. This contradiction shows that our original assumption is untenable, and it holds: Any integer N greater than 1 can be written as a product of primes in only one way (Courant & Robbins, 1996)

Conclusion

Many classical proofs for the 'Fundamental Theorem of Arithmetic' such as Euclid's, rely on procedures or the 'algorithm' for finding the greatest common divisor of two numbers. In Courant and Robbins (1996) instead a proof of more recent date is to be attached, which is somewhat shorter and perhaps somewhat "more refined" (as the authors themselves say), than the Euclidean one. In comparison, the proofs of the uniqueness of the prime factorization e.g. in the standard literature of teacher training (Scheid and Schwarz: "Elements of Arithmetic and Algebra

(Elemente der Arithmetik und Algebra)", Ziegenbalg: "Elementary Number Theory (Elementare Zahlentheorie)" or Padberg: "Number Theory and Arithmetic (Zahlentheorie und Arithmetik)") run as follows: It is shown in turn,

(a) The greatest common divisor, $GCD(a, b)$ can be represented as a linear combination of a and b.

(b) If a prime divides a product, so does one of the factors.

(c) Uniqueness of the prime factorization.

It is proven as several propositions one after the other. Courant and Robbins, on the other hand, in "What is Mathematics?" give the proof in one step. Moreover, Courant and Robbins hold that the indirect proof, despite being so elementary, requires a certain acumen and, in addition, is not only shorter but also more recent than the Euclidean proof. Thus, the introduction to the proof exhibits a certain "narrative" mode of presentation. Phrases are used such as "the assertion seems so obvious at first sight" (die Behauptung erscheint auf den ersten Blick so naheliegend), "by no means a triviality" (keineswegs eine Trivialität), "a certain acumen" (einen gewissen Scharfsinn) (Courant & Robbins, 1996). Moreover, in the course of the proof, "two essentially different prime decompositions (zwei wesentlich verschiedenen Primzahlzerlegungen) are referred to. In particular, the word "essentially" is crucial to the proof but seems in some sense narrative with us of more unfamiliar imprecise language. At the same time, we can possibly see the term "more refined" used by Courant and Robbins as "more devilish" when the two authors mentioned draw the comparison to the classical Euclidean proof. At the same time, the proof uses more "narrative" and possibly more unfamiliar imprecise language in some places and falls back on previously proven or postulated. This "narrative" structure of the proof and "unfamiliar imprecise language" clearly reminds of the book "The Number Devil" from the beginning.

That mathematics also has a narrative component in an indirect proof (a common form of proof in mathematics), for example, seems unexpected – but lends itself to a holistic perspective on mathematics as something that has become. Also illustrated by Goldbach's work and his letters to Euler (Figure 1), where the number one is still allowed.

Literatur

Courant, R. & Robbins, H. (1996). *What Is Mathematics? An Elementary Approach to Ideas and Methods.* Oxford: Oxford University Press.

Enzensberger, H. M. (1997). *The Number Devil. A Mathematical Adventure.* London: Granta Books.

Enzensberger, H. M. (2019). *Der Zahlenteufel. Ein Kopfkissenbuch für alle, die Angst vor der Mathematik haben.* München: dtv.

Glatfeld, M. (1993). Zur Einführung in das Heft “Primzahlen I”. *Mathematik Lehren*, *57*, 4–7.

Juškevič, A. P. & Winter, E. (Eds.) (2022). *Leonhard Euler und Christian Goldbach: Briefwechsel 1729-1764.* Berlin, Boston: De Gruyter. https://doi.org/10.1515/9783112652886

Siegler, H. & König, G. (1993). Kleines Primzahllexikon. *Mathematik Lehren*, *57*, 18–54.

Winter, H. (2004). Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. In H.-W. Henn & K. Maaß (Eds.), *ISTRON Material für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht, Band 8* (pp. 6 – 15). Hildesheim: Franzbecker.

Adressen der Autoren

Stephan Berendonk
Fakultät für Mathematik und Naturwissenschaften
Bergische Universität Wuppertal
Gaußstraße 20
D-42119 Wuppertal
berendonk@uni-wuppertal.de

Harald Boehme
Kohlhökerstr. 73
28203 Bremen
Deutschland
hboehme@uni-bremen.de

Christian Hugo Hoffmann
Institut für Technikfolgenabschätzung und Systemanalyse (ITAS)
Karlsruher Institut für Technologie (KIT)
Postfach 3640
D-76021 Karlsruhe
christian.hoffmann@kit.edu

Daniel Koenig
Department Mathematik
Universität Siegen
Walter-Flex-Str. 3
D-57068 Siegen
koenig@mathematik.uni-siegen.de

Jens Lemanski
Westfälische Wilhelms-Universität
Philosophisches Seminar
Domplatz 23
D-48143 Münster
jenslemanski@uni-muenster.de

Jasmin Özel
Universität Leipzig
Institut für Philosophie
Beethovenstraße 15
D-04107 Leipzig
jasmin.oezel@uni-leipzig.de

und/oder

Department of Philosophy
University of Nevada, Las Vegas
4505 Maryland Parkway
Box 455028
Las Vegas, NV 89154-5028, U.S.A.
jasmin.ozel@unlv.edu

Felicitas Pielsticker
Department Mathematik
Universität Siegen
Adolf-Reichwein-Str. 2
D-57076 Siegen
pielsticker@mathematik.uni-siegen.de

Štefan Porubský
Tschechische Akademie der Wissenschaften
Institut für Informatik
Pod Vodárenskou věží 271/2, 182
07 Praha 8
sporubsky@hotmail.com

Dolf Rami
Ruhr-Universität Bochum
Institut für Philosophie I; GB 04/147
Universitätsstraße 150
D-44780 Bochum
Dolf.Rami@ruhr-uni-bochum.de

Renate Tobies
Geschichte und Philosophie der Naturwissenschaften
Ernst-Haeckel-Haus
Berggasse 7
D-07745 Jena
renate.tobies@uni-jena.de

Ingo Witzke
Department Mathematik
Universität Siegen
Adolf-Reichwein-Str. 2
D-57076 Siegen
witzke@mathematik.uni-siegen.de

SieB
Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik

Die *Siegener Beiträge* bieten ein Forum für den Diskurs im Bereich von *Philosophie und Geschichte der Mathematik*. Dabei stehen die folgenden inhaltlichen Aspekte im Zentrum:

1. Philosophie und Geschichte der Mathematik sollen einander wechselseitig fruchtbar irritieren: Ohne Bezug auf die real existierende Mathematik und ihre Geschichte läuft das philosophische Fragen nach der Mathematik leer, ohne Bezug auf die systematische Reflexion über Mathematik wird ein Bemühen um die Mathematikgeschichte blind.

2. Geschichte ermöglicht ein Kontingenzbewusstsein, philosophische Reflexion fordert Kontextualisierungen heraus. Damit stellen sich u. a. Fragen nach der Rolle der Mathematik für die Wissenschaftsgeschichte, aber auch nach einer gesellschaftlichen Rolle der Mathematik und deren historischer Bedingtheit.

3. *Ein* spezieller Aspekt betrifft das (schulische) Lehren und Lernen von Mathematik und deren Wandel im historischen Verlauf; der reichhaltigen Zeitschriftenlandschaft im Bereich der mathematischen Fachdidaktik soll allerdings keine Konkurrenz gemacht werden.

Formelles:

1. Die Erscheinungsweise ist einmal jährlich.
2. Hauptziel ist eine Beförderung des fachlichen Diskurses; die Aufsätze werden nicht referiert, daher ist eine relativ schnelle Publikation möglich.
3. Publikationssprachen sind Deutsch (vorzugsweise), Englisch, Französisch, Italienisch.
4. Die Siegener Beiträge sind als Präpublikationsreihe konzipiert; alle Publikationsrechte verbleiben beim jeweiligen Autor.
5. Neben den regulären Ausgaben ist die Publikation von monographischen Bänden möglich.

SieB – Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik

Ralf Krömer, Gregor Nickel (Hrsg.)

Bisher erschienen

Band 1 (2013), 155 S., kart, 13,– Euro

Mit Beiträgen von Gregor Nickel, Ingo Witzke, Anna-Sophie Heinemann, Matthias Wille, Philipp Karschuck, Ralf Krömer & David Corfield

Band 2 (2013), 278 S., kart., 22,– Euro

Susanne Spies: Ästhetische Erfahrung Mathematik: Über das Phänomen schöner Beweise und den Mathematiker als Künstler

Band 3 (2014), 207 S., kart., 22,– Euro

Henrike Allmendinger: Felix Kleins „Elementarmathematik vom höheren Standpunkte" aus: Eine Analyse aus historischer und mathematikdidaktischer Sicht

Band 4 (2014), 109 S., kart., 13,– Euro

Mit Beiträgen von Peter Ullrich, Nicola Oswald, Tanja Hamann, Sebastian Schorcht, Elena Ficara, Tim Räz & Tilman Sauer, Gregor Nickel

Band 5 (2015), 232 S., kart., 13,– Euro

Mit Beiträgen von Thomas Bedürftig, Alessa Binder, Martin Janßen, Elisabeth Pernkopf, Matthias Wille

Band 6 (2016), 311 S., kart., 22,– Euro

Martin Rathgeb: George Spencer Browns *Laws of Form* zwischen Mathematik und Philosophie

Band 7 (2016), 199 S., kart., 13,– Euro

Mit Beiträgen von Karl Kuhlemann, Nikolay Milkov, Gregor Nickel, Martin Rathgeb, Laura Schulte, Harald Schwaetzer, Christian Thiel, Matthias Wille

Band 8 (2017), 202 S., kart., 13,– Euro

Mit Beiträgen von Thomas Gruber, Anna-Sophie Heinemann, Edward Kanterian, Daniel Koenig, Martin Rathgeb, Andreas Vohns, Matthias Wille

Band 9 (2018), 298 S., kart., 22,– Euro

Tanja Hamann: Die „Mengenlehre“ im Anfangsunterricht. Historische Darstellung einer gescheiterten Unterrichtsreform in der Bundesrepublik Deutschland

Band 10 (2018), 220 S., kart., 13,– Euro

Mit Beiträgen von Edward Kanterian, Karl Kuhlemann, Andrea Reichenberger, Tilman Sauer & Gabriel Klaedtke, Shafie Shokrani & Susanne Spies, Klaus Volkert, Matthias Wille

Band 11 (2019), 204 S., kart., 13,– Euro

Daniel Koenig, Gregor Nickel, Shafie Shokrani und Ralf Krömer (Hrsg.):
Mathematik in der Tradition des Neukantianismus.
Mit Beiträgen von Gottfried Gabriel & Sven Schlotter, Kay Herrmann, Daniel Koenig, Thomas Mormann, Matthias Neuber, Shafie Shokrani, Merlin Carl & Eva-Maria Engelen, Gregor Nickel, Christian Thiel

Band 12 (2019), 338 S., kart., 22,– Euro

Sara Confalonieri, Peter-Maximilian Schmidt, Klaus Volkert (Hrsg.):
Der Briefwechsel von Wilhelm Fiedler mit Alfred Clebsch, Felix Klein und italienischen Mathematikern

Band 13 (2020), 322 S., kart., 18,– Euro

Mit Beiträgen von Thomas Bedürftig, Stephan Berendonk, Rosmarie Junker & Susanne Spies, Edward Kanterian, Martin Mattheis, Gregor Nickel, Andrea Reichenberger, Toni Reimers, Moritz Vogel, Matthias Wille

Band 14 (2021), 216 S., kart., 18,– Euro

Mit Beiträgen von Henning Heske, Hannes Junker, Andreas Kirchartz, Oliver Passon und Tassilo von der Twer, Toni Reimers, Susanne Spies und Claus-Peter Wirth

Band 15 (2022), S., kart., 22,– Euro

Alessa Waldvogel: Dualität in der Funktionalanalysis. Zur historischen Entwicklung dualer Räume und dualer Operatoren in der geometrisierten Analysis

ISSN 2197-5590 univer*si* – Universitätsverlag Siegen | www.uni-siegen.de/universi

Preis: 18,– Euro (monographische Bände ggf. abweichend)

SieB – Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik

Bd. 16 (2022)

Mit Beiträgen von

Harald Boehme
Von Theodoros bis Speusippos. Zur Entdeckung des Inkommensurablen sowie der Seiten- und Diagonalzahlen

Jasmin Özel
Diagrammatisches Denken bei Euklid

Christian Hugo Hoffmann
Der Hauptsatz in der Ars conjectandi: Interpretationen von Bernoullis Beiträgen zu den Anfängen der mathematischen Wahrscheinlichkeitstheorie

Jens Lemanski
Schopenhauers Logikdiagramme in den Mathematiklehrbüchern Adolph Diesterwegs

Dolf Rami
Frege über Merkmale von Begriffen

Daniel Koenig
Der Raum als Reihenbegriff – Ernst Cassirers Deutung der Geometrieentwicklung des 19. Jahrhunderts.

Renate Tobies
Zum 100-jährigen Jubiläum des Ernst Abbe-Gedächtnispreises

Štefan Porubský
Štefan Schwarz und die Entstehung der Halbgruppentheorie

Stephan Berendonk
Ein dialektischer Weg zur Summe der Kubikzahlen

Felicitas Pielsticker & Ingo Witzke
Devilish prime factorization – fundamental theorem of arithmetic

ISSN 2197-5590

universi
UNIVERSITÄTSVERLAG SIEGEN