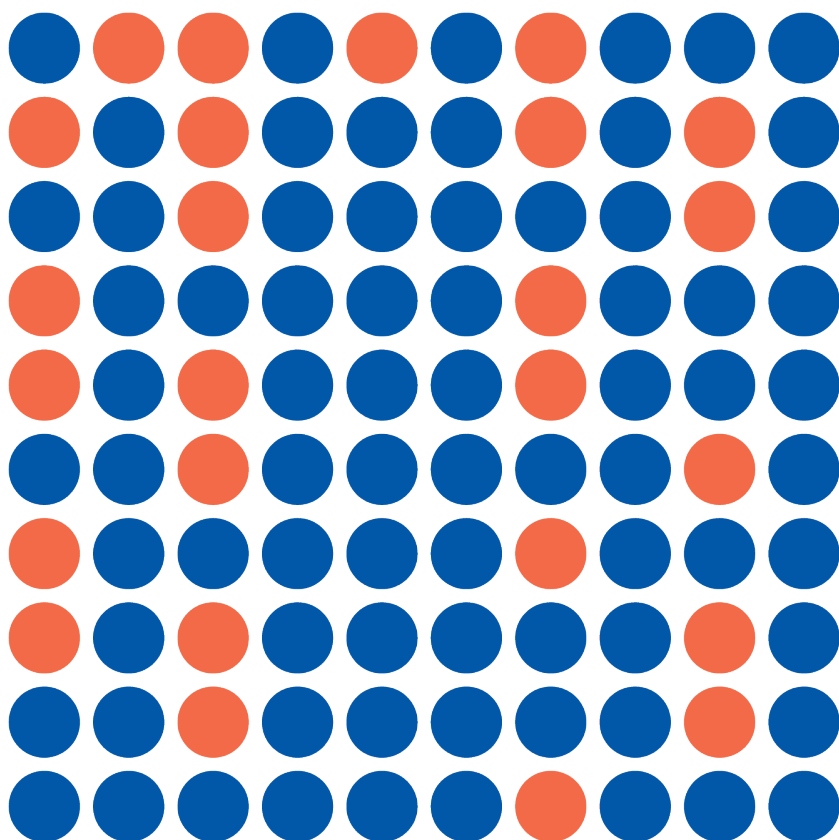


SieB

Ralf Krömer und Gregor Nickel (Hrsg.)
Siegener Beiträge zur
Geschichte und Philosophie
der Mathematik

Band 3 • 2014



Henrike Allmendinger

Felix Kleins *Elementarmathematik* vom *höheren Standpunkte aus*

Eine Analyse aus historischer
und mathematikdidaktischer Sicht

Felix Kleins „Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus“

SieB

Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik

Herausgegeben von

Ralf Krömer und Gregor Nickel

Band 3 (2014)

Henrike Allmendinger

Felix Kleins „Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus“

Eine Analyse aus historischer und mathematikdidaktischer Sicht

Henrike Allmendinger
Universität Siegen
Department Mathematik
Walter-Flex-Str. 3
57068 Siegen
allmendinger@mathematik.uni-siegen.de

Die vorliegende Arbeit wurde als Dissertation zur Erlangung eines Doktors der Naturwissenschaften von der Naturwissenschaftlich-Technischen Fakultät der Universität Siegen angenommen.

Gutachter: Prof. Dr. Rainer Danckwerts und Prof. Dr. Gregor Nickel
Tag der mündlichen Prüfung: 25. April 2014

Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik Bd. 3 (2014)
Herausgeber: Ralf Krömer (Universität Wuppertal) und Gregor Nickel (Universität Siegen)

Rechte: bei den Herausgebern/den Autoren

universi – Universitätsverlag Siegen 2014

Umschlaggestaltung: Sebastian Schorcht
Druck: UniPrint, Universität Siegen
gedruckt auf holz- und säurefreiem Papier

ISSN: 2197-5590

Vertrieb:
universi – Universitätsverlag Siegen
Am Eichenhang 50
57076 Siegen
info@universi.uni-siegen.de
www.uni-siegen.de/universi

SieB

Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik

Die Siegener Beiträge bieten ein Forum für den Diskurs im Bereich von Philosophie und Geschichte der Mathematik. Dabei stehen die folgenden inhaltlichen Aspekte im Zentrum:

- Philosophie und Geschichte der Mathematik sollen einander wechselseitig fruchtbar irritieren.
- Die Rolle der Mathematik in der Wissenschaftsgeschichte, aber auch die gesellschaftliche Rolle der Mathematik und deren historische Bedingtheit sollen untersucht werden.
- Ein spezieller Aspekt betrifft dabei das (schulische) Lehren und Lernen von Mathematik und deren Wandel im historischen Verlauf.

Unser herzlicher Dank gilt Sebastian Schorcht für die Gestaltung der Titelgraphik sowie Kordula Lindner-Jarchow und Martin Schubert für die verlagseitige Betreuung der Reihe.

Ralf Krömer
Gregor Nickel

Geleitwort zu Band 3

Die PISA-Studie hat den Blick für die Qualität des Mathematikunterrichts geschärft. Folgerichtig wurde in den letzten Jahren auch die universitäre Lehrerbildung zunehmend kritisch diskutiert. Der neuralgische Punkt ist das Studium für das gymnasiale Lehramt mit der viel zitierten „doppelten Diskontinuität“: Lehramtsstudierende erkennen am Studienbeginn ihre Schulmathematik kaum wieder und können nach Abschluss ihres fachmathematischen Studiums kaum souverän mit der Schulmathematik umgehen. Dieser (auch empirisch belegte) Missstand hat gerade in jüngster Zeit Forderungen belebt, die Schulmathematik im Studium in geeigneter Weise „vom höheren Standpunkt“ zu behandeln. Verwiesen wird hier regelmäßig auf das bekannte Werk „Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus“ des berühmten Mathematikers Felix Klein, der sich vor mehr als 100 Jahren bereits mit der Problematik befasst hat.

Angesichts der Aktualität und Brisanz der Thematik war es an der Zeit, genauer hinzuschauen und präzise herauszuarbeiten, von welcher Zielsetzung das Lehrwerk getragen ist und was den „höheren Standpunkt“ bei Felix Klein charakterisiert. Mit der vorliegenden Arbeit wird diese komplexe, anspruchsvolle Aufgabe erstmals in Angriff genommen. Der einschlägige mathematikhistorische und hochschuldidaktische Diskurs wird davon profitieren können. Es gelingt, dem Werk mit einem doppelt-perspektivischen Ansatz gerecht zu werden: Zum einen wird Kleins Lehrbuch im historischen Kontext charakterisiert als Antwort auf das schon damals drängende Problem der doppelten Diskontinuität. Die Feinanalyse bedient sich dabei erfolgreich heutiger mathematikdidaktischer Begrifflichkeit und schafft einen Analyserahmen, der die innere Struktur des Werks aufdeckt, aber zugleich über Kleins Epoche hinaus reicht: Die vorliegende Analyse hat das Potenzial, die Diskussion alternativer, insbesondere aktueller Entwürfe zu strukturieren und konstruktiv zu begleiten.

In einer ersten Orientierung wird der Leser eingestimmt und vertraut gemacht mit den Rahmenbedingungen, die zum tieferen Verständnis der *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus* mitgedacht werden müssen. In besonderer Weise betrifft dies den Einfluss der Meraner Reform (1905), die herausragende Persönlichkeit des Protagonisten, die erste Klärung des schillernden Begriffs der Elementarmathematik und schließlich eine erste Annäherung an das Werk selbst.

Der vorgeschlagene Analyserahmen differenziert zwischen der Vorlesung *zugrunde liegenden Prinzipien* (Kap. 2 bis 6) und in der Vorlesung *eingenommenen Perspektiven* (Kap. 7 bis 9). Diese Unterscheidung erweist sich als leistungsfähig, um Intentionen und Aufbau in Kleins Lehrwerk zu verstehen.

Es beginnt mit dem exemplarischen Nachweis, dass das Prinzip der innermathematischen *Vernetzung* programmatisch und inhaltlich eine zentrale Rolle spielt, wobei verschiedene Facetten unterschieden werden, die den Vernetzungsgedanken konkretisieren. Ähnlich strukturiert ist die Beschreibung des Primats der *Anschauung* mit herausgearbeiteten Facetten und Beispielen, die den grundsätzlich schwierigen Begriff der Anschauung in der Verwendung bei Klein präzisieren. Die Ausführungen zum Prinzip der *Anwendungsorientierung* werden primär als Verstärkung der beiden bereits beschriebenen Prinzipien charakterisiert. Abschließend wird untersucht, in welcher Weise Klein das aus der Mathematikdidaktik vertraute *genetische Prinzip* interpretiert und wie es sich in seinem Lehrbuch manifestiert.

Durch die nicht auf der Hand liegende Identifikation und Ausdifferenzierung dieser vier der Vorlesung zugrunde liegenden Prinzipien gelingt insgesamt ein erster wichtiger Schritt zur Analyse des Kleinschen Lehrwerks. Spannend sind die interpretierenden Ausführungen zu Kleins „Zwischenstück“: Hier wird ein stimmiges Bild der Intentionen von Felix Klein entfaltet. Abgerundet wird der erste Hauptteil durch ein Zwischenfazit, das die benannten Prinzipien bei Klein mit dem heutigen mathematikdidaktischen Verständnis dieser Leitlinien konfrontiert. Nach der Analyse wird festgehalten, dass Klein aus heutiger Sicht eine didaktische Orientierung zuzusprechen ist.

Komplementär zu den zugrunde liegenden Prinzipien werden in der Kleinschen Vorlesung durchgängig grundlegende Perspektiven identifiziert, die den Gegenstand des zweiten Hauptteils der Arbeit bilden:

Bei der *fachmathematischen Perspektive* geht es um das Verhältnis von Schul- und Hochschulmathematik, bei der Diskussion der *historischen Perspektive* wird eine aktuelle Klassifikation zur Rolle der Mathematikgeschichte in der Lehrerbildung geschickt genutzt, um die historische Perspektive bei Klein adäquat einzuordnen. Zu den besonders interessanten Stücken der Arbeit gehört aus mathematikdidaktischer Sicht das Kapitel, in dem Kleins *didaktische Perspektive* genauer analysiert wird. Das betrifft zum einen den Einfluss der Meraner Reform, zum anderen wird herausgearbeitet, dass dem Werk eine stoffdidaktische Dimension innewohnt. Darüber hinaus ist Kleins Interesse an unterrichtsmethodischen Fragen dokumentiert. Anregend ist das zweite Zwischenfazit: In der Tat enthält Kleins *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus* zugleich eine höhere Mathematik vom elementaren Standpunkt!

Aus mathematikhistorischer Sicht ist das Schlusskapitel von besonderem Interesse und ein dritter Eckpfeiler der Arbeit. Beim Vergleich mit alternativen zeitgenössi-

schen Konzepten entfaltet zudem der in der vorliegenden Schrift entwickelte Analyserahmen seine volle Kraft: Die bei Klein identifizierten Prinzipien und Perspektiven erlauben eine genaue kritische Würdigung zweier ausgewählter, grundlegend verschiedener Konzeptionen zur Umsetzung elementarmathematischer Vorlesungen. Insbesondere erscheint die in der Rezeption gelegentlich einseitige Abgrenzung der Ansätze von Toeplitz und Klein hier in differenziertem Licht.

Die entstandene Arbeit liegt im Grenzbereich zwischen Mathematikgeschichte und Mathematikdidaktik und schließt eine wesentliche Forschungslücke. Sie ist einladender Ausgangspunkt für weitere Forschung und bietet einen starken inhaltlichen Impuls zur Weiterentwicklung der Gymnasiallehrerbildung an Universitäten.

Siegen/Berlin im Juli 2014

Rainer Danckwerts

„Es gilt nicht mehr, neue Gedanken zu finden, sondern die richtigen Gedanken innerhalb der gegebenen Verhältnisse in richtiger Weise zur Geltung zu bringen.“

FELIX KLEIN

Meinen Eltern

Danksagung

Nach vielen Jahren intensiver Arbeit liegt sie nun vor Ihnen: meine Dissertation. Damit ist es an der Zeit, mich bei denjenigen zu bedanken, die mich in dieser spannenden Phase meiner akademischen Laufbahn begleitet haben.

Mein Dank gilt Professor Dr. Rainer Danckwerts, der mir von Anfang an großes Vertrauen entgegengebracht hat und mir die Freiheit gelassen hat, meinen Weg und das Thema zu finden und auszugestalten. Weiter möchte ich Prof. Dr. Gregor Nickel, den weiteren Mitgliedern der Kommission Prof. Dr. Katja Krüger und Prof. Dr. Ralf Krömer, sowie Prof. Dr. Katja Legnink danken. Sie alle haben mich mit fruchtbaren Diskussionen und wertvollen Hinweisen stets ermutigt, an den entscheidenden Stellen weiterzudenken aber auch die notwendigen Eingrenzungen des Themas vorzunehmen.

Meine Kollegen in der Abteilung Didaktik der Mathematik und Geschichte und Philosophie der Mathematik waren mir stets Ansprechpartner und bereicherten mein Forschungsprojekt durch ihre Ideen, ihre Anregungen und ihre konstruktive Kritik. Mein besonderer Dank gilt hier meinen Mitdoktoranden – Martin Rathgeb, Sebastian Schorcht, Shafie Shokrani, Susanne Spies und Gabriele Wickel – für ihr offenes Ohr und den fachlichen Austausch, bei dem aber auch die notwendige Ablenkung und freundschaftliche Verbundenheit nicht zu kurz kam, und Tanja Hamann, Kathrin Reimann und Ingo Witzke, ohne die viele Tagungen und Forschungstreffen nur halb so schön gewesen wären. Für die große Hilfe bei der Endredaktion danke ich zudem Kerstin Tiedemann, Angela Wizemann und meinem Vater Thomas Allmendinger.

Von Beginn an wurde an meinem Forschungsprojekt auch außerhalb der Universität Siegen großes Interesse signalisiert. Viele persönliche Gespräche und zahlreiche Einladungen zu Forschungskolloquien in Deutschland und der Schweiz haben mich darin bestärkt mein Vorhaben weiter zu verfolgen, auszuschärfen und abzuschließen. Das war in diesem Umfang keineswegs selbstverständlich. Für all die konstruktiven Hinweise und den Zuspruch, den ich erfahren habe, möchte ich mich herzlich bedanken.

Meine Eltern haben mich während meiner Arbeit immer unterstützt, fortwährend motiviert und mir in allen Phasen Verständnis entgegengebracht – mit dem Wissen um ihren Rückhalt und Glauben an mich hatte ich mit Sicherheit so einiges leichter. Auch war ich mir stets dem Interesse und der Unterstützung meiner Familie – insbesondere der meines Bruders, meiner Großeltern, meines Onkels und meiner Tante sowie meiner Patentante – und meiner Freunde sicher. Ihnen allen gilt mein tiefer Dank.

Siegen im Juli 2014

Henrike Allmendinger

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1 Erste Orientierung	7
1.1 Das Umfeld: Schule und Lehrerbildung um die Jahrhundertwende	8
1.2 Der Autor: Felix Klein	12
1.3 Der Gegenstand: Elementarmathematik	19
1.4 Das Werk: Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus .	24
Der Vorlesung zugrunde liegende Prinzipien	33
2 Das Prinzip der innermathematischen Vernetzung	35
2.1 Aufdecken von Gemeinsamkeiten der Fragestellung	36
2.2 Herstellen von Zusammenhängen bei Begriffen und Sätzen	37
2.3 Verwendung gebietsfremder Hilfsmittel	39
3 Das Prinzip der Veranschaulichung	43
3.1 Anschauliche Erfassung der Sachlage	44
3.2 Anschauliche Beweise	47
3.3 Begriffsbildung und Anschauung	50
3.4 Die Bedeutung der Raumanschauung	52
4 Das Prinzip der Anwendungsorientierung	55
4.1 Anwendungsorientierung als Mittel der Veranschaulichung	56
4.2 Fortschreibung des Vernetzungsgedankens	58
5 Das genetische Prinzip	61
5.1 Induktives Vorgehen – vom Speziellen zum Allgemeinen	62
5.2 Nachvollziehen der Entstehungsgeschichte	63
5.3 Fokus auf mathematische Denk- und Arbeitsweisen	64

6 Kleins „Zwischenstück“ als Legitimation	67
6.1 Die Entwicklungsreihen A und B im „Zwischenstück“	67
6.2 Kleins Position bezüglich der Entwicklungsreihen	69
6.3 Die „Prinzipien“ als Charakteristika der Entwicklungsreihe B	71
 Zwischenfazit I – Kleins Prinzipien als didaktische Orientierung?	 75
 In der Vorlesung eingenommene Perspektiven	 81
 7 Die fachmathematische Perspektive	 83
7.1 Systematische Darlegung schulmathematischer Inhalte	84
7.2 Rechtfertigung schulmathematischer Inhalte	85
7.3 Ausweitung schulmathematischer Inhalte	86
7.4 Über den Nutzen für die Schule: Ein kritischer Rückblick	87
 8 Die historische Perspektive	 91
8.1 Historische Exkurse und Randbemerkungen	91
8.2 Historische Anekdoten als motivationales Moment	94
8.3 Exemplarische Konkretisierung der genetischen Methode	96
8.4 Einordnung der historischen Momente	98
 9 Die didaktische Perspektive	 105
9.1 Curricular: Die Vorlesung im Spiegel der Meraner Reform	106
9.2 Stoffdidaktisch: Didaktisch orientierte Sachanalysen	113
9.3 Kleins didaktische Haltung: Analyse der Randbemerkungen	121
 Zwischenfazit II – Höhere Mathematik vom elementaren Standpunkt?	 131
 10 Vergleich mit alternativen zeitgenössischen Konzepten	 137
10.1 Zur Notwendigkeit elementarmathematischer Vorlesungen	138
10.2 Eine konservative Umsetzung: Heinrich Weber	142
10.3 Eine alternative Orientierung: Wilhelm Franz Meyer	156
10.4 Zur Tragfähigkeit elementarmathematischer Vorlesungen	163
 Fazit und Ausblick	 173
 Literatur	 177

Einleitung

„Der junge Student sieht sich am Beginn seines Studiums vor Probleme gestellt, die ihn in keinem Punkte mehr an die Dinge erinnern, mit denen er sich auf der Schule beschäftigt hat; [...]. Tritt er aber nach Absolvierung des Studiums ins Lehramt über, so soll er plötzlich eben diese herkömmliche Elementarmathematik schulmäßig unterrichten; da er diese Aufgabe kaum selbständig mit seiner Hochschulmathematik in Zusammenhang bringen kann, so wird er bald die althergebrachte Unterrichtstradition aufnehmen.“ (Klein EvhS 1, S. 1)

Um dieser „doppelten Diskontinuität“ entgegenzuwirken, entwickelte Felix Klein die Vorlesungsreihe *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*. Mithilfe der Vorlesungsreihe sollten fortgeschrittene Studenten den Zusammenhang zwischen der Elementarmathematik und der Hochschulmathematik erkennen und „dem großen Wissensstoff, der vermittelt wird, in reichem Maße lebendige Anregungen für den eigenen Unterricht entnehmen.“ (Klein EvhS 1, S. 2).

Inzwischen sind mehr als hundert Jahre vergangen, seit Klein das bis heute aktuelle Grundproblem der universitären Lehrerbildung „so markant“ (Hefendehl-Hebeker 2013, S. 2) zum Ausdruck brachte. Die von Klein beschriebene Kluft existiert nach wie vor, obwohl oder gerade weil sich die Bildungslandschaft von Schule und Hochschule verändert hat (vgl. Hefendehl-Hebeker 2013, S. 2),¹ und ist insbesondere in Bezug auf die gymnasiale Lehramtsausbildung in den letzten Jahren in den Fokus der hochschuldidaktischen Diskussion gerückt. Davon zeugen unter anderem die Stellungnahmen und Empfehlungen der einschlägigen Fachverbände (vgl. aCampo, Weigand und Ziegler 2008) und mehrere Fachtagungen, die sich diesem Thema exklusiv widmeten:

- Vom 28. bis 29. Oktober 2011 veranstalteten GDM, DMV und MNU in Dortmund gemeinsam eine Fachtagung zur Lehrerbildung zum Thema *Wider die doppelte Diskontinuität in der Mathematiklehrerbildung für das Gymnasium*. Ziel war es, dem „facettenreichen Meinungsbild des an der Ausbildung von Gymnasiallehrkräften beteiligten Personenkreises eine Plattform zu bieten und neben grundlegenden Programmatiken auch konkrete Beispiele guter

¹Dies belegen zahlreiche empirische Studien. Man vergleiche hierzu etwa Pieper-Seier (2002), Curdes u. a. (2003) und Mischau und Blunck (2006).

Praxis zu sammeln und zu reflektieren“ (Ableitinger u. a. 2013, S. vi). Der Tagungsband erschien 2013 (vgl. Ableitinger u. a. 2013).

- Das *Kompetenzzentrum für Hochschuldidaktik Mathematik* (khdm) der Universitäten Kassel, Lüneburg und Paderborn organisierte in Kooperation mit GDM, DMV und MNU vom 20. – 23. Februar 2013 in Paderborn eine Arbeitstagung zu *Mathematik im Übergang Schule/Hochschule und im ersten Studienjahr*, um Forschungsergebnisse und Erfahrungen aus der Praxis auszutauschen sowie einen Austausch zwischen Schule und Hochschule zu fördern. *Extended Abstracts* der Vorträge sind online verfügbar (www.khdm.de); ein Tagungsband ist in Arbeit.
- Vom 22. – 26. April 2013 lud das *Hausdorff Research Institute For Mathematics* (HIM) zu einer Arbeitstagung mit dem Thema *Mathematik Lernen an der Schule und im Studium: Gemeinsamkeiten, Unterschiede, Konsequenzen* ausgewählte Expertinnen und Experten aus den Bereichen Fachmathematik, Didaktik und Schule ein. Ziel war eine Bestandsaufnahme der aktuellen Problematik beim Übergang von der Schule zur Hochschule im Fach Mathematik sowie die konzeptionelle Weiterentwicklung. Ein Tagungsband ist in Arbeit.

Auf diesen Tagungen wurden zahlreiche Initiativen und Projekte vorgestellt, die eine Neuorientierung der universitären Lehrerbildung für das gymnasiale Lehramt im Fach Mathematik anstreben. Eines der ersten und viel beachteten Projekte ist das von der Deutschen Telekom Stiftung geförderte Tandemprojekt *Mathematik Neu Denken* der Universitäten Gießen und Siegen (vgl. Beutelspacher u. a. 2011). Im Jahre 2005 begann ein mehrjähriger Modellversuch, der zunächst auf eine Umstrukturierung des ersten Studienjahres zielte. Anschließend wurde die Projektidee programmatisch ausgeweitet und ein idealtypischer Studienplan für ein volles gymnasiales Lehramtsstudium erarbeitet. Ziele des Projektes waren unter anderem eine Professionalisierung des Lehramtsstudiums, „die in der Wissenschaft und in der Perspektive des Berufsfeldes gleichermaßen verankert ist“ (Beutelspacher u. a. 2011, S. 3) sowie ein „Schul- und Berufsfeldbezug von Anfang an“ (Beutelspacher u. a. 2011, S. 22), der an schulische Vorerfahrungen anknüpft. Eine zentrale Komponente der ausgesprochenen Empfehlungen sind Veranstaltungen zur *Schulmathematik vom höheren Standpunkt* – im Projekt exemplarisch für das Themenfeld Analysis ausgearbeitet (vgl. Danckwerts 2013):

„Um [...] fachbezogene Kompetenzen frühzeitig zu entwickeln und zugleich die erwünschte Verbindung von Fach- und Berufsfeldbezug sichtbar zu machen, erscheint es sinnvoll, in eigenen Lehrveranstaltungen vom Typ ‚Schulmathematik vom höheren Standpunkt‘ einen kritisch-konstruktiven Rückblick auf die Oberstufenmathematik anzustreben.“ (Beutelspacher u. a. 2010, S. 10)

Auch in nachfolgenden Projekten wurde die Idee der Anknüpfung an schulische Vorerfahrungen und die Verbindung von fachmathematischen und fachdidaktischen Inhalten aufgegriffen. Diese in Fachveranstaltungen der Grund-, Haupt- und Realschullehrmatsausbildung bereits vielerorts etablierte Vernetzung ringt in der gymnasialen Lehramtsausbildung noch um den passenden Ort. Im Projekt *Mathematik Besser Verstehen* der Universität Essen wurden in den Fachvorlesungen des ersten Studienjahres Übungsaufgaben mit Bezug zum Schulstoff systematisch entwickelt (vgl. Ableitinger und Herrmann 2011). Ähnlich wie bei *Mathematik Neu Denken* wurde in Marburg im Zuge einer Reform der Lehramtsausbildung ein Schnittstellenmodul neu gestaltet. Dieses hat das Ziel, „in der Studieneingangsphase stabile Verknüpfungen zwischen den Vorkenntnissen und Vorerfahrungen aus der Schulmathematik und den neu erarbeiteten Inhalten und Denkweisen der Hochschulmathematik aufzubauen“ (Bauer 2013, S. 39). Auch an der ETH Zürich wurden spezielle Veranstaltungen an der Schnittstelle von Schul- und Hochschulmathematik eingerichtet, nämlich die *fachwissenschaftlichen Vertiefungen mit pädagogischem Fokus* (vgl. Kirchgraber 2008).

All diesen Initiativen ist ein Gedanke gemein: Um mit mathematisch anspruchsvollen Unterrichtssituationen sach- und situationsgerecht umzugehen, müssen Lehrerinnen und Lehrer mit dem Stoff beweglich umgehen können und Einblick in die Begründungszusammenhänge und Hintergründe der behandelten Themen haben. Dies setzt ein tieferes Verständnis der Fachinhalte des Curriculums der Sekundarstufen voraus (vgl. bspw. Krauss u. a. 2008). Dabei wird stets ein Bezug zu Kleins Vorlesungskonzept hergestellt:

So folgern Krauss u. a. (2008) aus den Ergebnissen der Coaktiv-Studie explizit die Notwendigkeit von Vorlesungen im Sinne der Kleinschen *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus* (vgl. Krauss u. a. 2008, S. 238). Kirchgraber (2008) und Beutelspacher u. a. (2011) entwickeln beide die Idee des *höheren Standpunkts* weiter, wenn auch in deutlich unterschiedliche Richtungen: Kirchgraber stellt dem höheren Standpunkt im augenscheinlich Kleinschen Sinne eine symmetrische Sichtweise gegenüber – nämlich einer Fachmathematik vom elementaren Standpunkt (vgl. Kirchgraber 2008, S. 149) –, während im Projekt *Mathematik Neu Denken* ein höherer Standpunkt angestrebt wird, „der auf die vertiefte Auseinandersetzung mit der Oberstufenmathematik zielt und prinzipiell mit den bis dahin erworbenen (elementar-)mathematischen Mitteln auskommt“ (Danckwerts 2013, S. 87).

Insgesamt kann festgehalten werden, dass den Projekten und Initiativen, die sich in der inhaltlichen Ausrichtung und der Methodik deutlich unterscheiden, meist ein eher intuitives Verständnis des Begriffs *höherer Standpunkt* zugrunde liegt. Die jeweiligen Auffassungen dieses Standpunkts werden nicht normativ fundiert, sondern exemplarisch an konkreten Inhalten spezifiziert.

Kleins Vorlesung dient dabei überwiegend als Anstoß für die Entwicklung aktueller Ideen und Konzepte. Ein Beispiel hierfür ist neben den zahlreichen Projekten zur Neuorientierung des Lehramtsstudiums auch das von der IMU und der ICMI angelegte internationale *Klein-Projekt* (www.klein-project.org), welches die Ideen von Felix Klein in moderner und aktueller Form aufgreift und diese weiterentwickelt. Die Ergebnisse werden in sogenannten *Klein-Artikeln* veröffentlicht (vgl. Weigand 2009). Eine detaillierte Auseinandersetzung mit Kleins Vorlage mit Blick auf den dort vermittelten *höheren Standpunkt* liegt bis jetzt nicht vor.

Die vorliegende Arbeit greift diese Forschungslücke auf. Ziel ist es, die viel zitierte Vorlesung Kleins auf ihre Intention, ihre innere Struktur sowie ihren Beitrag zu einem lehramtsgerechten Hochschulstudium zu befragen und dadurch genauer zu verstehen. Dabei wird Kleins *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus* im Kontext der damaligen Situation analysiert und mit Mitteln aktueller mathematikdidaktischer Denkweisen interpretiert. Die Arbeit kann damit einerseits einen Beitrag zur Forschung im weiteren Bereich der *Geschichte des Mathematikunterrichts*² und andererseits zur *hochschuldidaktischen Diskussion* um die Neuorientierung des gymnasialen Lehramtsstudiums im Fach Mathematik leisten.

Zum Aufbau und Vorgehen

Kleins Vorlesungsreihe besteht aus drei Teilen: *Arithmetik, Algebra und Analysis, Geometrie* und *Präzisions- und Approximationsmathematik*. Durch ihre strukturellen Unterschiede lassen sich die drei Bände nur schwer vergleichen oder gemeinsam analysieren. Die Analyse stützt sich aufgrund seiner programmatischen Exkurse hauptsächlich auf den ersten Teil. Grundlage der Analyse ist das Manuskript dieser ersten Vorlesung.

Als Analysemethode bietet sich die geisteswissenschaftlich begründete *Hermeneutik* an (vgl. bspw. Bühler 2003).³ Dieser Methode werde ich in der vorliegenden Arbeit explizit einen *phänomenologischen Zugang* voranstellen. Phänomenologie soll im Folgenden nicht im engeren Sinn als die von Husserl (1986) begründete philosophische Richtung verstanden werden, sondern als wissenschaftstheoretische Methode, wie sie etwa Seiffert (1970) in seiner *Einführung in die Wissenschaftstheorie* vorstellt:

²Die Geschichte des Mathematikunterrichts bzw. die Geschichte des Lehrens und Lernens von Mathematik als Forschungsfeld wurde erstmals 2004 auf der *International Conference of Mathematics Education* (ICME) in Kopenhagen international sichtbar und gilt inzwischen als etabliert (vgl. Bjarnadóttir u. a. 2009).

³Die hermeneutische Methode hat sich im Rahmen der historisch orientierten mathematikdidaktischen Forschung bereits bewährt (vgl. bspw. Krüger 2000).

„[Der Phänomenologe] sagt: Meine Eindrücke als solche habe ich und lasse ich mir nicht wegargumentieren. Warum soll ich sie nicht auch zur Grundlage wissenschaftlicher Analysen machen?“ (Seiffert 1970, S. 42)

Eine solche Phänomenologie ist als deskriptive Methode zu verstehen, in der zunächst alle rationalen, theoretischen und historisch bedingten Zugänge ausgespart bleiben. Ziel ist es, die Eindrücke wertfrei und ohne Ableitung von Handlungsempfehlungen oder Normen zu beschreiben. Eine solche Methode ist vordergründig unhistorisch, da die Phänomene zunächst so beschrieben werden, als ob sie überall und zu jeder Zeit auftreten könnten – auch wenn der Phänomenologe dies nicht explizit behauptet. Da aber eine jede Beobachtung zu einer bestimmten Zeit geschieht, stellt sich jede phänomenologische Analyse dennoch „stillschweigend in einen bestimmten historischen Horizont“ (vgl. Seiffert 1970, S. 53).

Ich halte einen solchen phänomenologischen Zugang für angemessen, um Kleins Vorgehen und die charakteristischen Merkmale herauszuarbeiten, objektiv – also wertfrei und unabhängig vom Kontext – zu beschreiben und im Sinne einer taxonomischen Darstellung systematisch zu ordnen. Um die Frage ‚Was ist Kleins höherer Standpunkt?‘ zu beantworten, müssen die herausgearbeiteten Merkmale angemessen interpretiert und hinsichtlich ihrer zugrunde liegenden Intention untersucht werden. Diese Auslegung geschieht der *hermeneutischen Methode* folgend im historischen Kontext.

Zusätzlich bediene ich mich im Rahmen der Analyse des aktuellen *mathematikdidaktischen Instrumentariums*, mithilfe dessen das didaktische Interesse beschrieben werden kann, das in der Vorgehensweise und den Randbemerkungen Kleins sichtbar wird. Es geht nicht darum – um der Kritik des vorgreifenden Anachronismus vorzubeugen – zu behaupten, Klein habe bereits zu seiner Zeit heutige mathematikdidaktische Konzepte bewusst verwendet. Diese Konzepte erweisen sich lediglich als geeignetes Hilfsmittel, um die Kleinschen Ideen und seine Vorgehensweise besser zu verstehen, einzuordnen und von Alternativen abzugrenzen.

Die Ergebnisse der Analyse werden in vier Teilen präsentiert: Den Auftakt bildet in Kapitel 1 eine *erste Orientierung* über den historischen Kontext. Das betrifft die Situation in Schule und Lehrerbildung zu Kleins Zeit, den Autor und Dozenten Felix Klein, den behandelten Gegenstand der Vorlesung – die Elementarmathematik – sowie die Vorlesung selbst.

Im zweiten Teil werden *der Vorlesung zugrunde liegende Prinzipien* im beschriebenen Sinne weitestgehend phänomenologisch herausgearbeitet und spezifiziert: das Prinzip der Vernetzung (Kapitel 2), das Prinzip der Veranschaulichung (Kapitel 3), das Prinzip der Anwendungsorientierung (Kapitel 4) sowie das genetische Prinzip (Kapitel 5). In Kapitel 6 wird mithilfe des „Zwischenstücks“ in Kleins Vorlesung

dargelegt, dass dieser die Prinzipien bewusst einsetzt. Klein kann damit als erstes Zwischenfazit eine didaktische Orientierung zugesprochen werden.

Komplementär zu den Prinzipien werden im dritten Teil *von Klein eingenommene Perspektiven* identifiziert. Die fachmathematische Perspektive (Kapitel 7), die historische Perspektive (Kapitel 8) und die didaktische Perspektive (Kapitel 9) spezifizieren den von Klein angestrebten höheren Standpunkt. Durch die Analyseergebnisse bezüglich der Prinzipien und Perspektiven wird als zweites Zwischenfazit eine weitere Ausrichtung der Vorlesung deutlich:

Klein betrachtet nicht nur *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*, sondern auch *höhere Mathematik vom elementaren Standpunkt*.

In Kapitel 10 wird die Kleinsche Vorlesung mit alternativen zeitgenössischen Konzepten elementarmathematischer Vorlesungen verglichen. Somit wird die *Elementarmathematik vom höheren Standpunkt*, von einer Außenperspektive aus, einer kritischen Reflexion bezüglich ihrer Tragfähigkeit unterzogen. Die *Kleinschen Prinzipien und Perspektiven* erweisen sich als geeignetes Analyseinstrument für einen systematischen Vergleich lehramtsspezifischer Vorlesungen zur Elementarmathematik.

Hinweise an den Leser

Als Grundlage der Analyse dient die vierte Auflage des Manuskripts zum ersten Teil der *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus* – bis auf wenige Änderungen ein unveränderter Nachdruck der ersten Auflage. Um die Belege aus meinen Hauptquellen hervorzuheben, verweise ich bei den drei Bänden der Elementarmathematik nicht auf Autor und Erscheinungsjahr, sondern verwende die Kürzel ‚EvhS 1‘ – ‚EvhS 3‘ (**E**lementarmathematik **v**om **h**öheren **S**tandpunkte aus). Zudem ist darauf hinzuweisen, dass Klein in seinen Manuskripten sehr großzügig das Mittel der kursiven Hervorhebung verwendet. Hervorhebungen in den Zitaten entstammen, wenn nicht anders gekennzeichnet, dem Original.

Zu Kleins Zeit existierte keine geschlechterdifferenzierende Sprache, wie sie heute verwendet wird. Zudem bestand die Hörerschaft Kleins vornehmlich aus Männern. Klein und seine Zeitgenossen verwenden ausschließlich die männliche Sprachform. Aus heutiger Sicht ist die weibliche Form mitzudenken. Im Folgenden werde ich der Einfachheit halber ebenfalls auf die gleichzeitige Verwendung männlicher und weiblicher Sprachformen verzichten. Sämtliche Personenbezeichnungen gelten für beiderlei Geschlecht.

Kapitel 1

Erste Orientierung

Wie bereits in der methodischen Einführung beschrieben, verfolgt die vorliegende Arbeit keine historisch-hermeneutische Herangehensweise im engeren Sinn. Die Charakteristika der untersuchten Vorlesung werden in erster Linie durch eine phänomenologische Textanalyse herausgearbeitet. Um aber die Intention des Autors, die der Vorlesung zugrunde liegt, zu verstehen, ist es notwendig, sich bezüglich des Umfelds und der Entstehungsgeschichte des Werkes zu orientieren.

Das vorliegende Kapitel wird Hintergrundwissen bereitstellen, das für die Textanalyse hilfreich ist. Das Kapitel gliedert sich dabei in vier Abschnitte, die orientieren sollen über

- die *Ausgangslage* in Schule und Lehrerbildung, vor deren Hintergrund die Vorlesung konzipiert wurde,
- die Haltung und Einstellung des *Autors* bzw. Dozenten Felix Klein, die zur Konzeption der Vorlesung beigetragen haben,
- den in der Vorlesung behandelten *Gegenstand*, die Elementarmathematik, sowie
- das *Werk* selbst, seine Entstehungsgeschichte und die damit verfolgten Ziele.

In keinem der Abschnitte wird eine lückenlose und chronologische Wiedergabe der Fakten angestrebt. Ich fokussiere stets auf die Inhalte, die zum Verständnis der Kleinschen Vorlesung notwendig sind. Für detaillierte Informationen über Schule und Lehrerbildung sowie die gesellschaftlichen Rahmenbedingungen um die Jahrhundertwende empfehle ich einen Blick in die Dissertationen von Katja Krüger (2000) und Heike Biermann (2010). Ausführlichere Details zur Biographie Kleins können beispielsweise bei Tobies und König (1981) nachgelesen werden.

1.1 Das Umfeld: Schule und Lehrerbildung um die Jahrhundertwende

Felix Klein richtet sich mit seiner Vorlesungsreihe *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus* an zukünftige Lehrer, die seinen Ausführungen „in reichem Maße lebendige Anregungen für [i]hren eigenen Unterricht entnehmen“ (Klein EvhS 1, S. 2) sollen. Um diese Intention und die damit verbundenen Inhalte der Vorlesung angemessen auslegen zu können, wird nachfolgend ein kurzer Überblick über die zu Kleins Zeit vorherrschende Situation an den höheren Schulen sowie den Universitäten gegeben. Besonderes Augenmerk wird dabei auf die Lehrerbildung gelegt.

Das Prüfungswesen für das Lehramt an höheren Schulen. 1808 wurde die *pro facultate docendi*, die Lehramtsprüfung für Lehrer an höheren Schulen¹, eingerichtet. Der Beruf des wissenschaftlich ausgebildeten Lehrers war damit erstmals eingeführt (Toepell 2003, S. 177). Zunächst wurde von den Universitäten die allgemeine Lehrbefähigung – also für alle Fächer der jeweiligen Schulart – vergeben:

„[Man] ging von dem Gedanken aus, jeder Lehrer müsse die Kenntnisse, die bei der Abiturprüfung von allen Schülern verlangt würden, auch selbst besitzen. Dementsprechend wurde der Kandidat in allen Fächern geprüft.“ (Killing 1913, S. 20)

Dies wurde mit der Prüfungsordnung von 1866 teilweise eingeschränkt. Der Lehramtskandidat durfte entscheiden, in welchen Fächern er die Lehrbefähigung erreichen wollte, und hatte sich dabei auf ein entweder sprachlich-geschichtliches oder ein mathematisch-naturwissenschaftliches Feld festzulegen. In der Prüfungsordnung von 1898 fiel diese Profilbildung weg. Der Kandidat wählte nun nach bestimmten Vorgaben drei Fächer, für die er die Lehrbefähigung anstrebte. Auf der Grundlage einer schriftlichen und einer mündlichen Prüfung wurde für jedes Fach entweder eine Lehrbefähigung erster Stufe – für alle Schulstufen – oder zweiter Stufe – für die untere und mittlere Schulstufe – erteilt (vgl. Mattheis 2000a, S. 15f). Erhalten blieb „als Überbleibsel der ältesten Prüfungsordnung“ (Killing 1913, S. 20) eine allgemeine Prüfung über die Fächer Philosophie, Pädagogik, deutsche Literatur und Theologie.

¹Hierzu zählen die neunjährigen Schulen: Gymnasien, Realgymnasien und Oberrealschulen (vgl. bspw. Mattheis 2000a, S. 8)

Die Rolle der angewandten Mathematik. In den Prüfungsordnungen von 1882 und 1887 war im Fach Mathematik keine Prüfung in angewandter Mathematik mehr vorgesehen, da dies den Kreis der Studierenden deutlich schmälerte (Klein 1905b, S. 485). Diese Änderungen wurde in den folgenden Jahren stark kritisiert. Neben Klein sprachen sich zahlreiche weitere Mathematiker, wie beispielsweise Stäckel (1904), Gutzmer (1904) und Holzmüller (1905), für eine Stärkung der angewandten Mathematik in der Schule – nicht zuletzt als Vorbereitung für ein mögliches Studium auf den Technischen Hochschulen – und an den Universitäten aus.

Mit der formalen Gleichstellung der Technischen Hochschulen (vgl. Mattheis 2000a, S. 7) und der Einführung der Lehrbefähigung für angewandte Mathematik in der universitären Prüfungsordnung von 1898 waren erste bedeutende Schritte in diese Richtung getan. In der Schule kamen diese Bestrebungen aber zunächst nicht an, und auch aus wissenschaftlicher Perspektive blieb eine klare Trennung zwischen angewandter und reiner Mathematik zunächst erhalten:

„Wenn es so an dem guten Willen der Universitäten wahrlich nicht gefehlt hat, so darf man sich doch nicht verhehlen, daß alles, was bis jetzt geschehen ist, nur einen schwachen Anfang bedeutet, und daß [...] ,lange Jahre unablässiger und vielfach auch undankbarer Arbeit erforderlich sein werden, bis die Entfremdung zwischen reiner und angewandter Wissenschaft überwunden sein wird.“ (Stäckel 1904, S. 315)

Die Anhänger der Förderung angewandter Mathematik in den Schulen bedauerten die Einteilung der mathematischen Wissenschaft in reine und angewandte Mathematik (vgl. Stäckel 1904, S. 318)² und forderten als Reaktion auf die Prüfungsordnung von 1898 die Kopplung der Lehrbefähigung 1. Stufe für reine und angewandte Mathematik und die verpflichtende Studienfachwahl ‚angewandte Mathematik‘ für Mathematiklehrer an den Realgymnasien und Oberrealschulen (vgl. Stäckel 1904, S. 330). Bis 1908 waren diese Forderungen noch nicht umgesetzt worden. Die Frage nach der Stellung der angewandten Mathematik in Schule und Hochschule war damit nach wie vor ein aktuelles, viel diskutiertes Thema, welches in die Konzeption der *Elementarmathematik vom höheren Standpunkt* einfluss.

Zur Aufgabe und Stellung des Mathematiklehrers. Bis nach dem Zweiten Weltkrieg war es nicht üblich, ein Universitätsdiplom im Fach Mathematik zu vergeben, der größte Teil der Studenten schloss die universitären Studien mit dem *Staatsexamen* ab (vgl. Toepell 2003, S. 178). Insbesondere galt bis Ende des 19. Jahrhunderts der Lehrer noch als *Fachgelehrter*:

²Insbesondere sei mit dieser Trennung ein Werturteil verbunden: Die angewandte Mathematik werde so als ‚unrein‘ verstanden (vgl. Stäckel 1904, S. 318).

„Man [erachtete] es für selbstverständlich [. . .], dass ein Mathematiklehrer in den obersten Klassen im Laufe seines Studiums so weit in die Mathematik eingedrungen sei, daß der Candidat die Befähigung gewonnen habe, auf seinem Gebiete mit Freudigkeit und mit Erfolg weiter zu arbeiten.“ (Mattheis 2000a, S. 10)

Neben dem Unterricht an den Schulen sollte der Lehrer engen Kontakt zur Universität halten und sich aktiv forschend betätigen. Es war daher auch möglich, dass dieser nach einiger Lehrtätigkeit an einer höheren Schule als Hochschullehrer an die Universität zurückkehrte – Jacob Steiner und Hermann Graßmann sind bekannte Beispiele hierfür (vgl. Toepell 2003, S. 178).

Anfang des 20. Jahrhunderts wurden erste Stimmen laut, die die Entfremdung „bis zur gegenseitigen Nichtbeachtung“ (Klein 1902, S. 70) von Universität und Schule beklagten:

„In einer langen Zeitperiode [. . .] trieb man an den Universitäten ausschließlich hohe Wissenschaft ohne Rücksicht darauf zu nehmen, was der Schule nottat, und ohne sich überhaupt um die Herstellung einer Verbindung mit der Schulmathematik zu sorgen.“ (Klein EvhS 1, S. 1)

Die Kritik an der entstandenen Kluft beinhaltete zu großen Teilen eine wissenschaftliche Komponente. Die Mathematiklehrer an den höheren Schulen sollten sich wieder vermehrt mit aktuellen Forschungsfragen auseinandersetzen. Hinzu kam aber erstmals eine didaktische Komponente, da man auch die direkte Wirksamkeit des Studiums auf den Schulunterricht hinterfragte und als förderungswürdig ansah.

Klein berichtet, dass man begonnen hatte, diese „Kluft von beiden Seiten her aufzufüllen“ (Klein EvhS 1, S. 1), einerseits durch eine Neuorientierung bezüglich des Schulstoffs, andererseits durch die Berücksichtigung der Bedürfnisse der zukünftigen Lehrer an der Universität. Letzteres äußerte sich besonders in den Anfängervorlesungen (vgl. hierzu bspw. Klein 1899) und in speziellen lehramtsspezifischen Vorlesungen zu Inhalten der Elementar- bzw. Schulmathematik (vgl. hierzu bspw. Klein EvhS 1; Weber 1903; Stäckel 1905).³

Die Bestrebungen von Seiten der Universität werden in Kapitel 10 noch ausführlich dargestellt und in Bezug zur Kleinschen *Elementarmathematik* gesetzt. Zur Behebung der Kluft von Seiten der Schule sollte maßgeblich die Meraner Reform beitragen. Der Verlauf dieser Reform sowie die entscheidenden Forderungen für das Fach Mathematik werden im Folgenden kurz skizziert, da diese Bewegung die Situation zu Beginn des 20. Jahrhunderts an der Schule und Hochschule und insbesondere auch die Kleinsche Vorlesung entscheidend geprägt hat.

³Zur Abgrenzung von Elementar- und Schulmathematik siehe 1.3.

Die Meraner Reform. Die Anfänge bzw. Ausgangspunkte der Meraner Reform lassen sich bereits ab den 1890er Jahren ausmachen und reichen bis in die 1920er Jahre hinein (vgl. Biermann 2010, S. 287). Nach der formalen Gleichstellung der drei höheren Schularten – Gymnasium, Realgymnasium und Oberrealschule – in der Schulkonferenz im Jahre 1900 war der Weg für eine konkrete inhaltliche Restrukturierung des Schulstoffs bereitet. Höhepunkt war die Entwicklung des Meraner Lehrplans von der 1904 in Breslau eingesetzten Unterrichtskommission der *Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte*. Die Kommission bestand aus zwölf Vertretern aller drei höheren Schulformen, der Universität und der Technischen Hochschule sowie dem Verein Deutscher Ingenieure, der Ärzteschaft und der Industrie (vgl. Biermann 2010, S. 294f).

1908 wurde der *Deutsche Ausschuss für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht* (DAMNU) gegründet, der sich gezielt um eine systematische Umsetzung der Reformideen bemühen sollte (vgl. Biermann 2010, S. 296). Bereits davor, mit Veröffentlichung des Lehrplans 1905, wurden dessen Inhalte (insbesondere für die Mathematik) beispielsweise in Zeitschriftenaufsätzen, Fortbildungskursen und Direktorenversammlungen verbreitet und diskutiert. Die dieser Arbeit zugrunde liegende Vorlesung kann als ein weiteres Medium zur Verbreitung der Reformgedanken angesehen werden (vgl. hierzu insbesondere Kapitel 9.1).

Dem Meraner Lehrplan zufolge lassen sich dem Mathematikunterricht zwei wesentliche Aufgaben zuschreiben: die Stärkung des räumlichen Anschauungsvermögens und die Erziehung zur Gewohnheit des funktionalen Denkens (vgl. Meraner Lehrplan 1905, S. 104). Eng damit verbunden, sozusagen als Höhepunkt des funktionalen Denkens, ist die Forderung der Einführung in die Differential- und Integralrechnung, die insbesondere auch zu einem anwendungsorientierteren Unterricht beitragen sollte (Klein 1905a, S. 38ff). Diese Forderungen beruhten auf pädagogischen Prinzipien, die im Vorwort des Meraner Lehrplans formuliert wurden⁴:

- das *psychologische Prinzip*: Der Unterricht solle sich „mehr als bisher dem natürlichen Gang der geistigen Entwicklung anpassen“ (Meraner Lehrplan 1905, S. 104).
- das *utilitaristische Prinzip*: Der Unterricht solle „die Fähigkeit zur mathematischen Betrachtung der uns umgebenden Erscheinungswelt zu möglichster Entwicklung [...] bringen“ (Meraner Lehrplan 1905, S. 104).
- das *didaktische Prinzip*: Der Unterricht solle „die neuen Kenntnisse mit dem vorhandenen Wissen in organische Verbindung [...] setzen“ (Meraner Lehrplan 1905, S. 104) und „den gesamten Lehrstoff um einen großen Gedanken [...] konzentrieren“ (Lietzmann 1919, S. 230).

⁴Die gewählte Bezeichnung der einzelnen Prinzipien wurde von Lietzmann (1919) übernommen.

Die Analyse der Kleinschen *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus* wird darlegen, dass die hier skizzierten Ziele der Meraner Reform entscheidend den Inhalt und Aufbau der Vorlesung prägen. Die Bedeutung der (Raum-)Anschauung in der Vorlesung wird in Kapitel 3 thematisiert. Inwiefern sich Klein auch in der Vorlesung an der Idee des funktionalen Denkens orientiert, wird in Kapitel 9.1 beschrieben. Auch die dem Meraner Lehrplan zugrunde liegenden Prinzipien lassen sich in der Vorlesung wiederentdecken: Im *psychologischen Prinzip* klingt die Idee des genetischen Lernens an (vgl. hierzu Kapitel 5), das *utilitaristische Prinzip* kann in enge Verbindung mit der Forderung nach Stärkung der Anwendungen im Mathematikunterricht gebracht werden (vgl. hierzu Kapitel 4) und mit dem *didaktischen Prinzip* lässt sich das Konzept der fundamentalen Ideen bzw. der Vernetzung verbinden (vgl. hierzu Kapitel 2).

Damit kann zunächst festgehalten werden, dass Klein seine *Elementarmathematik* zur Verbreitung der Meraner Vorschläge genutzt hat und damit insbesondere eine Veranstaltung konzipierte, die sich an die besonderen Bedürfnisse der Lehrer richtete. Im Weiteren soll unter anderem dargestellt werden, welchen Beitrag Felix Klein an den hier beschriebenen Bestrebungen zur Verbesserung der Lehramtsausbildung und der Reform des deutschen Unterrichtswesens geliefert hat. Insbesondere werden die Facetten von Kleins Arbeit hervorgehoben, die in der Vorlesungsreihe zum Vorschein kommen.

1.2 Der Autor: Felix Klein



Abb. 1.1: Felix Klein (1849–1925)

Felix Klein war einer der bedeutendsten deutschen Mathematiker des 19. Jahrhunderts – laut Richard Courant sogar die „beherrschende Figur dieser Epoche“ (Courant 1925, S. 765).

Er studierte Mathematik und Naturwissenschaften in Bonn und promovierte dort 1869 als Schüler von Julius Plücker mit einer Arbeit über quadratische Geradenkomplexe. Nach einem Studienaufenthalt in Paris habilitierte er sich 1870 in Göttingen. Er war Professor für Mathematik in Erlangen, München und Leipzig. Im Jahre 1886 folgte er einem Ruf nach Göttingen, wo er bis zu seinem Lebensende wirkte (Tobies und König 1981, S. 95ff).

Die vorliegende Arbeit wird Charakteristika der Vorlesung *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus* herausarbeiten, die nicht ausschließlich als Besonderheit dieser Vorlesung zu verstehen sind, sondern auch Kleins Arbeit generell

prägen. Toeplitz geht sogar noch einen Schritt weiter, wenn er den Erfolg der Vorlesung nicht ihrer Anlage, sondern Klein als Person zuschreibt:

„[U]nd überdies beruht der Erfolg dieses Vorstoßes in erster Linie nicht auf der Anlage der Vorlesung an sich, sondern auf Kleins persönlicher Eigenart, auf der Universalität eines die ganze Mathematik umfassenden Standpunkts, auf dem Charme seiner stets dramatischen Erzählergabe [...].“ (Toeplitz 1932, S. 1)

Folgend werden Kleins Werke und Taten vorgestellt, sofern sie dabei helfen, die Intention und das Vorgehen der Vorlesungsreihe zu verstehen. Ich werde bei der Darstellung zwischen den Arbeiten Kleins als Forscher, Hochschullehrer und Wissenschaftsorganisator sowie Schulreformer unterscheiden.

1.2.1 Der forschende Mathematiker

Klein gilt als einer der großen Mathematiker seiner Zeit. Als charakteristisch für seine Arbeitsweise beschreibt Courant

„[...] das unglaublich rasche Aufnehmen fremder Ideen, instinktsichere intuitive Erfassung ihres Kernes und die Fähigkeit wie das Bedürfnis, das Neugelernte sofort seinem eigenen Gedankenkreis einzugliedern und für neue Forschungsarbeit, oft mit durchschlagendem Erfolg, auszunutzen.“ (Courant 1925, S. 765)

Zu seinen bekanntesten Werken zählen beispielsweise die *Theorie des Ikosaeders und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade* (vgl. Klein 1884) und das *Erlanger Programm* (vgl. Klein 1974). Letzteres beruht wesentlich auf Vorarbeiten von Lie, erhob erstmals die Gruppentheorie zu einem Ordnungsprinzip der Geometrie und wurde zur Richtlinie für sämtliche geometrischen Weiterentwicklungen (vgl. Courant 1926, S. 200f).

Insgesamt zeichnet sich Kleins Forschung durch eine große Vielfalt aus. Er veröffentlichte Arbeiten zu Themen aus der Liniengeometrie, der nichteuklidischen Geometrie, der Gruppentheorie und der Funktionentheorie. Einige Facetten dieser Forschung lassen sich auch in der *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus* als charakteristisch nachweisen.

Vernetzung unterschiedlicher Teilgebiete. Klein stellt in seiner Antrittsrede als Professor der Geometrie in Leipzig klar, dass er sein Forschungsgebiet keineswegs auf die Denomination seiner Stelle einzugrenzen gedenkt:

„Ich habe das Wort Geometrie nicht einseitig als Lehre von den räumlichen Objekten, sondern als Denkweise aufgefaßt, die in allen Gebieten der Mathematik mit Vorteil zur Geltung gebracht werden kann.“ (Courant 1925, S. 767)

Die Vernetzung scheinbar unabhängiger Gebiete lässt sich als ein charakteristisches Merkmal von Kleins Arbeiten bezeichnen. So bemüht er sich in seiner *Theorie des Ikosaeders*, „das Grundthema der endlichen Gruppe durch die Gebiete der Algebra, Funktionentheorie und Geometrie in immer neuen Variationen“ (Courant 1926, S. 205) darzustellen. Auch seine Arbeiten über elliptische Kurven und Modulfunktionen (vgl. Klein 1890) und das *Erlanger Programm* zeigen dies in besonderer Weise.

Mathematik als Ganzes. Eng damit verbunden sind Kleins Bestrebungen, „die mathematische Wissenschaft als ein zusammengehöriges Ganzes nach allen Seiten zur Geltung zu bringen“ (Klein *EvhS* 3, S. v). Auch hierfür ist das Erlanger Programm, in welches sich alle geometrischen Ergebnisse bis dahin einordnen lassen, ein typisches Beispiel.

Kleins dahingehendes Engagement wird besonders durch seine Mitarbeit bei der Herausgabe der *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften* deutlich:

„Ursprünglich von Burckhardt und F. Meyer als Wörterbuch geplant, wurde in den vorbereitenden Beratungen auf Antrag Dycks jenes weitere Programm gestellt, mit dem Ziele, dadurch ein Gesamtbild der Stellung zu geben, die die Mathematik in der heutigen Kultur einnimmt. Hier war es Klein, der zusammen mit Dyck von allem Anfang an dem Unternehmen seine ganzen persönlichen Beziehungen, seine umfassenden wissenschaftlichen Interessen und großes Organisationstalent mit voller Hingabe widmete.“ (Wirtinger 1919, S. 287f)

Anwendungen. Hinzu kommt, dass Klein die Mathematik in engem Bezug zu den angewandten Disziplinen sah. Seine Doktorarbeit schrieb er über ein Thema zur Liniengeometrie angewandt auf die Mechanik und er hatte bis zu seinem ersten Ruf nach Erlangen immer noch eine Forschungslaufbahn in der Physik im Sinn. Er entschied sich schlussendlich für die Mathematik, jedoch ohne seine Affinität zu den *Anwendungen der Mathematik* zu verlieren (vgl. Courant 1925, S. 766). Davon zeugen zahlreiche Veröffentlichungen wie beispielsweise die zu der *Theorie des Kreisels* (vgl. Klein und Sommerfeld 1910). Weiter war es, so Courant, Klein (1897), der aufdeckte, welche Zusammenhänge zwischen Riemanns Funktionentheorie und der Physik sowie der Kartographie bestehen:

„Es ist nun Kleins erstes Verdienst, daß er die bei Riemann unsichtbar, ja vielleicht unbewußt zugrunde liegenden physikalischen Vorstellungen aus sich heraus erfaßte und souverän handhaben und weiterführen lernte.“ (Courant 1926, S. 203)

1.2.2 Der Hochschullehrer

Neben seiner erfolgreichen Forschungstätigkeit nahm Klein seine Aufgaben als Hochschullehrer sehr ernst. Er bemühte sich stets um den Ausbau und die Verbesserung der Lehre. Das betraf zunächst die Berufung angesehener Professoren und das Sicherstellen der notwendigen Veranstaltungen. Letzteres war zu Kleins Zeit nicht unbedingt üblich (vgl. Tobies und König 1981, S. 62f). Sein Engagement ging jedoch weit darüber hinaus:

Ausstattung und Veranstaltungsbetrieb. Für ein gelungenes Studium sei, so Klein, eine gute Ausstattung vonnöten. Für das Fach Mathematik betreffe das genügend Arbeitsplätze sowie ein Lesezimmer, das den ganzen Tag und auch während der Ferien geöffnet ist. Ein solches richtete Klein beispielsweise in Göttingen ein. Man fand dort die mathematische Standardliteratur, Beiträge zur aktuellen Forschung sowie pädagogische und populäre Literatur. Das Lesezimmer sollte die Möglichkeit des Zusammenarbeitens mit Gleichgesinnten bieten und den Studenten den Studienanfang erleichtern. Hinzu kamen spezielle Einrichtungen wie Zeichensäle zur Schulung der geometrischen Anschauung, Versuchseinrichtungen für praktische Anwendungen und umfangreiche technische Ausstellungen und Modell-sammlungen (vgl. Klein 1895, S. 384ff).

Klein setzte sich weiter für die Einführung von Praktika und Übungen ein und forderte in seinen Seminaren mehr studentischen Einsatz. Er unterschied dabei zwei Arten von Seminaren: eines zum schriftlichen Bearbeiten von Aufgaben und eines, in dem in Vorträgen über die Kursvorlesungen hinausgehende Fragen behandelt wurden (Klein 1895, S. 385). Hinzu kamen spezielle Kurse, die die Problemlöse- und Vortragsfähigkeiten schulen sollten (Klein 1894, S. 95).

Bemühungen um ein lehramtsgerechtes Studium. Klein wirbt für eine „unmittelbare Berücksichtigung“ (Klein 1905b, S. 486) der Bedürfnisse der zukünftigen Lehrer. Es galt ihm zufolge, die Lehramtsstudenten mathematisch vielseitiger auszubilden und Veranstaltungen im Studium zu integrieren, die direkten Einfluss auf den Schulunterricht haben sollten (vgl. Klein 1905b, S. 486):

„Das Ziel muß es sein, daß die Universitäten, indem sie die wissenschaftliche Führung beibehalten, wieder voll auf das praktische Leben hinauswirken.“ (Klein 1895, S. 388)

Dieses Ziel hatte einerseits prinzipielle Auswirkungen auf die Ausrichtung der einzelnen schon bestehenden Vorlesungen, andererseits führte Klein spezielle lehramtsspezifische Vorlesungen neu ein – allen voran die Vorlesung zur *Elementar-*

mathematik vom höheren Standpunkte aus und die *Vorträge über den mathematischen Unterricht an den höheren Schulen* (vgl. Klein 1907).

Zusätzlich setzte er sich für die Einrichtung mathematischer Ferienkurse für bereits praktizierende Lehrer ein. Die Ferienkurse selbst waren keine neue Erfindung: Zu Kleins Zeit war der Gymnasiallehrerberuf noch stärker an die Wissenschaft angebunden. Von Lehrern wurde erwartet, dass sie in den Ferien an universitären Ferienkursen teilnahmen, um sich so in der Forschung auf dem Laufenden zu halten und um sich im Idealfall sogar an der Forschung zu beteiligen (vgl. bspw. Lorey 1916, S. 297ff).

Klein bemühte sich darüber hinaus, das Angebot der Ferienkurse auszuweiten, und sprach sich für die Einführung von zusätzlichen Fortbildungssemestern aus. Zudem richteten sich Kleins Ferienkurse in besonderem Maße an den Bedürfnissen der Studenten und Lehrer aus. Ein typisches Beispiel ist einer seiner Göttinger Akademievorträge: *Über die Arithmetisierung der Mathematik* (vgl. Klein 1921).

Die Veranstaltungen während des Studiums und in den Fortbildungsphasen sollten unter anderem erreichen, dass der Lehrer den Spaß an der Schulmathematik und seinem Beruf beibehält (Klein 1894, S. 94):

„In other words, the ideal should be such as to fill the future teacher with enthusiasm for his life-work, not such as to make him look upon this work with contempt as an unworthy drugery.“ (Klein 1894, S. 95)

Vorstellungen zu den Methoden und Inhalten des Studiums. Klein ist der Meinung, dass es nicht nur eine einzige Methode für guten Hochschulunterricht gibt. Er gesteht jedem Dozent eine persönliche, durch die wissenschaftlichen Neigungen geprägte „Eigenart zu unterrichten“ (Klein 1895, S. 384) zu. Entscheidend sei, dass die Methode gut durchdacht wurde. So können entgegengesetzte Methoden zu gleichen oder gleichwertigen Resultaten führen (vgl. Klein 1895, S. 384).

Klein selbst verfolgt keine festgelegte Methode, sondern variiert und entwickelt diese fortlaufend weiter. In Abgrenzung zu Pringsheim, der gerade in den Anfängervorlesungen eine strenge axiomatische Herangehensweise befürwortet, die zunächst frei von (geometrischer) Anschauung zu sein hat (vgl. Klein 1899, S. 128), spricht sich Klein für einen prinzipiell anschauungsgeleiteten Hochschulunterricht aus (vgl. hierzu insbesondere Kapitel 3), ohne jedoch die Bedeutung des abstrakten Denkens und der präzisen Deduktion zu verkennen:

„[Es bleibt zu betonen], daß die „Übung des konzentrierten logischen Denkens bis hin zur zahlentheoretischen Präcision und Abstraktion ein unerläßliches Erfordernis des mathematischen Studiums bleibt.“ (Klein 1895, S. 383)

Inhaltlich vertritt Klein den Standpunkt, dass man gerade für den Lehramtsstudenten die geeignete Balance zwischen Tiefe und Breite finden muss: Man laufe leicht Gefahr, zu tief in ein Gebiet einzudringen oder umgekehrt zu stark enzyklopädisch auszubilden, ohne die nötigen Hintergründe zu vermitteln:

„Beim Studium der Lehramtskandidaten ist so viel Übersicht und Einsicht betreffs aller mit dem Schulunterricht in Verbindung stehender Teile der einzelnen Wissenschaft anzustreben, daß eine brauchbare Grundlage für spätere selbstständige Berufstätigkeit gewonnen wird.“ (Klein 1905b, S. 44)

Ebenso wie in methodischen Fragen habe man auch inhaltlich den Dozenten die größtmögliche Freiheit zu lassen. Eine Absprache zu grundlegenden Inhalten der einzelnen Vorlesungen hält Klein aber für unabdingbar (vgl. Klein 1895). Im Vordergrund sollte dabei stehen, das Interesse zu wecken und den Sinn der Behandlungen zu vermitteln:

„Ich strebe mit meinen Elementarvorlesungen vor allem dahin, meinen Zuhörern Interesse und Verständnis für die Fragestellungen und den Sinn und Zweck der mathematischen Behandlung beizubringen.“ (Klein 1899, S. 132)

Dies gelinge, so Klein, besonders durch das Hervorheben möglicher Anwendungen. Damit schließt er sich der Meinung an, dass die angewandte Mathematik fester Bestandteil des Studiums zu sein habe, und zählt bis heute zu den größten Befürwortern dieser Bestrebungen (vgl. Kapitel 1.1).

1.2.3 Der Wissenschaftsorganisator und Schulreformer

Eng verbunden mit seinem lokalen Engagement an den jeweiligen Hochschulen sind seine Tätigkeiten als Wissenschaftsorganisator und Schulreformer – besonders während seiner Göttinger Zeit (Tobies und König 1981, S. 80f). Er war Mitglied in verschiedenen Gremien und vertrat seine Meinung und Ideen in zahlreichen Vorträgen im In- und Ausland (vgl. bspw. Klein 1894). Seine Bestrebungen gehen dabei in zwei Richtungen: Einerseits bemühte er sich um eine stärkere Vernetzung mit den naturwissenschaftlichen und technischen Fakultäten, andererseits setzte er sich mit schulcurricularen Fragen auseinander:

Außermathematische Vernetzung. Seit seiner Schaffenszeit an der Technischen Universität München hielt Klein engen Kontakt zur Industrie. In Göttingen wurde es sein erklärtes Ziel, auch in Preußen die Angliederung der Technischen Hochschulen an die Universitäten zu forcieren. 1895 trat er als einziger Universitätsprofessor dem *Verein der deutschen Ingenieure* bei, um dieses Ziel voranzutreiben. Mit Hilfe von Spenden aus der Industrie konnte er mit der Gründung einer Abteilung für

technische Physik, angeschlossen an das physikalische Institut der Universität Göttingen, im Jahre 1897 erste Erfolge verzeichnen (vgl. Tobies und König 1981, S. 77f).

Im Jahre 1898 wurde Klein Gründungsmitglied und zweiter Vorsitzender der *Göttinger Vereinigung zur Förderung der angewandten Physik*. Als erste Organisation in Deutschland verband sie Industrie und Universität, und trug in den folgenden Jahren zur Gründung weiterer Institute für angewandte Mathematik und Physik bei (vgl. Manegold 1970, S. 157ff).

Schließlich gelang Klein die Berufung von Carl Runge auf das erste Ordinariat für angewandte Mathematik und von Ludwig Prandtl als Leiter des Instituts für technische Physik. Die renommierten Wissenschaftler waren zuvor an der Technischen Hochschule Hannover angestellt und hoben das Ansehen der technischen Einrichtungen der Universität Göttingen. Sie wurden fest etabliert, so dass Klein die Zeit hatte, sich vermehrt Fragen des mathematischen Unterrichts zuzuwenden (vgl. Manegold 1970, S. 231ff).

Fragen des schulischen Mathematikunterrichts. Bereits im Jahre 1872 thematisierte Klein in der Antrittsrede seiner ersten Professorenstelle in Erlangen die Situation an den höheren Schulen. Es folgten viele nationale und internationale Vorträge, in denen er seine Meinung zum schulischen Mathematikunterricht der Öffentlichkeit kundtat.

Zusätzlich engagierte sich Klein in vielen Kommissionen, Ausschüssen und Gesellschaften, die sich mit schulorganisatorischen Fragen auseinandersetzten. Er trat 1894 dem *Verein zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichtes* bei (vgl. Tobies und König 1981, S. 76) und war als Vorsitzender der Deutschen Mathematiker Vereinigung (DMV) Teil der 12-köpfigen Unterrichtskommission, die 1904 in Breslau von der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte eingerichtet wurde und 1905 den Entwurf des *Meraner Lehrplans* verfasste (vgl. 1.1). In dem im Jahre 1908 gegründeten *Deutschen Ausschuss für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht* (DAMNU), der sich der Umsetzung des Meraner Lehrplans annahm, übernahm Klein den Vorsitz des Unterausschusses für die Lehrerbildung. Die diesem Lehrplan zugrunde liegenden Reformvorschläge erregten auch internationales Aufsehen, so dass im selben Jahr die *Internationale Mathematische Unterrichtskommission* (IMUK) gebildet wurde, deren Vorsitz ebenfalls Klein übernahm und bis 1914, als die Arbeit auf Grund des Ersten Weltkriegs eingestellt wurde, innehatte. (vgl. Tobies und König 1981, S. 84f).

Durch seine Mitarbeit in den unterschiedlichen Gremien trug Klein entscheidend zur Weiterentwicklung des Schulsystems und des Schulcurriculums im Fach Mathematik bei. So wurden nicht zuletzt durch Kleins Wirken im Jahre 1900 durch kai-

serlichen Erlass die mathematisch-naturwissenschaftlichen Fächer den humanistischen an den deutschen Schulen formell gleichgestellt, und auch die in der Meraner Reform 1905 verfassten Forderungen gehen zu großen Teilen auf die Ideen und Vorstellungen Kleins zurück.⁵ „Klein machte nie einen Hehl aus seinen Einstellungen, ging aber in Fragen der Durchsetzung sehr moderat und organisatorisch geschickt vor“ (Biermann 2010, S. 294), indem er unterschiedliche gesellschaftliche Gruppen in Gremien einband.

Allerdings beginnt erst mit seiner regen Beteiligung an der Berliner Schulkonferenz 1900 Kleins direktes Mitwirken und sein konkretes Interesse an der Ausbildung an höheren Schulen. Die Situation an den deutschen Schulen dient ihm bis dahin eher als Argumentationsgrundlage für die Forderungen bezüglich des Mathematikstudiums:

„Er [Klein] argumentierte zwar mit Begriffen wie der *Qualität des Gymnasialunterrichts* [...], doch benutzte er solche Argumente vor der Jahrhundertwende nur zur Durchsetzung von Verbesserungen im mathematischen Universitätsunterricht, wie der Einführung von mathematischen Übungen und Seminaren oder der Einrichtung von technischen Instituten an der Universität Göttingen.“ (Mattheis 2000b, S. 41)

Das ändert sich in den Vorlesungen zur *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus* und *Über die Mathematik an den höheren Schulen*, die beide nach Kleins Mitarbeit in der Meraner Reform entstanden und, wie die Analyse zeigen wird, den eigentlichen Schulunterricht erkennbar im Blick haben.

1.3 Der Gegenstand: Elementarmathematik

„**Elementa**, werden bey den Mathematicis besonders die ersten Gründe der Geometrie genennet, daraus die ganze übrige Mathematik beruhet, weil *Euclides* seinen Büchern diesen Nahmen gegeben, darinnen er diese Hauptsätze der Geometrie vorträget. Nachdem giebet man diesen Nahmen allen Schrifften darinnen dasjenige von einer Wissenschaft gelehret wird, was man zu allerst zu lernen vonnöthen hat.“ (Wolff 1778, S. 578)

Unter dem Begriff *Elementarmathematik* verstand man ursprünglich die Mathematik, die Euklid in seinen *Elementen* vorstellte, bevor sich in den darauffolgenden Jahren der Begriffsumfang deutlich erweiterte (Wuiking 2008). Eine genaue Eingrenzung des Begriffs existiert jedoch bis heute nicht (Lenz 1975, S. 15).

⁵Die in Kapitel 1.1 beschriebenen Entwicklungen im Schulsystem und die damit verbundenen Forderungen an einen guten Mathematikunterricht und eine angemessene Lehrerausbildung, die die Einstellung Kleins im Wesentlichen widerspiegeln, werden hier nicht erneut beschrieben.

Der vorliegende Abschnitt strebt keine eigenständige Definition, philosophische Erörterung oder lückenlose Darstellung der bisherigen Begriffseingrenzungen an. Ziel ist es, die Diskussion um den Begriff der *Elementarmathematik* im 19. und 20. Jahrhundert zu skizzieren und Kleins Haltung darin zu verorten.

Intuitiv wurde der Begriff *elementar* in der Mathematik zu dieser Zeit hauptsächlich in zwei Bedeutungen verwendet: als Synonym für *grundlegend* und *wesentlich* oder im Sinne von *primitiv* oder *einfach* (vgl. bspw. Lehmann und Maurer 2006, S. 178).

Demnach ist Elementarmathematik entweder das, was man – dem eingangs zitierten Eintrag in Wolffs mathematischem Wörterbuch entsprechend – „zu allerst zu lernen vonnöthen hat“ (Wolff 1778, S. 578), und wird damit zu einem Grundstein, auf dem die gesamte Mathematik aufbaut. Oder mit *elementar* wird die Mathematik bezeichnet, die einfach zu erlernen ist und nur weniger Voraussetzungen bedarf – etwa die Inhalte, die in den ersten Schuljahren unterrichtet werden. Beide Bedeutungsgruppen spiegeln sich auch im *etymologischen Wörterbuch der deutschen Sprache* von Pfeifer wider:

„**elementar** Adj. ‘grundlegend, naturhaft, urwüchsig’ (18. Jh.), bes. im Sinne von ‘Grund-, Anfangs-’ als Bestimmungswort in Zusammensetzungen wie Elementarbuch, -unterricht (18. Jh.), Elementarschule (19. Jh.); älter, heute nicht mehr gebräuchlich, ist *elementarisch* Adj. (16. Jh.), anfangs allein auf die Urstoffe bezogen; aus lat. *elementārius*.“ (Pfeifer 1997)

Hieraus ergeben sich mehrere Möglichkeiten, den Begriff der Elementarmathematik konkret einzugrenzen. Im Folgenden unterscheide ich zwischen einem *inhaltlichen*, einem *methodischen* und einem *pädagogischen Zugang*:

Inhaltlicher Zugang. Die Frage nach einer Definition der Elementarmathematik wurde zu Kleins Zeit im Zuge der Entstehung der *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften* wiederholt aufgegriffen. In der Enzyklopädie selbst befinden sich mehrere Artikel über Elementarmathematik, die alle den Versuch einer Begriffsklärung an den Beginn stellen (vgl. insb. Meyer und Mohrmann 1914). Auch Klein (1904) und Weber (1903)⁶ bemühen sich um eine mögliche Definition.

Im Wesentlichen werden in allen Beiträgen drei Vorschläge einer inhaltlichen Eingrenzung der Elementarmathematik gegenübergestellt:

– *Elementarmathematik = Elemente Euklids*

⁶Mehr zu Webers Rolle in der Diskussion um elementarmathematische Vorlesungen folgt in Kapitel 10.

Von jeher haben die „Elemente Euklids unbestritten als Grundlage der mathematischen Wissenschaft gegolten und sowohl den Begriff als auch den Umfang der Elementarmathematik bezeichnet“ (Sommer 1914, S. 773). Dieser Auffassung nach ist Elementarmathematik ein Teil der Geometrie. Etwas gilt als elementar, wenn es sich aus Gerade und Kreis, bzw. Ebene und Kugel ableiten lässt. Das schließt insbesondere auch Kegel und Kegelschnitte ein, die man durch Kombination der Ebenen- und Raumgeometrie erhält. Jegliche Verbindung von Arithmetik und Geometrie – beispielsweise das Berechnen von Flächeninhalten – ist dieser Definition zufolge nicht mehr elementar (vgl. Weber 1903, S. 398).

– *Elementarmathematik = Finite Mathematik*

Eine weitere Möglichkeit der Eingrenzung ist, all das als elementar zu bezeichnen, was den Grenzwertbegriff nicht beansprucht. Die „Elemente hören auf wo das Unendliche anfängt“ (Weber 1903, S. 398). Anhänger dieser Definition, die „Puristen“ (Klein 1904, S. 7), zählen damit große Teile der Algebra und Zahlentheorie zur Elementarmathematik, die reellen Zahlen, Quadratwurzeln und der Logarithmus gehören ihr nicht an (vgl. Weber 1903, S. 398).

– *Infinitesimalrechnung ist keine Elementarmathematik*

In einer abgeschwächten Version der vorangegangenen Definition ist „zwar der Grenzbegriff in der Elementarmathematik zuzulassen [...], aber nicht der Grenzbegriff in der besonderen Form, der durch die Symbole $\frac{dy}{dx}$ oder $\int y dx$ angezeigt wird“ (Klein 1904, S. 8). Damit wird der für die Infinitesimalrechnung grundlegende Begriff der *unendlich kleinen Größe* nicht als elementar bezeichnet. Die reellen Zahlen oder Quadratwurzeln, die nach vorangegangener Festlegung ausgeschlossen waren, zählen dieser Definition zufolge zur Elementarmathematik.

Der etymologischen Bedeutung des Wortes *elementar* folgend haben alle drei Definitionen ihre Berechtigung. Die antike Geometrie wird häufig als Grundstein der Mathematik bezeichnet (vgl. bspw. Wußing 2008) und bis heute gilt die endliche Mathematik insofern als einfacher, als dass der Begriff des Unendlichen auch aus mathematikphilosophischer Sicht ein schwer zu fassender Begriff ist. Weber zufolge ist eine derartige Eingrenzung des Begriffsumfangs ausschließlich aus wissenschaftlicher Sicht „für die logische Klärung der mathematischen Begriffsbildungen“ (Weber 1903, S. 398f) von Bedeutung.

Methodischer Zugang. Weitestgehend losgelöst vom Inhalt kann Elementarmathematik auch bezüglich der verwendeten Methoden definiert werden. So kann man diejenigen Teile der Mathematik als elementar verstehen, „welche sich mit den einfachsten Grundbegriffen unter Nutzung spezieller Methoden beschäftigen“ (Sommer 1914, S. 773). Weber zufolge kann die Elementarmathematik als ein

Gebiet bezeichnet werden, „in dem [...] die logischen Hilfsmittel sehr einfacher Art und jedem bekannt sind“ (Weber 1903, S. 398).

Mitte des 20. Jahrhunderts veröffentlichte in diesem Sinne Lucienne Félix (1969) eine *Elementarmathematik in moderner Darstellung* und steckte damit ein Gebiet ab, welches sich im Wesentlichen auf grundlegende Sätze und Aussagen stützt, die nicht auf strengen, axiomatischen Beweisen basieren, sondern mit einfachen logischen Hilfsmitteln herleitbar sind. Die so definierten Elemente sind aber gleichzeitig abstrakt, da sie den Charakter von Strukturmodellen besitzen – wie beispielsweise die Darstellung von Vektoren durch Pfeile (Félix 1969, S. vf).

Pädagogischer Zugang. Zu Kleins Zeit wurde Elementarmathematik oft schlicht mit *Schulmathematik* gleichgesetzt. So grenzt Tropfke die Themen seines Werkes *Geschichte der Elementarmathematik* folgendermaßen ein:

„Der Begriff der Elementarmathematik ist durchgängig so gefaßt worden, daß er allein das mathematische Pensum der höheren Lehranstalten umschließt; darüber hinausgehende Gebiete sind nur ausnahmsweise berücksichtigt worden.“
(Tropfke 1903, S. iii)

Das aus diesem Zugang heraus beschriebene Teilgebiet der Mathematik lässt sich nicht einer der vorhergegangenen Definitionen zuordnen:

Nimmt man die *euklidische Definition* von Elementarmathematik als Grundlage, so würden viele anspruchsvolle Fragen der Grundlegung der Geometrie in den Schulunterricht einfließen. Einfache Betrachtungen zu Veränderlichkeit und Transformation hingegen bleiben außen vor (vgl. Klein 1904, S. 8). Die Definition der *Puristen* ist für die Schule nicht tragfähig, da ihr zufolge die Elementarmathematik weit in die Zahlentheorie hineinreicht und Inhalte umfasst, die für die Schule zu anspruchsvoll sind. Andererseits sei es nicht denkbar, in der Schule die reellen Zahlen zu umgehen, so Klein. Die dritte Definition schien zumindest bis Anfang des 20. Jahrhunderts für die Schule brauchbar. Klein kritisierte jedoch, dass der Begriff der Tangente oder der durch eine Kurve begrenzte Flächeninhalt sowie die Geschwindigkeit und Beschleunigung, die auch damals im Lehrplan verankert waren, sich nur mit Hilfe der *Infinitesimalrechnung* angemessen einführen ließen (vgl. bspw. Klein 1904, S. 8).

Wird Elementarmathematik im weitesten Sinne als Schulmathematik aufgefasst, so wird „vor allem leichte Verständlichkeit angestrebt“ (Sommer 1914, S. 773). Eine solche Abgrenzung ist Weber zufolge durch Pädagogen vorzunehmen, Wissenschaftler können unterstützend mitwirken (Weber 1903, S. 399).

Kleins Verständnis von Elementarmathematik. Klein entscheidet sich im Sinne des pädagogischen Zugangs für die folgende praktische und offene Definition:

„Die einzige Definition der Elementarmathematik, mit der die Schule etwas anfangen kann, ist eine praktische: elementar sollen in allen verschiedenen Gebieten der Mathematik diejenigen Teile heißen, welche ohne lang fortgesetztes besonderes Studium für einen Knaben mittlerer Begabung zugänglich scheinen.“
(Klein 1904, S. 9)

Elementar ist damit alles, was man in der Schule unterrichten könnte. Das bedeutet nicht automatisch, dass die gesamte *Elementarmathematik* auch in der Schule unterrichtet werden soll. Es gilt eine sinnvolle Auswahl für die Schule zu treffen, die von Zeit zu Zeit überdacht werden muss: Nach dem *Gesetz der historischen Verschiebung* vergrößert sich das Gebiet der Elementarmathematik durch verbesserte Darstellung unaufhörlich – ein Beispiel ist Klein zufolge die Infinitesimalrechnung, die durch Cauchys und Weierstraß' Präzisierung als schulmathematisches Thema erschlossen werden konnte (vgl. Klein 1904, S. 9).

Ausblick. Alle drei hier vorgestellten Zugänge sind bezüglich ihrer Reichweite und Tragfähigkeit eingeschränkt. Beutelspacher u. a. (2011) stellen eine weitere Beschreibung zur Diskussion, die alle drei Zugänge auf besondere Weise verbindet. Eine solche Elementarmathematik verhandelt „technisch voraussetzungsarme, eben elementar zugängliche“ (Beutelspacher u. a. 2011, S. 14) mathematische Inhalte und ist durch folgende Merkmale charakterisiert:

- „Elementarmathematik ermöglicht den Erwerb typischer mathematischer Denk- und Arbeitsweisen und repräsentiert so die ‚Erfahrung Mathematik‘ im Kleinen.
- Elementarmathematik knüpft an grundlegende kognitive Erfahrungen an und ist so dem Denken und Verstehen in besonderer Weise zugänglich.
- Elementarmathematik trägt zur Erweiterung der menschlichen Erfahrungswelt der Lernenden bei und ist anschlussfähig für fachliche Vertiefungen.
- In der Elementarmathematik kann der innermathematische Beziehungsreichtum ihrer Inhalte erfahren werden; dies kann sowohl mit semantischem als auch syntaktischem Akzent geschehen.“ (Beutelspacher u. a. 2011, S. 14)

Diese Auffassung von Elementarmathematik soll jedoch zunächst zurückgestellt werden. Den nachfolgenden Analysen der Arbeit wird die Kleinsche Auffassung zugrunde gelegt. Im weiteren Verlauf der Arbeit wird damit der Begriff Elementarmathematik weitestgehend mit dem Begriff der Schulmathematik gleichgesetzt, wenn nicht explizit eine Unterscheidung getroffen wird.

1.4 Das Werk: Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus

1907 hielt Klein zum ersten Mal eine Vorlesung unter dem Titel *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*. Diese Vorlesungen richteten sich an „reifer[e] Studenten“ (Klein EvhS 1, S. v) kurz vor Studienabschluss. Er setzte Grundkenntnisse der Algebra, Zahlentheorie, Funktionentheorie und weiterer Gebieten voraus (Klein EvhS 1, S. 2).

Diese Vorlesungen versteht Klein als Fortsetzung oder Ergänzung seiner *Vorträge über den mathematischen Unterricht an den höheren Schulen* (Klein 1907), die sich den Inhalten des Schulunterrichts in besonderer Weise widmet:

„An die damals gegebene Übersicht über die verschiedenen *Formen* der Unterrichtsaufgabe, die dem Mathematiker gestellt sein kann, sollen sich jetzt [...] Entwicklungen über den *Unterrichtsstoff selbst* anschließen.“ (Klein EvhS 1, S. v)

Insgesamt wurden drei Bände zur *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus* veröffentlicht:

- *Arithmetik, Algebra und Analysis*, ausgearbeitet von E. Hellinger und Fr. Seyfarth (1908, 4. Auflage 1933)
- *Geometrie*, ausgearbeitet von E. Hellinger und Fr. Seyfarth (1909, 3. Auflage 1925)
- *Präzisions- und Approximationsmathematik*, ausgearbeitet von C.H. Müller und Fr. Seyfarth (1928, 1. Auflage unter anderem Namen 1902)

Diese Veröffentlichungen geben insofern ein vergleichsweise authentisches Bild der Vorlesungen, als dass es sich nicht um eigenständige, an die Vorlesungsinhalte angelehnte Werke handelt, sondern um Autographien der Vorlesung: Auch wenn die – in der ersten Auflage noch handschriftlich (vgl. Abbildung 1.2) – gedruckte Mitschrift der Vorlesung durch Kleins Assistenten Hellinger eine überarbeitete Version der „durch zufällige Umstände bedingte[n] mündliche[n] Darlegung“ (Klein EvhS 1, S. vi) ist, gibt sie den Verlauf der Vorlesung detailliert wieder – davon zeugen zahlreiche Stellen:

„Und nun, meine Herren, genug von diesen Zwischenbetrachtungen; lassen Sie uns zum nächsten großen Abschnitt der Vorlesung übergehen!“ (Klein EvhS 1, S. 92)

In der vorliegenden Arbeit nutze ich die detaillierte Darstellung, die insbesondere auch Randbemerkungen und kürzere Exkurse enthält, um die Intention der Vorlesung und Haltung des Dozenten bezüglich des Schulunterrichts und der Lehrerbildung herauszuarbeiten.



Abb. 1.2: Erste Seite der ersten, handschriftlichen Auflage der *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus* zur Arithmetik, Algebra und Analysis (Klein EvhS 1, S. 1)

Eine Sonderrolle nimmt der dritte Band der Reihe ein. Er beruht auf einer ebenfalls autographierten Vorlesung, die Klein 1901 unter dem Titel *Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie: eine Revision der Principien* gehalten hatte. Kurz vor seinem Tod entschloss er sich, die Vorlesung als dritten Band der hier behandelten Reihe zu veröffentlichen. Seyfarth schreibt hierzu:

„Die Titeländerung geschieht auf eigenen Wunsch von *F. Klein*, mit dem ich noch in den beiden letzten Monaten vor seinem Tode [...] eine Reihe von Unterredungen hatte. *Klein* glaubte mit dem neuen Titel der Tendenz der Vorlesung besser gerecht zu werden, als es durch den früheren geschah.“ (Klein EvhS 3, S. vif)

1.4.1 Inhalt, Aufbau und Ziel der Vorlesungsreihe

Die Inhalte der drei Vorlesungen zerfallen in fünf unterschiedlich gewichtete Teile: Arithmetik, Algebra, Analysis, Geometrie und das Verhältnis zwischen theoretischer und angewandter Mathematik.

Arithmetik. Klein behandelt zuerst die Grundlagen der Arithmetik. Hierzu zählen die Einführung der Grundrechenarten⁷, die verschiedenen Zahlbereichserweiterungen sowie einzelne zahlentheoretische Themen. Mehr als in den anderen Vorle-

⁷Das Potenzieren und Logarithmieren klammert er dabei zunächst aus. Im analytischen Teil (vgl. Klein EvhS 1, S. 155-174) werden dann ausführlich die zugehörigen Funktionenklassen thematisiert.

sungsteilen fließen hier erkenntnistheoretische und logische Betrachtungen ein, die zu Kleins Zeit aktuelle Forschungsfragen darstellten.

Algebra. Im Kapitel zur Algebra wird das Lösen von Gleichungen thematisiert. Dabei erhöht sich der Schwierigkeitsgrad sukzessive: Klein beginnt mit dem Lösen von Gleichungen mit reellen Unbekannten und steigender Anzahl an Parametern. Zumindest die ersten Beispiele lassen sich Klein zufolge noch in der Schule einsetzen. Anschließend geht er zu *Gleichungen im Gebiete komplexer Größen* (vgl. Klein EvhS 1, S. 190–154) über – ein vergleichsweise anspruchsvolles Kapitel, welches die Galois-Theorie und die Kleinsche Gleichungstheorie (vgl. Klein 1884) voraussetzt.

Analysis. Im letzten Teil des ersten Bandes werden zunächst spezielle und für Anwendungen wichtige Funktionenklassen vorgestellt – *Logarithmus- und Exponentialfunktion* (vgl. Klein EvhS 1, S. 155–174) sowie die *goniometrischen Funktionen* (vgl. Klein EvhS 1, S. 175–222). Schließlich widmet sich Klein der *eigentlichen Infinitesimalrechnung* (vgl. Klein EvhS 1, S. 223–255) und präsentiert damit Ziele der von ihm mitverantworteten Meraner Reform (vgl. hierzu Kapitel 9.1).

Geometrie. In Band zwei der Vorlesungsreihe steht das „*enzyklopädische Moment*“ (Klein EvhS 2, S. 1) im Vordergrund. Neben der Behandlung der *einfachsten geometrischen Gebilde* und *geometrischen Transformationen* wird der Fokus auf die *Systematik und Grundlegung der Geometrie* gelegt. Auch hier bezieht Klein – für seine Zeit – moderne Entwicklungen der Mathematik ein: Den mathematischen Hintergrund bilden neben dem Erlanger Programm unter anderem Möbius' Untersuchungen zur Topologie und Methoden der Elektrodynamik (vgl. Lieb 2010, S. 3).

Verhältnis zwischen theoretischer und angewandter Mathematik. Im letzten Band der *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus* zur *Präzisions- und Approximationsmathematik* bemüht sich Klein um einen Vergleich der Methoden der reinen und angewandten Mathematik und eine Vernetzung der beiden mathematischen Forschungsrichtungen. Exemplarisch wählt er dafür die Geometrie in Verbindung mit der Differential- und Integralrechnung:

- *Funktionen reeller Veränderlicher und ihre Darstellung im rechtwinkligen Koordinatensystem* (vgl. Klein EvhS 3, S. 2–103),
- die *freie Geometrie ebener Kurven* (vgl. Klein EvhS 3, S. 104–204) und

- die *Versinnlichung idealer Gebilde durch Zeichnungen und Modelle* (vgl. Klein EvhS 3, S. 205–231).

Bei allen drei Vorlesungen handelt es sich um Überblicksvorlesungen für Studierende am Ende des Hauptstudiums. Generell kann festgehalten werden, dass Klein beim Hörer bzw. Leser ein großes Vorwissen voraussetzt. Er entwickelt daher nur an wenigen Stellen ausführlich die einzelnen mathematischen Gedankengänge und verweist stattdessen oft auf vorangegangene Vorlesungen oder weiterführende Literatur (vgl. bspw. Klein EvhS 1, S. 31f). Seinen Schwerpunkt legt er auf Verknüpfungen einzelner Teilgebiete und Darstellungen, die in anderen Lehrbüchern und Vorlesungen seiner Auffassung nach nur selten einbezogen werden (vgl. bspw. Klein EvhS 1, S. 93).

Der Aufbau der einzelnen Bände unterscheidet sich dabei grundlegend. Dies ist von Klein durchaus beabsichtigt, einerseits um nicht „in eine zu stereotype Form zu verfallen“ (Klein EvhS 2, S. v), andererseits aus inhaltlichen – „wichtigen inneren“ (Klein EvhS 2, S. v) – Gründen:

„Diese Form ist in der Tat eine ganz andere wie bei Teil I. Ich habe mich entschlossen, vor allen Dingen einen *Gesamtüberblick* über das Gebiet der Geometrie zu geben, in dem Umfange, wie ich ihn jedem Lehrer an einer höheren Schule wünschen möchte; die Erörterungen über den geometrischen *Unterricht* wurden also zurückgedrängt und zum Schluß [...] im Zusammenhange gegeben.“ (Klein EvhS 2, S. v)

Ein Charakteristikum aller drei Vorlesungen ist der enge Bezug zur Schulmathematik, der in anderen Vorlesungen zu Kleins Zeit nicht üblich war (vgl. hierzu auch Kapitel 10). Dieser kommt in den einzelnen Vorlesungen unterschiedlich zur Geltung: Während im ersten Band Bemerkungen zur damaligen Schulpraxis und möglichen Reformideen fortlaufend integriert werden (vergleiche hierzu Kapitel 9), werden diese im Band zur Geometrie zunächst ausgeblendet und als zusammenhängendes Kapitel der fachlichen Seite gegenübergestellt. Anders als im ersten Band fließt dabei auch die Situation des Mathematikunterrichts außerhalb Deutschlands in die Erörterung ein. Im dritten Band sind Bezüge zu den *Methoden des mathematischen Unterrichts* vorhanden, jedoch weniger systematisch und schwächer ausgeprägt. Die vorliegende Arbeit stützt sich weitestgehend auf den ersten Teil der Vorlesung zu Arithmetik, Algebra und Analysis.

Klein betont, dass er sich in seinen Ausführungen zur Schulpraxis nicht auf „unbestimmte Vorstellungen [...] oder gar eigene, weit zurückliegende Schulerinnerung“ (Klein EvhS 1, S. 3) bezieht. Er steht in engem Kontakt zu seinem ehemaligen Assistenten und praktizierenden Lehrer Rudolf Schimmack, um über die aktuellen Entwicklungen in der Schule informiert zu sein.

Vor diesem Hintergrund ist es das erklärte Ziel der Vorlesungsreihe, „die mathematische Wissenschaft als ein zusammengehöriges Ganzes nach allen Seiten wieder zur Geltung zu bringen“ (Klein EvhS 3, S. v). Dazu hebt Klein Zusammenhänge zwischen den mathematischen Einzeldisziplinen und ihre Beziehung zur Schulmathematik hervor:

„Meine Aufgabe wird stets sein, Ihnen den gegenseitigen Zusammenhang der Fragen der Einzeldisziplinen vorzuführen, der in den Spezialvorlesungen nicht immer genügend zur Geltung kommt, sowie insbesondere ihre Beziehungen zu den Fragen der Schulmathematik zu betonen.“ (Klein EvhS 1, S. 2)

Dies soll insbesondere dazu beitragen, die in Kapitel 1.1 angesprochene Kluft zwischen Schule und Hochschule zu überwinden, welche Klein zufolge verantwortlich ist für das Problem der *doppelten Diskontinuität* und der damit fehlenden Wirksamkeit des Universitätsstudiums in der Schule.

1.4.2 „Doppelte Diskontinuität“

„Der junge Student sieht sich am Beginn seines Studiums vor Probleme gestellt, die ihn in keinem Punkt mehr an die Dinge erinnern, mit denen er sich in der Schule beschäftigt hat; natürlich vergißt er daher alle diese Sachen rasch und gründlich. Tritt er nach Absolvierung seines Studiums ins Lehramt über, so soll er plötzlich eben diese herkömmliche Elementarmathematik schulumäßig unterrichten; da er diese Aufgabe kaum selbständig mit seiner Hochschulmathematik in Zusammenhang bringen kann, so wird er in den meisten Fällen recht bald die althergebrachte Unterrichtstradition aufnehmen. Diese *doppelte Diskontinuität*, die gewiß weder der Schule noch der Universität jemals Nutzen gebracht hat, bemüht man neuerdings endlich aus der Welt zu schaffen [...]“ (Klein EvhS 1, S. 1)

Diese Feststellung kann auch noch heute getroffen werden, obwohl oder gerade weil die „Rahmenbedingungen in der Lehrerbildung [seitdem] einem ständigen Wandel unterzogen“ (Ableitinger u. a. 2013, S. v) wurden. Anders als zu Kleins Zeit wird zwischen einem Lehramts- und einem reinen Fachstudium (Master oder Diplom) unterschieden. Der zukünftige Lehrer wird nicht mehr als Wissenschaftler ausgebildet und versteht sich auch nicht mehr als ein solcher (vgl. Hefendehl-Hebeker 2013, S. 2).

Im Großen und Ganzen ist das von Klein beschriebene Problem daher zwar nach wie vor vorhanden, die Ausgangslage, von der aus man heute der *doppelten Diskontinuität* begegnet, ist aber eine andere. Um das Kleinsche Konzept einer *Elementarmathematik vom höheren Standpunkt* angemessen zu interpretieren und gegebenenfalls Schlüsse für die aktuelle Situation zu ziehen, ist es von Bedeutung, die eigene

und aktuelle Konnotation dieses Problems zunächst auszublenden und der Analyse des Werks Kleins Verständnis des beschriebenen Problems voranzustellen.

Biermann und Jahnke (2014) weisen darauf hin, dass Anfang des 20. Jahrhunderts die Kluft zwischen Schule und Hochschule in erster Linie inhaltlich verstanden wurde. Die Diskontinuität sah man darin, dass in den beiden Institutionen bezüglich der Analysis unterschiedliche Auffassungen vertreten wurden. In der Schule wurde *algebraische Analysis* gelehrt, in der Universität befasste man sich mit dem *Infinitesimalkalkül* der höheren Analysis. Auch Klein habe vornehmlich diese Unterscheidung im Sinn gehabt, wenn er von der Kluft zwischen Schule und Hochschule sprach, so Biermann und Jahnke (2014). Meiner Einschätzung nach schreibt Klein der Diskontinuität aber auch eine methodische Dimension zu. Im Folgenden wird die von Biermann und Jahnke (2014) angesprochene inhaltliche Facette und ihre Rolle in der Kleinschen Vorlesung vorgestellt. Dieser wird anschließend die methodische Seite des Problems gegenübergestellt.

Algebraische Analysis versus Infinitesimalrechnung.

„Auf dem Gebiete der Infinitesimalrechnung gerade ist diese Diskontinuität zwischen Schule und Universität, von der ich schon öfters sprach, am größten[.]“ (Klein EvhS 1, S. 255)

Zu Kleins Zeit unterschied man zwischen der *algebraischen Analysis* oder *Analysis des Endlichen* und der *höheren Analysis*, der *Analysis des Unendlichen*. Grundlegend für diese Unterscheidung sind die Werke *Introductio* (vgl. Euler 1748) und *Institutiones* (vgl. Euler 1755), durch welche Euler selbst eine solche Unterteilung vornahm. Die Grenze zwischen den beiden Gebieten bildet der Begriff des unendlich Kleinen (vgl. Tabelle 1.1)

In seiner *Elementarmathematik* kritisiert Klein, dass genau diese Grenze auch zwischen der Schul- und Hochschulmathematik gezogen wird. In der Schule werde ausschließlich die algebraische Analysis unterrichtet. „Man hilft sich heute immer noch trotz allen Schwierigkeiten und Unvollkommenheiten mit umständlicher *algebraischer Analysis* und vermeidet jenen glatten *Infinitesimalkalkül*“ (Klein EvhS 1, S. 167). An den Universitäten werde umgekehrt ausschließlich die Analysis des Unendlichen behandelt, ohne auf Gemeinsamkeiten oder Überschneidungen zur algebraischen Analysis hinzuweisen:

„Mit anderen Worten: Euler blieb maßgebend für die höhere Schule.⁸ Und umgekehrt gibt sich die Hochschule wieder häufig keine besondere Mühe, genau an das auf der Schule Gegebene anzuschließen, sondern baut ihr eigenes System auf, und nur einzelnes wird dem nicht immer zutreffenden Hinweis: ‚Das haben Sie auf der Schule schon gehabt‘ abgetan.“ (Klein EvhS 1, S. 167)

⁸Darunter versteht Klein die algebraische Analysis.

Analysis des Endlichen	Analysis des Unendlichen
– Algebra	– Differentialrechnung
– Funktionen	– Integralrechnung
– Produkte	– Unendlich kleine Größen und deren Anwendungen
– Potenzen und Logarithmen	
– Summen und Differenzen (insbesondere Reihen)	
– Geometrie in Verbindung mit arithmetischer Analysis	

Tab. 1.1: (zitiert nach Biermann 2010, S. 232)

Für eine Überwindung dieser Unstetigkeit ist es Klein zufolge notwendig, den Infinitesimalkalkül in der Schule einzuführen – eines der Ziele, die er im Rahmen der Meraner Reform verfolgte (vgl. Kapitel 1.2.3) – und den gesamten Unterricht am Funktionsbegriff auszurichten. Dieser Forderung räumt Klein auch einen großen Stellenwert in seiner Vorlesung ein (vgl. hierzu insbesondere Kapitel 9.1).

Methodische Unterschiede zwischen schulischem und universitärem Unterricht.

Allerdings legen der Aufbau und die Inhalte der Vorlesung nahe, dass Klein nicht ausschließlich den inhaltlichen Unterschied zwischen systematisch-infinitesimaler und algebraischer Analysis im Sinn hat, wenn er von der Kluft zwischen Schule und Hochschule spricht.

Besonders im ersten Teil der Vorlesung, der *Arithmetik*, beschäftigt er sich eingehend mit methodischen Unterschieden:

„Die *Art des Unterrichtsbetriebes*, wie er auf diesem Gebiete heute überall bei uns gehandhabt wird, kann ich vielleicht am besten durch die Stichworte *anschaulich* und *genetisch* kennzeichnen, d.h. das ganze Lehrgebäude wird auf Grund bekannter anschaulicher Dinge ganz allmählich von unten aufgebaut; hierin liegt ein scharf ausgeprägter Gegensatz gegen den meist auf Hochschulen üblichen *logischen* und *systematischen* Unterrichtsbetrieb.“ (Klein EvhS 1, S. 6)

Diese Diskrepanz gilt es zu überwinden. Einerseits scheint der Mathematikunterricht an den Gymnasien so stark auf die Anschauung fokussiert, dass sich Klein

gezwungen fühlt, „die Notwendigkeit eingehender logischer Entwicklungen zu betonen“ (Klein 1921, S. 239), andererseits wirbt er für einen anschauungs- und anwendungsorientierteren Hochschulunterricht, da dieser die formale logische Seite der Mathematik überbetonte (vgl. bspw. Klein 1899). In seiner *Elementarmathematik* hebt Klein das „psychologische Moment“ (Klein EvhS 1, S. 3) besonders hervor, das ein jeder Lehrer in der Schule bedienen können muss. Er wählt eine genetische Darstellung, stellt Bezüge zu möglichen Anwendungen her und vertritt das Primat der Anschauung. Er orientiert seine Vorlesung damit bewusst an Prinzipien, die die methodischen Unterschiede der beiden Institutionen angleichen. Diese werden in den Kapiteln 2 bis 5 vorgestellt und charakterisiert.

Die doppelte Diskontinuität hat damit zwei Komponenten, die in Kleins Vorlesungsreihe thematisiert werden – eine inhaltliche und eine methodische. In der vorliegenden Arbeit wird die Art und Weise, wie Klein dabei vorgeht, charakterisiert. Die Merkmale, die sich bei der Analyse herauskristallisieren, lassen sich zwei Kategorien zuordnen, die beide unterschiedlich, aber zu gleichen Teilen zur Überwindung der doppelten Diskontinuität beitragen und einen höheren Standpunkt auf die Elementarmathematik erzeugen sollen: *zugrunde liegende Prinzipien* und *eingenommene Perspektiven*. Zunächst werden die bei Klein zugrunde liegende Prinzipien beschrieben und analysiert.

Der Vorlesung zugrunde liegende Prinzipien

Entscheidend geprägt wird die Vorlesung durch Prinzipien, die Klein bewusst in sein Vorlesungskonzept integriert: die *innermathematischen Vernetzung*, das *Primat der Anschauung*, eine hohe *Anwendungsorientierung* und das *genetische Prinzip*. Die zunächst plakativ anmutenden Bezeichnungen der Prinzipien sollen im ersten Hauptteil der Arbeit inhaltlich beschrieben und spezifiziert werden. Anhand charakteristischer Textstellen und typischer Beispiele wird ihre jeweilige Ausprägung deutlich und ihre Funktion innerhalb der Vorlesungskonzeption und für den *höheren Standpunkt* herausgearbeitet. Die vorgestellten Prinzipien sind in der heutigen Mathematikdidaktik mit gewissen Vorstellungen verknüpft. Die Kleinschen Prinzipien werden abschließend in die aktuelle Diskussion eingeordnet.

Kapitel 2

Das Prinzip der innermathematischen Vernetzung

Ein wichtiges Prinzip, dem Klein in seiner Vorlesung folgt, ist die *innermathematische Vernetzung*. In Kapitel 1.4 wurden Ziele der Vorlesung beschrieben. Eines der Hauptziele liegt in der Einbettung der Schulmathematik in die Hochschulmathematik. Dabei wird die Mathematik gewissermaßen aus einer Längsschnittperspektive heraus betrachtet; einzelne Themen werden zunächst im Kleinschen Sinne elementar und dann zunehmend anspruchsvoller behandelt und in wechselseitige Beziehung gesetzt (vgl. hierzu Kapitel 7). Klein ergänzt diese Blickrichtung durch eine Querschnittsperspektive, indem er in der Vorlesungsreihe Bezüge zwischen verschiedenen mathematischen Gebieten herstellt und auch Zusammenhänge betont, die nicht offensichtlich sind. Dadurch wird Mathematik als Einheit aufgefasst, durch die schulmathematische Inhalte „in neue Beleuchtung“ (vgl. Klein EvhS 1, S. 11) gesetzt werden. Dies kündigt Klein auch in der Einleitung zu seinem Werk an:

„Meine Aufgabe hier wird stets sein, Ihnen den gegenseitigen Zusammenhang der Frage der Einzeldisziplinen vorzuführen, der in den Spezialvorlesungen nicht immer genügend zur Geltung kommt, [...]“. (Klein EvhS 1, S. 2)

Klein bezieht auch bezüglich des Verhältnisses von reiner und angewandter Mathematik Stellung. Er ist sich bewusst, dass zunehmend, insbesondere in der Forschung, eine Trennung dieser beiden mathematischen Richtungen stattfindet. Eine Verbindung und ein Zusammenhalt muss aber gerade im Hinblick auf den Schulbetrieb gewährleistet werden, denn „für die Schule ist eine solche Arbeitsteilung, eine weitgehende Spezialisierung des einzelnen Lehrers unmöglich“. (Klein EvhS 1, S. 17)

„Denken Sie sich, um die Sache kraß auszudrücken, an einer Schule etwa einen Lehrer angestellt, der Zahlen nur als bedeutungslose Symbole behandelt, einen zweiten, der es versteht, von diesen Symbolen den Übergang zu den wirklichen Zahlen zu vollziehen, einen dritten, vierten, fünften endlich, der die Anwendung dieser Zeichen in der Geometrie, der Mechanik, der Physik kennt; und nun werden diese verschiedenen Lehrer nebeneinander auf die Schüler losgelassen.

Sie sehen, daß eine solche Unterrichtsorganisation unmöglich ist; [...]“ (Klein EvhS 1, S. 17)

Daher muss ein Lehrer „eine gewisse Vielseitigkeit“ (Klein EvhS 1, S. 18) haben, die sich dadurch bemerkbar macht, dass der Lehrer sich des Beziehungsreichtums in der Mathematik bewusst ist. Die Tatsache, dass Klein in einer Vorlesung drei Teilgebiete der Mathematik – Arithmetik (und Zahlentheorie), Algebra und Analysis – gemeinsam behandelt, könnte bereits eine Vernetzung anbahnen. Auffallend ist jedoch, dass Klein die einzelnen Teilgebiete – bezogen auf den Schulstoff – nur an wenigen Stellen explizit thematisiert. Er spricht zwar beispielsweise aus pädagogischer Sicht über den schweren Übergang vom Rechnen mit Zahlen zur Buchstabenrechnung (vgl. Klein EvhS 1, S. 8), geht aber nicht näher auf Schnittstellen zwischen Arithmetik und Algebra aus schulischer Sicht ein. Konkret behandelt er Vernetzungen eher im Bereich der hochschulmathematischen Themen aus der Zahlentheorie, Algebra und Analysis.

Anhand geeigneter Textstellen werden im Folgenden verschiedene Facetten von innermathematischer Vernetzung vorgestellt, wie sie in der *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus* auftauchen.

2.1 Aufdecken von Gemeinsamkeiten der Fragestellung

Das Kapitel über den Taylorschen Lehrsatz (Klein EvhS 1, S. 241-252) ist eines der wenigen Kapitel, in denen Klein seinen Überblicksvortrag unterbricht, um detailliert ein spezielles Thema zu behandeln.

„Wir gehen von der Frage aus, ob man den Verlauf einer beliebigen Kurve $y = f(x)$ nicht ein Stück hin durch möglichst einfache Kurven zweckmäßig approximieren kann.“ (Klein EvhS 1, S. 241)

Die Antwort liefert ein Polynom n -ten Grades, das mit der Funktion an einer festen Stelle $x = a$ in der Ordinate sowie den ersten n Ableitungen an dieser Stelle übereinstimmt und sich dadurch an die vorgegebene Funktion „anschmiegt“ (Klein EvhS 1, S. 241). Die Form des Polynoms erhält man, so Klein, durch eine einfache Rechnung (Klein EvhS 1, S. 241):

$$T_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1}(x - a) + \frac{f''(a)}{1 \cdot 2}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n}(x - a)^n \quad (2.1)$$

$(n = 1, 2, 3, \dots)$

Kleins Augenmerk liegt in diesem Abschnitt auf der Untersuchung, „ob und wie weit diese Polynome brauchbare Näherungswerte darstellen“ (Klein EvhS 1, S. 241). Er beginnt mit einer „mehr experimentellen Betrachtung“ (Klein EvhS 1, S. 242).¹ Die Vernetzung taucht hier in Form einer Analogie zu der Vorgehensweise bei den trigonometrischen Reihen auf (vgl. Klein EvhS 1, S. 242). Die Gemeinsamkeiten zwischen trigonometrischen Reihen und Potenzreihen werden bei den „mathematischen Betrachtungen“ (Klein EvhS 1, S. 244) erneut aufgegriffen. Klein untersucht das Verhalten des Restglieds $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ für $n \rightarrow \infty$, im Hinblick auf die Frage „Kann man durch eine unendliche Potenzreihe die gegebene Kurve wenigstens ein Stück genau darstellen?“ (Klein EvhS 1, S. 244). Klein begnügt sich zunächst damit, einen der Sätze über das Restglied anzugeben und nach dem Grenzwert dieses Restglieds zu fragen. Er greift an dieser Stelle auf das Verfahren zurück, das er bereits bei den trigonometrischen Reihen verwendet hat. Nachdem er anhand der bereits im experimentellen Teil untersuchten Beispiele die Konvergenz zwischen -1 und $+1$ festgestellt hat, geht er dazu über, die Schmiegeparabeln als Kurven aufzufassen:

„Wir können nun aber, wie schon bei den trigonometrischen Reihen, auch nach den Grenzwerten fragen, denen die Annäherungsparabeln, als Kurven aufgefaßt, zustreben; diese können ja bei $x = \pm 1$ nicht so plötzlich abbrechen.“ (Klein EvhS 1, S. 244f)

Klein stellt somit Bezüge zu einer zurückliegenden Frage nach einer „Darstellung periodischer Funktionen durch Reihen goniometrischer Funktionen (trigonometrische Reihen)“ (Klein EvhS 1, S. 205) her. Es geht hier zunächst ausschließlich um die Ähnlichkeit der Fragestellung und der Konstruktion, die ein analoges Vorgehen als zielführend erscheinen lassen.

2.2 Herstellen von Zusammenhängen bei Begriffen und Sätzen

In einem *Exkurs über den allgemeinen Funktionsbegriff* (vgl. Klein EvhS 1, S. 215-223) nutzt Klein dann einen konkreten Zusammenhang zwischen Potenzreihen und trigonometrischen Reihen, um zwei unterschiedliche Funktionsbegriffe – den Fourier-Dirichletsche und Lagrangeschen – zu verbinden:

Lagrange schränkt seinen Funktionsbegriff auf „*analytische Funktionen, die durch eine Potenzreihe in x definiert sind*“, ein. Der Definitionsbereich ist zunächst auf

¹Im Abschnitt 3 über das Prinzip der Anschauung wird das Kapitel zum Taylorschen Lehrsatz im Bezug auf die Bedeutung graphischer Darstellungen, die er in diesen Betrachtungen nutzt, erneut untersucht.

ein kleines Intervall um $x = 0$, den Konvergenzbereich der Potenzreihe, eingeschränkt, lässt sich aber mit Mitteln der Funktionentheorie erweitern. Damit ist eine Funktion im Langrange'schen Sinne bereits vollständig bestimmt, wenn man „den Verlauf einer Funktion y längs eines beliebig kleinen Stückes der x -Achse“ (Klein EvhS 1, S. 216) kennt. Dem gegenüber steht Dirichlets Arithmetisierung der Eulerschen Definition, in der eine Funktion durch die Freihandzeichnung („libero manu ductu“ (Klein EvhS 1, S. 216)) in einem Koordinatensystem bestimmt ist. In einer solchen Definition „läßt sich jedes Stück einer Funktion [...] nach freier Willkür fortsetzen“ (vgl. Klein EvhS 1, S. 216-219). Auch wenn dadurch ein sehr allgemeiner Funktionsbegriff beschrieben ist, ist zu bedenken, dass Dirichlet weitestgehend von stetigen oder zumindest in weiten Teilen stetigen Funktionen spricht. Geht man zu komplexen Argumenten über, lassen sich beide Definitionen in Einklang bringen. Klein formuliert dies folgendermaßen:

„Nun ist aber das Merkwürdige, daß dieser Übergang ins Komplexe einen Ausgleich und Zusammenhang zwischen den beiden oben betrachteten Arten des Funktionsbegriffes schafft.“ (Klein EvhS 1, S. 218)

Betrachtet man eine Potenzreihe

$$f(z) = u + iv = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots$$

auf einem Kreisbogen mit Radius r im Konvergenzbereich, d.h. $z = x + iy = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ (vgl. Abb. 2.1), so liefert der reelle Teil der Potenzreihe, „aufgefasst als Funktion des Winkels φ , unmittelbar eine trigonometrische Reihendarstellung“ (Klein EvhS 1, S.219).

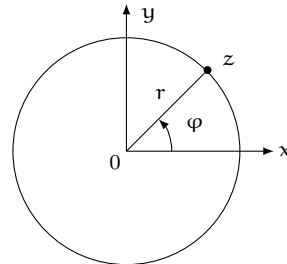


Abb. 2.1: (Klein EvhS 1, S. 219)

Klein erörtert diesen Zusammenhang nicht im Detail. Seine Bemerkungen lassen jedoch den Schluss zu, dass „auf diesem Wege der Fourier-Dirichletsche und der Lagrangesche Funktionsbegriff gewissermaßen zur Deckung kommen“ (Klein EvhS 1, S. 219).

Ausführlicher beschreibt Klein den Zusammenhang zwischen dem Taylorschen Lehrsatz und sogenannten Interpolationsproblemen.

„Ich möchte nun die Erörterungen über den Taylorschen Satz dadurch beleben, daß ich seine Beziehungen zu den Problemen der Interpolations- und Differenzenrechnung auseinandersetze. Auch dort betrachtet man nämlich die Aufgabe, eine gegebene Kurve durch eine Parabel zu approximieren.“ (Klein EvhS 1, S. 246)

Bei der Interpolationsrechnung geht es, ähnlich wie auch beim Taylorschen Lehrsatz, darum, eine vorgegebene Kurve approximativ darzustellen. Die Idee ist es,

mehrere Punkte auf der zu approximierenden Kurve festzulegen. Das approximierende Polynom wird dann so konstruiert, dass es die Kurve in den vorgegebenen Punkten schneidet. Demzufolge wird die Funktion bei drei vorgegebenen Schnittpunkten mit einer quadratischen Funktion angenähert, bei vier Punkten mit einer kubischen Funktion, usw..

Klein zeigt, dass sich aus dieser so beschriebenen allgemeinen Interpolationsaufgabe, die „Bestimmung der Schmiegungsparabeln beim Taylorschen Satz als spezieller Fall“ (Klein EvhS 1, S. 247) ergibt und zwar indem man die Schnitte des Interpolationspolynoms auf einen Punkt zusammenfallen lässt.² Dieser Zusammenhang wird deutlicher, wenn man die von Klein konkret vorgestellte *Newtonsche Interpolationsformel* in den Blick nimmt. Mit dieser Formel wird eine Funktion in n Punkten angenähert, deren Abszissen a_1, \dots, a_n äquidistant verteilt sind.

Er verwendet die Differenzenschreibweise: Δx ist ein Zuwachs von x , $\Delta f(x)$ ist der entsprechende Zuwachs von $f(x)$. Es gilt dementsprechend $f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta f(x)$ und analog zur Differentialrechnung $\Delta f(x + \Delta x) = \Delta f(x) + \Delta^2 f(x)$. Schreibt man die äquidistant verteilten Abszissen als

$$a_1 = a, a_2 = a + \Delta x, \dots, a_n = a + (n - 1)\Delta x,$$

erhält man schließlich die Interpolationsformel

$$y = f(a) + \frac{(x - a)}{1!} \frac{\Delta f(a)}{\Delta x} + \frac{(x - a)(x - a - \Delta x)}{2!} \frac{\Delta^2 f(a)}{(\Delta x)^2} + \dots \\ + \frac{(x - a)(x - a - \Delta x) \cdots (x - a - (n - 2)\Delta x)}{(n - 1)!} \frac{\Delta^{n-1} f(a)}{(\Delta x)^{n-1}} + R(n)$$

Lässt man in dieser Formel Δx gegen Null gehen, so erhält man die Taylorformel (vgl. Gleichung (2.1), S. 36), die somit in direkte Verbindung zur Interpolationsformel gebracht worden ist.

2.3 Verwendung gebietsfremder Hilfsmittel

Eine weitere Facette der innermathematischen Vernetzung richtet sich nicht auf Zusammenhänge oder Gemeinsamkeiten, sondern betrifft den Einsatz von Methoden einer mathematischen Disziplin, um die Lösung eines Problems einer anderen Disziplin voranzutreiben. Ein gegebenes Problem soll mit Hilfe von Methoden oder Sachverhalten aus anderen mathematischen Bereichen gelöst werden. Im zweiten

²Wobei es sich dann nicht mehr um eine Interpolation im eigentlichen Sinne handelt (vgl. Klein EvhS 1, S. 247).

Teil der Vorlesung, zum Thema Algebra, behandelt Klein Lösungen von algebraischen Gleichungen mit graphischen und geometrisch-anschaulichen Methoden³ und kündigt direkt in der Einleitung zu diesem Vorlesungsteil an, dass er damit den Vernetzungsgedanken auch über die reine geometrische Vernetzung hinaus, fördern wird:

„Damit ist ein äußerst umfassendes und beziehungsreiches Kapitel bezeichnet [...] ; wir werden dabei mit den verschiedensten Gebieten in organische Verbindung treten, [...].“ (Klein EvhS 1, S. 94)

Auch wenn Klein in den einzelnen Abschnitten nicht mehr explizit auf die Bezüge hinweist, lässt sich seine Vorankündigung bestätigen:

Klein bespricht im Vorlesungsteil zur Algebra nacheinander die Lösung verschiedener algebraischer Gleichungen. Zunächst werden *reelle Gleichungen mit reellen Unbekannten* (vgl. Klein EvhS 1, S. 94-108) behandelt. Danach diskutiert Klein den Übergang ins Komplexe; besondere Aufmerksamkeit legt er auf den *Fundamentalsatz der Algebra* (vgl. Klein EvhS 1, S. 109), sowie Gleichungen mit komplexem Parameter, die er durch „konforme Abbildung zweier Kugeln“ (Klein EvhS 1, S. 112) geometrisch deutet und illustriert. So wird gezeigt, wie die Gleichungen 3., 4. und 5. Grades mit der Diedergerleichung, Tetraeder- bzw. Ikosaedergerleichung zusammenhängen. Am Beispiel der Lösung von Gleichungen der Form $f(x, \lambda) = 0$ wird nun exemplarisch deutlich, wie Klein Algebra mit unterschiedlichen Gebieten auf die eben beschriebene Weise vernetzt:

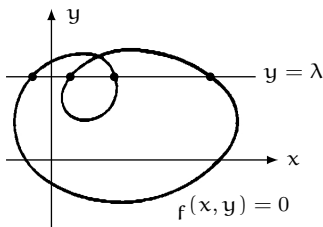


Abb. 2.2: (Klein EvhS 1, S. 94)

Allen Abschnitten des algebraischen Teils ist die geometrische Deutung der Gleichungen gemein. *Geometrie* wird somit zum Lösen algebraischer Probleme hinzugezogen.

Klein behandelt zunächst den Fall einer reellen Gleichung mit einem Parameter $f(x, \lambda) = 0$ (vgl. Klein EvhS 1, S. 94f). Er fasst die Gleichung als Funktion in zwei Variablen x und y auf: $f(x, y) = 0$

Auf diese Weise lassen sich die Lösungen der Gleichung $f(x, \lambda) = 0$ als Schnittpunkte der Kurve mit der zur x -Achse parallelen Gerade $y = \lambda$ beschreiben (vgl. Abb. 2.2). Falls die Funktion in λ linear ist, $\varphi(x) + \lambda \cdot \chi(x) = 0$, ergibt sich, so Klein, ein besonders einfacher Fall (vgl. Klein EvhS 1, S. 94), und man kann an dieser Stelle zur numerischen Berechnung übergehen; die *Analysis* kommt ins Spiel:

³Die Bedeutung der Anschauung wird im nächsten Abschnitt näher erläutert.

„Übrigens mache ich darauf aufmerksam, daß die numerische Berechnung einer Wurzel eigentlich ein Problem der Analysis, nicht der Algebra ist, da sie notwendig die Anwendung unendlicher Prozesse erheischt, wenn man die im allgemeinen irrationalen Wurzelwerte mit beliebiger Annäherung darstellen will.“ (Klein EvhS 1, S. 141)

Im weiteren Verlauf lassen sich noch Bezüge zur *Trigonometrie* erkennen; die Geradensteigungen werden als trigonometrische Tangenten abgelesen (vgl. Klein EvhS 1, S. 95). Klein geht zur *Funktionentheorie* im Rahmen seiner Untersuchungen im Komplexen über und bezieht auch *zahlentheoretische* Überlegungen ein (vgl. Klein EvhS 1, S. 123).

Im Kapitel *Von den besonderen Eigenschaften von ganzen Zahlen* (vgl. Klein EvhS 1, S. 40-61) aus dem arithmetischen Teil der Vorlesung, finden wir weitere Beispiele, in denen Klein bewusst Lösungen mit gebietsfremden Hilfsmitteln erhält. So ist das „*Problem, den Kreis in n gleiche Teile zu teilen oder ein reguläres n -Eck zu konstruieren*“ (Klein EvhS 1, S. 54) von Natur aus in der Geometrie beheimatet. Die Aufgabe lässt sich jedoch auf der Gaußschen Zahlenebene, so Klein weiter, „auf die Lösung dieser einfachen algebraischen Gleichung $[z^n = 1]$ “ (Klein EvhS 1, S. 54) zurückführen.

Zusammenfassung und Bilanz

Klein stellt immer wieder Verbindungen zwischen mathematischen Teilgebieten her, wenn er sie auch nur an einigen Stellen detailliert ausführt. Klein deckt dabei *Gemeinsamkeiten der Fragestellungen* aus unterschiedlichen mathematischen Teilgebieten auf. Die Analogien lassen sich beim Lösen von speziellen Problemen nutzen. Desweiteren stellt Klein *Zusammenhänge* zwischen unterschiedlichen mathematischen Begriffen und Sachverhalten her. Schließlich kann das *Hinzunehmen gebietsfremder Methoden* zur Lösung eines Problems beitragen und neue Erkenntnisse liefern. Diese Verbindungen tauchen, wie die Auszüge aus der Vorlesung gezeigt haben, in allen drei Teilen der Vorlesung auf. Auffallend ist jedoch, dass zwischen diesen drei Teilen und den tatsächlichen angesprochenen Inhalten der Arithmetik, Algebra und Analysis, praktisch keine Querverweise existieren. Die Teile stehen im Wesentlichen unabhängig nebeneinander und bilden in sich geschlossene Abschnitte.

Insgesamt wird der Vernetzungsgedanke stark von Bezügen zur Geometrie dominiert, was besonders im Vorlesungsteil zur Algebra deutlich wird:

„Alle meine algebraischen Darlegungen werden sich um einen Punkt gruppieren, nämlich um die Anwendung der graphischen und überhaupt geometrisch anschaulichen Methoden der Lösung von Gleichungen.“ (Klein EvhS 1, S. 93)

Diese Schwerpunktsetzung lässt sich durch die hervorgehobene Bedeutung erklären, die Klein der Anschauung zuspricht. Dies wird im folgenden Kapitel deutlich.

Kapitel 3

Das Prinzip der Veranschaulichung

Die Bedeutung, die Klein der Anschauung zumisst, zeigt sich nicht nur in der hier untersuchten Vorlesung. Klein legt, wie bereits in Kapitel 1.2 dargelegt wurde, insgesamt – in Forschung und Lehre – großen Wert auf Anschauung. Bereits 1899 spricht er sich in einer Rede *Über die Aufgabe und Methode des mathematischen Unterrichts an den Universitäten* für anschauungsorientierte Vorlesungen aus. Dabei betont er insbesondere zwei Hörergruppen, die der Anschauung besonders bedürfen.

„[Z]wei Kategorien mathematischer Vorlesungen [sollten] notwendig von der Anschauung ihren Ausgangspunkt nehmen [...]. Das sind erstlich die Elementarvorlesungen, welche den Anfänger überhaupt in die höhere Mathematik einleiten – wird doch der Lernende naturgemäß im kleinen immer denselben Entwicklungsgang durchlaufen, den die Wissenschaft im großen gegangen ist. Das sind ferner diejenigen Vorlesungen, deren Zuhörer von vorneherein darauf angewiesen sind, sehr wesentlich mit der Anschauung zu arbeiten, also die Vorlesungen für Naturforscher und Ingenieure.“ (Klein 1899, S. 127)

Für die Zielgruppe der *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus* ist Anschauung ebenfalls von größter Bedeutung; schließlich wird es in der Schule gerade die Aufgabe des Lehrers sein, das Interesse der Schüler zu wecken, und das „wird ihm nur gelingen, wenn er die Dinge in anschaulich faßbarer Form darbietet“ (Klein EvhS 1, S. 4). Daher scheint es nur konsequent, dass Klein sich auch in der gegenwärtigen Vorlesung von der Anschauung leiten lässt, damit die Studierenden seinen Ausführungen „lebendige Anregungen für [i]hren eigenen Unterricht entnehmen können“ (Klein EvhS 1, S. 2).

Auch wenn Klein die Logik in der Mathematik selbstverständlich schätzt und würdigt – sie bildet „das feste Skelett im Organismus der Mathematik“ (vgl. etwa Klein EvhS 1, S. 17) – so ist die Anschauung unabdingbar. Egal wie abstrakt die Vorgehensweise sein wird, die Anschauung wird nicht völlig verloren gehen, und das macht ihre führende Rolle in der Mathematik aus.

„[...] muß man doch auch bei abstraktester Formulierung mit den Symbolen, mit denen man operiert, stets noch eine gewisse Anschauung verknüpfen, schon um sie nur immer wiedererkennen zu können, und sei es auch, daß man bloß an das Aussehen der Buchstaben denkt.“ (Klein EvhS 1, S. 15)

Entscheidend ist, was Anschauung im Schul- und Hochschulunterricht leisten kann. Klein betont immer wieder, dass durch anschauliche Darstellung Mathematik zugänglicher wird und mehr Interesse weckt. Insbesondere erleichtern anschauliche Beispiele das Verständnis (vgl. Klein EvhS 1, S. 42). In der Vorlesung soll gezeigt werden, „ein wie klares und leicht verständliches Aussehen [mathematische, H.A.] Dinge durch eine geometrisch-anschauliche Darstellung erhalten“ (Klein EvhS 1, S. 45).

Auch wenn die Geometrie einen großen Beitrag zum Kleinschen Verständnis von Anschauung leistet, ist sie keinesfalls die einzige Quelle. So verweist Klein beispielsweise auf Newton, der mit der Ableitung eine ganz lebensnahe Anschauung verknüpft – die „Vorstellung des Fließens“ (Klein EvhS 1, S. 88).

„Beide Variable x , y werden als Funktionen $\varphi(t)$, $\psi(t)$ der Zeit t aufgefaßt, und während die Zeit dahinfließt, ‚fließen‘ sie gleichfalls ständig. Demgemäß heißt die Variable *fluens*, und was wir Differentialquotient nennen, bezeichnet er als *Fluxion* \dot{x} , \dot{y} . Sie sehen, wie hier alles durchaus auf Anschauung begründet ist.“ (Klein EvhS 1, S. 89)

In diesem Beispiel trägt Anschauung wesentlich zur *Begriffsbildung* bei. Dies ist jedoch nicht die einzige Art und Weise, wie Anschauung in Kleins Vorlesung genutzt wird. Im Folgenden wird anhand prägnanter Stellen des Manuskripts belegt, wie Klein seine Vorlesung durch anschauliche – nur zum Teil genuin geometrische – Beispiele, Interpretationen und Beweise belebt.

3.1 Anschauliche Erfassung der Sachlage

Klein nutzt anschauliche Darstellungen, um in einen Themenkomplex einzuleiten. Durch eine Einleitung, die von „mehr experimentellen Betrachtungen“ (Klein EvhS 1, S. 242) getragen ist, so sagt er, hebt er sich explizit von anderen Lehrbüchern ab. So auch im Kapitel zum Taylorschen Lehrsatz, welches bereits diskutiert wurde (vgl. Kapitel 2.1). Hier wird nun vornehmlich die Einführung des Kapitels näher untersucht:

„Ich werde [...] von der gebräuchlichen Behandlung in den Lehrbüchern abweichen, indem ich [...] die anschauliche Erfassung der Sachlage [...] in den Vordergrund stelle. So bekommt alles ein ganz elementares, leicht faßliches Aussehen.“ (Klein EvhS 1, S. 241)

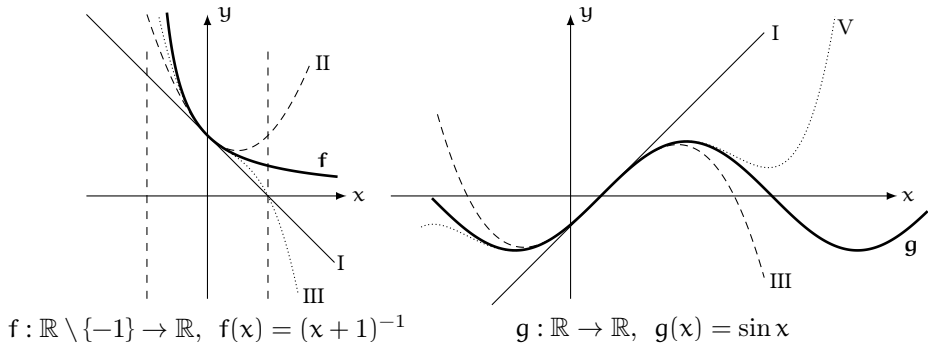


Abb. 3.1: (Klein EvhS 1, S. 242f)

Klein will anhand konkreter Beispiele die Aussage des Taylorschen Lehrsatzes plausibel machen, bevor die „mathematischen Betrachtungen“ (Klein EvhS 1, S. 244) abstrakt dem Beweis und der Tragweite des Satzes auf den Grund gehen. Klein wählt zunächst Potenz- und Logarithmusfunktionen (vgl. bspw. Abb. 3.1, Funktion f). Diese Beispiele kommentiert er ausführlich. Insbesondere interessiert er sich für das Verhalten der verschiedenen Taylorpolynome im Vergleich innerhalb und außerhalb des Intervalls $[-1, 1]$. Das ist für die weiteren Untersuchungen, in denen er zur unendlichen Taylorreihe übergeht, von Bedeutung. Am Beispiel der Sinusfunktion (vgl. Abb. 3.1, Funktion g) wird besonders deutlich, dass die Approximation mit jedem hinzugenommenen Glied der Taylorreihe auf einem größeren Intervall akzeptable Werte liefert.

„Sie bemerken, daß die Schmiegungsparabeln mit wachsender Ordnung auf ein immer größeres Stück hin brauchbare Annäherungen an die Originalkurve darstellen. Besonders anschaulich sehen Sie bei $\sin x$, wie die Parabeln sich bemühen, immer mehr Oszillationen der Sinuskurve mitzumachen.“ (Klein EvhS 1, S. 244)

Klein erzeugt Anschaulichkeit nicht ausschließlich durch die Diskussion tragender Beispiele. Vielmehr gelingt es ihm, Sachverhalte auch durch eine besonders ‚blumige‘, bildhafte Sprache greifbar zu machen – ein Beispiel hierfür ist die Personifizierung der Parabeln im vorangegangenen Zitat – oder durch alltägliche Bilder und Metaphern.

Im zahlentheoretischen Kapitel behandelt Klein etwa das Thema Kettenbrüche. Jede positive reelle Zahl ω lässt sich als Kettenbruch darstellen.

$$\omega = n_0 + \frac{1}{n_1 + \frac{1}{n_2 + \dots}}$$

Bei rationalem ω bricht der Bruch nach endlich vielen Schritten ab; bei irrationalen Zahlen ist der Bruch „unbegrenzt fortsetzbar“. Die Brüche, die entstehen, wenn man die Kette nach endlich vielen Schritten abbricht, ergeben „außerordentlich gute Näherungswerte“, jede von Ihnen ist „die beste Annäherung, die man mit irgendeinem rationalen Bruch von nicht größerem Nenner überhaupt erzielen kann“ (Klein EvhS 1, S. 46f).¹

$$n_0 = \frac{p_0}{q_0}, \quad n_0 + \frac{1}{n_1} = \frac{p_1}{q_1}, \quad n_0 + \frac{1}{n_1 + \frac{1}{n_2}} = \frac{p_2}{q_2}, \quad \dots$$

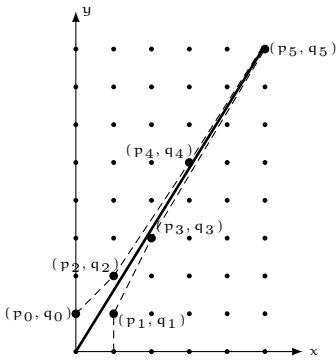


Abb. 3.2: (Klein EvhS 1, S. 48)

Jetzt zieht Klein eine geometrische Deutung heran: Man denke sich den ersten Quadranten eines Koordinatensystems mit einem Punktgitter² versehen.

Jedes ω lässt sich nun als von 0 ausgehender „Leitstrahl“ mit der Eigenschaft $\omega = \frac{x}{y}$ beschreiben³ (vgl. Abb. 3.2). Ist ω irrational, so bedeutet dies in diesem geometrischen Bild, dass der Strahl keinen einzigen Punkt des Gitters trifft. (vgl. Klein EvhS 1, S. 47)

Diese rein geometrische Deutung ergänzt Klein durch alltägliche Assoziationen. Die Näherungsbrüche $\frac{p_r}{q_r}$ lokalisiert Klein in einem geometrischen Bild:

„Denken wir uns in alle ganzzahligen Punkte Stifte oder Stecknadeln gesteckt, wie etwa bei dem sogenannten chinesischen Billiard⁴, und umschlingen wir den Stifthaufen rechts und links des ω -Strahls mit je einem Faden, den wir straff anziehen, so sind die Ecken der entstehenden, die beiden Punkthaufen begrenzenden konvexen Fadenpolygone gerade unsere Punkte (p_r, q_r) [...]“ (Klein EvhS 1, S. 48)

Auch das Punktgitter selbst wird mit einer Anschauung verknüpft – dem „Sternehimmel“. Vom Punkt 0 sieht man in alle „rationalen Richtungen“ Punkte dieses Himmels, „das Gesichtsfeld ist dicht“. Klein vergleicht diesen Anblick mit dem der

¹Für alle wörtlichen Zitate dieses Absatzes gilt: (Klein EvhS 1, S. 47f)

²alle Punkte mit ganzzahligen Koordinaten sind markiert (vgl. Klein EvhS 1, S. 47)

³Analog lässt sich auch jedes ω durch $\omega = \frac{y}{x}$, der heutigen Konvention entsprechend, darstellen.

⁴Vermutlich bezieht sich Klein hier auf das Brettspiel *Chinese Checkers*, bzw. *Halma*. Auf dem quadratischen Spielfeld befinden sich 16×16 Löcher, äquidistant angeordnet. Die Spielfiguren, farbige Stifte, werden in diese Löcher gesteckt.

„Milchstraße“. (Vgl. Klein EvhS 1, S. 47f) Dieser Vergleich leistet meines Erachtens mehr als der Ausschnitt in der graphischen Darstellung (vgl. Abb. 3.2), der die dem Sachverhalt innewohnende Unendlichkeit nicht abbilden kann. Diese Graphik wirkt übersichtlich, und man zieht wohl kaum in Zweifel, einen Leitstrahl einzeichnen zu können, der keinen einzigen Punkt des Gitters trifft. Wie „bemerkenswert“ es ist, dass es Leitstrahlen gibt, die diese Eigenschaft haben, wird mit der Assoziation der Milchstraße aber durchaus ersichtlich.⁵

3.2 Anschauliche Beweise

Klein nutzt, wie der letzte Abschnitt zeigt, anschauliche Darstellungen, Interpretationen und Metaphern, um in ein mathematisches Themenfeld einzuführen oder einen mathematischen Sachverhalt zu beschreiben. Anschauung kann aber auch konkret zur Lösung eines mathematischen Problems beitragen oder Teil eines mathematischen Beweises sein.

Im Kapitel 2 zur innermathematischen Vernetzung wurde bereits hervorgehoben, dass Klein insbesondere im algebraischen Teil seiner Vorlesung die geometrische Anschauung in den Vordergrund stellt. Klein geht soweit, sich in diesem Teil sogar ausschließlich auf anschaulich geometrische Lösungsmethoden zu konzentrieren (vgl. Kapitel 2.3). So auch im Kapitel *Gleichungen im Gebiete komplexer Größen*:

„natürlich kommt es uns dabei wieder nur auf die Hervorhebung solcher Dinge an, die sich, mehr als das sonst geschieht, geometrisch anschaulich darstellen lassen.“ (Klein EvhS 1, S. 109)

Klein widmet in diesem Zusammenhang dem *Fundamentalsatz der Algebra* ein ganzes Kapitel:

Jede algebraische Gleichung n-ten Grades hat im Komplexen im allgemeinen n Wurzeln. Oder anders: Jedes Polynom vom Grad n zerfällt in Linearfaktoren. (vgl. Klein EvhS 1, S. 109)

Vorgestellt wird der erste Gaußsche Beweis des Satzes. Dort wird ein beliebiges Polynom vom Grad n betrachtet und in seinen Real- und Imaginärteil aufgeteilt:

$$f(x + iy) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$$

⁵Für alle wörtlichen Zitate dieses Absatzes gilt: (Klein EvhS 1, S. 47f)

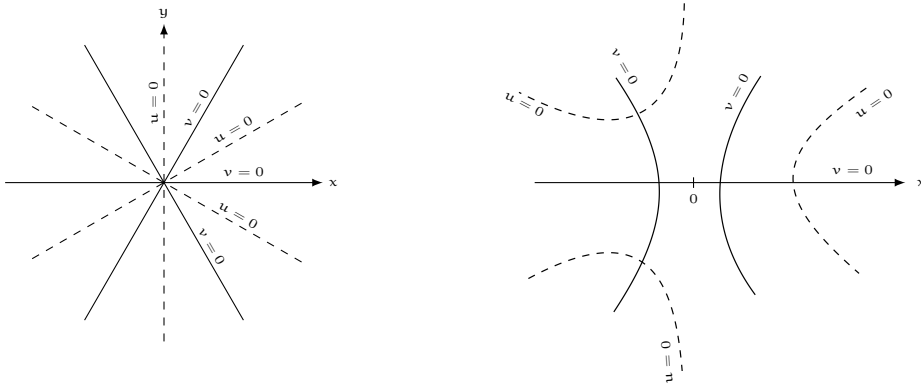


Abb. 3.3: (Klein EvhS 1, S. 111)

Um eine Nullstelle des Polynoms zu finden, gilt es nun zu zeigen, dass die Kurven u und v , gegeben durch die Gleichungen

$$u(x, y) = 0 \quad \text{und} \quad v(x, y) = 0,$$

mindestens einen Punkt in der x - y -Ebene gemeinsam haben. Klein zeigt, dass beide Kurven sich hinreichend weit draußen wie die Kurven verhalten, die durch die – hier in Polarkoordinaten angegeben – Gleichungen $r^n \cos n\varphi = 0$ und $r^n \sin n\varphi = 0$ (vgl. Abb. 3.3, links, für $n = 3$) gegeben sind. Die Äste von u und v müssen, egal wie sie innerhalb eines Kreises mit hinreichend großem Radius verbunden sind (In Abb. 3.3 sind für $n = 3$ zwei Möglichkeiten abgebildet), im Unendlichen alternieren und „daraus ist anschaulich klar, dass sie sich [hinreichend weit draußen] mindestens einmal überkreuzen müssen“ (Klein EvhS 1, S. 111). Damit ist der Satz bewiesen: Hat man eine Nullstelle gefunden, lässt sich ein Linearfaktor abspalten und man wiederholt das Vorgehen sukzessive mit dem verbleibenden Polynom.

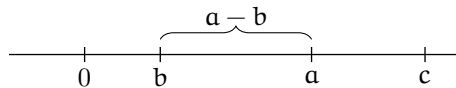
Klein stellt nur die Grundgedanken des Gaußschen Beweises vor, betont dabei aber, dass er eine „anschaulich eingekleidete“ (Klein EvhS 1, S. 110) Präsentation verwendet, die nicht der ursprünglichen, von Gauß gewählten Darstellung entspricht. Nichtsdestotrotz nutzt der vorgestellte Beweis auch in seiner ursprünglichen Version – wie im Übrigen auch andere Beweise dieses Satzes – zum einen die geometrische Deutung der komplexen Zahlen in der x - y -Ebene (vgl. Klein EvhS 1, S. 110). Somit wird Anschauung hier zu einer zentralen Beweismethode, die den Beweis entscheidend beeinflusst und nicht alleine dazu dient, die Beweisidee im Nachhinein zu erklären. Dabei ist zu bedenken, dass die dem Beweis zugrundeliegende Idee, die Kurven müssen sich auf der Zahlenebene an irgendeiner Stelle treffen,

zwar anschaulich überzeugend, mathematisch jedoch nur mit Hilfe anspruchsvoller funktionentheoretischer Mitteln zu begründen ist.

Welche Beweiskraft in der Anschauung liegt, zeigen zwei Beweise, die Klein genau aus diesem Grund hervorhebt. Es zeigt sich, dass eine geometrische Einkleidung sogar in der Lage ist, einen vollständigen Beweis zu liefern:

„ich gehe aber gern wenigstens an 2 Beispielen noch etwas näher auf sie [Klammerregeln] ein, um vor allem die Möglichkeit äußerst *einfacher anschauungsmäßiger Beweise* für sie darzutun – Beweise die eigentlich nur aus der Abbildung und dem Wörtchen ‚Siehe!‘ zu bestehen brauchten [...]“ (Klein EvhS 1, S. 28)

Als Erstes soll für positive a , b und c mit $c > a > b$ gezeigt werden, dass $c - (a - b) = c - a + b$ gilt. Klein deutet a , b und c als Streckenlängen und stellt als Beweis folgendes Bild zur Verfügung:



Aus dem Bild lässt sich sofort ablesen, dass es egal ist, ob man von der Gesamtstrecke c die Teilstrecke $a - b$ abzieht oder zunächst die Strecke a als Ganzes entfernt und anschließend die Strecke b wieder hinzunimmt. (vgl. Klein EvhS 1, S. 28)

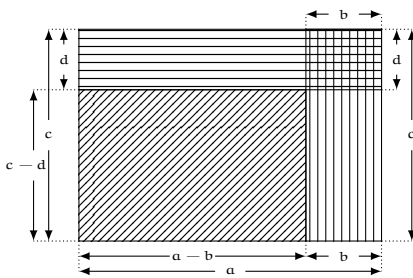


Abb. 3.4: (Klein EvhS 1, S. 28)

Das Prinzip *Beweis durch Anschauung* wendet Klein auch für die Gleichung

$$(a - b)(c - d) = ac - ad - bc + bd$$

an, indem er die positiv belegten Variablen a , b , c und d erneut als Streckenlängen auffasst. Der Beweis beruht dann für den Fall $a > b$ und $c > d$ auf einem Flächenvergleich.⁶ Er interpretiert das Produkt $(a - b) \cdot (c - d)$ als den Inhalt der Fläche des Rechtecks mit den Seitenlängen $a - b$ und $c - d$ (vgl. Abb. 3.4). Dieses

Rechteck kann aus dem großen Rechteck mit Inhalt $a \cdot c$ gewonnen werden, indem man das horizontal straffierte Rechteck mit den Seitenlängen a und d sowie das

⁶Diese Voraussetzungen sind für die Gültigkeit der Gleichung natürlich nicht notwendig, für den geometrischen Beweis jedoch unerlässlich, da sowohl a , b , c und d , als auch $a - b$ und $c - d$ als Streckenlängen gedeutet werden und daher positiv sein müssen. Klein thematisiert diese Tatsache im Anschluss in Zusammenhang mit dem Permanenzprinzip. (Vgl. hierzu auch die Erörterungen in Kap. 5)

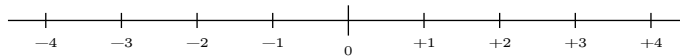
vertikal straffierte Rechteck mit den Seitenlängen b und c entfernt. Damit hat man jedoch das kleine Rechteck mit Inhalt $b \cdot d$ doppelt entfernt und muss es nachträglich wieder hinzufügen. (Vgl. Klein EvhS 1, S. 28)

3.3 Begriffsbildung und Anschauung

Das Beispiel von Newtons Definition der Ableitung (vgl. Kapitel 3) hat bereits gezeigt, wie Anschauung in die Begriffsbildung einfließen und auch zur Namensgebung beitragen kann. Auch der Begriff der irrationalen Zahlen hat, wie Klein betont, seinen Ursprung „in der geometrischen Anschauung und dem geometrischen Bedürfnis“ (Klein EvhS 1, S. 34).

Klein legt andererseits in seiner Vorlesung viel Wert darauf, Begriffe, die er einführt, mit einer bestimmten Anschauung zu verknüpfen oder, wie beispielsweise bei den negativen Zahlen, verschiedene anschauliche Deutungen auch nur in Erinnerung zu rufen.

„Damit verknüpft sich von Anfang an die Deutung aller ganzen Zahlen durch die *Skala*



der äquidistanten Punkte einer vom Nullpunkt aus nach beiden Seiten ausgehenden Geraden, der ‚Abszissenachse‘. Dieses Bild darf man heute als Gemeingut aller Gebildeten betrachten, und man kann wohl annehmen, daß es seine Verbreitung hauptsächlich der allbekanntesten Thermometerskala dankt.“ (Klein EvhS 1, S. 25)

Dieser geometrisch orientierten Anschauung setzt er eine arithmetische Anschauung entgegen – das Bild der negativen Zahlen als „*kaufmännische Bilanz* mit ihrem Rechnen in Besitz und Schulden“ (Klein EvhS 1, S. 25).

Auch die komplexen Zahlen werden mit einer, in diesem Fall rein geometrischen, Anschauung verbunden; die Zahlen werden als Punkte der sogenannten Gaußschen Zahlenebene dargestellt. Mit dieser geometrischen Deutung lassen sich nicht nur die komplexen Zahlen selbst, sondern auch die dazugehörigen Operationen in einen geometrischen Kontext stellen; die Addition lässt sich als Parallelverschiebung in der Ebene, die Multiplikation durch Drehung und Streckung bei festem Nullpunkt deuten (vgl. Klein EvhS 1, S. 63). Klein legt großen Wert auf diese Art der anschaulichen Deutung. So widmet er der geometrischen Interpretation der Quaternionenmultiplikation eines der wenigen Kapitel, in denen er seine Ausführungen

konkret ausarbeitet.⁷ Es zeigt sich, dass die Quaternionenmultiplikation die „allgemeinste Drehstreckung des vierdimensionalen Raumes“ (Klein EvhS 1, S. 73) darstellt. Diese Anschauung macht plausibel, dass die Kommutativität nicht gilt, da bei zwei Drehungen im Raum die Reihenfolge, in der sie ausgeführt werden, im Allgemeinen das Ergebnis beeinflusst.

In den hier beschriebenen Beispielen spielt Anschauung eine Rolle bei der Entstehung von Begriffen oder verknüpft umgekehrt nachträglich Begriffe mit einer in der Regel geometrischen Vorstellung. Das folgende Beispiel zeigt einen alternativen Umgang mit Anschauung in Zusammenhang mit mathematischen Begriffen:

„Lassen Sie uns einmal an der Hand des bekannten Bildes der Logarithmenkurve $y = \log x$ [...] überlegen, daß diese Festsetzung und ihre Zweckmäßigkeit durchaus nichts selbstverständliches sind.“ (Klein EvhS 1, S. 156)

Klein bezieht sich hier auf die Definition der Potenz- und Logarithmusfunktionen mit den zugrunde liegenden Gleichungen $x = b^y$ und $y = \log_b x$. Stetige Funktionen lassen sich nur für $b > 0$ durch diese Gleichungen beschreiben, würde doch x ansonsten für ganzzahlige y -Werte alternierend positive und negative, für rationale y -Werte teilweise sogar imaginäre Werte annehmen. Insbesondere gilt für rationale $y = \frac{m}{n}$ der Zusammenhang $x = b^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{b^m}$, so dass für gerade n je zwei reelle x diese Gleichung erfüllen.⁸ Damit durch $y = \log_b x$ eine Funktion beschrieben werden kann, entscheidet man sich für den „Hauptwert“⁹, das entspricht bei reellen Zahlen gerade dem positiven Wurzelwert (vgl. Klein EvhS 1, S. 156).

Diese letzte Festlegung hinterfragt Klein nun, wobei er stark anschaulich argumentiert und seine Überlegungen anhand des Funktionsgraphen der Logarithmusfunktion verdeutlicht.

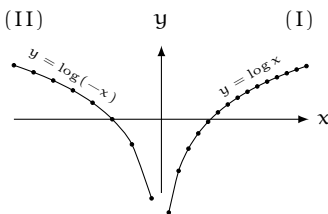


Abb. 3.5: (Klein EvhS 1, S. 156)

Abbildung 3.5 stellt zwei Punktmenge dar. Punktmenge (I) repräsentiert die Punktmenge der (x, y) , mit rationalem y und $x = b^y$; (II) sei die Menge, die bei Berücksichtigung aller rationalen Zahlen mit geradem Nenner, die entsprechenden negativen Werte enthält. Diese Punkte liegen „man möchte sagen ‚halb so dicht‘, aber immer noch ‚überall dicht‘“ (Klein EvhS 1, S. 156) auf dem Spiegelbild der

⁷Dieses Kapitel ist auch ein Beispiel der innermathematischen Vernetzung, indem Klein für seine Ausführungen die Vektorenrechnung mit in den Blick nimmt.

⁸Im Komplexen existieren sogar n Lösungen.

⁹Gemeint ist in heutiger Sprechweise der Hauptzweig.

Logarithmenkurve. Beide Punktmengen rechts und links der y -Achse, lassen sich mit bloßem Auge nicht von der durchgezogenen Linie unterscheiden.

„Es ist nun durchaus nicht ohne weiteres zu begreifen, warum, wenn man sämtliche reellen, auch irrationalen Werte y zuläßt, sich gerade die Hauptwerte rechts zu einer kontinuierlichen, durchaus regulär verlaufenden Kurve ergänzen lassen und ob oder warum nicht auch die negativen links markierten Werte eine ähnliche Vervollständigung gestatten.“ (Klein EvhS 1, S. 156)

Es geht Klein auch hier um eine tiefere Einsicht in die Struktur eines Begriffes. Im Gegensatz zu den ersten Beispielen, wird an dieser Stelle Anschauung genutzt, um einen Begriff zu hinterfragen und zu problematisieren. Anschaulich sind die getroffenen Festlegungen für $y = \log_b x$ scheinbar willkürlich. Erst funktionentheoretische Untersuchungen – außerhalb des Schulstoffs – motivieren diese Festlegung (vgl. Klein EvhS 1, S. 156).

3.4 Die Bedeutung der Raumanschauung

In welcher Weise das letzte Beispiel auf Anschauung aufbaut, ist nicht ohne Weiteres ersichtlich. Sie beruht nicht alleine auf der Verwendung eines Bildes (vgl. Abb. 3.5), sondern hängt stark mit der Diskussion und mentalen Repräsentation der betrachteten Punktmengen zusammen. Anders als bei den anderen vorgestellten geometrischen Beispielen lassen sich diese Punktmengen nicht für das menschliche Auge sichtbar von der auf ganz \mathbb{R} vervollständigten Kurve unterscheiden. Um zu verstehen, wie sich diese Betrachtungen in den Bereich der Anschauung einordnen lassen, ist es notwendig sich mit dem Begriff der *Raumanschauung* zu beschäftigen, der in der *Elementarmathematik vom höheren Standpunkt* einen hohen Stellenwert hat: „Vor allem wird *starke Ausbildung der Raumanschauung* stets eine Hauptsache bleiben müssen.“ (Klein EvhS 1, S. 5)

Klein unterscheidet zwei Arten der Raumanschauung:

„die sinnlich unmittelbare, die empirische Anschauung des Raumes, die wir durch Messen kontrollieren können, dann aber die davon verschiedene idealisierende innere Raumanschauung, [...] die uns innewohnende Idee des Raumes.“ (Klein EvhS 1, S. 38)¹⁰

¹⁰Mit dieser Unterteilung verwendet Klein die Kantschen Termini (vgl. etwa Volkert 1986). Auch wenn er an dieser Stelle Kant nicht zitiert, kann davon ausgegangen werden, dass er Kants Auffassung von Anschauung kennt: Er stellt im Kapitel zur Grundlegung Kants auf Anschauung begründet Rechtfertigung der elementaren Rechengesetze vor.

Der Mensch kann, auch mit den stärksten Mikroskopen, Gegenstände, in Millimetern gemessen, nur auf drei Dezimalstellen genau erkennen: Die Wellenlänge des Lichtes ist von der Größenordnung $\frac{1}{1000}$ mm, und damit lassen sich Gegenstände einer kleineren Dimension auf Grund der Beugung des Lichts nicht mehr scharf erkennen (vgl. Klein EvhS 1, S. 38f). Diese Einschränkung gibt es bei der *inneren Raumschauung* nicht; sie ist von theoretischer Natur.

Im oben beschriebenen Beispiel werden beide Arten der Raumschauung bemüht. Wir betrachten die diskrete Punktmenge (I), die auf der Festlegung beruht, dass jedem rationalen y die „Hauptwerte“ von x zugeordnet werden. Ziel ist es diese rationale Folge auf \mathbb{R}^+ fortzusetzen, so dass eine stetige Kurve entsteht. Diese Unterscheidung zwischen einer dichten, abzählbaren Folge von Punkten und einer durchgezogenen Linie beruht ausschließlich auf der inneren Anschauung, mit ihrer „unbegrenzten Genauigkeit“ (Klein EvhS 1, S. 39), die wir optisch gar nicht feststellen können. Umgekehrt gibt aber gerade die in der *experimentellen Anschauung* liegende Tatsache, dass für unser Auge sowohl die Punktmenge (I) als auch (II) bereits als stetige Kurven wahrgenommen werden, Anlass zu der Frage, ob die Festlegung auf die positiven Wurzelwerte willkürlich ist.

Zusammenfassung und Bilanz

Die Anschauung hat in Kleins Vorlesungsreihe einen hohen Stellenwert. Mathematische *Sachverhalte* sollen anschaulich erfasst werden. Es geht dabei aber nicht ausschließlich darum das Problem zu verstehen, vielmehr lassen sich daraus zum Teil *Beweisideen* entwickeln oder sogar rein auf Anschauung *basierte Beweise* führen. Nicht zuletzt kann Anschauung auch zur *Begriffsbildung* und zum *Begriffsverständnis* einen Beitrag leisten. Die Beispiele dieses Abschnitts zeigen, dass Klein all diese Facetten in seiner Vorlesung beleuchtet, auch wenn dadurch gegebenenfalls andere Aspekte nicht diskutiert werden können – wie beispielsweise im Vorlesungsabschnitt zur Algebra:

„Wenn ich mich nun zum engeren Thema wende, so bemerke ich vorab, daß ich im Rahmen dieser Vorlesung natürlich *keine systematische Darstellung der Algebra* geben kann; ich kann vielmehr *nur einen einseitigen Ausschnitt* geben, und da ist es das Zweckmäßigste, wenn ich solche Dinge hervorhebe, die anderswo unbillig vernachlässigt werden[.]“ (Klein EvhS 1, S. 93)

Klein bezweckt mit seiner Vorlesung einen Ausgleich zu den Vorlesungen zu schaffen, in denen die Anschauung „unbillig vernachlässigt“ (Klein EvhS 1, S. 93) wird. Ein Lehrer soll das Interesse der Schüler zu wecken; „das wird ihm nur gelingen, wenn er Dinge in *anschaulich faßbarer Form* darbietet“ (Klein EvhS 1, S. 4). Klein integriert damit die Forderung nach einem anschauungsorientierten Unterricht aus

der Meraner Reform *professionsbezogen* in sein Vorlesungskonzept (vgl. Kapitel 1.2.3). Die Anschauung liefert Klein zudem ein Mittel „den Schulunterricht in besondere Beleuchtung zu setzen“ (Klein EvhS 1, S. 93) und trägt damit also auch zu einem *erweiterten Standpunkt auf die Schulmathematik* bei. Ein Beispiel dafür ist die Logarithmusfunktion, deren Definition und die damit verbundenen Festlegungen durch die anschauliche Deutung hinterfragt werden (siehe Kapitel 3.3). Die Anschauung liefert hier einen Reflexionsanlass und führt zu höheren Betrachtungen und Untersuchungen. Schließlich nutzt Klein Anschauung als *Werkzeug der Elementarisierung*. Durch eine anschauliche Darstellung erhält auch höhere Mathematik ein „ganz elementares, leicht faßliches Aussehen“ (Klein EvhS 1, S. 241), beispielsweise bei der Behandlung des Taylorschen Lehrsatzes (vgl. Kapitel 3.1). Damit trägt das *Prinzip der Veranschaulichung* in besonderer Weise zur Vorbereitung auf den Schuldienst und zur Entwicklung eines höheren Standpunkts auf Elementarmathematik bei.

Kapitel 4

Das Prinzip der Anwendungsorientierung

Die Unterscheidung der beiden Arten der Raumschauung ist für Klein eng damit verknüpft, die Mathematik in eine *Präzisions-* und eine *Approximationsmathematik* aufgeteilt zu verstehen. Dieser Klassifizierung widmet sich Klein genauer im dritten Band der Vorlesungsreihe (vgl. Klein EvhS 3). Er erkennt Anspruch und Notwendigkeit beider Arten von Mathematik an. Jedoch lässt sich durchaus eine Hierarchie ausmachen:

„Da in den Anwendungen nur die Approximationsmathematik eine Rolle spielt, kann man, etwas kraß ausgedrückt, auch sagen, daß man eigentlich nur diese Disziplin ‚braucht‘, während Präzisionsmathematik bloß zum intellektuellen Vergnügen derer, die sich mit ihr beschäftigen, da ist und im übrigen für die Entwicklung der Approximationsmathematik eine wertvolle und wohl kaum entbehrliche Stütze abgibt.“ (Klein EvhS 1, S. 39)

In diesem Zitat kann man das bereits in Kapitel 1.2 angesprochene Gewicht, das Klein auf die angewandte Mathematik und die lebensnahen Anwendungen legt, erkennen. So verwundert es nicht, dass er in der Einleitung seiner Vorlesungsreihe ganz explizit fordert, dass Mathematik im Unterricht stets mit ihren Anwendungen und alltäglichen Dingen in Verbindung gebracht werden soll, insbesondere auch an der Universität:

„[M]an sollte im ganzen Unterricht, auch auf der Hochschule, die Mathematik stets verknüpft halten mit allem, was den Menschen gemäß seinem sonstigen Interesse auf seiner jeweiligen Entwicklungsstufe bewegt und was nur irgend in Beziehung zur Mathematik sich bringen läßt.“ (Klein EvhS 1, S. 4)

Dies ist eine von zahlreichen Zwischenbemerkungen, die sich in Einklang mit Vorträgen bringen lassen, in denen er sich für eine Stärkung der angewandten Mathematik, insbesondere an den Universitäten, ausspricht (vgl. etwa Klein 1899, 1902). Kleins Haltung, gegenüber den Anwendungen sowohl in der Forschung als auch

im Schul- und Universitätsunterricht, spiegelt sich im Buch in programmatischen Einwüfen dieser Art wider.

Für Klein stehen, neben dem Ziel der „Einsicht in die Bedeutung des mathematischen Denkens für die Naturerkenntnis und die moderne Kultur überhaupt“ (Klein EvhS 1, S. 18) zwei Charakteristika der Anwendungen im Vordergrund: die Lebendigkeit und der Bezug zum Alltag, die entscheidend für den Unterricht an Schulen sind, weil sie insbesondere als Motivation dienen:

„Aber das Lebendige der Mathematik, die wichtigsten Anregungen, ihre Wirksamkeit nach außen, hin beruhen durchaus auf den *Anwendungen*, d.h. auf den Wechselbeziehungen jener logischen Dinge zu allen anderen Gebieten. Die Anwendungen aus der Mathematik zu verbannen wäre also ebenso, als wolle man das Wesen des lebenden Tieres im Knochengerüst allein finden, ohne Muskeln, Nerven und Gefäße, Triebe, überhaupt das Leben des Tieres zu betrachten.“ (Klein EvhS 1, S. 17)

Genau dieses Lebendige soll der Schüler in der Schule mitnehmen, er soll beispielsweise nicht nur die Rechenregeln beherrschen, sondern sie tatsächlich zur Anwendung bringen können. Somit ist es, so Klein, unerlässlich, dass der zukünftige Lehrer sich mit der angewandten Mathematik auseinandergesetzt hat und diese in Verbindung mit dem Schulstoff bringen kann (vgl. Klein EvhS 1, S. 17), sie daher eine wichtige Rolle in der *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus* spielen muss.

Bei der Analyse typischer Beispiele fällt auf, dass das Prinzip der Anwendungsorientierung nicht losgelöst von den beiden zuvor besprochenen Prinzipien betrachtet werden kann; vielmehr kann es zum einen als *Mittel der Veranschaulichung*, zum anderen als *Teil oder Erweiterung des Vernetzungsgedanken* verstanden werden.

4.1 Anwendungsorientierung als Mittel der Veranschaulichung

Im Abschnitt zum *Prinzip der Veranschaulichung* wurden neben Beispielen geometrischer Anschauung und graphischer Darstellung auch bereits solche Beispiele vorgestellt, die Anschauung aus alltäglichen, außermathematischen Vergleichen ziehen. Von diesen stellen einige einen Bezug zu angrenzenden Wissenschaften her und liefern damit nicht nur einen unmittelbaren Vergleich (wie beispielsweise die Metapher des chinesischen Billards in Kapitel 3.1), sondern zeigen mögliche Anwendungsgebiete auf.

Im Bereich der Zahlbereichserweiterung stellt Klein diesen Zusammenhang systematisch her. Die natürlichen Zahlen werden mit Anzahlen „geläufiger Gegenstände“ (Klein EvhS 1, S. 7) in Verbindung gebracht (Kardinalzahlaspekt). Die ganzen Zahlen veranschaulicht Klein durch eine kaufmännische Deutung: Gut-haben wird als positive Zahl, Schulden als negative Zahl dargestellt (vgl. Klein EvhS 1, S. 25). Der Übergang von ganzen zu rationalen Zahlen, zeichnet sich durch einen „Wechsel des Substrats“ (Klein EvhS 1, S. 31) aus; statt gezählt wird fortan gemessen. Beispiele für Anwendungen sind die Systeme der Gewichte und der Längen, die in der Physik beheimatet sind. Dass diese Anwendungsorientierung nicht die irrationalen Zahlen einschließt, ist verständlich, lassen sich diese schließlich nicht exakt messen. Sie stellen einen Gegenstand der „inneren Raumanschauung“ dar und gehören somit nicht unmittelbar zu den Anwendungen (vgl. Kapitel 3.4).

Im Bereich der Analysis zeigt sich diese „anwendungsorientierte Anschauung“ viel präziser, da sie nicht ganz so selbstverständlich mit Allgemeinwissen in Verbindung gebracht werden kann:

„Betrachten wir zunächst den Integralbegriff, so ist zu bemerken, daß er historisch mit dem Problem der Ausmessung von Flächen- und Körperinhalten (Quadratur und Kubatur) beginnt.“ (Klein EvhS 1, S. 224)

Die Berechnung des Integrals $\int_a^b f(x)dx$, verstanden als Flächeninhalt, der vom (positiven) Funktionsgraphen, der x -Achse zwischen $x = a$ und $x = b$ eingeschlossen wird, wird idealisiert als unendliche Summe von „unendlich kleinen“ Rechtecksinhalten aufgefasst, die die Fläche ausfüllen.

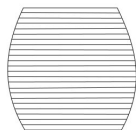


Abb. 4.1: (Klein EvhS 1, S. 225)

Diese Vorgehensweise findet man auch bei Kepler (siehe Abb. 4.1), der den Inhalt eines Fasses durch das Aufsummieren vieler zylinderförmiger, „unendlich dünner“ Scheiben bestimmt. (Vgl. Klein EvhS 1, S. 224f) Der klassische Integralbegriff beruht auf eben dieser Vorstellung. Mit einer ähnlich naiven Anschauung kann man auch die Tangente an eine Funktion, verstehen, indem man sich einen Polygonzug von Punkten vorstellt, bei dem die Punkte so dicht beieinander liegen, dass man ihn nicht vom Funktionsgraphen unterscheiden kann. Die Tangente wird dann durch die „Verbindungsline zweier aufeinander folgender solcher Punkte“ beschrieben. Solche Betrachtungsweisen nutzt man mit Erfolg in der mathematischen Physik und der Mechanik, wie Klein betont (Klein EvhS 1, S. 227).

4.2 Fortschreibung des Vernetzungsgedankens

Bei der Vorstellung des Vernetzungsgedankens in Kapitel 2 wurde bereits erwähnt, dass es nach Kleins Auffassung für einen Lehrer unerlässlich ist, sowohl reine als auch angewandte Mathematik zu kennen und diese verknüpfen zu können (vgl. Kapitel 2). Das bedeutet insbesondere, dass die angewandte Mathematik mit der Schulmathematik in Verbindung gebracht werden muss. In diesem Sinne kann Anwendungsorientierung die innermathematische Vernetzung unterstützen. Darüber hinaus lässt sich der Vernetzungsgedanke auf weitere Fächer ausweiten. Insbesondere bietet sich dazu die Physik, vor allem die Mechanik an, die, wie im letzten Abschnitt beschrieben wurde, einerseits die Mathematik als Hilfsmittel nutzen und umgekehrt gerade in der mathematischen Begriffsentwicklung Anregungen liefern können.

Der Abschnitt *Die Lehre der kleinen Schwingungen, insbesondere Pendelschwingungen* (vgl. Klein EvhS 1, S. 201-205) ist einer der wenigen Stellen, bei denen Klein ganz explizit – losgelöst von Metabemerkungen – die Verbindung zwischen Mathematik und Anwendung beschreibt. Er ordnet in diesem Abschnitt einen Teil des physikalischen Schulcurriculums in die Theorie der goniometrischen Funktionen ein.

In Anlehnung an die Grundlagen der Trigonometrie, die Klein im Vorfeld bereitstellt, wird eine kurze mathematische Analyse der kleinen Schwingen vorgelegt. Diese, wie Klein sagt, durchaus anschauliche Darstellung beruht einzig auf der Grundgleichung der Mechanik ($F = m \cdot a$) und wendet die Differentialeigenschaften der Trigonometrischen Funktionen an (vgl. Klein EvhS 1, S. 201f). Dem setzt Klein das Vorgehen in der Schule entgegen:

„Ganz anders aber als bei diesen einfachen klaren Betrachtungen, die sich bei näherem Eingehen auf die Sache natürlich auch durchaus anschaulich gestalten lassen, sieht eine verbreitete Behandlung des Pendelgesetzes im Schulunterricht aus, die man die ‚elementare‘ nennt.“ (Klein EvhS 1, S. 202)

Statt die mathematischen Hintergründe dieses physikalischen Gesetzes zu beleuchten, würden, so Klein weiter, „ad hoc erfundene Verfahren“ an den Schüler herangebracht, die das Verstehen nicht fördern, da sie lückenhaft seien und die enthaltene Mathematik verschleiern. Dadurch entstehe eine bedauerliche Diskrepanz zwischen dem Mathematikunterricht, der „an die logische Exaktheit der Schlüsse die höchsten Anforderungen stellt“, und dem Physikunterricht, der „zu den anfechtbarsten Schlüssen, der kühnsten Verwendung des Unendlichkleinen greift“. (Vgl. Klein EvhS 1, S. 202)¹

¹Mit Anführungszeichen hervorgehobene Stellen sind aus der Quelle wörtlich entnommen.

Es gibt noch eine weitere Stelle, in der Klein konkret *verborgene Mathematik aufdeckt*, um dadurch Mathematik und ihre Anwendung explizit zu verknüpfen. Im Gegensatz zu dem eben beschriebenen Thema fungiert dort die Mathematik nicht als Hilfsmittel der Anwendung. Stattdessen zeigt Klein, wie bspw. die Mechanik zu einem Hilfsmittel der (angewandten) Mathematik wird, indem er Funktionsweise einer Rechenmaschine und deren Bedeutung führt.² Ziel dieses Exkurses ist es, den Mechanismus zu erklären und damit zu zeigen, wie mathematische Operationen technisch umgesetzt werden können. Dabei ist es notwendig zu verstehen, in welcher Weise die mathematischen Operationen umgesetzt werden – so wird die Multiplikation beispielsweise für die technische Umsetzung als fortgesetzte Addition aufgefasst (vgl. Klein EvhS 1, S. 19f). Damit einher geht die Frage nach dem „Wert des mathematischen Denkens“ (Klein EvhS 1, S. 24). Kann eine Rechenmaschine den Mathematiker ersetzen? Klein verneint dies, behandelt dies aber nicht intensiv.

Zusammenfassung und Bilanz

Mit dem Prinzip der Anwendungsorientierung will Klein zum einen erreichen, dass sich der zukünftige Lehrer seiner Aufgabe, Anwendungen in den Schulunterricht zu integrieren, bewusst ist. Zum anderen soll eine Lücke des Universitätsunterrichts geschlossen werden, da Anwendungen dort generell zu wenig Aufmerksamkeit bekommen, wie Klein in einer Rede über *Aufgabe und Methode des mathematischen Unterrichts an den Universitäten* kritisiert:

„Dann sage ich trotzdem, wie ich es schon oft that, dafs es mit dem abstracten mathematischen Universitätsunterricht nicht gethan ist, dafs wir unseren Zuhörern daneben Gelegenheit geben müssen, sehr viel mehr als es z. Z. im Durchschnitte geschieht, von den Anwendungen der Mathematik Kenntnis zu nehmen.“ (Klein 1899, S. 131)

Anders als bei den zuvor besprochenen Prinzipien, die in der Vorlesungskonzeption sowohl normativ als auch konstruktiv auftreten, findet man bezüglich der Anwendungsorientierung hauptsächlich kurze Randbemerkungen und Verweise. Es existieren nur wenige Stellen, in denen das Prinzip konkret als Hauptgedanke thematisiert wird. Insbesondere fällt auf, dass Klein im algebraischen Teil beim Lösen von Gleichungen überhaupt keinen Bezug zur angewandten Mathematik oder zu Anwendungen in den Naturwissenschaften oder der Mechanik herstellt. Erst später im Kapitel zur Analysis geht er in einem *Exkurs über den allgemeinen Funktionsbegriff* für eine spezielle Klasse von Gleichungen – die durch Integration zu lösenden

²Diese Maschine wurde insbesondere auch als Anschauungsmaterial bereitgestellt (vgl. Klein EvhS 1, S. 19)

partiellen Differentialgleichungen – auf mögliche Anwendungen ein. Diese Gleichungen sind charakteristisch für Randwertprobleme, die in der Physik und den Ingenieurwissenschaften eine große Rolle spielen. So bezieht sich Klein beispielsweise auf das von Fourier behandelte *Problem der Wärmeleitung* aus der Physik (vgl. Klein EvhS 1, S. 217).

Die Anwendungsorientierung lässt sich also zwar als der Vorlesung innewohnende Idee ausmachen; sie hat jedoch nicht das explizite Gewicht wie die *innermathematischen Vernetzung* und das *Prinzip der Veranschaulichung*, zumal sich die auftretenden Beispiele in den meisten Fällen als Unterstützung oder Erweiterung der beiden zuvor beschriebenen Prinzipien auffassen lassen.

Kapitel 5

Das genetische Prinzip

Für Klein ist eine genetische Darstellung der Unterrichtsinhalte eine Selbstverständlichkeit, die sich nicht nur auf die hier untersuchte Vorlesung bezieht, sondern auf (Mathematik-)Unterricht im Allgemeinen. So stellt Gert Schubring in seiner Dissertation über *das genetische Prinzip in der Mathematikdidaktik* fest, dass es für Klein so selbstverständlich sei, „daß er nie genauere Ausführungen über sein Verständnis vom genetischen Prinzip gemacht hat“ (Schubring 1978, S. 142). Klein verwendet, so Schubring weiter, unterschiedliche Auffassungen des genetischen Prinzips, ohne eine systematische Klärung des Begriffs in Angriff zu nehmen, und beschränkt sich auf eine pragmatische Verwendung des Begriffs (vgl. Schubring 1978, S. 143):

„Aber auch höher hinaus verfährt der Lehrer immer genetisch oder noch genauer gesagt: heuristisch, d.h. er läßt die Knaben das Neue durch geschickte entwickelnde Fragen nach Möglichkeit selber finden.“ (Klein und Schimmack 1907, S. 24)

Die Notwendigkeit des genetischen Prinzips begründet Klein mit Hilfe des *biogenetischen Grundgesetzes* nach Ernst Haeckel, wonach der einzelne Mensch in seiner Entwicklung diejenigen Stufen durchlaufen muss, welche die gesamte Menschheit im Lauf der Geschichte zurückgelegt hat. Unterricht solle, so Klein, diesem Gesetz folgend, „*langsam auf demselben Wege zu höheren Dingen und schließlich auch zu abstrakten Formulierungen führen, auf dem sich die ganze Menschheit aus ihrem naiven Urzustand zu höherer Erkenntnis emporgerungen hat*“ (Klein EvhS 1, S. 289).¹

Mit diesem Prinzip charakterisiert Klein in erster Linie die damalig gängige Vorgehensweise des schulischen Mathematikunterricht in Abgrenzung zu der Praxis des universitären Unterrichts:

¹Zur Kritik an der Übertragung des biogenetischen Grundgesetzes auf den Mathematikunterricht so wie eine Einordnung in die Entwicklungsgeschichte der genetischen Methode als didaktisches Prinzip, vgl. S. 78.

„[...] anschaulich und genetisch, d.h., das ganze Lehrgebäude wird auf Grund bekannter anschaulicher Dinge ganz allmählich von unten aufgebaut; hierin liegt ein scharf ausgeprägter Gegensatz gegen den meist auf der Hochschule üblichen logischen und systematischen Unterrichtsbetrieb.“ (Klein EvhS 1, S. 6)

Dieser Unterschied ist mitverantwortlich für die doppelte Diskontinuität, die zwischen schulischem und universitärem Mathematikunterricht herrscht. Zur Überwindung dieser Diskontinuität ist es nötig, den Unterricht auch methodisch anzupassen (siehe 1.4.2). Das schließt im Speziellen eine genetische Vorgehensweise in der *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte* ein. Es geht Klein aber nicht vorrangig um eine Angleichung der Methoden, etwa in Form eines Kompromisses. Vielmehr befürwortet er das genetische Prinzip auch für die direkten Ziele des Hochschulunterrichts.

„Wissenschaftlich unterrichten kann nur heißen, den Menschen dahin bringen, dass er wissenschaftlich denkt, keineswegs aber ihm von Anfang an mit einer kalten, wissenschaftlich aufgeputzten Systematik ins Gesicht zu springen.“ (Klein EvhS 1, S. 289)

Ziel dieses Abschnitts ist keine systematische Darstellung der Kleinschen genetischen Methode. Stattdessen soll anhand dreier charakteristischer Merkmale gezeigt werden, wie Klein in diesem Band der *Elementarmathematik* seine Vorstellung von genetischem und zugleich wissenschaftlichem Unterricht umsetzt.

5.1 Induktives Vorgehen – vom Speziellen zum Allgemeinen

„Der *Forscher* selbst jedoch arbeitet in der Mathematik wie in jeder Wissenschaft durchaus nicht in dieser streng deduktiven Weise, sondern er *benutzt wesentlich seine Phantasie und geht induktiv, auf heuristische Hilfsmittel gestützt, vor.*“ (Klein EvhS 1, S. 224)

Diese Arbeitsweise soll im genetischen Unterricht fortgeführt werden. An den Stellen, an denen Klein konkret eine Fragestellung behandelt, anstatt Themen nur kurz anzureißen, bemüht er sich, dieses heuristisch geprägte induktive Vorgehen bewusst widerzuspiegeln. Die Einführung im Kapitel zum Taylorschen Lehrsatz wurde bereits unter der Frage nach ihrem Wert für die Anschauung untersucht (vgl. Kapitel 3). Sie ist ebenso ein Beleg für heuristisches Arbeiten; an konkreten Funktionen wird gezeigt, inwiefern das Taylorpolynom als „Näherungsparabel“ (Klein EvhS 1, S. 241) aufgefasst werden kann.

Der gesamte algebraische Teil ist gewissermaßen der Inbegriff induktiven Vorgehens. Klein beginnt mit einer einfachen Art von Gleichung, mit reellen Lösungen und nur einem Parameter: $f(x, \lambda) = 0$. Langsam erhöht er die Komplexität und Allgemeinheit der untersuchten Gleichungen. Zusätzlich zeigt sich lokal immer wieder der heuristische Ansatz. So auch im zweiten Teil des Kapitels, in dem Klein seine Untersuchungsfrage umdreht. Statt eine Lösung zu einer vorgegebenen Gleichung zu bestimmen, wird bei vorgegebener Lösung eine zugehörige algebraische Gleichung aufgestellt. Dafür wird bewusst auf eine formale Deduktion verzichtet:

„Man könnte die Existenz dieser Gleichung aus allgemeinen funktionentheoretischen Theoremen leicht a priori deduzieren; ich will jedoch hier die Kenntnisse, welche dieser Beweisgang erfordert, nicht voraussetzen und ihm einen mehr empirischen Aufbau der einzelnen Gleichungen vorziehen.“ (Klein EvhS 1, S. 135)

5.2 Nachvollziehen der Entstehungsgeschichte

Dem „geschichtlichen Werdegang“ (Klein EvhS 1, S. 16) folgend, enthält die Vorlesung historisch orientierte Passagen. Neben kleinen Anekdoten und Bemerkungen, in denen Klein etwa eine Fragestellung motiviert oder eine Erklärung für die Entstehung spezieller Begriffe liefert,

(„Zur Entstehung der negativen Zahlen gibt bekanntlich die Forderung Anlaß, die Subtraktion zu einer in allen Fällen ausführbaren Operation zu machen.“ (Klein EvhS 1, S. 25))

finden sich auch wiederholt ausführliche Exkurse, die in ein Thema einführen oder weitere Einblicke ermöglichen. Ein Beispiel dafür ist die Behandlung der irrationalen Zahlen:

„Wir wollen uns hier nicht erst mit der Frage aufhalten, wie dieses Gebiet auf der Schule gewöhnlich behandelt wird, denn über einige Beispiele kommt man da meist nicht weit hinaus; wir gehen besser sogleich auf die geschichtliche Entwicklung ein.“ (Klein EvhS 1, S. 34)

Klein beschränkt sich bei diesem Kapitel auf eine Darstellung der historischen Entwicklung, wobei er auch in dieser Darstellung den Vernetzungsgedanken, mögliche Anwendungen und geometrische Anschauung besonders hervorhebt: So liegt der „*Ursprung des Begriffs der irrationalen Zahlen [...] in der geometrischen Anschauung und dem geometrischen Bedürfnis*“ (Klein EvhS 1, S. 34) – also in der Frage nach der Länge der Hypotenuse eines gleichschenkligen, rechtwinkligen Dreiecks mit Kathetenlänge 1 – und darauf folgend, „*wie man nach dieser Vorstellung der arithmetischen Theorie zu den Anwendungen in den anderen Gebieten übergehen kann.*“ (Klein EvhS 1, S. 37).

Mathematik wird damit nicht als fertiges Produkt dargestellt, sondern als Prozess, der mitunter Jahrhunderte andauern kann. Das Einbeziehen von Geschichte der Mathematik hat in der Vorlesung nicht nur methodischen Charakter. Es ist auch inhaltlich von Relevanz für den zukünftigen Unterricht. Dadurch lässt sich die historische Ebene auch als Hintergrundwissen des höheren Standpunkts verstehen und wird in Kapitel 8 ausführlich behandelt.

5.3 Fokus auf mathematische Denk- und Arbeitsweisen

Indem Klein sich in groben Zügen mit der Entwicklung aus historischer Sicht beschäftigt, nimmt er gewissermaßen eine Makroperspektive ein, die sich – wenn auch prozessorientiert – in erster Linie mit der Mathematik als Gegenstand beschäftigt. Diesem Blickwinkel setzt er eine Mikroperspektive entgegen, die sich statt der Mathematik dem Mathematiker widmet. Im Fokus stehen Denk- und Arbeitsweisen, die auf unterschiedliche Weise in der Vorlesung thematisiert werden:

Klein erklärt beispielsweise, dass eine typische, tief verankerte Denkweise verantwortlich für die Entstehung der negativen Zahlen und die damit verbundenen Rechenregeln ist – das „Prinzip von der Permanenz der formalen Gesetze“ (Klein EvhS 1, S. 28):

„[Es ist] die allgemeine Eigentümlichkeit der menschlichen Natur [...], daß wir unwillkürlich geneigt sind, nach Regeln, die für spezielle Fälle abgeleitet und gültig sind, auch unter anderen allgemeineren Umständen zu verfahren.“ (Klein EvhS 1, S. 28)

Die Vorlesung zeichnet sich durch eine Reihe kurzer Exkurse aus, in denen Denkweisen nicht nur thematisiert, sondern auch reflektiert werden. So gehe es bei der Gleichung $(-1) \cdot (-1) = 1$ darum, zu erkennen, dass von „Beweisbarkeit der Zeichenregel nicht die Rede sein kann“ (Klein EvhS 1, S. 29). Die Festlegung ist willkürlich und wird durch „Zweckmäßigkeitsgründe“ (Klein EvhS 1, S. 29) reguliert. Mathematik wird also durch menschliches Denken und Handeln maßgeblich beeinflusst. Eng damit verbunden sind erkenntnistheoretische und mathematikphilosophische Fragestellungen, die ebenfalls in der Vorlesungsreihe angesprochen, aber nicht ausführlich erörtert werden.

Dem gegenüber stehen viele Stellen, in denen beiläufige Bemerkungen zu einer Charakterisierung mathematischen Denkens beitragen:

„Kann man nun – diese Frage liegt jedem, der sich gründlich mit komplexen Zahlen beschäftigt hat, nahe – nicht auch andere, höhere komplexe Zahlen mit

mehreren neuen Einheiten als dem einen i bilden und mit ihnen vernünftig rechnen?“ (Klein EvhS 1, S. 64).

Es gilt aber nicht nur mathematische Denk- und Arbeitsweisen zu beschreiben, sondern auch Unterschiede aufzudecken. So beschreibt Klein auch unterschiedliche Einstellungen zur Mathematik.

„Ich möchte die selbständig arbeitenden Mathematiker hinsichtlich ihres Verhaltens zur Zahlentheorie in zwei Klassen teilen, die ich vielleicht als Enthusiasten und Indifferente unterscheiden kann.“ (Klein EvhS 1, S. 42)

Ein besonderes Beispiel für derartige Klassifikationen ist der Abschnitt *Über die moderne Entwicklung und den Aufbau der Mathematik überhaupt*. Dieses von Klein als „Zwischenstück“ bezeichnete Kapitel unterbricht den thematisch orientierten Vorlesungsduktus nach dem ersten großen Themenblock (Arithmetik). Klein setzt sich dort in einem hauptsächlich historischen Exkurs mit der Frage *Wie entsteht Mathematik?* auseinander. Er identifiziert zwei grundlegend verschiedene mathematische Denk- und Arbeitsweisen. Dieses Kapitel wird damit paradigmatisch sowohl für den *Fokus auf mathematische Denk- und Arbeitsweisen* als auch für den Einfluß von *Geschichte der Mathematik* in der Vorlesung. Da Klein zudem eine konkrete und begründete Position bezüglich der Bedeutung der sogenannten Entwicklungsreihen für die Vermittlung von Mathematik hat, legitimiert Klein in diesem Zwischenstück gewissermaßen sein Vorgehen in der Vorlesung (mehr dazu in Kapitel 6).

Zusammenfassung und Bilanz

Die Darstellung einer mathematischen Theorie heißt *genetisch*, „wenn sie an den natürlichen *erkenntnistheoretischen Prozessen der Erschaffung und Anwendung von Mathematik* ausgerichtet ist“ (Wittmann 1981, S. 130). Wittmann zufolge kann die genetische Darstellung durch folgende Merkmale charakterisiert werden:

„Anschluß an das Vorverständnis der Adressaten,
Einbettung der Überlegungen in größere ganzheitliche Problemkontexte außerhalb oder innerhalb der Mathematik,
Zulässigkeit einer Einführung von Begriffen aus dem Kontext heraus,
Hinführung zu strengen Überlegungen über intuitive und heuristische Ansätze, durchgehende Motivation und Kontinuität,
während des Voranschreitens allmähliche Erweiterung des Gesichtskreises und entsprechende Standpunktverlagerungen.“ (Wittmann 1981, S. 131)

Diese Komponenten lassen sich auch in Kleins Vorlesung nachweisen. Besonderen Schwerpunkt legt er auf die drei hier vorgestellten Komponenten: das *induktive Vorgehen*, das *Nachzeichnen der Entwicklungsgeschichte* und der *Fokus auf mathematische Denk- und Arbeitsweisen*. In Kapitel 7 zur fachmathematischen Perspektive wird die Idee des genetischen Prinzips und die Bedeutung, die Klein diesem für das Lernen von Mathematik und insbesondere für die hier untersuchte Vorlesung zuschreibt, besonders deutlich. Klein räumt der historischen Entwicklung, so Wittmann, im Rahmen der genetischen Methode eine große Bedeutung ein (Wittmann 1981, S. 133). Dies kann durch die Analyse in der vorliegenden Arbeit bestätigt werden. In Kapitel 8 wird dieser Gedanke erneut aufgegriffen.

Kapitel 6

Kleins „Zwischenstück“ als Legitimation¹

Das Zwischenstück *Über die moderne Entwicklung und den Aufbau der Mathematik überhaupt* ist, wie beschrieben, beispielhaft für die Auseinandersetzung mit mathematischen Denk- und Arbeitsweisen. Darüber hinaus hat es für die Analyse der Vorlesung eine besondere Stellung. Klein bezieht Position zu den beiden „Entwicklungsreihen“ und begründet damit in gewissem Sinne die für die Vorlesung als zentral erkannten Prinzipien.

6.1 Die Entwicklungsreihen A und B im „Zwischenstück“

„Lassen Sie mich von der Bemerkung ausgehen, daß wir in der Entwicklungsgeschichte der Mathematik bis in die Gegenwart sehr deutlich zwei verschiedene Entwicklungsreihen unterscheiden können, die sich bald gegenseitig ablösen, bald gleichzeitig unabhängig nebeneinander herlaufen, bald endlich auch sich wechselseitig durchdringen.“ (Klein EvhS 1, S. 82f)

Klein diskutiert in diesem Exkurs ganz explizit die Entstehung der Mathematik auf einer Metaebene. Er unterscheidet dabei im Laufe der Geschichte zwei unterschiedliche mathematische Arbeitsweisen, die die Entwicklung der Mathematik beherrschen. Daraus ergeben sich zwei unterschiedliche Entwicklungsreihen in der Mathematik, die einerseits die geschichtliche Entwicklung nachzeichnen, andererseits aber auch als Vorlage für den Unterricht dienen können. Da ihm „keine

¹Die Ausführungen in diesem Abschnitt wurden bereits im Rahmen der 12. Tagung *Allgemeine Mathematik* in Siegen vorgestellt. In Zusammenarbeit mit Susanne Spies wurde diese mathematikdidaktische Sicht einer mathematikphilosophischen Sicht im Bereich der Mathematikästhetik gegenübergestellt. Die Ergebnisse zusammen mit einer Kurzfassung dieses Abschnitts sind im Tagungsband veröffentlicht (vgl. Allmendinger und Spies 2013).

geläufige Einteilung“ (Klein EvhS 1, S. 83) bekannt ist, bezeichnet er die Entwicklungsreihen mit A und B und konkretisiert diese zunächst ohne historischen Bezug am Beispiel der elementaren Analysis, wie ein Vorgehen im Sinne der beiden unterschiedlichen Entwicklungsreihen aussehen kann:

In *Entwicklungsreihe A* beginnt man mit der „formalen Lehre von Gleichungen“, das Operieren mit rationalen Funktionen steht dabei im Vordergrund. Systematisch setzt man sich mit dem den rationalen Funktionen innewohnenden Potenzbegriff und dessen Umkehrung auseinander. Man erhält daraus den Logarithmus, der sich „beim numerischen Rechnen als sehr fruchtbringend“ erweist, und die dazugehörige Klasse der Logarithmusfunktionen.

Erst bei Definition einer zweiten Art transzendenter Funktionen wird eine Verbindung zur Geometrie hergestellt – bei der Definition der trigonometrischen Funktionen. Die Theorie dieser Funktionen wird als gesonderte Disziplin angesehen und behandelt. In der „algebraischen Analysis“ beschäftigt man sich dann mit der „Entwicklung der einfachsten Funktionen in unendliche Reihen“, dazu gehören die Logarithmus- und Exponentialfunktion, sowie die trigonometrischen Funktionen (vgl. Klein EvhS 1, S. 83).²

Bei *Entwicklungsreihe B* hingegen ist der Ausgangspunkt „eine Fusion der Raum- und Zahlvorstellung“. Zunächst würde man die graphischen Darstellungen der einfachsten Funktionen untersuchen. Das geometrische Kurvenbild ermöglicht, die Begriffe Ableitung und Integral in einen ganz anschaulichen und geometrischen Kontext zu setzen – die Ableitung als Tangentensteigung, das Integral als (orientierter) Inhalt der Fläche, die durch die Kurve begrenzt wird.

Der Integrationsprozess gibt schließlich Anlass zur Entstehung neuer Funktionen: So ist beispielsweise das Integral von $x \mapsto \frac{1}{x}$ nicht mehr durch eine Potenzfunktion zu beschreiben. Diese neu entdeckten Funktionen lassen sich mit Rückgriff auf die Differentialrechnung mit Hilfe eines einheitlichen Prinzips – dem Taylorschen Lehrsatz – in Potenzreihen entwickeln. (Klein EvhS 1, S. 84)

Besonders deutlich wird der Unterschied der beiden Entwicklungsreihen am Beispiel der Exponential- und Sinusfunktion. In der Entwicklungsreihe A, so Klein, tauchen beide Funktionen eigenständig auf: Die Exponentialfunktion als „bequemes Hilfsmittel beim numerischen Rechnen“, die Sinusfunktion im Rahmen der „Dreiecksgeometrie“ (Klein EvhS 1, S. 85). Ein möglicher Zusammenhang wird nicht thematisiert oder taucht überraschend bei der Reihenentwicklung auf (vgl. Klein EvhS 1, S. 83). Demgegenüber steht Entwicklungsreihe B, in der diese Verbindung von Interesse ist:

„Im Systeme B aber erscheinen diese Zusammenhänge ganz verständlich und der von Anfang an hervorgehobenen Bedeutung der Funktionen durchaus angemess-

²Für alle wörtlichen Zitate dieses Absatzes gilt: (Klein EvhS 1, S. 83)

sen: Hier entstehen ja e^x und $\sin x$ aus derselben Quelle, der Quadratur einfacher Kurven [...].“ (Klein EvhS 1, S. 85)

Die *Entwicklungsreihe A* ist gekennzeichnet durch eine „partikularistische Auffassung der Wissenschaft“. Jedes Einzelgebiet wird getrennt voneinander betrachtet, untersucht und weiterentwickelt, mit dem Ziel, in jedem dieser Gebiete einen „logisch in sich geschlossenen Aufbau zu entwickeln“. In *Entwicklungsreihe B* dagegen geht es um eine „organische Verknüpfung zwischen den einzelnen Gebieten“. Das Augenmerk liegt darin, Schnittstellen und Querverbindungen zu erkennen, zu beschreiben und für das weitere Arbeiten fruchtbar zu machen, und somit ein „Verständnis mehrerer Gebiete unter einheitlichem Gesichtspunkte“ zu erzeugen. Zusätzlich zu den beiden Entwicklungsreihen erkennt Klein ein algorithmisches Moment C, das nicht als eigenständige Entwicklungsreihe anzusehen ist, aber sowohl A als auch B entscheiden prägen kann. Dazu äußert er sich jedoch nicht detailliert (vgl. Klein EvhS 1, S. 84f).³

Klein expliziert die Entwicklungsreihen ausführlich in einem historischen Streifzug, indem er Errungenschaften in der Mathematik jeweils eine der beiden Entwicklungsreihen zuordnet. Er gibt also keine expliziten Definitionen für die beiden Reihen, sondern er verdeutlicht die Unterschiede durch zahlreiche Beispiele. Der Exkurs wird so beispielhaft für die Integration historischer Momente in die Vorlesung.

6.2 Kleins Position bezüglich der Entwicklungsreihen

Kleins Überblick zur Geschichte der Mathematik zeigt, dass beide Entwicklungsreihen insgesamt sehr gleichmäßig und gleichberechtigt vertreten sind. Genau das sei wichtig, wenn ein Fortschritt in der Mathematik erzielt werden soll:

„Die Mathematik wird sich gewiß nur dann gleichmäßig nach allen Seiten hin fortentwickeln können, wenn keine der beiden Arten der Untersuchung vernachlässigt wird.“ (Klein EvhS 1, S. 91)

Somit gesteht Klein jedem Mathematiker zu, sich seiner Forschung im Sinne der Entwicklungsreihe zu widmen, die ihm mehr liegt (vgl. Klein EvhS 1, S. 91). Zwar äußert sich Klein in dem *Zwischenstück* selbst nicht direkt dazu, welche Entwicklungsreihe seiner eigenen Forschungsarbeit zugrunde liegt, doch kann man eine klare Präferenz erkennen. An anderer Stelle sagt er explizit, dass für ihn den Reiz

³Für alle wörtlichen Zitate dieses Absatzes gilt: (Klein EvhS 1, S. 84f)

der Mathematik gerade die für die Reihe B charakteristische „organische Verknüpfung“ (Klein EvhS 1, S. 84) ausmacht. In seiner Antrittsrede in Leipzig macht er klar, dass er sein Forschungsgebiet keineswegs auf die Geometrie einzuzugrenzen gedenkt. Diese Stelle zitiert Courant in seiner Gedenkrede für Klein:

„Ich habe das Wort Geometrie nicht einseitig als Lehre von den räumlichen Objekten, sondern als Denkweise aufgefaßt, die in allen Gebieten der Mathematik mit Vorteil zur Geltung gebracht werden kann.“ (Courant 1925, S. 767)

Die starke Verzahnung der Entwicklungsreihen, die in der Forschung existiert, findet man zu Kleins Zeit in der Schule nicht. Man konzentrierte sich auf die deduktive Entwicklungsreihe A und lässt allenfalls Elemente des algorithmischen Moments C einfließen. Entwicklungsreihe B verkümmert (vgl. Klein EvhS 1, S. 85). Vermutlich trägt auch genau diese Einseitigkeit zu der von Klein beklagten „doppelten Diskontinuität“ bei. Aus der Unterscheidung der Entwicklungsreihen können Kleins Reformbestrebungen für den Mathematikunterricht heraus gelesen werden.

„Bevor ich mich zu ähnlichen Erörterungen über die Algebra und die Analysis wende, möchte ich einen längeren historischen Exkurs einfügen, der auch auf den allgemeinen gegenwärtigen Unterrichtsbetrieb sowie auf das, was wir an ihm bessern wollen, neues Licht fallen läßt.“ (Klein EvhS 1, S. 82)

Klein bezieht Position. Entwicklungsreihe B soll im Unterricht nicht nur gestärkt werden, um die in der Forschung herrschende Ausgeglichenheit nachzustellen. Diese Reihe hat, Klein zufolge, ein viel größeres Potenzial als Entwicklungsreihe A, Mathematik verständlich zu machen:

„Man kann wohl nicht im Zweifel sein, welche der beiden Richtungen mehr Leben in sich hat, welche den Schüler – soweit er nicht spezifisch abstrakt mathematisch veranlagt ist – mehr packen kann.“ (Klein EvhS 1, S. 85)

Eine „jede Bewegung zur Reform des mathematischen Unterrichts“ müsse daher, so Klein, für eine „stärkere Hervorhebung der Richtung B“ eintreten. Damit verbindet er „die genetische Unterrichtsmethode“, eine „stärkere Betonung der Raumanschauung“ und besonders die „Voranstellung des Funktionenbegriffs“. (Klein EvhS 1, S. 92). Klein greift in seinem *Zwischenstück* auch seine eigenen Bestrebungen im Rahmen der *Meraner Reform* auf (vgl. Kapitel 1.2.3).

Das heißt nicht, dass Entwicklungsreihe A ohne Bedeutung für den Schulunterricht ist, allerdings nicht im tatsächlichen Unterrichtsgeschehen. Vielmehr trägt diese Entwicklungsreihe wesentlich zur Aufbereitung des Schulcurriculums bei. Nach Klein ist „elementar“, also in der Schule zu unterrichten, was einem „Knaben mittlerer Begabung“ (Klein 1904, S. 9) zugänglich gemacht werden kann (vgl. Kapitel 1.3). Dadurch ist Elementarmathematik ein Gebiet, das sich entwickeln und vergrößern kann. Der Bestand der Elementarmathematik verändert sich durch

verbesserte Darstellung und logische Grundlegung (vgl. (Klein 1904, S. 9)). Zu dieser Grundlegung trägt Entwicklungsreihe A entscheidend bei. So haben Euler und Lagrange durch ihre Beschäftigung mit der algebraischen Analysis bzw. den analytischen Funktionen – beides A zuzuordnen – starken Einfluß auf den Schulunterricht genommen (vgl. Klein EvhS 1, S. 90).

Die starke Präferenz der eigenen mathematischen Arbeit innerhalb der Entwicklungsreihe B – ohne die anderen Entwicklungsreihen herabzusetzen – zusammen mit der konkreten Forderung nach einer Stärkung eben dieser Reihe im Schulunterricht (vgl. Klein EvhS 1, S. 92) erklären, warum Klein auch in seine *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus* das in Entwicklungsreihe B enthaltene Mathematikverständnis integriert.

6.3 Die „Prinzipien“ als Charakteristika der Entwicklungsreihe B

Es lässt sich, den Aufzeichnungen Kleins folgend, leicht zeigen, dass die in diesem Kapitel vorgestellten Prinzipien als Charakteristika der Entwicklungsreihe B angesehen werden können. Bereits durch die erste Einteilung der Entwicklungsreihen wird die *innermathematische Vernetzung* als wesentliches Merkmal der Entwicklungsreihe B festgehalten. Ein Vertreter der Reihe B lege, so Klein, auf eine „organische Verknüpfung der Einzelgebiete“ (Klein EvhS 1, S. 84) Wert, um aus dem Zusammenspiel der verschiedenen Teilgebiete neue Erkenntnisse zu gewinnen; „sein Ideal ist die Erfassung der gesamten mathematischen Wissenschaft als eines großen zusammenhängenden Ganzen“ (Klein EvhS 1, S. 85). Dies spiegelt sich auch im Beispiel zur elementaren Analysis in Form der Fusion von Raum- und Zahlvorstellung wider.

Die Verknüpfung zur Geometrie hat hier aber noch eine weitere Funktion. Es geht nämlich in erster Linie nicht um das „Verständnis mehrerer Gebiete unter einem einheitlichen Gesichtspunkte“ (Klein EvhS 1, S. 85). Die Geometrie dient vielmehr dazu, eine Anschauung zu analytischen Inhalten zu erzeugen. Dass das *Prinzip der Veranschaulichung* als wesentliches Merkmal der Entwicklungsreihe B bezeichnet werden kann, wird im Weiteren noch deutlicher. Im Kapitel 3 haben wir bereits gesehen, wie stark Kleins Newton, einer der Begründer der Infinitesimalrechnung, in seiner Begriffsbildung auf Anschauung baut (vgl. Kapitel 3). Gerade aufgrund dieser anschauungsorientierten Arbeitsweise ordnet Klein Newton der Entwicklungsreihe B zu. Diesen vorrangig anschaulichen Zugang zu mathematischen Sachverhalten findet Klein auch bei Leibniz und bezeichnet dies als „typischen Zug“ (Klein EvhS 1, S. 88) für Entwicklungsreihe B.

„ Er [Leibniz] bezeichnet selbst geradezu als seine größte Entdeckung das *Prinzip der Stetigkeit in allem Naturgeschehen*, den Satz: ‚Natura non facit saltum‘ [Die Natur macht keinen Sprung]; auf diese Auffassung stützt er seine mathematischen Entwicklungen [...]“ (Klein EvhS 1, S. 88)

In Kleins historischen Überblicken im Zwischenstück fällt auf, dass Errungenschaften der angewandten Mathematik, beispielsweise in der mathematischen Physik, der Entwicklungsreihe B zugeordnet werden. Das verwundert nicht, wird doch durch die *Anwendungsorientierung* der zu Reihe B gehörende Vernetzungsgedanke auf die „gesamte Wissenschaft“ ausgeweitet. Gleichzeitig wird hier eine weitere Facette dieser Entwicklungsreihe deutlich. Es wird nach dem Sinn und Zweck der mathematischen Anstrengungen gefragt. Genau diese Herangehensweise ist mitverantwortlich dafür, dass Klein das Vorgehen nach Entwicklungsreihe B im Unterricht an Schule und Hochschule stärken möchte (vgl. Kapitel 4).

Schließlich zeichnet sich Reihe B dadurch aus, dass eine Entwicklung jeweils stark vom untersuchten Gegenstand abhängt. So entsteht im oben beschriebenen Beispiel zur elementaren Analysis beim Integrationsprozess „aus sich heraus“ der Anlass zur Entdeckung neuer Funktionen, „die so auf eine durchaus natürliche und einheitliche Art eingeführt werden“ (Klein EvhS 1, S. 84). Diese Art des Arbeitens bezeichnet Klein als *genetisch* und grenzt sie von der in Entwicklungsreihe A vorherrschenden Arbeitsweise ab, bei der ein gegenstandsunabhängiger Gedanke leitend ist – der Wunsch nach logischer Geschlossenheit:

„Man sieht, daß schon jene Wendung von Euler und erst recht das ganze Vorgehen von Lagrange durchaus der Richtung A angehören, indem dadurch die anschaulich genetische Entwicklung durch einen streng in sich abgeschlossenen Gedankenkreis ersetzt wird.“ (Klein EvhS 1, S. 90)

Beide Entwicklungsreihen zeichnen sich auch durch eine jeweils spezifische Art der *Darstellung* aus. Entwicklungsreihe A bezeichnet Klein als „wesensverwandt“ zur Euklidischen Darstellung, die nach dem Schema „Voraussetzung, Behauptung, Beweis“ vorgeht. Dem setzt Klein eine „künstlerisch gegliederte Deduktion“ entgegen. Diese „neue Kunstform der mathematischen Darstellung“ ordnet er der Denkweise der Entwicklungsreihe B zu. In dieser alternativen, „neuen“ Darstellung werden Gedankengänge, die zum Ergebnis führen, „wie in einem spannenden Roman“ nacherzählt und nicht von einer deduktiven, in sich geschlossenen Darstellung verschleiert. (Klein EvhS 1, S. 91) Hier zeigt sich, wie eng Entwicklungsreihe B mit der in Kapitel 5 beschriebenen genetischen Methode zusammenhängt.

Auch in Kleins Forderungen an den Schulunterricht, die er in diesem Zwischenstück formuliert, lassen sich Bezüge zwischen den Prinzipien und der Entwicklungsreihe B herstellen, wenn er sich für eine „stärkere Hervorhebung der Richtung B“ einsetzt (Klein EvhS 1, S. 92) und diese Forderung folgendermaßen präzisiert:

„Dabei denke ich vor allem an das Durchdringen der *genetischen Unterrichtsmethode*, an eine stärkere Betonung der *Raumanschauung* als solcher und besonders an die *Vorstellung des Funktionsbegriffs* unter *Fusion der Raum- und Zahlvorstellung*.“ (Klein EvhS 1, S. 92)

Das *genetische Prinzip* lässt sich in diesem Zitat direkt als zentral für den Schulunterricht herauslesen. Dass der Anschauung eine große Bedeutung zugemessen wird, sieht man hier in Form der Betonung der „Raumanschauung“, einem (wie in Kapitel 3 beschrieben) wichtigen Teil des *Primats der Anschauung* bei Klein. Die von Klein angesprochene „Fusion der Raum- und Zahlvorstellung“ greift dies noch einmal auf und betont gleichzeitig auch die Vernetzung verschiedener mathematischer Teilgebiete, in diesem Fall der Arithmetik und der Geometrie. In der „Vorstellung des Funktionsbegriffs“ stecken auch die *innermathematische Vernetzung* sowie die *Anwendungsorientierung*: In Ihrer Dissertation zum funktionalen Denken hat Katja Krüger sich sehr detailliert mit dem von Klein geforderten *funktionalen Denken* auseinandergesetzt. Dort schildert sie Merkmale dieser speziellen Art zu denken. Diese Merkmale lassen sich auf die in diesem Kapitel genannten Prinzipien zurückführen:

„Funktionales Denken sollte auf unterschiedlichen Ebenen zwischen bisher als gegensätzlich empfundenen oder isolierten Paaren vermitteln, so etwa zwischen

- Arithmetik und Geometrie
- Reiner und Angewandter Mathematik
- Logik und Anschauung
- Formalbildung und Materialbildung

Die Erziehung zum funktionalen Denken wurde somit als ein sehr allgemeines Integrationsprinzip angesehen [...].“ (Krüger 2000, S. 179)

Als Teil des „allgemeinen Integrationsprinzips“ lässt sich die innermathematische Vernetzung ausmachen, so werden Verbindungen zwischen einzelnen Teilgebieten hergestellt, genau, wie es Entwicklungsreihe B vorsieht. Auch taucht hier die Anschauung als wichtiges Element auf, das insbesondere auch für rein logische Überlegungen nützlich sein kann. Das Prinzip der Veranschaulichung findet man im funktionalen Denken auch an vielen Stellen wieder. Krüger arbeitet beispielsweise heraus, wie wichtig für Klein in diesem Zusammenhang die graphische Darstellung ist (vgl. Krüger 2000, S. 179-187). Und schließlich ermöglicht gerade das funktionale Denken eine Erschließung von Anwendungen. Krüger diskutiert diese These am Beispiel der Physik (vgl. Krüger 2000, S. 216-229).

Zusammenfassung und Bilanz

Im Zwischenstück der *Elementarmathematik* stellt Felix Klein eine mögliche Klassifikation mathematischen Denkens und Arbeitens vor. In diese Klassifikation lässt sich nicht nur Kleins eigene Denk- und Arbeitsweise einordnen, auch seine Forderungen an den Mathematikunterricht und seine Vorgaben für die Vorlesungsreihe lassen sich dadurch charakterisieren. Auffallend sind die Parallelen, die zwischen diesen drei Ebenen gerade durch diese Einordnung deutlich werden.

Die der Vorlesung zugrunde liegenden zentralen Prinzipien lassen sich als Merkmale der Entwicklungsreihe B identifizieren. Dass Klein sich bewusst dazu entschließt, seine *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus* „in den Dienst dieser Tendenz [mehr Entwicklungsreihe B, H.A.]“ (Klein EvhS 1, S. 92) zu stellen, korrespondiert also mit der Analyse, die die vier Prinzipien als programmatisch für die Vorlesung herausgearbeitet hat. Umgekehrt stellt das Zwischenstück gerade dadurch eine Begründung der in der Vorlesung verfolgten Programmatik dar: Klein präsentiert die Elementarmathematik im Sinne der Reihe B. Ausschlaggebend für diese Entscheidung ist nicht (nur) seine persönliche Vorliebe für diese Arbeitsweise, sondern ein didaktischer Grund, der eng mit seinen Forderungen in der Meraner Reform zusammenhängt. Die Studierenden sollen inhaltlich davon profitieren, Mathematik in genetischer Darstellung vermittelt zu bekommen und diese in der Schule wiederum selbst umsetzen. Die Vorlesungsreihe wird damit Teil von Kleins Bestrebungen zur Reform des mathematischen Unterrichts.

Zwischenfazit I – Kleins Prinzipien als didaktische Orientierung?

Im Zwischenstück *Über die moderne Entwicklung und den Aufbau der Mathematik überhaupt* (Klein EvhS 1, S. 82–92) stellt Klein zwei unterschiedliche Entwicklungsreihen (A und B) von Mathematik vor, die sich grundsätzlich in ihrer zugrundeliegenden Denk- und Arbeitsweise unterscheiden. Für den Schul- und Universitätsunterricht favorisiert er Entwicklungsreihe B:

„Eine jede Bewegung zur Reform des mathematischen Unterrichts muß also für eine stärkere Hervorhebung der Richtung B eintreten. [...] In den Dienst dieser Tendenz stelle ich auch die gegenwärtige Vorlesung.“ (Klein EvhS 1, S. 92)

Das Zwischenstück hat eine Schlüsselrolle für die Analyse der Vorlesungsreihe und kann als programmatisch für Kleins Haltung zum Mathematikunterricht, die auch in der Meraner Reform zum Ausdruck kommt, und insbesondere für seine Vorlesungen *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus* angesehen werden (vgl. insb. Allmendinger und Spies 2013). In Kapitel 6 wurde dargelegt, dass die Entwicklungsreihe B bestimmte Merkmale mathematischen Denkens und Arbeitens aufweist, die sich – durch eine davon unabhängige phänomenologische Analyse des Vorlesungsmanuskripts – als typisch für Kleins *Elementarmathematik* erwiesen. Diese Merkmale wurden in den Kapiteln 2 bis 5 als der Vorlesung zugrundeliegende Prinzipien beschrieben und anhand typischer Beispiele konkretisiert.

Auch in der gegenwärtigen mathematikdidaktischen Diskussion werden mit den in der vorliegenden Arbeit herausgearbeiteten Prinzipien der *Vernetzung*, der *Veranschaulichung*, der *Anwendungsorientierung* sowie mit dem *genetischen Prinzip* bestimmte didaktische und methodische Assoziationen verbunden (vgl. etwa Reiss und Hammer 2013, Kapitel 6). Diese Prinzipien galten bereits in der Meraner Reform „[h]insichtlich der Stoffauswahl und -organisation sowie der Unterrichtsmethodik“ (Krüger 2000, S. 300) als Leitmotive, für deren Umsetzung im Mathematikunterricht Klein auch in seiner Vorlesung wirbt (vgl. hierzu Kapitel 9.3). Aufgrund der Anwendung der Prinzipien in der Vorlesung kann Klein eine didaktische Orientierung zugeschrieben werden. Dies wird nun mit Hilfe der Ergebnisse aus Kapitel 2 bis 5 verdeutlicht und in Bezug zu aktuellen Interpretationen der Prinzipien gesetzt. Für die nachfolgenden Erörterungen sehe man weitestgehend

von der Doppelrolle ab, die die Studenten – als Lernende und gleichermaßen zukünftige Lehrende – in der Vorlesung einnehmen. Es wird hier in erster Linie das „Lehrer-Schüler“-Verhältnis in den Blick genommen, das Klein mit seinen Hörern eingeht⁴:

Das Prinzip der (innermathematischen) Vernetzung. Für Klein muss Mathematik als Ganzes betrachtet und verstanden werden. Dies zeichnet sich sowohl in seiner Forschung als auch in seiner Lehre ab (vgl. hierzu Kapitel 1.2) und wird zum Grundsatz der *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*:

„Meine Aufgabe hier wird stets sein, Ihnen den gegenseitigen Zusammenhang der Frage der Einzeldisziplinen vorzuführen, der in den Spezialvorlesungen nicht immer genügend zur Geltung kommt [...]“ (Klein EvhS 1, S. 2)

Klein realisiert dies, indem er Gemeinsamkeiten unterschiedlicher Fragestellungen aufdeckt, den Zusammenhang zwischen scheinbar unabhängigen Begriffen herstellt und zum Beweisen von Sachverhalten Hilfsmittel verwendet, die anderen mathematischen Teilgebieten entstammen als der Sachverhalt selbst (vgl. Kapitel 2). Diese Art der Vernetzung lässt sich der Klassifikation von Brinkmann (2008) folgend als *fachsystematische Vernetzung* beschreiben, bei der es um die „Herausstellung gemeinsamer Strukturen zweier mathematischer Konzepte“ (Brinkmann 2008, S. 87) geht. *Lernpsychologische Vernetzungen* (vgl. hierzu Brinkmann 2008, S. 93) spielen in der Vorlesung hingegen – wenig überraschend – eine untergeordnete Rolle.

In der fachdidaktischen Diskussion wird vernetztes Denken häufig als unentbehrliche Problemlösekompetenz angesehen (vgl. bspw. Brinkmann 2008, S.21). Dies spiegelt sich in Kleins Darstellung ausschließlich auf hochschulmathematischer Ebene wider: Vernetzung wird von ihm als Forschungsmethode oder mathematische Arbeitsweise dargestellt. Die von ihm behandelten elementarmathematischen Gegenstände vernetzt er untereinander nicht (vgl. hierzu insb. Kapitel 2, Zusammenfassung und Bilanz). Weiter kann und wird aktuell mit dem Begriff des Vernetzens die Orientierung an *fundamentalen Ideen* verbunden (vgl. insb. Krüger 2000). In der Meraner Reform forderte man in diesem Sinne die Konzentration des Lernstoffes um „einen großen Gedanken“ (Lietzmann 1919, S. 230), nämlich um das funktionale Denken.⁵ Die heute als fundamentale Idee weitläufig anerkannte Idee des funktionalen Denkens wird auch in Kleins *Elementarmathematik* immer wieder aufgegriffen (mehr dazu in Kapitel 9.1). In der Konzeption der Vorlesung selbst ist aber keine prinzipielle Orientierung an fundamentalen Ideen erkennbar.

⁴Inwiefern Klein auch eine didaktische Perspektive einnimmt, die sich an den Studenten in seiner Rolle als zukünftiger Lehrer richtet, wird in Kapitel 9 behandelt.

⁵Der Terminus *Fundamentale Ideen* geht auf Bruner (1960) zurück (Schweiger 1992, S. 199) und wird daher zu Kleins Zeit noch nicht verwendet.

Das Prinzip der Veranschaulichung. Bereits im 17. Jahrhundert prägte Anschauung die pädagogische und didaktische Diskussion und gilt bis heute nicht nur bezogen auf die Mathematik als anerkanntes didaktisches Prinzip (vgl. Lorenz 1992, S. 3).

Bei Klein kann in Hinblick auf seine Vorlesung von einem *Primat der Anschauung* gesprochen werden. Das Hauptziel eines jeden Kapitels ist es, eine Anschauung zu den einzelnen Themen zu vermitteln und gleichzeitig den Bezug zu einer logisch strengen Darstellung herzustellen:

„Was schließlich die Art der im folgenden eingehaltenen Darstellung betrifft, so genügt wohl, wenn ich hervorhebe, daß ich, wie bei früheren Gelegenheiten, auch hier bemüht war, überall geometrische Anschauung mit der durch die arithmetischen Formeln ermöglichte Präzision zu verbinden und daß es mir ein besonderes Vergnügen bereitet hat [...] die Besonderheiten der verschiedenartigen, im Unterricht unermittelt nebeneinander herlaufenden Darstellungsweisen zu verstehen.“ (Klein EvhS 1, S. vi)

In Kapitel 3 wurde dargelegt, dass Veranschaulichung im Rahmen der Vorlesung in verschiedenen Kontexten auftaucht. Klein macht es sich zur Aufgabe, sowohl die anschauliche Erfassung von Sachverhalten zu fördern, als auch die Rolle der Anschauung in der Begriffsbildung hervorzuheben. Zusätzlich stellt er Beweise auf möglichst anschauliche Art dar oder führt diese mit Hilfe anschaulicher Argumente. Insgesamt lassen sich dabei drei Facetten des Kleinschen Prinzips der Veranschaulichung festhalten: Anschauung anhand *prototypischer Beispiele*, Anschauung durch *geometrische Deutung* und Anschauung mit Hilfe von *Metaphern*, wobei die Bezugsobjekte aus der Geometrie, den angewandten Wissenschaften oder dem Alltag stammen (vgl. insbesondere Kapitel 3.1). Übertragen auf die heutige Sprechweise kann von einem Wechsel zwischen unterschiedlichen ikonischen und symbolischen Repräsentationsformen gesprochen werden. Dies spiegelt eine didaktische Orientierung wider, die auch aus heutiger Sicht tragfähig ist.

Eine besondere Rolle für die Anschauung nimmt meines Erachtens die insgesamt stark von Metaphern getragene Sprache in der Vorlesung ein, die aus heutiger Sicht eher alltagssprachlich wirkt und sich beispielsweise durch die Personifizierung mathematischer Gegenstände auszeichnet:

„Besonders anschaulich sehen Sie bei $\sin x$, wie die Parabeln sich bemühen [Hervorhebung H. A.], immer mehr Oszillationen der Sinuskurve mitzumachen.“ (Klein EvhS 1, S. 244)

Sie grenzt sich damit von der heute an Universitäten stark durch fachmathematisches Vokabular geprägten Sprache ab und scheint dadurch zugänglicher bzw. elementarer, da sie an die Erfahrungswelt der Lernenden anknüpft. Inwieweit eine

solche Gegenüberstellung der Alltags- und Fachsprache als von Klein bewusst eingesetztes Veranschaulichungsmittel angesehen werden kann oder dem zu Kleins Zeit üblichen Sprachduktus geschuldet ist, kann und soll im Rahmen der vorliegenden Arbeit nicht geklärt werden.

Das Prinzip der Anwendungsorientierung. Der Rolle der Anwendung im Mathematikunterricht wurde im Laufe der Geschichte, so Blum, eine große Bedeutung zugesprochen. Die explizite Forderung nach mehr Anwendungsorientierung in den Lehrplänen der Meraner Reform ist ein Beispiel dafür (vgl. Blum 1985, S. 196). Damit einher geht die Diskussion geeigneter Beispiele und die Abgrenzung echter Modellierungsaufgaben von eingekleideten Aufgaben. Bereits Anfang des 20. Jahrhunderts wird in diesem Zusammenhang von Max Simon (1901) auf ein Grundproblem der Anwendungsorientierung im Schulunterricht hingewiesen: Auf schulmathematischem Niveau können nur begrenzt echte Anwendungen diskutiert werden (zitiert nach Biermann 2010, S. 294). Heute wird Anwendungsorientierung in erster Linie mit dem Begriff des Modellierens in Verbindung gebracht. Ein Hauptziel ist damit das Erlernen bestimmter handlungsorientierter Kompetenzen wie beispielsweise Vereinfachen, Strukturieren, Mathematisieren oder Problemlösen (vgl. etwa Hinrichs 2008, S. 18–25).

Aufgrund der mathematischen Vorbildung der Studenten kann Klein in seiner Vorlesung naturgemäß vergleichsweise authentische Anwendungen präsentieren. Inwiefern diese Beispiele auch in der Schule einsetzbar sind, diskutiert er nur begrenzt. Anwendungsorientierung versteht er dabei einerseits als Fortschreibung des Vernetzungsgedanken, andererseits als Mittel der Veranschaulichung (vgl. Kapitel 4). Klein leistet damit aus wissenschaftstheoretischer Sicht einen *Beitrag zum Gesamtbild der Mathematik* und bietet *stoffbezogene Hilfen* für die Motivation und Veranschaulichung von mathematischen Inhalten an. Beides sind Blum zufolge wichtige Ziele eines anwendungsorientierten Unterrichts (vgl. Blum 1985, S. 213). Es geht Klein aber nicht explizit um die Aktivierung von typischen Modellierungskompetenzen.

Das genetische Prinzip. Klein gilt als Mitbegründer und Förderer der genetischen Unterrichtsmethode, die bis heute in der Mathematikdidaktik und Pädagogik als zentrales didaktisches Prinzip verstanden wird (vgl. etwa Reiss und Hammer 2013, S. 79f). In Kleins Vorlesung lassen sich durch die Analyse des Vorlesungsmanskripts zentrale Merkmale des genetischen Prinzips nachweisen⁶: Klein wählt an vielen Stellen bewusst ein induktives Vorgehen, bezieht die Entstehungsgeschichte

⁶Dabei beziehe ich mich auf die von Wittmann aufgestellten Merkmale der genetischen Methode (vgl. Wittmann 1981, S. 131), die in der Zusammenfassung und Bilanz von Kapitel 5 vorgestellt wurden.

mit ein und legt stets einen Fokus auf den Entstehungsprozess von Mathematik und die damit verbundenen mathematischen Denk- und Arbeitsweisen (vgl. Kapitel 5).

Heute wird beim genetischen Prinzip häufig zwischen einem historischen Zugang und einem psychologischen Zugang, wie ihn etwa Wagenschein (1999) oder Freudenthal (1973) wählen, unterschieden. Klein räumt der historischen Entwicklung, so Wittmann, diesbezüglich eine große Bedeutung ein (Wittmann 1981, S. 133). Dies kann durch die Analyse in der vorliegenden Arbeit bestätigt werden (vgl. hierzu Kapitel 5.2 und Kapitel 8). Mit Kleins Vorgehensweise, die durch induktive und heuristische Ansätze geprägt ist (vgl. hierzu Kapitel 5.1), tritt in der Vorlesung eine weitere Facette genetischen Lernens zutage, die auch im psychologischen Zugang zum genetischen Prinzip eine Rolle spielen kann. Kleins Impulse diesbezüglich haben insgesamt einen „außerordentlichen Einfluß ausgeübt und sind bis heute [vergleichsweise; H.A.] aktuell“ (Wittmann 1981, S. 131). Kleins Begründung der genetischen Methode über das *biogenetische Grundgesetz* von Ernst Haeckel ist jedoch aus heutiger Sicht mit Vorsicht zu genießen:

„Es wäre wirklich unsinnig zu verlangen, ein Individuum solle bei seinen Lernprozessen die Um- und Irrwege der Geschichte nachvollziehen. Andererseits ist nicht zu leugnen, daß das biogenetische Prinzip auch ein Körnchen Wahrheit enthält.“ (Wittmann 1981, S. 133)

Insgesamt kann festgehalten werden, dass die der Vorlesung zugrundeliegenden Prinzipien der *Vernetzung*, der *Veranschaulichung*, der *Anwendungsorientierung* und das *genetische Prinzip* von Klein bewusst und aus einer didaktischen Motivation heraus eingesetzt werden. Auch wenn naturgemäß Unterschiede zur aktuellen mathematikdidaktischen Diskussion erkennbar sind, können immer wieder Überschneidungen und Anknüpfungspunkte benannt werden.

In der Vorlesung eingenommene Perspektiven

Klein stellt unter Verwendung der zuvor beschriebenen Prinzipien eine Verbindung von der Elementarmathematik zur Hochschulmathematik her und nimmt damit einen *höheren Standpunkt* zur Elementarmathematik in.

Dieser Standpunkt zeichnet sich durch unterschiedliche und spezifische Perspektiven aus: eine fachmathematische, eine mathematikhistorische, eine mathematikdidaktische Perspektive. Diese Blickrichtungen werden im Weiteren spezifiziert und in die heutige mathematik- und hochschuldidaktische Diskussion eingeordnet.

Kapitel 7

Die fachmathematische Perspektive

„Tatsächlich hat sich die Mathematik entwickelt wie ein Baum, der nicht von den feinsten Verästelungen der Wurzel beginnend lediglich nach oben wächst, der vielmehr erst in dem Maße, wie er nach oben hin seine Zweige und Blätter immer mehr ausbreitet, auch nach unten seine Wurzeln tiefer und tiefer treibt.“ (Klein EvhS 1, S. 16)

Die Mathematik hat sich Klein zufolge vom „gesunden Menschenverstand“ (Klein EvhS 1, S. 17) ausgehend nicht nur in eine Richtung weiterentwickelt, sondern gleichermaßen nach oben und unten ausgebildet. Sie wird zunehmend tiefer fundiert und entfaltet sich in verschiedene Zweige, sprich Teilgebiete.

Der Unterricht habe, so Klein, sowohl in der Schule als auch in der Hochschule diesem „geschichtlichen Werdegang“ zu folgen, also stets von ‚Bekanntem‘ auszugehen und dieses einerseits grundzulegen andererseits voranzutreiben (vgl. Klein EvhS 1, S. 16). Dies spiegelt sich in der Vorlesung wider und prägt zusammen mit den in den Kapiteln 2 bis 5 herausgearbeiteten Prinzipien die von Klein eingenommene fachmathematische Perspektive maßgeblich. So wird auf vielfältige Weise die Schulmathematik mit der Hochschulmathematik vernetzt, um die doppelte Diskontinuität zu überwinden (vgl. Kapitel 1.4). Klein geht folgendermaßen vor:

„Zuerst legen wir uns hier, wie stets im Verlaufe der Vorlesung, die Frage vor, auf welche Weise man diese Dinge in der Schule behandelt. Dann wird die weitere Untersuchung fragen, was vom höheren Standpunkte aus betrachtet in ihnen alles enthalten ist.“ (Klein EvhS 1, S. 6)

Unter Verwendung der von Klein genutzten Metapher lässt sich die Schulmathematik als Stamm eines Baumes ansehen, der nach unten Wurzeln der Grundlegung und nach oben Zweige des Zugewinns treibt. Klein weist in jedem der drei Teile dieses Baumes, nämlich Stamm, Wurzelwerk und Krone, eine Verbindung zwischen Schul- und Hochschulmathematik aus:

- Durch eine hochschulmathematische Fach- und Formelsprache wird Schulmathematik präzise und prägnant dargestellt (*systematische Darlegung schulmathematischer Inhalte*),
- Schulmathematik wird vor hochschulmathematischem Hintergrund begründet (*Rechtfertigung schulmathematischer Inhalte*) und
- Aus der Schulmathematik erwachsen weiterführende Fragen, deren Lösung in der Hochschule zu verorten ist (*Ausweitung schulmathematischer Inhalte*).

Diese drei Facetten der Verbindung von Schul- und Hochschulmathematik werden in den Kapiteln 7.1 bis 7.3 spezifiziert und anhand typischer Beispiele aus der Vorlesung verdeutlicht. Es geht dabei nicht darum, Kleins Vorgehensweise noch einmal nachzuzeichnen, wie es in den Kapiteln 2 bis 5 bereits geschehen ist. Ob der zukünftige Lehrer diesen mathematischen Ausführungen tatsächlich „in reichem Maße lebendige Anregungen für den eigenen Unterricht entnehmen“ (Klein EvhS 1, S. 2) kann, wie es Klein vorschwebt, wird abschließend mit Toeplitz kritisch hinterfragt.

7.1 Systematische Darlegung schulmathematischer Inhalte

Klein stellt fest, dass in der Schule Rechengesetze und -verfahren meist nur anhand konkreter Beispiele eingeübt werden. Dass ihre systematische Darlegung nur selten erfolgt, stellt Klein prinzipiell nicht in Frage. Es sei, so Klein, beispielsweise problemlos möglich, die Rechengesetze für die natürlichen Zahlen sicher anzuwenden, ohne sich der zugrunde liegenden Theorie bewusst zu sein. Schließlich habe man „lange richtig addiert und multipliziert, ohne über die Grundgesetze dieser Operationen Rechenschaft zu geben“ (Klein EvhS 1, S. 9).¹ Um aber als Lehrer die Inhalte in der Schule sachgerecht vermitteln zu können, sei es notwendig, dass der Lehrer von der jeweiligen Theorie Kenntnis habe. Klein äußert sich diesbezüglich folgendermaßen:

„Für diesen Unterricht erscheint es nun unbedingt nötig, daß der Lehrer die *logischen Gesetze und Grundlagen des Rechnens und der Theorie der ganzen Zahlen* selbst genau kennt, wenn er sie auch dem Schüler keineswegs unmittelbar darbieten kann. Beschäftigen wir uns also etwas näher mit ihnen.“ (Klein EvhS 1, S. 8)

¹Dies bedeutet nicht, dass Klein der schulischen Praxis generell kritiklos gegenüberstand. Er hatte konkrete Vorstellungen zu den Lehrinhalten und Methoden an der Schule (vgl. Kapitel 1.2) und äußerte diese auch in seiner *Elementarmathematik* (mehr dazu in Kapitel 9).

Klein formuliert die für das Addieren und Multiplizieren mit natürlichen Zahlen geltenden Gesetze. Aus heutiger Sicht beschreibt er $(\mathbb{N}, <, +, \cdot)$ als Modell der Strukturpostulate eines geordneten Halbrings.

Er verwendet dafür die hochschulmathematische Fach- und Formelsprache. Deren hoher Abstraktionsgrad ermöglicht es, Allgemeingültiges kurz und prägnant auszudrücken, wie beispielsweise die Beschreibung algebraischer Gleichungen. Die bekannten Begriffe und Gegenstände der Elementarmathematik erscheinen durch die präzise hochschulmathematische Sprache in einem „vornehmeren Gewand der Mathematik“ (Klein EvhS 1, S. 8).

7.2 Rechtfertigung schulmathematischer Inhalte

Nach ihrer präzisen Formulierung gilt es die Definitionen, Gesetze und Verfahren mithilfe einer ausgeprägten hochschulmathematischen Denk- und Arbeitsweise sowie unter Verwendung von Kenntnissen, die über die Schulmathematik hinausgehen, zu rechtfertigen oder sich zumindest Fragen der Rechtfertigung zu widmen:

Klein stellt nicht nur eine systematische Darlegung (vgl. Kapitel 7.1) für das elementare Rechnen vor, sondern behandelt zudem die Frage der Grundlegung der Arithmetik, nämlich „*Wie rechtfertigt man die angegebenen Grundgesetze?*“ (Klein EvhS 1, S. 11) – eine Frage, die nicht nur zu seiner Zeit noch nicht befriedigend beantwortet war.² Er unterscheidet vier Auffassungen und bezieht sich dabei auf

- (1) Kant, der die Rechengesetze als „unmittelbar notwendige Ergebnisse der Anschauung“ (Klein EvhS 1, S. 12) ansieht,
- (2) Peano, der ein Axiomensystem aufstellt und daraus die Gesetze mithilfe der Logik ableitet (vgl. Klein EvhS 1, S. 12f),
- (3) Dedekind, der die natürlichen Zahlen und Rechengesetze mengentheoretisch darstellt (vgl. Klein EvhS 1, S. 13f) und
- (4) Hilbert, der die Widerspruchsfreiheit eines formalen Systems untersucht, das die Arithmetik und Logik formal abbilden soll. (vgl. Klein EvhS 1, S. 14f)³

²Daran schließt sich die Frage „*Wie erklärt man den Zahlbegriff überhaupt?*“ (Klein EvhS 1, S. 11). Beide Fragen sind auch von erkenntnistheoretischem Interesse. Darauf weist Klein zwar explizit hin, erörtert sie allerdings nicht detailliert. Diesen Gedanken werde ich im Zwischenfazit II aufgreifen.

³Klein bezieht sich dabei auf einen Vortrag von Hilbert auf dem Heidelberger Kongress von 1904 (vgl. hierzu Hilbert 1905), eine detailliertere Ausarbeitung dieser Idee legte Hilbert erst später vor.

Neben Fragen der *Gültigkeit* von (Rechen-)Gesetzen werden auch Fragen der *Sinnhaftigkeit* von Definitionen und Festlegungen behandelt: Beispielsweise rechtfertigt Klein die Einschränkung der Logarithmusfunktion auf \mathbb{R}^+ (vgl. hierzu Kapitel 3.3), die aus schulmathematischer Perspektive willkürlich zu sein scheint, mithilfe funktionentheoretischer Überlegungen (vgl. Klein EvhS 1, S. 170f).⁴

7.3 Ausweitung schulmathematischer Inhalte

Die Inhalte der Schulmathematik werden also vor hochschulmathematischem Hintergrund besser beschreibbar (vgl. Kapitel 7.1) und besser oder überhaupt erst begründbar (vgl. Kapitel 7.2).

Um dieses nochmals in Kleins Baum-Metapher für die Mathematik zu formulieren: In Kapitel 7.1 wurde der Stamm betrachtet, in Kapitel 7.2 die Wurzeln, die er treibt, beschrieben. Im Folgenden geht es nun um die Zweige und Früchte die er trägt. Klein zeigt, dass in der Schulmathematik Fragen auftauchen, sprich einem „Knaben mittlerer Begabung zugänglich scheinen“ (Klein 1904, S. 9),⁵ deren Lösung aber erst mit Mitteln einer weitergeführten Mathematik gelingt.

Zwei typische Beispiele entnehme ich dem Kapitel zu *besonderen Eigenschaften der ganzen Zahlen*: Das Problem der Dreiteilung eines Winkels mit Zirkel und Lineal tritt im Rahmen der Schulmathematik auf. Erst auf hochschulmathematischem Niveau liefert die Galois-Theorie den Unmöglichkeitbeweis diese Problems (vgl. hierzu Klein EvhS 1, S. 56). Gleichmaßen lässt sich der große Satz von Fermat mit Mitteln der Schulmathematik formulieren, bewiesen war dieser zu Kleins Zeit noch nicht. Dies hat sich mittlerweile geändert, einen elementaren Beweis gibt es bis heute nicht (vgl. hierzu Klein EvhS 1, S. 49–52).

Auch in den anderen Teilen der Vorlesung existieren dementsprechende Beispiele:

„Kann man nun, diese Frage liegt jedem, der sich gründlich mit komplexen Zahlen beschäftigt hat, nahe – nicht auch andere, höhere komplexe Zahlen mit mehreren neuen Einheiten als dem einen i bilden und mit ihnen vernünftig rechnen?“ (Klein EvhS 1, S. 64)

Eine wesentliche Erkenntnis ist, dass Zahlbereichserweiterungen nicht immer verlustfrei möglich sind; es bleiben nicht notwendig alle Gesetze erhalten. Beispielsweise lässt sich eine Zahlbereichserweiterung mit vier komplexen Einheiten realisieren, doch geht dabei die Kommutativität der Multiplikation verloren: Man spricht

⁴Klein behandelt die Einführung der Logarithmusfunktion auch aus einer didaktischen Perspektive (vgl. hierzu Kapitel 9.2.2).

⁵Vergleiche hierzu Kleins Definition von Elementarmathematik in Kapitel 1.3.

heute diesbezüglich vom Schiefkörper der (Hamiltonschen) Quaternionen. Dieser wird von Klein in einem eigenen Kapitel und damit vergleichsweise ausführlich behandelt. Klein stellt die von Hamilton vorgelegte Formalisierung vor, beschreibt die Quaternionenmultiplikation als Drehstreckung im Raum und weist auf damit verbundene Möglichkeiten ihrer Anwendung hin (vgl. Klein EvhS 1, S. 64–80); dies geschieht ganz im Sinne der Prinzipien der Vernetzung, Anschauung und Anwendungsorientierung.

Ein Beispiel, das von größerer Relevanz für die Fachmathematik ist als die Betrachtungen zum Quaternionen-Schiefkörper, ist Kleins Kapitel zu Gleichungen 3., 4. und 5. Grades über dem Körper der komplexen Zahlen (vgl. Klein EvhS 1, S. 112–153). In diesem mathematisch anspruchsvollen Kapitel wird zudem deutlich, wie tief Klein in seiner Vorlesung in die eigentliche Hochschulmathematik eintaucht und welch großes Vorwissen er voraussetzt:

Klein beschreibt den Zusammenhang zwischen Gleichungen 3., 4. und 5. Grades und den Platonischen Körpern, nämlich Dieder, Tetraeder und Ikosaeder. Die dafür benötigte Mathematik ist aus damaliger Sicht hochmodern, da sie insbesondere Geometrie und Algebra vernetzt. Diese Vernetzung von Algebra und Geometrie ist ein zentrales Merkmal von Kleins Forschung (vgl. etwa Klein 1974) und prägte die mathematische Entwicklung, beispielsweise die der algebraischen Topologie und der algebraischen Geometrie.

Dies ist ein typisches Beispiel für die *Ausweitung schulmathematischer Inhalte* zu einer relevanten Forschung in der Hochschulmathematik, insofern Schülern sowohl Gleichungen auf der algebraischen Seite als auch Platonische Körper auf der geometrischen Seite begegnen; die Verbindung dazwischen wird erst auf hochschulmathematischem Niveau nachvollziehbar.

7.4 Über den Nutzen für die Schule: Ein kritischer Rückblick

Toeplitz setzt sich in einem Artikel über *Das Problem der „Elementarmathematik vom höheren Standpunkt“* kritisch mit der Frage auseinander, was der Lehrer von all diesen Dingen für seinen Unterricht mitnehmen kann (vgl. Toeplitz 1932, S. 1). Er konkretisiert seine Bedenken am Beispiel der Quadratur des Kreises und der damit verbundenen Transzendenz von π , die Klein in seiner Vorlesung beweist.⁶ Aus Toeplitz' Sicht hat dieser Beweis für den Lehrer und seine spätere Schultätigkeit keinerlei Relevanz:

⁶Toeplitz stellt auch das Konzept der elementarmathematischen Vorlesungen generell in Frage. Mit dieser Kritik setze ich mich in Kapitel 10.4 auseinander.

In der Schule habe man, wenn überhaupt, nur die „griechische Fassung“ des Problems, also die Frage nach der Quadratur des Kreises mit Zirkel und Lineal, zu thematisieren.

„[Es gilt] sich vorsichtig auf die griechische Fassung des Problems zu beschränken und zu erzählen, dass dieses in einer gewissen modernen Verallgemeinerung seine endgültige, negative Lösung gefunden hat.“ (Klein EvhS 1, S. 4)

Für den Lehrer selbst sei daher lediglich der Begriff der Transzendenz selbst von Bedeutung und das auch nur, um zu wissen, „*was er im Unterricht nicht tun darf*“ (Toeplitz 1932, S. 4).

Das Beispiel, auf das Toeplitz seine Kritik stützt, lässt sich bezüglich der vorangegangenen Klassifikation dem *Ausweiten schulmathematischer Inhalte* zuordnen: Das Problem der Quadratur des Kreises kann mit elementaren Mitteln beschrieben werden; der Beweis der Nichtlösbarkeit dieses Problems hingegen greift auf Mittel der Zahlentheorie und Integralrechnung zurück und ist daher nicht ohne weiteres einem schulmathematisch Gebildeten zugänglich.

Toeplitz' Kritik kann auf alle Themen des Ausweitens von Schulmathematik direkt übertragen werden: Es ist beispielsweise – auch zu Kleins Zeit – nur schwer denkbar, die Quaternionenmultiplikation oder tiefergehende Untersuchungen zu Gleichungen 5. Grades im Komplexen direkt oder indirekt in den Schulunterricht einfließen zu lassen.

Anders verhält es sich meines Erachtens mit der *systematischen Darstellung und Rechtfertigung schulmathematischer Inhalte*. Auch wenn ein Lehrer die Gültigkeit einer Regel oder die Begründung einer Festlegung nicht notwendig in der Schule behandeln kann, so scheint es hilfreich, dass er „*die Klippen und Untiefen genau kenn[t], an denen er seine Schüler vorbeiführt*“ (Klein EvhS 1, S. 175). Toeplitz' Kritik gilt daher nicht für die Vorlesung im Allgemeinen.

Zudem ist zu beachten, dass von einem Mathematikgymnasiallehrer zu Kleins Zeit erwartet wurde, dass er sich neben seiner schulpraktischen Tätigkeit auch forschend aktiv betätigte. Vor diesem Hintergrund hatte Klein in seiner *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus* wohl nicht nur den ‚Lehrer im Klassenzimmer‘ im Blick, sondern auch den Lehrer in seiner Rolle als Forscher. Die Themen zum *Ausweiten schulmathematischer Inhalte* haben daher zwar, wie Toeplitz zurecht feststellt, nicht notwendig einen direkten Nutzen für den Schulunterricht, sie eröffnen dem Lehrer aber in seiner Rolle als Fachmathematiker ein Forschungsfeld, das sich direkt an die Themen der Schulpraxis anschließt. Beide Rollen, die des Lehrers und die des Forschers, werden auf diese Weise vernetzt.

Zusammenfassung und Bilanz

Felix Kleins fachmathematische Perspektive zeichnet sich durch drei Facetten einer Verbindung von Schul- und Hochschulmathematik aus: die Facette der *systematischen Darstellung* schulmathematischer Inhalte mit Mitteln der Hochschulmathematik, der hochschulmathematischen *Rechtfertigung* schulmathematischer Inhalte und der *Ausweitung* schulmathematischer Inhalte bis hin zu damals relevanten Forschungsfragen. Klein eröffnet dem zukünftigen Lehrer damit mögliche Forschungsfelder, die sich direkt an die schulpraktischen Tätigkeiten anschließen. Zumindest bezogen auf die Inhalte der Ausweitung konnte mit Toeplitz in Frage gestellt werden, ob die behandelten Themen dem Lehrer im Schulunterricht als hilfreiches oder gar notwendiges Hintergrundwissen dienen.

Toeplitz stellt eine bis heute nicht abschließend beantwortete, aber viel diskutierte Frage:⁷ *Wieviel Mathematik und welche Mathematik muss ein Mathematiklehrer kennen?* Aufgrund der heute deutlich veränderten Rahmenbedingungen in Schule und Hochschule scheint die Antwort, die Klein in seiner Vorlesung hierzu gibt, nicht mehr angemessen: Ein Lehrer hat heute keine eigene Forschungsleistung zu erbringen, und der Schulstoff hat sich im Vergleich zu Kleins Zeit deutlich verändert.

Es ist anzunehmen, dass Klein mit dem Begriff des höheren Standpunkts in erster Linie die hier beschriebene hochschulmathematische Auseinandersetzung mit der Schulmathematik verbindet. In den folgenden zwei Kapiteln wird gezeigt, dass Klein in seiner Vorlesung weitere Perspektiven einnimmt, die den Blick auf die Schulmathematik ebenfalls entscheidend beeinflussen können.

⁷Man vergleiche hierzu etwa Pieper-Seier (2002), Curdes u. a. (2003), Beutelspacher u. a. (2011), Ableitinger u. a. (2013), Hefendehl-Hebeker (2013).

Kapitel 8

Die historische Perspektive

In Kapitel 5 wurde beschrieben, wie Felix Klein das genetische Prinzip in der Vorlesung umsetzt und dabei „der historischen Entwicklung im Rahmen der genetischen Methode [...] eine große Bedeutung ein[räumt]“ (Wittmann 1981, S. 133). In diesem Zusammenhang nimmt Klein in der Tat eine historische Perspektive ein. Auch der Lehrer soll nach Klein ein genetisches Vorgehen wählen. Dazu muss der Lehrer über breite historische Kenntnisse verfügen, die ihm erlauben, die Entstehungsgeschichte direkt oder indirekt in den Schulunterricht einfließen zu lassen. Die historische Perspektive, die in der Vorlesung eingenommen wird, hat damit nicht nur eine methodische Dimension. Es geht auch darum, notwendiges Wissen bereitzustellen, welches im restlichen Studium nicht ausreichend vermittelt wird:

„Ein wesentliches Hindernis der Verbreitung einer solchen naturgemäßen und wahrhaft wissenschaftlichen Unterrichtsmethode ist wohl der *Mangel an historischen Kenntnissen*, der sich so vielfach geltend macht. Um diesen zu bekämpfen, habe ich besonders gern zahlreiche *historische Momente* in meine Darstellung verflochten.“ (Klein EvhS 1, S. 289)

Dabei lassen sich insgesamt bei Klein drei unterschiedliche Arten „*historischer Momente*“ ausmachen: historische Randnotizen und längere Exkurse, die ein Themenfeld in einen größeren Zusammenhang einordnen, anekdotische Einwürfe, die eine eher motivationale Rolle haben, und schließlich Ausarbeitungen zu einzelnen Themen als Konkretisierungen der genetischen Methode für den Schulunterricht.

8.1 Historische Exkurse und Randbemerkungen

Die Vorlesung zeichnet sich durch eine Reihe längerer historischer Abschnitte und Exkurse aus, in denen Klein entweder die Entwicklung ausgewählter Themen nachzeichnet – die irrationalen Zahlen (vgl. Klein EvhS 1, S. 34–38) sowie die Theorie des Logarithmus (vgl. Klein EvhS 1, S. 157–167) sind typische Beispiele – oder seine Ausführungen in einen größeren Kontext einordnet, wie etwa in dem

in Kapitel 5 und 6 besprochenen *Zwischenstück* (vgl. Klein EvhS 1, S. 82–92), in den historischen Ausführungen im Kapitel zu den *Allgemeinen Ausführungen zur Infinitesimalrechnung* (vgl. Klein EvhS 1, S. 223–241)¹ oder in dem *Exkurs zum allgemeinen Funktionsbegriff* (vgl. Klein EvhS 1, S. 215–223).

Letzterer schließt an das Kapitel über die trigonometrischen Reihen an und soll unter anderem die Rolle dieser für die Entwicklung des Funktionsbegriffs klären, insbesondere bezüglich der Frage, ob sich jede beliebige allgemeine Funktion als trigonometrische Reihe darstellen lässt. Diesen einzelnen Entwicklungsstrang bettet Klein in die Entwicklung des allgemeinen Funktionsbegriffs ein und legt dabei besonderen Wert auf die Gegenüberstellung und den Vergleich der unterschiedlichen Definitionen:

Erst im 18. Jahrhundert trat die Funktion nicht mehr nur in Form einzelner Beispiele auf, sondern auch in allgemeinen Formulierungen. In sieben Stationen beschreibt Klein, wie sich die Definition der Funktion als „*analytische[r] Ausdruck in x* “ (Klein EvhS 1, S. 216) weiterentwickelt, bis hin zu der „*ganz moderne[n] Verallgemeinerung*“ (Klein EvhS 1, S. 220) mit Hilfe des Mengenbegriffs, in der eine Funktion dadurch definiert wird, dass jedem Element einer Menge genau ein Element einer anderen Menge zugeordnet wird. Die verschiedenen Darstellungen unterscheidet Klein bezüglich ihres Zwecks und ihrer Entstehungsgeschichte. So trete besonders bei frühen Darstellungen eine Anwendungsorientierung hervor, während zu Kleins Zeit aktuellere Definitionen „Produkte des reinen Forschungsbetriebes“ (Klein EvhS 1, S. 220) zu sein schienen. Umgekehrt gebe es aber auch, ganz im Sinne der innermathematischen Vernetzung (vgl. Kapitel 2), einige Gemeinsamkeiten und Zusammenhänge: Teilweise bauten Definitionen auf einander auf, so arithmetisierte Dirichlet beispielsweise die Eulersche Definition der Funktion als Freihandzeichnung in einem Koordinatensystem. Weiter lassen sich auch auf den ersten Blick völlig unabhängige Beschreibungen in Einklang bringen, wie die bereits angesprochene Dirichlet'sche und die Lagrange'sche Definition der analytischen Funktionen mittels Potenzreihen.²

Dieser Exkurs ist insofern typisch für die Art des Einbezugs historischer Elemente, als dass Klein eine sehr knappe Darstellung der Inhalte wählt. Er setzt den jeweils zugrunde liegenden mathematischen Hintergrund voraus und überlässt die Durchführung von Beweisen oder Begründungen oft dem Leser bzw. Hörer. So werden insbesondere seine historischen Exkurse, in denen eine Vielfalt mathematischer Gebiete einbezogen wird, zu sehr anspruchsvollen Passagen, die intensiver Nachbereitung bedürfen, wie die folgenden zwei charakteristischen Stellen verdeutlichen.

¹Mehr hierzu findet sich in Kapitel 9

²vergleiche hierzu Kapitel 2.2f

Die bei Lagrange durch Potenzreihen definierten Funktionen sind zunächst nur innerhalb eines gewissen Konvergenzbereichs um die Stelle $x = 0$ definiert. Der Definitionsbereich lässt sich jedoch in bestimmten Fällen mittels „*analytischer Fortsetzung*“ erweitern. Die dafür benötigten Kenntnisse in Funktionentheorie setzt Klein voraus:

„Dieser Prozeß der ‚*analytischen Fortsetzung*‘ ist ja jedem, der sich etwas mit komplexer Funktionentheorie beschäftigt hat, wohl bekannt.“ (Klein EvhS 1, S. 216f)

Auch den bereits angesprochenen Zusammenhang zwischen den Funktionsbegriffen nach Lagrange und Dirichlet stellt er nur theoretisch her, ohne diese konkret zu illustrieren:

„Die Beweise für diese Tatsachen sind in den Untersuchungen über das Verhalten von Potenzreihen auf ihrem Konvergenzkreise enthalten, auf die ich hier natürlich nicht eingehen kann.“ (Klein EvhS 1, S. 219)

In allen historischen Kapiteln und Abschnitten werden die entscheidenden Fortschritte und Errungenschaften chronologisch angesprochen, meist auch mit Hinweis auf die beteiligten Mathematiker oder zumindest Nationen. Hervorgehoben werden die Stellen, an denen Probleme aufgetaucht sind oder ein Perspektivwechsel auftauchte.

Zusätzlich zu diesen längeren historischen Stellen wird durch kurze historische Randbemerkungen eine zeitliche Einordnung vorgenommen. Im Kapitel zu den *fundamentalen Gesetze des Rechnens* (vgl. Klein EvhS 1, S. 9-11) startet Klein beispielsweise folgendermaßen:

„Natürlich hat man lange richtig addiert und multipliziert, ohne sich über die Grundgesetze dieser Operationen Rechenschaft zu geben. Erst in den *zwanziger und dreißiger Jahren des vorigen Jahrhunderts* [des 18. jhd., H.A.] haben vor allem *englische und französische Mathematiker* die Fundamenteigenschaften jener Operationen herausgearbeitet, worüber ich nähere historische Notizen jedoch nicht mitteilen will;“ (Klein EvhS 1, S. 9)

Die „historischen Momente“ (Klein EvhS 1, S. 289) sollen damit die schulmathematischen Inhalte in die mathematische Entstehungsgeschichte einordnen, die Prozesshaftigkeit der Mathematik hervorheben – Mathematik ist kein festes, starres Gebilde, sondern entwickelt sich stets weiter – und deutlich machen, welche Hürden bis zu einer deduktiv geordneten, systematischen Darstellung eines mathematischen Gegenstandes zu überwinden sind:

„Lernen Sie daraus, wie langsam alle mathematischen Ideen erst entstanden sind, wie sie fast stets in mehr divinatorischer Gestalt auftauchten und erst in langer Entwicklung die starre und auskristallisierte Form der systematischen Darstellung annahmen!“ (Klein EvhS 1, S. 289)

8.2 Historische Anekdoten als motivationales Moment

Zusätzlich zu den inhaltlich orientierten Abschnitten zur historischen Entwicklung ist der gesamte erste Band der Vorlesungsreihe mit Metabemerkungen und anekdotischen Beispielen durchsetzt, in denen der Mathematiker mit seinen Schwächen, Sonderheiten, aber auch Leistungen selbst in den Fokus des Interesses rückt.

So werden die Erläuterungen zum *großen Fermatschen Satz* mit einigen historischen Notizen zu Fermat eingeleitet: Fermat gehörte, auch wenn er als Jurist arbeitete und Mathematik scheinbar als Hobby betrieb, zu den „größten Mathematikern“ seiner Zeit. Er selbst veröffentlichte nichts, sondern beschränkte sich auf umfangreiche Briefwechsel mit renommierten Mathematikern dieser Zeit. Viele seiner Leistungen, gerade im Bereich der Zahlentheorie, hielt er ausschließlich als im wahrsten Sinne „Randbemerkungen“ in einem seiner Mathematikbücher fest. Erst nach seinem Tod wurden diese von seinem Sohn veröffentlicht. In der Vorlesung weist Klein auf die Randnotiz hin, in der Fermat seinen großen Satz formuliert und schreibt, er habe einen wahrhaft wunderbaren Beweis gefunden, jedoch sei der Rand zu schmal um ihn dort festzuhalten. (Vgl. Klein EvhS 1, S. 52)

Gerade durch diese Worte, löste der Satz eine Faszination aus, die auch Klein hier zum Ausdruck bringt. Das Interesse dieses Satzes beruhe vor allem darauf, „*daß alle Anstrengungen, einen vollständigen Beweis für ihn zu finden, bisher vergeblich waren*“ (Klein EvhS 1, S. 52).

Der Mathematiker Fermat wird als sonderbar dargestellt und verliert dennoch nicht an Ansehen oder gar Glaubhaftigkeit, wie die vielen Bemühungen, den Beweis aufzuspüren, zeigen. Fermat löst eine Faszination für Mathematik aus, die sich auch auf Laien übertragen kann.

Ein weiteres Beispiel zeigt den Mathematiker als „kühnen“ Forscher, der gerade durch unkonventionelle Methoden große Ergebnisse erzielen kann: In Kapitel 2.3 wurde bereits angesprochen, dass Taylor seinen Lehrsatz zur Approximation beliebiger differenzierbarer Funktionen aus der Newtonschen Interpolationsformel abgeleitet hat. In der Vorlesung behandelt Klein diese Tatsache nicht ohne den „*Grenzübergang von unerhörter Kühnheit*“ (Klein EvhS 1, S. 251) zu problematisieren: Taylor betrachtet die Newtonsche Formel

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!} \frac{\Delta f(a)}{\Delta x} + \frac{(x-a)(x-a-\Delta x)}{2!} \frac{\Delta^2 f(a)}{(\Delta x)^2} + \dots$$

$$\frac{(x-a) \cdots (x-a-(n-1)\Delta x)}{n!} \frac{\Delta^n f(a)}{(\Delta x)^n} + R(n),$$

lässt in dieser gleichzeitig $\Delta x \rightarrow 0$ und $n \rightarrow \infty$ streben und erhält daraus seine neue Reihe:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots$$

Ob dieses Ergebnis korrekt ist, lässt sich ohne weitere Konvergenzbetrachtungen eigentlich nicht sagen. Taylor operierte hier mit *unendlich kleinen Größen* und wich damit von den gebräulichen Methoden ab. Wie erstaunlich und gleichermaßen bewunderswert dies war, hebt Klein besonders hervor:

„[...] es ist interessant, sich zu vergegenwärtigen, daß er [Taylor] als ganz junger Mann von 29 Jahren noch unter den Augen Newtons von dessen Grenzmethode abwich. Freilich gelang ihm dadurch auch diese Entdeckung allerersten Ranges.“ (Klein EvhS 1, S. 252)

Auch wenn Klein Taylors Leistung in vollem Maße würdigt, so wird hier in erster Linie nicht der *geniale Mathematiker* dargestellt, sondern der Forscher, der durch unkonventionelle Experimente an sein Ziel gelangt.

Der Mathematiker tritt in diesen Anekdoten als Mensch in den Vordergrund, besonders wenn auch seine Unsicherheit und Probleme mit der Mathematik thematisiert werden. Die Differentialrechnung wurde beispielsweise als etwas Mysterisches empfunden, als ein „*besonderes philosophisches System*, das man nicht beweisen, nur glauben könne, oder geradezu, grob gesagt – Schwindel.“ (Klein EvhS 1, S. 236). Eine ähnliche Haltung beschreibt Klein auch zu den imaginären Zahlen, wenn er Leibniz zitiert, der 1702 gesagt haben soll:

„Die imaginären Zahlen sind eine feine und wunderbare Zuflucht des göttlichen Geistes, beinahe ein Amphibium zwischen Sein und Nicht-sein.“ (Klein EvhS 1, S. 61)

Schüler sind ebenso verunsichert, wenn sie „zum ersten Male von jenem merkwürdigen $i = \sqrt{-1}$ “ (Klein EvhS 1, S. 61) hören. Das Besondere an diesen Beispielen ist, dass der Lernende an ihnen erkennt, dass auch große Mathematiker ähnliche Verständnisprobleme hatten wie sie selbst. Verstehenshürden, die in der Schule auftreten bzw. auftreten können, werden durch den Bezug zur Geschichte relativiert und in gewisser Weise nachvollziehbar. Ob und wie aus solchen Parallelen Erkenntnisse und Maßnahmen entwickelt werden können, thematisiert Klein im Rahmen dieser anekdotischen Stellen nicht. Umgekehrt gibt es jedoch einige (wenige) Stellen, an denen Klein ausführlicher auf mögliche Verständnisprobleme eingeht, um diese gerade mit Hilfe der Integration historischer Elemente zu überwinden. Dies wird im Folgenden beschrieben.

8.3 Exemplarische Konkretisierung der genetischen Methode

In Kapitel 5 konnte mit Bezug auf Toeplitz das in der Vorlesung verwendete genetische Prinzip als „hauptsächlich *direkt historisch*“ (Toeplitz 1932, S. 3) bestimmt werden. Dem gegenübergestellt wird ein *indirekt historisch-genetisches* Vorgehen, bei dem die Entwicklungsgeschichte nicht mit allen Umwegen nachgezeichnet wird. Stattdessen soll die Geschichte nur Anhaltspunkte für mögliche Schwierigkeiten oder einen möglichst natürlichen Zugang liefern. Für den Schulunterricht scheint Klein dieses Vorgehen zu befürworten. So beantwortet Klein im Anschluss an seinen historischen *Exkurs zum allgemeinen Funktionsbegriff* die Frage „*was die Schule von allen diesen Dingen aufnehmen soll*, was der Lehrer und was der Schüler wissen sollte“ (Klein EvhS 1, S. 220) folgendermaßen:

„*Wir wollen nur, daß der allgemeine Funktionsbegriff in der einen oder anderen Eulerschen Auffassung den ganzen Unterricht der höheren Schulen wie ein Ferment durchdringe; er soll gewiß nicht durch abstrakte Definitionen eingeführt, sondern an elementaren Beispielen, wie man sie schon bei Euler in großer Zahl findet, dem Schüler als lebendiges Besitztum überliefert werden.*“ (Klein EvhS 1, S. 221)

Damit soll nur ein kleiner Teil der im Exkurs behandelten Themen direkt in den Schulunterricht einfließen. Die dort ebenfalls angesprochenen funktionen- und mententheoretischen Inhalte dienen dem Lehrer als Hintergrundwissen. Klein gibt an dieser Stelle jedoch keine Hinweise, inwiefern dieses zusätzliche Wissen in den Schulunterricht einfließen kann.³ Konkreter beschreibt er die Art und Weise, wie Geschichte der Mathematik in den Unterricht einfließen kann, im Kapitel zur *Logarithmus- und Exponentialfunktion* (Klein EvhS 1, S. 156–175).

In Kapitel 1.4.2 wurde bereits gezeigt, dass ein wesentlicher Unterschied zwischen Schul- und Hochschulunterricht zu Kleins Zeit darin bestand, dass in der Schule *algebraische Analysis* unterrichtet wird, während auf der Hochschule die *Infinitesimalrechnung* Einzug gehalten hat. Diese Diskontinuität gilt es Klein zufolge zu beheben durch die Einführung des „*glatten Infinitesimalkalkül[s]*“ (Klein EvhS 1, S. 167) in der Schule. Die Rolle, die die Infinitesimalrechnung spielen kann, wird besonders deutlich, wenn man die historische Entwicklung des Logarithmusbegriffs untersucht und mit der aktuellen Schulpraxis vergleicht. Die Behandlung des Logarithmus in der Schule verhalte sich dieser Entwicklung gegenüber nämlich wie

³Man beachte, dass zu jener Zeit der Gymnasiallehrer angehalten war, in den Ferien forschend Mathematik zu betreiben (vgl. Kapitel 1.1). Den aktuellen Stand der Forschung im Blick zu behalten, könnte somit alleine schon aus diesen Gründen wünschenswert sein.

„eine von recht ungünstigem Standpunkte aus genommene Projektion“ (Klein EvhS 1, S. 158).

„[...] – kurz, wollen wir wirklich zu einem vollen Verständnis der Theorie des Logarithmus vordringen, so wird es am besten sein, wenn wir ihren historischen Werdegang einmal in großen Zügen verfolgen.“ (Klein EvhS 1, S. 157)

Besonderes Augenmerk legt Klein bei dieser historischen Darlegung auf den zumindest im Ansatz gleichen Gedankengang des Schotten John Napier (1550–1617) und des Schweizer Jobst Bürgi (1552–1632), welche die ersten „wirklichen Logarithmentafeln“ (Klein EvhS 1, S. 158) berechneten. Beide verfolgen damit, so Klein, das Ziel, jedem (positiven reellen) Wert x seinen Logarithmus zuzuordnen⁴ und gehen dabei, ähnlich wie es Klein auch bezüglich des Vorgehens auf der Schule beschreibt, von den Lösungspaaren der Gleichung $x = b^y$ aus, wobei zunächst nur ganzzahlige y eingesetzt werden. Statt aber, wie in der Schule gebräuchlich, bei beliebigem festem b zu rationalen y überzugehen, wählen sie zunächst b sehr nahe bei 1 – Bürgi verwendet $b = 1,0001$, Napier $b = 0,9999999$ – und erhalten damit alleine durch das Einsetzen ganzzahliger Werte y schon relativ viele, dicht aufeinanderfolgende x -Werte und umgehen zudem das Problem der Mehrdeutigkeit, das beim Übergang zu rationalen y auftreten würde (vgl. Klein EvhS 1, S. 159f).

Der Abstand zweier so gewonnener aufeinanderfolgender x -Werte ist (bei Bürgi)

$$\Delta x = (1,0001)^{y+1} - (1,0001)^y = (1,0001)^y(1,0001 - 1) = \frac{x}{10^4}$$

oder, betrachtet man den Kehrwert und bezeichnet die Differenz 1 der Exponenten allgemeiner als Δy :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{10^4}{x}$$

Durch geeignete Skalierung bzw. Versetzung des Dezimalkommas der Logarithmen (vgl. Klein EvhS 1, S. 160) ergibt sich eine Zahlenreihe, die der Differenzengleichung

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x}$$

genügt (vgl. Klein EvhS 1, S. 160). An dieser Stelle lässt sich bereits ein Zusammenhang zum Integral der Hyperbel erkennen. Klein deutet diese Differenzengleichung geometrisch und erhält den *natürlichen Logarithmus* als Grenzwertprozess mit $\Delta x \rightarrow 0$ und hält fest, dass das „in der Tat auch der *historische Weg*“ (Klein EvhS 1, S. 161) war.

⁴Dies ist aus mathemathikhistorischer Sicht nicht richtig. Tatsächlich unterscheiden sich die beiden Zugänge wesentlich voneinander (vgl. Kapitel 8.4.2).

Die von Klein anhand der historischen Entwicklung beschriebene mathematische Analyse wird in Kapitel 9.2 genauer diskutiert, da es sich dabei in gewissen Sinne um eine didaktisch orientierte Sachanalyse handelt. Zunächst ist festzuhalten, dass Klein historische Entwicklungen nachzeichnet, um daraus für den schulischen Mathematikunterricht zu lernen. So soll in der Schule nicht etwa der Gedankengang von Bürgi oder Napier explizit nachempfunden werden. Vielmehr soll der zukünftige Lehrer aus diesem Exkurs entnehmen, dass „*die richtige Quelle zur Einführung neuer Funktionen die Quadratur bekannter Kurven*“ (Klein EvhS 1, S. 168) ist. Statt also nach Lösungspaaren der Gleichung $x = b^y$ zu suchen, soll der Logarithmus direkt aus der Integration der Hyperbel gewonnen werden (vgl. Klein EvhS 1, S. 168). Damit plädiert Klein auch hier dafür, den historischen Verlauf nur richtungsweisend im Sinne der *indirekt genetischen Methode* zu nutzen.

8.4 Einordnung der historischen Momente

Gregor Nickel (2013) hat eine Klassifikation für den unterschiedlichen Einsatz von Geschichte der Mathematik in der Lehramtsausbildung vorgelegt und Möglichkeiten und Gefahren benannt. Dabei zeigt er unter anderem, inwiefern Mathematikgeschichte als *hochschuldidaktisches Hilfsmittel* eingesetzt werden, aber auch ein *Hindernis* bzw. eine *Gefahr* darstellen kann. Unabhängig davon muss, so der Autor, Mathematikgeschichte auch als *Lerninhalt eigenen Rechts* angesehen werden.

Vor diesem Hintergrund lassen sich die historischen Passagen der Kleinschen Vorlesung einordnen und gegenüber alternativen Optionen abgrenzen.

8.4.1 Mathematikgeschichte als hochschuldidaktisches Hilfsmittel

Nickel unterscheidet unter anderem zwischen dem *anekdotischen* bzw. *tröstenden* Einsatz von Mathematikgeschichte, der dazu dient, die oft trocken wirkende Mathematik unterhaltsamer zu gestalten, und der anspruchsvolleren *genetischen* Vorgehensweise, die eine tiefere Kenntnis historischer Zusammenhänge voraussetzt (vgl. Nickel 2013, S. 255–258). Analog zu Toeplitz benennt er dabei sowohl ein *implizit-historisches* Vorgehen, bei dem es hauptsächlich um die „Sensibilisierung des Lehrenden für (historisch und damit auch individuell wirksame) Verstehenshindernisse“ (Nickel 2013, S. 258) geht, als auch ein *explizit-historisches* Vorgehen, bei dem die „Inhalte parallel zu [...] ihrer historischen Genese“ (Nickel 2013, S. 258) vorgestellt werden.

Beide Facetten – die anekdotische und genetische – lassen sich, wie die vorhergehende Analyse zeigt, in der Vorlesung wiederfinden. Es wurde gezeigt, dass Klein für die Anwendung der genetischen Methode in der Schule ein *implizit historisch-genetisches* Vorgehen im Sinn hat. Er setzt jedoch auch die *explizit historisch-genetische* Methode ein (vgl. neben Kapitel 8.3 auch Kapitel 5.3).

Zusätzlich benennt Nickel noch weitere Facetten, die in Kleins Vorlesung nicht verwendet werden: Das ist zum einen der *verfremdende* Gebrauch, der gerade im Lehramtsstudium für die Primarstufe bedeutsam sein kann. Der zukünftige Lehrer wird in die Rolle des Lernenden versetzt, da bekannte mathematische Gegenstände im historischen Kontext nicht notwendig erkannt werden.

„Ein spezifisch auf das spätere Berufsfeld Schule bezogener Gebrauch des Historischen ist *verfremdend*. Gerade beim Lehramt für den Primarbereich liegt der eigene schulische Lernprozess zeitlich weit zurück, und somit entfällt sehr oft eine lebhafte Erinnerung an eigene Schwierigkeiten [...]“ (Nickel 2013, S. 258)

Zum anderen lässt sich Mathematikgeschichte *exemplarisch* einsetzen: Der Lehramtsanwärter soll authentisch forschend Mathematik betreiben und dazu eignen sich historische Kontexte in besonderem Maße (vgl. Nickel 2013, S. 259).

Dass diese beiden Aspekte bei Klein nicht vorkommen, ist aufgrund der damaligen Situation nicht überraschend. In seiner Vorlesung werden nur Studenten des gymnasialen Lehramts angesprochen. Diese bilden nicht die von Nickel beschriebene Hauptzielgruppe des Verfremdungseffekts. Der exemplarische Gebrauch erlaubt „eine ‚Erfahrung Mathematik‘ im – zwar nicht aktuellen, aber doch authentischen – Forschungskontext“ (Nickel 2013, S. 259). Das hat Klein aber mit der *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus* nicht im Sinn, zumal das Lehramtsstudium zu dieser Zeit bereits forschende Aktivitäten beinhaltet hat. Eine Umsetzung im historischen Kontext war somit nicht notwendig.

8.4.2 Mathematikgeschichte als Hindernis

Nickel warnt vor einer *monumentalischen* Darstellung der historischen Zusammenhänge, bei der Mathematik als von „unerreichbaren Giganten“ gemacht erscheint, oder im Gegensatz dazu einem *jovialen* Umgang, bei dem „zugunsten der propagierten Fortschrittsideologie von allem historischem Kontext abstrahiert“ wird (vgl. Nickel 2013, S. 260). Klein umgeht beide dieser Gefahren, stellt er doch nie übertrieben seine mathematischen Vorgänger als unantastbare Genies dar oder spielt ihre Leistungen im umgekehrten Falle als trivial oder aus heutiger Sicht nicht nennenswert herunter.⁵

⁵Für die wörtlichen Zitate des Abschnitts gilt (Nickel 2013, S. 260)

Klein muss sich allerdings prinzipiell dem Vorwurf der *antiquarischen* Karikatur stellen:

„Hier [beim antiquarischen Gebrauch] sammelt und hortet der unreflektierte und unkontrollierte historische Sinn längst verstaubte Kuriositäten, schließt sich mit diesen in einem Museum ein und gleichzeitig die Anfragen und Bedürfnisse der Gegenwart aus.“ (Nickel 2013, S. 260)

Zwar begründet Klein historische Exkurse und setzt sie stets in engen Bezug zur gegenwärtigen Situation und den in der Vorlesung behandelten Gegenstände; sie lassen sich insofern als kontrolliert eingesetzt bezeichnen. Ohne die von Klein erwartete Nachbereitung der Vorlesung und ein anschließendes Eigenstudium weiterführender Arbeiten und Bücher mitzudenken, gleichen die mathematikhistorischen Passagen jedoch einer „rein referierende[n] Präsentation der Werke historischer Autoren“ (Nickel 2013, S. 260) und entsprechen damit in dem von Nickel angesprochenen Sinn einer eher *antiquaristischen* Darstellung.

Der antiquaristische Gebrauch birgt zudem die Gefahr, dass der mathematische und der historische Gehalt *unterkomplex* wiedergegeben werden (vgl. Nickel 2013, S. 260). Dies kann Klein im Allgemeinen nicht vorgeworfen werden, da u.a. stets darauf aufmerksam gemacht wird, dass er in den historischen Einschüben keinen Anspruch auf Vollständigkeit erhebt und meist auf weiterführende Literatur verweist, wie man bspw. in dem historischen Exkurs zur Entstehung der negativen Zahlen sieht:

„Wollen Sie nun noch *Literatur* über die Fragen der Geschichte der negativen Zahlen finden, so empfehle ich *Tropfkes ‚Geschichte der Elementarmathematik‘* als eine ausgezeichnete Materialsammlung, die viele Einzelheiten über die Entwicklung der elementaren Begriffe, Anschauungen und Benennungen in übersichtlicher Darstellung enthält.“ (Klein EvhS 1, S. 30)

Bei der historischen Darstellung des Logarithmus stellt Klein jedoch eine Analogie zwischen dem Gedankengang von Bürgi und Napier her (vgl. Kapitel 8.3), die sich nicht bis zum Ende aufrecht erhalten lässt und zumindest den Gedankengang von Napier deutlich vereinfacht darstellt: Bei genauerer Betrachtung, unterscheiden sich Bürgis und Napiers Vorgehen deutlich. Während Bürgi tatsächlich mithilfe arithmetischer Mittel Logarithmentafeln erstellte, ging Napier von einer kinematischen Sichtweise aus und stellte seine Ergebnisse, anders als von Klein suggeriert, nicht als Logarithmentafel dar (vgl. Clark und Montelle 2012, S. 263f). Ab der 4. Auflage des veröffentlichten Manuskripts wird dies in einer Fußnote von dessen Herausgeber Franz Seyfarth klargestellt:

„Nach der Darstellung Kleins liegt der Bürgischen und Napierschen Logarithmenberechnung der gleiche Gedankengang zu Grunde. Das ist in Wahrheit nicht der Fall. Nur im *ersten* Stadium seiner Überlegungen stimmt Napier mit Bürgi

überein. Um die Logarithmen in einer erträglich langen Zeitspanne mit der Genauigkeit berechnen zu können, die Napier anstrebte, waren gegenüber Bürgi neue und wesentlich tiefer liegende Gedanken notwendig.“ (Klein EvhS 1, S. 160)

8.4.3 Mathematikgeschichte als Lerninhalt eigenen Rechts

Nickel beschreibt zudem die Bedeutung der Mathematikgeschichte als selbstständigen Lerngegenstand in einem *kulturhistorischen* und *kritisch-reflektierenden* Kontext (vgl. Nickel 2013, S. 8ff). Auch diese beiden Elemente lassen sich, wenn auch nicht stark ausgeprägt, bei Klein entdecken.

Kulturhistorische Bemerkungen findet man in einigen Kapiteln. Besonders auffällig sind diese im ‚Zwischenstück‘, in dem Klein einen knappen Überblick über die Mathematikgeschichte von der Antike bis ins 19. Jahrhundert gibt mit dem Ziel, verschiedene Entwicklungsreihen in der Mathematik zu unterscheiden⁶. In diesem Zwischenstück hebt er besondere Kulturleistungen der Mathematik hervor, wie bspw. „die *Inder als Schöpfer unseres modernen Ziffernsystems*“ (Klein EvhS 1, S. 87). Zudem lässt sich nachweisen, dass der Kleinsche Blick auf die Entwicklungsgeschichte der Mathematik mit Hilfe der in Kapitel 6 beschriebenen systematisierenden Entwicklungsreihen grundsätzlich viele Züge der Stilgeschichte trägt: Klein unterscheidet die Entwicklungsreihen anhand von Charakteristika, wie beispielsweise einem spezifischen Wissenschaftsbild oder spezifischen Denk- und Arbeitsweisen. Diese beeinflussen sowohl die Darstellung der Ergebnisse als auch die Auswahl der Forschungsgegenstände. Diese charakterisierenden Eigenschaften nutzt er stilbildenden Elementen gleich. Eine inhaltliche Anbindung an die Entwicklungsgeschichte anderer kultureller Hervorbringungen findet jedoch nicht statt (vgl. Allmendinger und Spies 2013, S. 189ff).

Ein *kritischer* Zugang im Sinne Nickels erörtert den Unterschied von Genese und Resultat eines mathematischen Gegenstands und hebt dadurch unter anderem die „enorme Leistung der axiomatisch-deduktiven Kondensation“ hervor und motiviert innermathematische Fragen (vgl. Nickel 2013, S.10).⁷

Ein Beispiel dafür aus der Vorlesung findet man in einem kurzen Exkurs zum Thema *Cardanische Lösung der Gleichung dritten Grades*. Die Lösungen beruhen auf der Formel

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

⁶vergleiche dazu auch Kapitel 6

⁷Wörtliche Zitate dieses Abschnitts beziehen sich ebenfalls (Nickel 2013, S.10)

bei der unter bestimmten Bedingungen reelle Lösungen entstehen können, obwohl bei der Rechnung die Wurzel aus einer negativen Zahl zu ziehen ist. Man bezeichnet diesen Fall als „Casus irreducibilis“, die Cardanische Formel schien damals an dieser Stelle zu keiner vernünftigen Lösung zu führen. Für diese Fälle entwickelte man alternative trigonometrische Lösungswege, die man erst viel später mit der algebraischen Lösung in Verbindung bringen konnte (vgl. Klein EvhS 1, S. 147).

Hier wird zum einen deutlich, welche Bedeutung die Einführung der komplexen Zahlen hat, zum anderen aber auch, wie erst im Rückblick viele Dinge in der Mathematik zusammengesetzt werden können.

Über kurze Bemerkungen dieser Art geht Klein allerdings nicht hinaus und gibt daher nur einen kleinen Einblick in dieses Feld der historischen Reflexion. Es kann daher nur von Ansätzen eines *kritischen* Zugangs die Rede sein, da, wie Nickel betont, eine solche Vorgehensweise eine intensive Auseinandersetzung mit dem Thema und der dazugehörigen Geschichte voraussetzt:

„Die einigermaßen adäquate Präsentation eines mathemathikhistorischen Themas kann sicherlich nicht nebenbei in einer kurzen Bemerkung erfolgen, sondern benötigt Zeit und Aufmerksamkeit sowie ein solides Vorwissen der entsprechenden mathematischen Zusammenhänge.“ (Nickel 2013, S. 10).

Zusammenfassung und Bilanz

In diesem Kapitel wurde gezeigt, welche Rolle die Geschichte der Mathematik in der Vorlesung spielt. Klein nutzt historische Exkurse und Bemerkungen, um den behandelten Gegenstand in einen größeren Zusammenhang einzuordnen, was die historischen Momente als Mittel der Vernetzung erscheinen lässt. Anekdoten nehmen den Mathematiker als Menschen mit seinen Zweifeln in den Blick. Klein hebt damit zum einen besondere Leistungen hervor und weckt stellenweise gerade dadurch die Faszination für den Gegenstand, zeigt aber auch Grenzen der heute als Genies gehandelten Personen auf. Dadurch wird der Mathematiker und seine Leistung nahbarer und die eigenen Verstehenshürden erscheinen weniger unüberwindbar.

Neben diesen beiden eher narrativen historischen Einschüben, finden sich auch einige – wenn auch wenige – Vorschläge einer konstruktiven Umsetzung (von Geschichte der Mathematik) im Schulunterricht. Historisches Wissen ist Klein zufolge notwendig für eine gelungene Umsetzung des genetischen Prinzips und damit fester Bestandteil seiner Vorlesungsreihe und wird auch mit Bezug auf die direkte und indirekte Anwendbarkeit in der Schule diskutiert.

Mithilfe Nickels Klassifikation mathemathikhistorischer Elemente in der Lehramtsausbildung konnte gezeigt werden, dass Klein sich vornehmlich der Mathematikgeschichte als inhaltliches Mittel bedient. Methodische Ansätze, wie die Verfremdung und das Exemplarische, verfolgt er nicht. Seine historischen Einschübe sind akkurat aufbereitet und stellen die Protagonisten weder als Helden noch als Unwissende dar. Klein erweist sich im Bereich der Mathematikgeschichte dabei als sehr belesen. Allerdings arbeitet er im engeren mathemathikhistorischen Sinne nicht wissenschaftlich, da er seine Ausführungen nicht im Detail durch Quellen oder Sekundärliteratur belegt.

Durch die inhaltlich breite und gleichzeitig knappe Darstellung sind Exkurse zu historischen Entwicklungen anspruchsvolle Abschnitte, die eine intensive Nachbereitung seitens der Hörer verlangen, um die Inhalte in ihrer vollen Bedeutung zu erkennen. Am Ende der Vorlesung begründet Klein seine mathemathikhistorischen Darlegungen damit, dass Lehrer historisches Wissen benötigen, um ihren Unterricht genetisch zu gestalten. Es fällt jedoch auf, dass Klein nur sehr selten und meist nur in kurzen Bemerkungen, den Bezug zwischen Geschichte und Schule konkret herstellt – das Kapitel zum Logarithmus bildet hier die Ausnahme. Klein liefert eher Anregungen, die der geneigte Student eigenständig in seinen späteren Unterricht integrieren muss.

Kapitel 9

Die didaktische Perspektive

Klein richtet sich mit den Vorlesungen zur *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus* an fortgeschrittene Lehramtsstudenten und mit den dazu veröffentlichten Manuskripten auch an praktizierende Lehrer. Er legt, anders als in vorangegangenen Vorträgen, seinen Schwerpunkt auf den „*Unterrichtsstoff selbst*“ (Klein EvhS 1, S. v), um

„dem Lehrer – oder auch dem reiferen Studenten – Inhalt und Grundlegung der im Unterricht zu behandelnden Gebiete, unter Bezugnahme auf den tatsächlichen Unterrichtsbetrieb, vom Standpunkte der heutigen Wissenschaft in möglichst einfacher und anregender Weise überzeugend darzulegen.“ (Klein EvhS 1, S. v)

Klein geht daher in den meisten Fällen von der tatsächlichen Schulpraxis aus oder stellt sie im Anschluss an die Untersuchungen diesen gegenüber; das Kapitel *Einführung der Zahlen auf der Schule* (vgl. Klein EvhS 1, S. 6-9) sowie das Kapitel zu den *komplexen Zahlen im Unterricht* (vgl. Klein EvhS 1, S. 81-82) sind typische Beispiele. Klein steht in engem Kontakt mit seinem ehemaligen Mitarbeiter und praktizierendem Lehrer Schimmack, so dass seine Darlegungen – wie er betont – nicht auf Vermutungen oder seinen eigenen Schulerfahrungen aus der Kindheit beruhen (vgl. Klein EvhS 1, S. 3). Auch wenn sich in vielen Fällen, wie in Kapitel 7 gezeigt, daran hochschulmathematische Diskussionen anschließen, die ein profundes Fachwissen voraussetzen, so wird auf diese Weise immer wieder der Schulstoff selbst stärker in den Blick genommen:

Einerseits werden dabei die Ziele und Forderungen der *Meraner Reform* widergespiegelt.¹ Die Vermittlung der Ideen der Meraner Reform kann damit als ein indirektes Ziel der Vorlesung angesehen werden. Andererseits erinnert die fachliche Auseinandersetzung mit den schulmathematischen Inhalten an eine aus heutiger mathematikdidaktischer Sicht *didaktisch orientierte Sachanalyse*. Die Vorlesung weist somit erste Ansätze stoffdidaktischen Arbeitens auf. Zusätzlich lassen zahlreiche Randbemerkungen auf eine ausgeprägte didaktische Haltung schließen, die

¹Zu Kleins Beteiligung an dieser Reform siehe Kapitel 1.2.3

sich sowohl auf die praktische Umsetzung im Mathematikunterricht als auch auf den Bildungsauftrag der Mathematik bezieht.

Naturgemäß kann Klein auf keine Forschung in diesem Bereich zurückgreifen. Die ersten mathematikdidaktisch orientierten Habilitationen wurden beispielsweise erst Anfang des 20. Jahrhunderts von Rudolf Schimmack (Göttingen, 1911) und Hugo Dingler (München, 1912) eingereicht (vgl. Toepell 2003, S. 177). Zu Kleins Zeit begann man gerade erst, Mathematikdidaktik als wissenschaftliches Gebiet eigenen Rechts zu erschließen; sie wurde daher bestenfalls als Randgebiet der Mathematik verstanden. Gleichwohl macht es sich Klein zur Aufgabe, den Lehramtsstudenten „den gegenseitigen Zusammenhang der Fragen der Einzeldisziplinen vorzuführen, der in den Spezialvorlesungen nicht genügend zur Geltung kommt“ (Klein EvhS 1, S. 2) – eine Aufgabe, die Th. Jahnke heute der Mathematikdidaktik zuspricht:

„In dem Maße, in dem die Mathematik an den Hochschulen zersplittert, fällt der Didaktik die Aufgabe zu, sie als Ganzes zu reflektieren und auch gegenüber der Öffentlichkeit zu referieren. [...] beim Lehramtsstudium [ist] vorsätzlich darauf zu achten, daß die einzelnen Themen und Methoden zu einem Ganzen sich verbinden und dessen Charakteristik erfahrbar wird.“ (Jahnke 1998, S. 65f)

Einige Bemerkungen Kleins sind damit zumindest im Ansatz in modernen didaktischen Konzepten aufgehoben – insbesondere auch die bereits im Vorfeld beschriebenen Prinzipien –, andere Vorstellungen lassen sich aus heutiger Sicht hinterfragen. Im Folgenden wird anhand typischer Textstellen analysiert, inwiefern Felix Klein in der *Elementarmathematik* eine auch aus heutiger Sicht didaktische Perspektive zugesprochen werden kann.

9.1 Curricular: Die Vorlesung im Spiegel der Meraner Reform

Klein selbst stellt im Verlaufe der Vorlesung immer wieder einen Bezug zur Meraner Reform her. Das geschieht jedoch eher beiläufig und nicht in systematischer Form, so dass man dem Werk keine umfangreiche und vollständige Beschreibung der Ziele und Ergebnisse dieser Reform entnehmen kann. Jedoch zeigt sich in der Wahl der Themen und deren Präsentation die enge Verbindung zu den Inhalten der Reform. Wie bereits in Kapitel 1.2.3 beschrieben orientiert sich die Meraner Reform dabei an zwei *zentralen Ideen*:

- Stärkung des räumlichen Anschauungsvermögens und
- Erziehung zum funktionalen Denken.

Nachdem in Kapitel 3 gezeigt wurde, welche bedeutende Stellung die (Raum-) Anschauung in der Vorlesung einnimmt, soll hier anhand der Idee der *Erziehung zum funktionalen Denken* herausgearbeitet werden, inwiefern der Vorlesungsinhalt und -aufbau mit den Reformgedanken im Einklang steht.

Ich orientiere mich dabei an den von Krüger beschriebenen Aspekten funktionalen Denkens: *Fusion von Arithmetik und Geometrie*, *Funktion und graphische Darstellung*, *Propädeutik des funktionalen Denkens*, *Analysis als Höhepunkt funktionalen Denkens* und *Funktionales Denken und Anwendung* (vgl. Krüger 2000, S. 167-228). Der Aspekt *Funktionales Denken in der Geometrie* bleibt hier weitestgehend unberührt, da in dem hier untersuchten 1. Band der Vorlesungsreihe die Geometrie nicht als eigenständiges Thema behandelt wird.²

9.1.1 Fusion von Arithmetik und Geometrie

Das sogenannte *Fusionsprinzip* kann als inhaltliches und methodisches Gestaltungsprinzip für Schulunterricht verstanden werden. Klein wünscht sich, dass die in der Schule oft praktizierte *Reinheit der Methoden* durch eine stärkere Vernetzung einzelner mathematischer Gebiete ersetzt oder um diese erweitert wird. So wird in den Meraner Vorschlägen ein „gegenseitiges Durchdringen“ von Arithmetik und Geometrie einerseits durch geometrische Veranschaulichungen arithmetischer Sachverhalte und andererseits durch die präzise Formulierung geometrischer Tatsachen durch analytische Formeln erreicht (vgl. Krüger 2000, S. 173f).³

In Kapitel 2 konnte gezeigt werden, dass der Vernetzungsgedanke im oben beschriebenen Sinne – Geometrie als Hilfsmittel zur Beschreibung arithmetischer Sachverhalte – als wesentliches Merkmal des 1. Bandes der *Elementarmathematik* angesehen werden kann. Umgekehrt werden im 2. Band der Vorlesungsreihe geometrische Sachverhalte durch arithmetische und analytische Formeln präzise beschrieben (vgl. Klein EvhS 2, S. 2):

„Im vorigen Semester habe ich die abstrakten Erörterungen der Arithmetik, Algebra und Analysis stets durch Figuren und graphische Methoden belebt, die einem die Dinge näher bringen und vielfach erst verständlich machen, warum man sich mit ihnen beschäftigt; analog will ich jetzt die Raumschauung, die natürlich an erster Stelle stehen bleiben muß, von vornherein durch analytische Formeln begleiten, welche in höchstem Maße die präzise Formulierung geometrischer Tatsachen erleichtern.“ (Klein EvhS 2, S. 2f)

²Dieser Aspekt ließe sich durch eine Analyse des 2. Bandes nachweisen.

³Den Begriff *Arithmetik* verwendet Klein dabei im damaligen schulischen Sprachgebrauch: Neben der *Lehre ganzer Zahlen* fällt auch die Algebra und bisweilen die Analysis unter diesen Begriff (vgl. Klein EvhS 2, S. 2).

Der Vernetzungsgedanke ist ein charakteristisches Merkmal der gesamten ‚Kleinschen Mathematik‘ (vgl. Kapitel 1.2). Das Streben nach Vernetzung oder Fusion mathematischer Teilgebiete lässt sich nicht ausschließlich auf die Forderungen der Meraner Reform zurückführen. Dennoch ist die in der Vorlesung im Vordergrund stehende Verbindung von Geometrie und Arithmetik in Bezug zu den Reformgedanken zu lesen, ebenso wie auch ein Großteil der anderen Facetten funktionalen Denkens in der Vorlesung verankert ist.

9.1.2 Funktion und graphische Darstellung.

Der Umgang mit Funktionen und deren graphischer Darstellung ist ein wesentlicher Bestandteil des funktionalen Denkens. Im Rahmen des Meraner Lehrplans nimmt das langsame Heranführen daran eine wichtige Rolle ein. Krüger zeigt anhand typischer Aufgabenbeispiele, die bis heute noch im Mittelstufenunterricht vorkommen, wie die Schüler mit dieser Denkweise vertraut gemacht werden sollen (vgl. Krüger 2000, S. 181-185).

Klein thematisiert diese in der Schule erwünschten ersten Erfahrungen mit dem „Denken in Kurven“ (Höfler 1909, S. 23)⁴ in der *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus* nicht. Im algebraischen Teil wird jedoch ein Fokus auf die (graphisch unterstützte) geometrische Lösung von Gleichungen gelegt, wie beispielsweise der Umgang mit parameterabhängigen Gleichungen zeigt (vgl. Klein EvhS 1, S. 94ff).

Klein ist nicht nur an der geometrischen Deutung und anschließenden Lösung solcher Gleichungen interessiert, sondern auch an graphischen Darstellungen oder Modellen konkreter Beispiele:

„Es kommt nun darauf an, [diese] Deutungen an *konkreten Beispielen* näher zu durchdenken; wir besitzen [...] in unserer Sammlung Modelle, die ich Ihnen jetzt vorführen will.“ (Klein EvhS 1, S. 102)

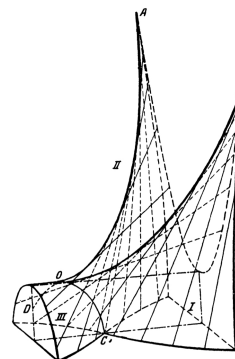


Abb. 9.1: (Klein EvhS 1, S. 107)

Abbildung 9.1 zeigt eine solche graphische Darstellung der Tangentenfläche der untersuchten Raumkurve am Beispiel der reduzierten biquadratischen Gleichung (vgl. Klein EvhS 1, S. 106f).

⁴zitiert nach (Krüger 2000, S. 181)

Hier wird zum einen anhand anspruchsvoller Beispiele aus der höheren Mathematik das „Denken in Kurven“ illustriert, zum anderen bezieht Klein auch Elemente der Raumschauung – als weiteres Ziel der Meraner Reform – mit ein.

9.1.3 Propädeutik des funktionalen Denken.

Der Vorbereitung des funktionalen Denkens kommt nach dem Meraner Lehrplan im Arithmetikunterricht eine besondere Bedeutung zu. In der Umsetzung handelt es sich dabei beispielsweise um Übungen, die den Übergang von der Arithmetik zur Algebra erleichtern sollen, indem durch gezieltes Einsetzen von konkreten Werten in einen vorgegebenen Term das Änderungsverhalten untersucht wird (vgl. Krüger 2000, S. 187–192), sprich der Veränderlichenaspekt⁵ von Variablen stärker akzentuiert wird. All diesen Aufgabentypen ist die „Untersuchung der Auswirkungen von systematischen Variationen“ (Krüger 2000, S. 192) gemein.

Im Gegensatz zu den anderen Merkmalen funktionalen Denkens wird diese Facette in der hier untersuchten Vorlesung nicht in besonderem Maße in den Blick genommen. So stehen im Kapitel zur Arithmetik nicht Fragen bezüglich deren Vermittlung, sondern Fragen der theoretischen Grundlegung im Vordergrund. Klein spricht zwar den schwierigen Übergang von der Zahlen- zur Buchstabenrechnung an und stellt fest, dass „der Schüler [...] allmählich an so starkes Abstrahieren gewöhnt werden“ (Klein EvhS 1, S. 8) müsse. Er nutzt diese Stelle jedoch nicht, um mögliche Vorerfahrungen des funktionalen Denkens herauszuarbeiten. Auch bei der Festlegung $(-1) \cdot (-1) = 1$, bei welcher – je nach Umsetzung – funktionales Denken angebahnt werden könnte (vgl. Krüger 2000, S. 188, Beispiel 7), stellt Klein selbst keinen Bezug zu funktionalen Zusammenhängen her.

Ob er diese Propädeutik dennoch mitdenkt, lässt sich anhand des Vorlesungsmanuscripts nicht nachweisen. Es ist jedoch zu vermuten, dass Klein dies als eine Frage der praktischen Umsetzung im Unterricht einstuft, die er ausdrücklich nicht explizit behandeln möchte (Näheres dazu in Kapitel 9.3.1).

9.1.4 Analysis als Höhepunkt des funktionalen Denkens.

Bezüglich der im Zuge der Meraner Reform sehr kontrovers diskutierten Frage, ob die Infinitesimalrechnung in der Schule eingeführt werden solle, bezieht Klein klar Stellung. Die Differential- und Integralrechnung versteht er nicht nur als Höhepunkt, vielmehr als Ziel aller Bemühungen um das funktionale Denken. Analysis

⁵in der Terminologie von Malle (1993).

soll nicht „als neue abstrakte Disziplin, sondern im organischen Aufbau innerhalb des Gesamtunterrichts“ (Klein EvhS 1, S. 240) eingeführt werden.

Der damalig aktuelle Unterricht ist seiner Meinung nach zu sehr auf den Eulerschen Funktionsbegriff ausgerichtet, wo doch gerade die Infinitesimalrechnung einen genetisch orientierten und von Anschauung geleiteten Unterricht ermögliche. Man habe daher generell umzudenken und den Mathematikunterricht stärker an der systematischen Analysis (mit ihrem „glatten Infinitesimalkalkül“ (Klein EvhS 1, S. 167)) auszurichten.

Ungeachtet der Tatsache, dass im Mathematikunterricht damals generell nicht auf die Infinitesimalrechnung hingearbeitet wurde, wurde diese an vielen Stellen unausgesprochen in den Unterricht integriert. Gerade durch solche Verschleierung entstanden, Klein zufolge, Verstehenshürden. In der Vorlesung verfolgt Klein daher das Ziel, seine Hörer auf diese Schiefelage aufmerksam zu machen. Er verdeutlicht an einigen Beispielen, wie die Infinitesimalrechnung auch in den siebziger und achtziger Jahren des 19. Jahrhunderts, als diese sogar behördlich verboten war, ‚heimlich‘ im Schulunterricht untergebracht wurde (vgl. Klein EvhS 1, S. 239):

Bereits die Berechnung des Kreisumfangs und -inhalts mit Hilfe der Approximation durch reguläre Polygone entspricht bei näherer Betrachtung einer Integration. Auch in der Physik wird bei der Einführung von Begriffen wie Geschwindigkeit oder Beschleunigung Infinitesimalrechnung implizit vorausgesetzt (vgl. Klein EvhS 1, S. 239).

Ein umstrittenes Beispiel für „verkappte Infinitesimalrechnung“ (Klein 1907, S. 108) in der Schule ist die sogenannte *Schellbach-Methode* – ein scheinbar Analysis-freies Verfahren zur Berechnung von Extremstellen –, welche Klein nicht nur in der hier vorgestellten Vorlesung ausgiebig erörtert:

„Hat eine stetige Funktion $f(x)$ für $x = x_1$ und $x = x_2$ denselben Wert, so muß man sich dieser Grenzstelle (einer dieser Grenzstellen) von x_1 und x_2 aus gleichzeitig stets so nähern können, daß die zugehörigen Wertepaare der Funktion einander gleich bleiben. Nun lassen sich in der Gleichung $f(x_1) - f(x_2) = 0$ die Glieder mit gleichhohen Potenzen von x_1 und x_2 zusammenfassen und dann die linke Seite der Gleichung durch $x_1 - x_2$ dividieren, da ein etwa vorhandenes konstantes Glied von $f(x)$ in der Differenz $f(x_1) - f(x_2)$ nicht vorkommt. Gelangen daher x_1 und x_2 bei der Annäherung an die Grenzstelle x , d.h. ersetzt man x_1 und x_2 in der umgeformten Gleichung durch x , so entsteht eine Gleichung für x . Die Wurzeln dieser Gleichung sind die Werte von x , für welche $f(x)$ Grenzwerte annehmen kann.“ (Schellbach 1860, S. 78)

Übersetzt man dieses Vorgehen in eine modernere Sprech- und Schreibweise, erhält man

$$\lim_{x \rightarrow x_1} \left(\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \right) = 0$$

und damit das heute aus der Differentialrechnung bekannte *notwendige Kriterium* für (relative) Extrema der Funktion f . Die von Schellbach beschriebene Methode wurde von seinen Schülern unverändert übernommen und nach seinem Begründer benannt. Damit wurden Methoden wie sie bei Fermat, Leibniz und Newton zu finden sind, unter Schellbachs Namen in die Schulen gebracht. Klein zufolge hatte Schellbach genau dies im Sinn, vermied jedoch die klare Benennung, um den behördlichen Vorgaben zu entgehen (vgl. Klein EvhS 1, S. 240).

Dies stellen Heike Biermann und Hans Niels Jahnke in Frage. Unbestritten sei, dass es möglich ist, die Schellbach-Methode „in die Sprache der modernen Differentialrechnung“ (Biermann 2010, S. 319) zu übersetzen; daraus ließe sich jedoch nicht ableiten, ob Schellbach dies auch bezweckte. Jahnke bestreitet dies, wenn er sagt, dass es sich bei dieser Methode „um einen natürlichen Bestandteil des Paradigmas der algebraischen Analysis gehandelt hat“ (Jahnke 1990, S. 69).

Auch wenn Schellbach durchaus Grenzprozesse beschreibt, wenn er etwa von der „Annäherung an die Grenzstelle“ (Schellbach 1860, S. 78) spricht, so sind doch die auszuführenden Schritte alle mit algebraischen Methoden durchzuführen. Der eigentliche Grenzprozess stellt kein Problem dar, wenn sich bei den untersuchten Funktionen im Term $f(x) - f(x_1)$ mindestens einmal der Faktor $x - x_1$ abspalten lässt.

Biermann und H.-N. Jahnke kommen so zu dem Schluss, dass Kleins Deutung der Schellbachschen Methode „nach einer *nachträglichen* Vereinnahmung“ (Biermann 2010, S. 321) aussieht. Klein unterstelle Schellbach eine Intention, ohne nach den tatsächlichen Gründen für sein Vorgehen zu fragen:

„Ob Schellbach seine Art der Behandlung von Maximum- und Minimaufgaben nicht für die pädagogisch natürliche und naheliegende gehalten hat, wird nicht gefragt.“ (Jahnke, H.-N., S. 327)

Neben der kritischen Auseinandersetzung mit den Unterrichtspraktiken – ob nun gerechtfertigt oder nicht –, beschreibt Klein konstruktiv eine für ihn ideale oder zumindest angemessene Behandlung der Infinitesimalrechnung im Unterricht, die zum Teil auch in Reform-Schulbüchern aufgegriffen wurde. Die auf Anschauung beruhende Einführung des Taylorschen Lehrsatzes ist ein typisches Beispiel (vgl. Kapitel 3.1):

„Ich weise besonders darauf hin, daß das Zeichnen solcher Kurven in ganz einfachen Fällen vielleicht auch für die Schule geeigneten Stoff darstellt.“ (Klein EvhS 1, S. 244)

Der *Taylorsche Lehrsatz* wird auch in weiteren Kreisen der Meraner Reform als wichtiges Thema angesehen (vgl. Krüger 2000, S. 212f): An die Stelle der Behandlung formaler unendlicher Reihen ohne Grenzwertbetrachtungen, tritt die Unter-

suchung endlicher Näherungsreihen. Damit wird insbesondere der „approximative Charakter der Infinitesimalrechnung“ (Krüger 2000, S. 213) betont.

Die Analysis als *Höhepunkt funktionalen Denkens* hat in der Vorlesung – ähnlich wie im Meraner Lehrplan – insgesamt einen besonders hohen Stellenwert, da sie, Klein zufolge, ursächlich für den Bruch zwischen Schul- und Universitätsmathematik ist (vgl. Kapitel 1.4.2). Indem Klein sich einerseits intensiv mit dem bestehenden Schulunterricht kritisch auseinandersetzt und andererseits Vorschläge für eine Umgestaltung macht, betreibt er hier ganz konkret inhaltliche Reformarbeit:

„Auf dem Gebiete der Infinitesimalrechnung gerade ist die Diskontinuität zwischen Schule und Universität [...] am größten; ich hoffe, daß meine Darlegungen zu ihrer Beseitigung beitragen und Ihnen für Ihre spätere Lehrpraxis ein nützliches Rüstzeug an die Hand geben.“ (Klein EvhS 1, S. 255)

9.1.5 Funktionales Denken und Anwendung

Das „*Bedürfnis der Berücksichtigung der Infinitesimalrechnung*“ (Klein EvhS 1, S. 205) in der Schule erkennt Klein auch bei der Behandlung von Schwingungen im Physikunterricht und integriert damit die Idee des funktionalen Denkens auch in den Anwendungen:

Die schulische Behandlung des Pendelgesetzes zeichnete sich damals durch „*ad hoc erfundene Verfahren*“ (Klein EvhS 1, S. 202) aus, die die Methoden der Infinitesimalrechnung nicht umgingen, aber wie auch an anderen Stellen verschleierten (vgl. Klein EvhS 1, S. 202). So werde in der Schule beim Pendelgesetz nicht nur der Übergang zu unendlich kleinen Schwingungen unkommentiert vollzogen, selbst die Definition der Zentrifugalkraft benötige infinitesimale Überlegungen, da die Beschleunigung und damit die zweite Ableitung des Wegs in Abhängigkeit der Zeit eingehe (vgl. Klein EvhS 1, S. 203).

Diesem Vorgehen stellt Klein das auf der Hochschule übliche gegenüber, welches mit Mitteln der Analysis „einfachen und klaren Betrachtungen [folgt], die sich bei näherem Eingehen auf die Sache natürlich auch durchaus anschaulich gestalten lassen“ (Klein EvhS 1, S.202). Zustimmung findet Klein hier beispielsweise von dem Reformers Lesser, der eine Umsetzung dieser Gedanken in seinem Schulbuch vorstellt, auch wenn dieser „recht ungehemmt von begrifflichen Rücksichten mit Differentialen und sogenannten Differentialformen“ (Krüger 2000, S. 221) rechnet und damit eher eine ‚frühanalytische‘ Arbeitsweise, im Sinne von Newton oder Leibniz, für die Schule umsetzt.

Das Beispiel zeigt, dass Klein die Vernetzung mit den naturwissenschaftlichen Fächern in seine Vorlesung einbezieht und damit ein wichtiges Element der Meraner Reform, nämlich die „*mathematische Auffassung der Vorgänge in der Natur*

und in den menschlichen Lebensverhältnissen“ (Meraner Lehrplan 1905, S. 104) in den Unterricht zu integrieren, aufgreift.

Gerade im Zusammenhang mit dem funktionalen Denken wurde eine wechselseitige Zusammenarbeit mit den Naturwissenschaften, insbesondere der Physik, als ausgesprochen fruchtbar angenommen. Einerseits lassen sich mit Hilfe des Funktionsbegriffs Abhängigkeiten von Größen in physikalischen Experimenten präzise beschreiben, andererseits lässt sich Schülern gerade mit Hilfe physikalischer Beispiele der Funktionsbegriff leichter nahe bringen (vgl. Krüger 2000, S. 216-220). Dabei handelt es sich in gewissem Sinne erneut um eher propädeutische Erfahrungen, die von Klein, vermutlich als unterrichtspraktische Fragen eingestuft, in der Vorlesung nicht behandelt werden.

Wie der Abgleich mit den von Krüger herausgearbeiteten Dimensionen des funktionalen Denkens zeigt, kann Klein also eine in dem Sinne *mathematikdidaktische Perspektive* zugesprochen werden, als dass er die Vorlesung nutzt, um Reformideen zu illustrieren und zu verteidigen. Die Vorlesung hat somit die Funktion der praktischen Umsetzung der Reform, wenn auch nicht wie bei Lesser oder Schimmack durch Schulbücher, die direkten Einsatz in der Schule erfuhren, sondern durch eine gezielte Schulung der zukünftigen Lehrer, die die Reform tragen sollten. Ausgenommen werden dabei Fragen der praktischen Umsetzung, die besonders bei der Propädeutik des funktionalen Denkens zum Tragen kommt.

9.2 Stoffdidaktisch: Didaktisch orientierte Sachanalysen

Unter *Stoffdidaktik* versteht man gemeinhin ein am ‚Stoff‘ orientiertes mathematikdidaktisches Forschungs- und Entwicklungsgebiet (vgl. bspw. Burscheid 2005, S. 149). Hans Werner Heymann definiert in der Einleitung zu dem von ihm herausgegebenen Sammelband *Mathematikdidaktik zwischen Tradition und neuen Impulsen* Stoffdidaktik sehr allgemein als

„die Beschäftigung mit Einzelstoffen eines vorliegenden oder als erstrebenswert angesehenen schulischen Stoffkanons unter den Gesichtspunkten der (überwiegend mathematischen) Analyse, Ausarbeitung, Umstrukturierung, Elementarisierung oder Veranschaulichung. Reflexionen hingegen der gesellschaftlichen, individuellen und pädagogischen Bedingungen und Ziele mathematischen Unterrichts fließen in solche Arbeiten selten [...] ein.“ (Heymann 1984, S. 1)

In diese hinreichend offene Beschreibung lässt sich Klein mit seiner Vorlesung sofort einordnen: Grundlage der Vorlesung sind mathematische Inhalte, die zu Anfang des 20. Jahrhunderts bereits zum Schulcurriculum gehörten oder dem Schulkanon, nach Kleins Meinung, hinzugefügt werden sollten – allen voran die Infinitesimalrechnung. Wie bereits in Kapitel 7 gezeigt wurde, analysiert Klein diese Inhalte aus einer mathematischen Perspektive. Dass Klein dabei einen Fokus auf die Veranschaulichung legt, wurde in Kapitel 3 ausführlich beschrieben.

Auch bezogen auf die von Th. Jahnke beschriebenen Ziele der Stoffdidaktik – *fachwissenschaftliche Fundierung der Schulmathematik, Verbindung von Schul- und Hochschulmathematik, sowie Erkundung und Sicherung schulischer Curricula* (vgl. Jahnke 1998) – kann Klein ein stoffdidaktisches Interesse zugesprochen werden:

In Kapitel 7 wurde gezeigt, dass die *fachwissenschaftliche Fundierung der Schulmathematik* ein wesentlicher Bestandteil der Vorlesung ist, besonders vor dem Hintergrund, dass Klein eine *Verbindung von Schul- und Hochschulmathematik* anstrebt:

„Meine Aufgabe hier wird stets sein, Ihnen den *gegenseitigen Zusammenhang der Fragen der Einzeldisziplinen vorzuführen [...], sowie insbesondere ihre Beziehung zu den Fragen der Schulmathematik* zu betonen.“ (Klein EvhS 1, S. 2)

Da Klein zudem Ziele und auch curriculare Forderungen der Meraner Reform in die Vorlesung integriert und begründet (vgl. Kapitel 9.1), kann als weiteres Ziel der Vorlesung schließlich auch das *Erkunden und Sichern von Curricula* genannt werden.

Es scheint daher lohnend zu überprüfen, ob Kleins mathematische Analysen auch bei näherer Betrachtung den Kriterien einer stoffdidaktischen Arbeit genügen. Dazu muss zunächst ein passender Bezugsrahmen vorgestellt werden.

9.2.1 Die didaktisch orientierte Sachanalyse als stoffdidaktisches Instrument

Für die Arbeitsweise der Stoffdidaktik, nämlich die Untersuchung mathematischer Hintergrundtheorien zu Unterrichtsinhalten, führt Griesel den Begriff der *didaktisch orientierten Sachanalyse* ein. Ziel ist es mit rein *mathematischen* Methoden den ‚Kern‘ eines mathematischen Gegenstandes zu erfassen (vgl. Griesel 1971, S. 79).

Didaktik geht in Griesels Verständnis nur im Sinne einer *didaktischen Vorentscheidung* ein. Diese kann alleine in der Wahl des zu behandelnden Gegenstands liegen. In diesem Fall besteht die Aufgabe der Sachanalyse lediglich darin, eine für den Schüler oder Lehrer geeignete Darstellung der zugrunde liegenden mathematischen Theorie zu wählen. Wird eine bereits existierende Theorie abgelehnt, so

sind spezifischere stoffdidaktische Überlegungen notwendig. Es gilt in diesem Fall eine alternative, ‚geeigneterere‘ Hintergrundtheorie zu entwickeln bzw. aufzubereiten (vgl. Griesel 1971, S. 79f). Mögliche Gründe sind nach Griesel traditionelle, als praktikabel erwiesene Methoden, die von der Theorie abweichen, die Suche nach einem lebensnahem Zugang oder ein, wie es Vohns umschreibt, „eher allgemeines Unbehagen“ (Vohns 2007, S. 72).

Diese (didaktisch orientierte) mathematische Analyse hat schon Griesel zufolge sehr enge mathematikdidaktische Grenzen (vgl. Griesel 1971, S. 80) und wird bis heute kontrovers bezüglich ihres eigentlichen didaktischen Gehalts diskutiert:

Aus wissenschaftlicher Sicht genügt eine solche Sachanalyse zwar den Anforderungen der Mathematik in vollem Umfang, bezüglich der Mathematikdidaktik wirkt sie jedoch eher vage und willkürlich (vgl. Vohns 2007, S. 74). Der Grad zwischen einer didaktisch orientierten Sachanalyse und einer rein elementarmathematischen Arbeit ist daher sehr schmal und kann dazu führen, dass Elementarmathematik und Stoffdidaktik nicht unterschieden wird. Aus dieser Tradition resultieren mathematische Arbeiten, die nicht als Beitrag zur Forschung angesehen werden können, da sie keine neuen mathematischen Ergebnisse liefern, jedoch einzig den didaktischen Hintergrund haben, dass sie einem „Laien“ zugänglich gemacht werden können und erlauben, „sich und seinen Verstand zu erproben“ (Jahnke 1998, S. 66). Meist betreffen sie jedoch nur ein mathematisches Einzelproblem und sind nicht notwendig didaktisch orientiert (vgl. Griesel 1971, S. 77).

Aber auch die im engeren Sinne didaktisch orientierte Sachanalyse muss sich breiter Kritik stellen. Ihre Reichweite ist eingeschränkt, da auch die Bewertung der erarbeiteten Hintergrundtheorien ausschließlich aus mathematischer Perspektive geschehen kann. Ein Vergleich konkurrierender mathematisch korrekter Theorien und eine begründete Entscheidung für den Unterricht ist somit nicht ohne Weiteres mit Mitteln der didaktisch orientierten Sachanalyse möglich, sondern muss im Rahmen einer empirischen Studie (vgl. Griesel 1971, S. 78) oder durch weiterführende normative Überlegungen geleistet werden.

Zusätzlich ist die Reduktion des *didaktischen Dreiecks* (Schüler – Lehrer – Sache) auf die Dimension der ‚Sache‘, die bei dieser Vorgehensweise üblich ist, umstritten. Steinbring kritisiert, dass einerseits dabei eine zu stark produktorientierte Sicht auf die Mathematik eingenommen, andererseits die Konstruktion des mathematischen Wissens im Lehrer-Schüler-Gespräch nicht in die Überlegungen einbezogen wird (vgl. auch Vohns 2007, S. 75f). Daher wurden inzwischen verschiedene Vorschläge entwickelt, sachanalytische Verfahren zu erweitern. Bei Vohns dienen beispielsweise *grundlegende Ideen* der Erschließung des mathematischen Inhalts und liefern somit ein Instrument, mit dessen Hilfe eine „Öffnung des Analyseverfahrens weg von einer rein fachmathematisch organisierten ‚Lernstoffanalyse‘ hin zu einer bildungstheoretisch motivierten Analyse“ (Vohns 2007, S. 85) möglich ist. Jahnke ergänzt mit

seiner „didaktischen Rekonstruktion“ die Erschließung der mathematischen Hintergrundtheorie durch das Erarbeiten der „zugrunde liegende[n] Fragen, seine[r] Notwendigkeit und [...] seine[r] Genese“ (Jahnke 1998, S. 72).

Das Verfahren der *didaktisch orientierten Sachanalyse* im Verständnis von Griesel, zusammen mit den hier vorgestellten Vorschlägen einer Erweiterung, liefert im Folgenden einen geeigneten Bezugsrahmen für die Untersuchung der Kleinschen Vorlesung.

9.2.2 Didaktisch orientierte Sachanalysen bei Felix Klein

Der Vorlesung geht eine *didaktische Vorentscheidung* bezüglich der Stoffauswahl voraus: Klein behandelt ausschließlich mathematische Gegenstände, die seiner Meinung nach für den Unterricht des *zukünftigen Lehrers* wichtig sind (vgl. Klein EvhS 1, S. 2). Auch wenn diese Vorentscheidung teilweise in Frage gestellt werden kann (vgl. hierzu die in Kapitel 7.4 besprochene Kritik Toeplitz' an Kleins Vorlesung), lässt sich die gesamte Vorlesung in gewissem Sinne als zulässige didaktisch orientierte Sachanalyse oder – da Klein in vielen Fällen nur den Anstoß gibt und die mathematische Analyse seinen Hörern zur Nachbereitung überlässt – als *Anregung zu einer didaktisch orientierten Sachanalyse* bezeichnen. Besonders zu erwähnen sind dabei die historischen Passagen, da es dort nicht um eine rein fachmathematische Rekonstruktion geht. Wie es Jahnke fordert, wird hier auch die Genese des Gegenstands mit in den Blick genommen.

In vielen Fällen belässt es Klein bei der didaktischen Vorentscheidung der Stoffauswahl und macht es sich dann zur Aufgabe, eine für Lehrer geeignete (an die, in den Kapiteln 2 bis 5 beschriebenen Prinzipien angelehnte) Darstellung zu wählen. Es gibt aber auch Stellen, in denen eine spezifisch stoffdidaktische Arbeit im oben beschriebenen Sinne einsetzt. Ein Beispiel hierfür ist die Bruchrechnung (vgl. Klein EvhS 1, S. 31f). Klein stellt eine formale Begriffsklärung vor, in der die rationalen Zahlen als abstraktes Zahlenpaar eingeführt werden, ohne die dahinter liegende Theorie explizit zu erarbeiten; er betont jedoch, dass der ursprünglich gewählte Weg für die Schule (über lebensnahe, konkrete Objekte) sich bislang bewährt hat:

„[F]reilich ist dabei recht fraglich, ob diese Trennung [von Theorie und Anwendung, die durch eine abstrakte Einführung der rationalen Zahlen erzeugt würde,] auch *pädagogisch* zweckmäßig ist.“ (Klein EvhS 1, S. 33)

Ein weiteres Beispiel ist die Einführung der Logarithmen. Anders als bei der Bruchrechnung erarbeitet Klein hier konkret und zudem historisch motiviert eine *Hintergrundtheorie*, die einen anderen, bis dato noch nicht praxiserprobten Zugang zu

der Fragestellung beschreibt. Sein „allgemeines Unbehagen“ mit der herkömmlichen Einführung begründet er dabei vergleichsweise präzise und mit hauptsächlich mathematischen Argumenten:

Seine Kritikpunkte an der damals praktizierten Einführung der Logarithmusfunktionen sind einerseits die teilweise willkürlich wirkenden Einschränkungen bezüglich des Definitionsbereichs⁶, andererseits die fehlende oder nur unzureichende Klärung, inwiefern die Wahl der Basis $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n (= e)$ die kanonische oder *natürliche* sei (vgl. Klein EvhS 1, S. 156f).

Als Alternative entwickelt Klein eine (historisch motivierte) Hintergrundtheorie. Wie in Kapitel 8.3 beschrieben stellt er vor, wie Bürgi und Neper ihre Logarithmentafeln erstellt haben. Beide wählen eine Basis, die nahe an der 1 liegt, auf dass die Abstände der x -Werte, beim sukzessiven Einsetzen ganzzahliger y -Werte in die Gleichung $x = b^y$, relativ klein sind – Bürgi wählt $b = 1 + 10^{-4}$, Neper wählt $b = 1 - 10^{-7}$.

Klein untersucht die so entstehende Folge von x -Werten, und entwickelt damit, aufbauend auf die Grundgedanken Bürgis und Nepers, eine Hintergrundtheorie, die für die Schule nutzbar gemacht werden soll. Wie bereits im Vorfeld angesprochen, wird auch in diesem Fall die von Klein vorgeschlagene Sachanalyse sehr verkürzt und dicht niedergeschrieben. Bevor eine Ausarbeitung der dahinterliegenden mathematischen Argumente helfen soll, den Kern der Sache zu erfassen, wird die entscheidende Textstelle unverändert wiedergegeben:

„Berechnen wir nun im *Bürgischen Systeme* die Potenzen für zwei benachbarte Exponenten y und $y + 1$:

$$x = (1,0001)^y, \quad x + \Delta x = (1,0001)^{y+1},$$

dann folgt durch Subtraktion:

$$\Delta x = (1,0001)^y (1,0001 - 1) = \frac{x}{10^4}$$

oder, wenn wir an Stelle der Differenzen 1 der beiden Exponentenwerte allgemein Δy schreiben:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{10^4}{x} \tag{9.1}$$

Wir haben so eine *Differenzgleichung für die Bürgischen Logarithmen*, die Bürgi selbst bei der Berechnung seiner Tafel direkt anwendet: *Hat er den zu einem y gehörigen Wert x bestimmt, so erhält er den jeweils folgenden zu $y + 1$*

⁶Dies wurde bereits in Kapitel 3 erörtert. In Kapitel 7 wurde erwähnt, dass diese Einschränkungen aus Konsistenzgründen durch den Übergang zu komplexen Funktionen gerechtfertigt werden können.

gehörigen durch Addition von $\frac{x}{10^4}$. – Ebenso ergibt sich, daß die Neperschen Logarithmen der Differenzengleichung:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{10^7}{x} \quad (9.2)$$

genügen.

Um die nahe Verwandtschaft beider Systeme zu erkennen, haben wir nur das eine Mal statt der Zahlen y die Zahlen $\frac{y}{10^4}$, das andere Mal die Zahlen $\frac{y}{10^7}$ zu betrachten (d.h. das Dezimalkomma der Logarithmen zu versetzen); bezeichnen wir die neuen Zahlen dann wieder schlechtweg mit y , so ergibt sich jedesmal eine der gleichen Differenzengleichung:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \quad (9.3)$$

genügende Zahlenreihe, in der die y einmal in Stufen von 0,0001, das andere Mal in solchen von $-0,0000001$ fortschreiten.“ (Klein EvhS 1, S. 159f)⁷

Aus diesen Überlegungen lässt sich mit Hilfe einer geeigneten geometrischen Deutung der natürliche Logarithmus gewinnen (vgl. Klein EvhS 1, S. 161). Zunächst sollen jedoch diese ersten Überlegungen kritisch nachvollzogen werden:

Die von Klein vorgestellte Differenzengleichung (9.3) gilt im Allgemeinen – also für beliebige ganzzahlige Exponentendifferenzen Δy – nicht, was sich direkt nachrechnen lässt. Dazu betrachte man eine beliebige Basis $b = 1 + \beta \neq 1$. Mit

$$x := (1 + \beta)^y \quad \text{und} \quad x + \Delta x := (1 + \beta)^{y + \Delta y}$$

ergibt sich für die Differenz der x -Werte:

$$\begin{aligned} \Delta x &= (x + \Delta x) - x = (1 + \beta)^y \left((1 + \beta)^{\Delta y} - 1 \right) \\ &= x \cdot \left(\sum_{v=1}^{\Delta y} \binom{\Delta y}{v} \beta^v \right) \\ &= x \cdot \Delta y \beta + x \cdot \left(\sum_{v=2}^{\Delta y} \binom{\Delta y}{v} \beta^v \right) \end{aligned}$$

Und damit:

$$\frac{\Delta y \beta + S}{\Delta x} = \frac{1}{x} \quad \text{mit} \quad S := x \cdot \left(\sum_{v=2}^{\Delta y} \binom{\Delta y}{v} \beta^v \right)$$

Für den ‚Störterm‘ S gilt im Allgemeinen $S \neq 0$, es sei denn $\beta = 0$ oder – und diesen Fall betrachtet Klein – $\Delta y = 1$. Damit erhält man für die Bürgische Basis

⁷Die Markierungen der Gleichungen entsprechen nicht dem Original.

($\beta = 10^{-4}$) und die Nepersche Basis ($\beta = -10^{-7}$) die von Klein angegebenen Differenzgleichungen (vgl. Gleichung (9.1) und (9.2))

$$\left. \frac{\Delta y}{\Delta x} \right|_{\Delta y=1} = \frac{10^4}{x} \quad \text{und} \quad \left. \frac{\Delta y}{\Delta x} \right|_{\Delta y=1} = -\frac{10^7}{x},$$

oder allgemein

$$\left. \frac{\Delta y \beta}{\Delta x} \right|_{\Delta y=1} = \frac{1}{x}. \quad (9.4)$$

Betrachtet man, Klein folgend, statt positiver ganzzahliger Werte y hingegen die Werte $\tilde{y} = y \cdot \beta$, so lautet die Differenzgleichung

$$\left. \frac{\Delta \tilde{y}}{\Delta x} \right|_{\Delta \tilde{y}=\beta} = \frac{1}{x},$$

da für die Differenz zweier aufeinanderfolgender \tilde{y} -Werte

$$\Delta \tilde{y} = \tilde{y}_2 - \tilde{y}_1 = y_2 \beta - y_1 \beta = (y_2 - y_1) \beta = \Delta y \beta$$

gilt.

Die zu Beginn beschriebene Folge von x -Werten, die durch sukzessives Einsetzen positiver ganzer Zahlen entstand, lässt sich mit der skalierten Folge gewissermaßen durch einen Basiswechsel rekonstruieren, wenn man die Gültigkeit des 5. Potenzgesetzes voraussetzt:

$$x = (1 + \beta)^y = (1 + \beta)^{\frac{1}{\beta} \tilde{y}} = \left((1 + \beta)^{\frac{1}{\beta}} \right)^{\tilde{y}}.$$

Da Klein jedoch gerade die Festlegungen umgehen möchte, die beim Potenzieren mit rationalen Exponenten aufgrund von Mehrdeutigkeiten notwendig sind (vgl. Klein EvhS 1, S. 160), wählt er eine alternative geometrische Deutung:

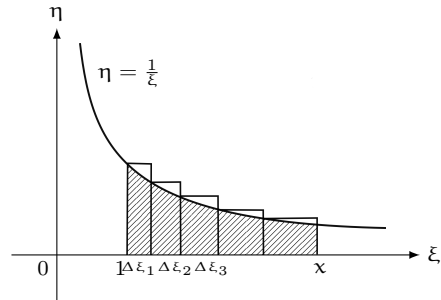
„Eine *andere geometrische Deutung*, bei der wir die Exponentialkurve noch nicht voraussetzen brauchen, die uns vielmehr den naturgemäßen Weg zu ihr zeigen wird, erhalten wir, wenn wir die Differenzgleichung (9.3) [Nummerierung angepasst durch H.A.] durch [eine] *Summgleichung ersetzen* (gewissermaßen sie ‚integrieren‘)[.]“ (Klein EvhS 1, S. 160)

Ergebnis der zugehörigen Überlegungen ist die bekannte Beschreibung (Definition) des natürlichen Logarithmus als Integralfunktion der Hyperbel $\frac{1}{x}$ (vgl. Klein EvhS 1, S. 160ff).

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{\xi} d\xi$$

mit der Basis

$$e := \lim_{\beta \rightarrow 0} (1 + \beta)^{\frac{1}{\beta}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$



Damit ist die Hintergrundtheorie beschrieben, die sich in der Sprechweise von Kirsch in die Kategorie „Zugänglich-machen durch Konzentration auf den mathematischen Kern“ (Kirsch 1977, S. 88) einordnen lässt. Auf der Grundlage einer didaktischen Vorentscheidung entwickelt Klein eine Hintergrundtheorie, die die von ihm beschriebenen Probleme umgeht, und präsentiert auf dieser Grundlage einen Unterrichtsvorschlag, der jedoch noch durch eine praktische Durchführung im Unterricht geprüft werden muss:

„Ich würde mir sehr wünschen, daß man diesen Weg recht bald einmal im Schulunterricht praktisch erproben möchte[.]“ (Klein EvhS 1, S. 169)

Mit ihrer historisch-genetischen Ausrichtung erfüllt diese mathematische Untersuchung die Voraussetzungen einer erweiterten didaktisch orientierten Sachanalyse im Verständnis von Griesel.

Klein zufolge soll die Hintergrundtheorie jedoch nicht im Mathematikunterricht erarbeitet oder vorgestellt werden. Sie dient ihm lediglich als Rechtfertigung seiner Forderung, den Logarithmus als Hyperbelflächenfunktion einzuführen:

„Der oberste Grundsatz ist, daß die richtige Quelle zur Einführung neuer Funktionen die Quadratur bekannter Kurven ist.“ (Klein EvhS 1, S. 168)

Damit umgeht Klein die von ihm als unbegründet angesehenen Festlegungen, die ihm Rahmen einer stetigen Erweiterung der Logarithmusfunktion auf \mathbb{R}^+ gemacht werden müssten. Auch kommt bei diesem Vorgehen dem Logarithmus zur Basis e eine besondere und in gewissem Sinne *natürliche* Rolle zu: Der Logarithmus zu einer beliebigen Basis b wird mittels des Zusammenhangs $b = e^{\ln b}$ über den natürlichen Logarithmus definiert. Die ursprüngliche Aufgabe, von der Gleichung $x = b^y$ ausgehend „jeder Zahl x ein Logarithmus zuzuordnen“ (Klein EvhS 1, S. 159), wird jedoch erst am Ende, gewissermaßen als Nebenprodukt der Integration der (Normal-)Hyperbel, thematisiert.

Aus Sicht aktueller Mathematikdidaktik lässt sich Kleins Vorschlag hinterfragen: Ungeachtet der Tatsache, dass heute zum Zeitpunkt der Einführung des Logarithmus noch keine analytischen Mittel zur Verfügung stehen, die ein solches Vorge-

hen erlauben würden (vgl. Weber 2013, S. 87), handelt es sich bei Kleins Vorschlag, nach Kirsch, um eine „(strukturelle) Vereinfachung durch *Spießumkehr*, die den Zugang eher erschwert“ (Kirsch 1977, S. 89) – Freudenthal prägte hierfür den Begriff der *antididaktischen Inversion*, auch wenn er diese gerade im Bezug auf die Einführung des Logarithmus sogar ansatzweise selbst begeht (vgl. Blum 1975, S. 164).

Klein kann insgesamt eine stoffdidaktische Orientierung zugesprochen werden: Er arbeitet stoffdidaktisch im Sinne der engen Kriterien einer *didaktisch orientierten Sachanalyse* nach Griesel. Teilweise geht er sogar darüber hinaus, wenn er die Genese eines Gegenstandes zur Begründung heranzieht. Damit könnte seine Art der Sachanalyse kühn als früher Vorläufer der *didaktischen Rekonstruktion* im Sinne von Th. Jahnke bezeichnet werden.

Aus heutiger Sicht ist der didaktische Gehalt der Sachanalysen bei Klein jedoch kritisch zu hinterfragen. Klein bemüht weder lernpsychologisches noch bildungstheoretisches Wissen, das es heute auch im Rahmen stoffdidaktischer Arbeiten mit einzubeziehen gilt. Zudem ist anzunehmen, dass Klein bei seinen didaktischen Vorentscheidungen häufig zuerst die Zielgruppe der potentiellen Mathematikstudenten im Blick hat und daher insbesondere auch bei Unterrichtsvorschlägen der Anschlussfähigkeit an die Hochschulmathematik einen großen Stellenwert einnimmt – so betont er, dass die Einführung des Logarithmus über die Integration der Hyperbel nicht nur dem historischen Verlauf nachempfunden sei, sondern auch „dem Vorgehen in den höheren Teilen der Mathematik“ (Klein EvhS 1, S. 168) entspreche (mehr dazu in Kapitel 9.3.2).

9.3 Kleins didaktische Haltung: Analyse der Randbemerkungen

Klein nimmt in seiner Vorlesung, wie in den vorangegangenen Unterkapiteln gezeigt, zum einen eine curriculare Perspektive ein, indem er die Vorlesung als Medium nutzt, seine Reformvorstellungen zum Lehrplan weiterzugeben. Zum anderen kann ihm stoffdidaktisches Arbeiten zugeschrieben werden, wenn er mathematische Analysen durchführt, die im beschriebenen Sinne einer didaktisch orientierten Sachanalyse nach Griesel entsprechen. Zusammen mit den von ihm genutzten Prinzipien, die im ersten Zwischenfazit bereits als didaktische Prinzipien identifiziert wurden, lässt sich somit eine mathematikdidaktische Perspektive bei Klein ausmachen und genauer charakterisieren. Zusätzlich zu den dort analysierten Stellen, an denen eine solche Perspektive an der Art und Weise der Darstellung der Inhalte erkennbar

wird, lässt sich aus Randnotizen und Metabemerkungen die didaktische Haltung Kleins noch weiter ausdifferenzieren. Im Folgenden wird anhand typischer Nebenbemerkungen gezeigt, wie sich Kleins Einstellung zu didaktischen Fragen, über die bereits besprochenen hinaus, charakterisieren lässt.

9.3.1 Zur unterrichtspraktischen Umsetzung in der Schule

Auch wenn die in der Vorlesung gegebenen Schulstoffanalysen, wie in Kapitel 9.2 gezeigt, didaktisch orientiert sind, so legt Klein besonderen Wert darauf zu betonen, dass er in diesen Analysen nur inhaltliche Fragen behandelt. Die methodische Umsetzung überlässt er erfahrenen Praktikern. So schließt er seine Sachanalyse zum Logarithmus mit folgenden Worten:

„[W]ie sich dabei die Durchführung im einzelnen zu gestalten hat, das muß natürlich der erfahrene Schulmann entscheiden.“ (Klein EvhS 1, S. 169)

Dennoch lässt sich aus einigen Kommentaren schließen, dass Klein auch unterrichtspraktische Gesichtspunkte zumindest in Teilen mitdenkt. Diese will ich im Folgenden als *Forderungen für die praktische Umsetzung im Unterricht* zusammenfassen:

Forderung 1: Im Unterricht muss „eine stärkere Hervorhebung der Richtung B“ (Klein EvhS 1, S. 92) angestrebt werden.

Es handelt sich hierbei um die in Kapitel 6 beschriebene mathematische Entwicklungsreihe B. Die bereits zuvor beschriebenen Prinzipien, die charakteristisch für Entwicklungsreihe B sind, gilt es Klein zufolge auch in der Schule umzusetzen. Sie können damit, im Sinne Kleins, auch als didaktische Leitideen für den Unterricht verstanden werden. So fordert Klein konkret die Umsetzung der „*genetische[n] Unterrichtsmethode*“, „eine stärkere Betonung der *Raumanschauung*“, „die *Vorstellung des Funktionsbegriffs*“, die im Sinne einer grundlegenden Idee auch als methodisches Prinzip angesehen werden kann, sowie die „*Fusion von Raum- und Zahlvorstellung*“ (vgl. Klein EvhS 1, S. 92)⁸. Wie diese im Einzelnen ausgestaltet werden können, wurde in den Kapiteln 2 bis 5 ausgeführt. Auch wenn sich diese Prinzipien zunächst auf den Inhalt der Vorlesung bezogen, so lassen sie sich beinahe nahtlos auf den Schulunterricht übertragen. Dies wird von Klein auch explizit vorgeschlagen, wenn er beispielsweise bei der Einführung des Taylorschen Lehrsatzes einen anschaulich graphischen Zugang wählt (vgl. Klein EvhS 1, S. 241-244) und besonders darauf hinweist, dass sich ein solches Vorgehen mit angemessenen Einschränkungen auch für die Schule eignet (vgl. Klein EvhS 1, S. 244).

⁸Die wörtlichen Zitate sind der Quelle direkt entnommen.

Forderung 2: Im Unterricht muss für die Erfassung grundlegender Gedankenschritte ausreichend Zeit eingeplant werden.

Klein macht wiederholt darauf aufmerksam, an welchen Stellen seiner Meinung nach bei Schülern Verständnishürden auftauchen können. Ein inhaltlicher Hauptkritikpunkt Kleins an der damals aktuellen Schulmathematik ist der starke Fokus auf die algebraische Analysis. Klein thematisiert jedoch schon im Vorlesungsteil zur *Arithmetik* wichtige Gedankenschritte, die den Schülern Schwierigkeiten bereiten können:

So beschreibt er die Einführung der Buchstabenrechnung als ersten und entscheidenden Abstraktionschritt (vgl. Klein EvhS 1, S. 8), behandelt den Wechsel von inhaltlichen zu formalen Überlegungen bei der Erschließung der negativen Zahlen (vgl. Klein EvhS 1, S. 26) und beschreibt den „Wechsel des Substrats“ beim Übergang von den ganzen Zahlen für das Abzählen zu den rationalen Zahlen für das Messen (vgl. Klein EvhS 1, S. 31). Für diese Stellen, so Klein, müsse man sich im Unterricht besonders viel Zeit nehmen. Zum Übergang von Zahlen zu Variablen schreibt er:

„Hierin ist ein so großer Schritt der Abstraktion getan, daß man wohl behaupten kann, die eigentliche Mathematik setze mit dem Buchstabenrechnen ein. Freilich darf sich dieser Übergang an der Schule durchaus nicht plötzlich vollziehen, sondern der Schüler muß allmählich an so starkes Abstrahieren gewöhnt werden.“
(Klein EvhS 1, S. 8)

Auch wenn Klein an diesen Stellen naturgemäß keine systematische lerntheoretische Analyse anschließt, wie es heute gebräuchlich ist, sondern vor allem die Lösung der Probleme besonders im Bereich der Arithmetik darin sieht, sich der Schwierigkeiten bewusst zu sein, so ist dennoch hervorzuheben, dass er Themen und Problemfelder der heutigen mathematikdidaktischen Forschung, wie beispielsweise der *Übergang von der Arithmetik zur Algebra* oder das *Bruchzahlverständnis*, anspricht.

Forderung 3: Der Unterricht kann keine vollständige theoretische Fundierung der Mathematik liefern. Mathematische Sachverhalte sollten stattdessen an Beispielen verdeutlicht und hergeleitet werden.

In Kapitel 5 wurde gezeigt, dass Klein auch für seine Vorlesung ein eher induktives Vorgehen wählt – also vom Phänomen ausgehend und am Beispiel illustrierend eine mathematische Theorie entwickelt. Besonders deutlich zeigt sich das im Kapitel des Taylorschen Lehrsatzes (Klein EvhS 1, vgl. S. 241-253), wo anhand konkreter Beispiele Näherungsparabeln mit steigender Ordnung graphisch dargestellt werden. Auch im Vorlesungsteil zur *Algebra* zeichnet sich diese Vorgehensweise ab.

Hier beginnt Klein damit, Gleichungen mit reellen Koeffizienten, reellen Lösungen und nur einem Parameter λ geometrisch zu deuten, expliziert seine Ausführungen am Beispiel der quadratischen und kubischen Gleichung und erhöht anschließend sukzessive die Komplexität, indem er zunächst die Anzahl der Parameter erhöht und schließlich auch komplexe Variable zulässt.

Beispiele nehmen bei diesen Betrachtungen nicht nur eine besondere Rolle ein, weil sie als Ausgangspunkt für die phänomenologische induktive Herangehensweise der Vorlesung angesehen werden können, sondern weil Sie zum Teil auch direkt in den Schulunterricht eingebracht werden können und sollen. Klein stellt sie gewissermaßen als Unterrichtsmaterial bereit.

„Die Vorführung einer solchen einfachen und anschaulichen Konstruktion [die geometrische Deutung und Lösung einer quadratischen Gleichung, H.A.] scheint mir auch für die oberen Klassen der Schule sehr geeignet.“ (Klein EvhS 1, S. 94)

In der Schule sind Beispiele hingegen nicht nur wünschenswert, sondern essentiell: Klein vertritt dezidiert die Meinung, dass die theoretische Fundierung kein Anliegen der Schule sein kann, dass es hier vielmehr darum gehen muss, mathematische Sachverhalte beispielhaft zu illustrieren.

„Im *wirklichen Schulunterricht* wird natürlich, wie schon betont, von einer systematischen Darlegung aller dieser Grundgesetze nicht die Rede sein können. Erst wenn die Schüler das Zahlenrechnen anschaulich erfaßt haben und sicher beherrschen, wird der Lehrer bei Gelegenheit des Übergangs zum Buchstabenrechnen wenigstens die Gesetze der Assoziativität, Kommutativität, Distributivität aus zahlreichen evidenten Zahlenbeispielen herausarbeiten und von diesen abgesondert aussprechen können.“ (Klein EvhS 1, S. 11)

Solche Aussagen wie diese Bemerkung am Ende des Kapitels zu den *logischen Grundlagen des Rechnens mit ganzen Zahlen* begründet Klein in der Regel nicht weiter. Es ist jedoch anzunehmen, dass er eine theoretische Grundlegung der Mathematik in den meisten Fällen schlicht für zu anspruchsvoll hält. So deutet er beispielsweise im Kapitel zum Logarithmus an, dass zwar „*ein vollständiges inneres Verständnis solcher Probleme nur beim Übergang ins komplexe Gebiet möglich ist*“ (Klein EvhS 1, S. 174f), er glaubt jedoch nicht, „daß man den Durchschnitt der Schüler [...] so weit führen kann“ (Klein EvhS 1, S. 174).

Ungeachtet des hohen Anspruchs einer deduktiven mathematischen Fundierung stellt Klein zumindest bei den Zahlbereichserweiterungen (vgl. Klein EvhS 1, S. 24-82) generell in Frage, ob diese überhaupt notwendig sei, zumal den meisten Schülern nicht nur die „Fassungskraft“ (Klein EvhS 1, S. 40), sondern vor allem auch das Interesse fehle (vgl. Klein EvhS 1, S. 40). Klein plädiert beispielsweise dafür, den Schüler nicht „durch systematische Darlegungen zu ermüden“ (Klein EvhS 1, S. 82) und folgert für die Einführung der reellen Zahlen pragmatisch:

„Der Knabe wird sich meist mit Angaben von beschränkter Genauigkeit gern zufrieden geben, eine Genauigkeit von $\frac{1}{1000}$ mm schon bewundernd anstauen und gar nach unbeschränkter Genauigkeit gewiss kein Verlangen tragen; es genügt also für diesen Durchschnitt, wenn man die Irrationalzahl *an einigen Beispielen nur im allgemeinen verdeutlicht*, und so geschieht es wohl auch meistens.“ (Klein EvhS 1, S. 40)

Im übrigen spricht Klein hier zudem das für seine Zeit recht moderne Konzept der sogenannten *Binnendifferenzierung* an – wenn auch nur im Sinne einer Begabtenförderung: Es gäbe sicher „besonders veranlagte Schüler“ (Klein EvhS 1, S. 40), denen diese Ausführungen nicht reichen. Es sei nun die Kunst des Lehrers, diesen Schülern weitere Einsicht zu geben, „ohne die Interessen der Mehrheit zu verletzen“ (Klein EvhS 1, S. 40).

Forderung 4: Im Unterricht werden zwar mathematische Hintergründe nicht immer thematisiert. Dies darf aber nicht verschleiert oder gar verleugnet werden.

Klein kritisiert generell, dass mathematische Theorien und Argumente oft in der Schule genutzt werden, „ohne sie beim Namen zu nennen“ (Klein EvhS 1, S. 202). Im Falle der Infinitesimalrechnung plädiert er allerdings (wie in Kapitel 9.1.4 beschrieben) dafür, diese als Unterrichtsgegenstand explizit einzuführen.

Wenn der mathematische Hintergrund nicht explizit wird, muss der Lehrer an solchen Stellen „*die Klippen und Untiefen genau kennen, an denen er seine Schüler vorbeiführt*“ (Klein EvhS 1, S. 175). Entscheidend ist, dass Transparenz gewährleistet ist.⁹ Besonders deutlich spricht Klein dies in seinen kritischen Bemerkungen zur Einführung der negativen Zahlen in der Schule an (vgl. Klein EvhS 1, S. 30):

So wird zu Kleins Zeit „immer wieder die logische Notwendigkeit der Zeichenregeln zu *beweisen* versucht“ (Klein EvhS 1, S. 30), wie beispielsweise die Herleitung von $(-b) \cdot (-d) = +bd$ aus dem in Kapitel 3.2 vorgestellten geometrischen Beweis für die Formel $(a - b) \cdot (c - d) = ac - ad - bc + bd$. Dass die Gültigkeit der letzten Formel an die Bedingungen $a > b$ und $c > d$ geknüpft ist, wird unterschlagen; das tragende „*psychologische Moment* [...] [wird] mit einem *logisch beweisenden Moment* verwechselt“ (Klein EvhS 1, S. 30).

„Gegenüber dieser Praxis möchte ich doch allgemein die Forderung aufstellen, *keinerlei Versuche zum Erschleichen unmöglicher Beweise* zu machen; man sollte

⁹Viel später hat der Mathematikdidaktiker Arnold Kirsch hierzu den Begriff der „intellektuellen Ehrlichkeit“ ins Spiel gebracht (vgl. hierzu Kirsch 1976).

vielmehr [...] ihn selbst finden lassen, daß gerade diese auf dem Permanenzprinzip beruhenden Festsetzungen geeignet sind, einen gleichförmig bequemen Algorithmus zu liefern, während jede andere Festsetzung bei allen Regeln immer zu zahlreichen Fallunterscheidungen zwingen würde.“ (Klein EvhS 1, S. 30)

Neben der Forderung nach Transparenz und der Warnung vor Verfälschung taucht hier ansatzweise eine weitere didaktische Orientierung auf: Klein spricht im Zitat das Prinzip des *entdeckenden Lernens* an.

Insgesamt lässt sich aus Rand- und Nebenbemerkungen Kleins schließen, dass dieser unterrichtspraktische und insbesondere methodische Fragen vielfach explizit mitgedacht hat.

9.3.2 Zum Bildungsauftrag der Mathematik

Die curricularen Festlegungen in der Meraner Reform enthalten Auffassungen dazu, was der Schüler aus dem Mathematikunterricht mitnehmen soll. Dazu gibt es auch in Kleins Vorlesung deutliche Spuren, etwa zu der Frage *Wieviel Mathematik sollte der Laie kennen?*.

Klein führt keine grundlegende Diskussion über den Bildungswert der Mathematik oder den Bildungsauftrag des Mathematikunterrichts.¹⁰ Allenfalls kann man der *Forderung 3* entnehmen, dass er den Bildungsauftrag der Mathematik für den Laien nicht darin sieht, die Mathematik in ihrer vollen Abstraktheit nachvollziehen zu können, sondern darum, das Prinzip und die Begriffe anhand konkreter Beispiele verstanden zu haben. „Aus voller Überzeugung“ (Klein EvhS 1, S. 18) schließt er sich der in den Reformvorschlägen formulierten Forderung an, der Unterricht in der Oberprima¹¹ habe folgende Aufgaben zu erfüllen:

- „1. ein wissenschaftlicher Überblick über den systematischen Aufbau der Mathematik;
2. eine gewisse Fertigkeit in der vollständigen numerischen und graphischen Behandlung von Einzelaufgaben;
3. eine Einsicht in die Bedeutung des mathematischen Denkens für die Naturerkenntnis und die moderne Kultur überhaupt.“ (Klein EvhS 1, S. 18)

¹⁰Zum Beispiel im Sinne der Analyse von Heymann zur allgemeinbildenden Funktion des Mathematikunterrichts (Heymann 1984)

¹¹unsere heutige 13. Klasse

Zusätzlich zu dieser eher allgemeinen Einschätzung hebt Klein in der Vorlesung mathematische Erfahrungen hervor, die seiner Meinung nach unzureichend zur Kenntnis genommen oder nicht verstanden werden:

Als Beispiel kann das Konzept des *Unmöglichkeitbeweises* angeführt werden, welches in der „modernen Mathematik“ (Klein EvhS 1, S. 56) die Lösung vieler alter offener Probleme – wie die Dreiteilung des Winkels oder die Kreisteilung in sieben Teile mit Zirkel und Lineal – lieferte. Klein bedauert, dass es „erschreckend viel Leute [gibt], die sich immer wieder mit diesen Aufgaben beschäftigen, [...] ohne die Problemstellung des Unmöglichkeitbeweises auch nur zu kennen oder zu verstehen“. Diese Laien versuchen mit vielen elementargeometrischen Vorschlägen die unmöglichen Konstruktionen zu erzeugen und treten mit diesen Versuchen an Mathematiker – und insbesondere auch an Mathematiklehrer – heran. Die Vorlesung soll darauf vorbereiten: (vgl. Klein EvhS 1, S. 56)¹²

„[E]s ist gut, wenn Sie von vorneherein auf diese Erlebnisse vorbereitet sind und wissen, woran Sie sich zu halten haben. Vielleicht kann es Ihnen dann von Nutzen sein, wenn Sie einen bestimmten Unmöglichkeitbeweis in möglichst einfacher Form beherrschen.“ (Klein EvhS 1, S. 56)

Klein spricht also mathematische Konzepte an, von dem seiner Meinung nach zu wenig Leute Kenntnis haben, die jedoch zum mathematischen Allgemeinwissen zählen sollten. Allerdings weiß er, dass der mathematische Laie auch an Grenzen des Verstehens gelangen kann, die nicht ohne Weiteres zu überwinden sind:

„Ob der Beweis also einfach genug ist, um einen der früher charakterisierten mathematischen Laien von der Vergeblichkeit seiner Versuche einer elementargeometrischen Lösung zu überzeugen, das wage ich nicht zu entscheiden; immerhin sollte man doch versuchen, einem solchen Manne diesen Beweisgang langsam und klar auseinander zu setzen.“ (Klein EvhS 1, S. 60)

Klein dokumentiert damit, dass er einerseits eine klare Vorstellung davon hat, welches mathematische Metawissen für ihn dazugehört, an welchen Stellen aber auch kognitive Grenzen erreicht sind. Für dieses Ziel hat er wohl in erster Linie die zukünftigen Studenten der Mathematik, Natur- und Ingenieurwissenschaften im Blick:

Dies wird auch bei der Forderung, die Infinitesimalrechnung in der Schule einzuführen, deutlich:

„Die unabweisbare Notwendigkeit solcher Reformen liegt darin begründet, daß sie diejenigen mathematischen *Begriffsbildungen betreffen, die heutzutage die Anwendungen der Mathematik auf alle möglichen Gebiete durchaus beherrschen*

¹²Die in Anführungszeichen gesetzten Stellen, sind der Quelle wörtlich entnommen.

und ohne die alle Studien an der Hochschule [. . .] gänzlich in der Luft schweben“ (Klein EvhS 1, S. 240)

Festzustellen ist: Die mathematischen Inhalte und ihre Behandlung in der Schule werden in der Vorlesung nicht alleine mit Blick auf ihren (allgemein-)bildenden Wert beurteilt. Klein hat an zentraler Stelle der Vorlesung erkennbar den Anspruch, die Schüler auf ein mathematisches Studium vorzubereiten.

Zu den drei Hauptaufgaben der gymnasialen Oberstufe aus heutiger Sicht (Wissenschaftspropädeutik, vertiefte Allgemeinbildung und Studierfähigkeit (vgl. KMK-Beschluss 2013, S. 5)) trägt Kleins Vorlesungskonzeption prinzipiell gleichermaßen bei. Am schwächsten ausgearbeitet ist der Aspekt der fachbezogenen vertieften Allgemeinbildung.

Zusammenfassung und Bilanz

In der Vorlesung nimmt Klein insofern eine didaktische Perspektive ein, als dass er sich mit dem damals praktizierten Mathematikunterricht kritisch auseinandersetzt und Verbesserungsvorschläge formuliert. Hauptkritik besteht darin, dass der Unterricht vordergründig dem Aufbau der *algebraischen Analysis* folgt – ein wesentlicher Grund für die *doppelte Diskontinuität* (vgl. Kapitel 1.4.2) – aber bereits ‚heimlich‘ mit *systematischer Analysis* bzw. Infinitesimalrechnung argumentiert wird.

Die daraus resultierenden Verstehenshürden ließen sich, so Klein, durch die konkrete Einführung der Infinitesimalrechnung – als Höhepunkt des funktionalen Denkens – umgehen. Er illustriert damit eine wesentliche Forderung der Meraner Reform. Auch weitere Ziele wie die Stärkung der Raumanschauung werden in der Vorlesung thematisiert. Die Vorlesung kann somit als Umsetzung der Reformideen durch eine gezielte Schulung der zukünftigen Lehrer angesehen und Klein kann eine *curricular-didaktische Perspektive* auf die Mathematik zugeschrieben werden.

Die Themen der Vorlesung wählt Klein mit Blick auf den aktuellen und den in der Meraner Reform beschlossenen Lehrplan aus. Er trifft damit eine didaktische Vorentscheidung im Grieselschen Sinne. Mit den in der Vorlesung behandelten fachmathematischen Diskussionen lassen sich seine Analysen theoretisch als didaktisch orientierte Sachanalysen und damit als stoffdidaktisch bezeichnen. Die Vorlesung beinhaltet jedoch auch stoffdidaktische Arbeiten im engeren Sinne, bei denen laut Griesel (1971) eine ‚echte didaktische‘ Vorentscheidung von Nöten ist, die über die bloße Wahl des Gegenstands hinausgeht. Ein solches Beispiel ist bei Klein die Einführung des Logarithmus. Klein kann demnach eine *stoffdidaktische Perspektive* zugeschrieben werden, die stellenweise über die rein didaktisch orientierte

Sachanalyse im Sinne Griesels hinausgeht. Gleichwohl bleiben aus heutiger Sicht Desiderate:

Ob eine solche mit mathematischen und historischen Mitteln erarbeitete Hintergrundtheorie als Grundlage für Schulunterricht dienen kann, lässt sich nämlich nicht abschließend klären, sondern muss mit Hilfe empirischer, lernpsychologischer oder normativ- bildungstheoretischer Methoden untersucht werden. So überrascht es auch nicht, wenn Kleins Vorschlag, den Logarithmus über die Integration der Hyperbel einzuführen, aus heutiger Sicht als ‚antididaktisch‘ bezeichnet und daher abgelehnt wird.

Schließlich lassen verschiedene Randbemerkungen auf eine generelle didaktische Haltung schließen. Klein setzt sich mit Fragen der *praktischen Umsetzung im Unterricht* und mit dem *Bildungsauftrag der Mathematik* auseinander. Erkennbar ist, dass Klein bei der Wahl der Themen und des Vorgehens besonders die Bedürfnisse der zukünftigen Mathematikstudenten im Blick hat – eine Auffassung, die aus heutiger didaktischer Sicht nicht notwendig geteilt wird und bei einer Übertragung des Kleinschen Vorlesungskonzepts in die heutige Zeit beachtet werden muss.

Zwischenfazit II – Höhere Mathematik vom elementaren Standpunkt?

Kleins erklärtes Ziel ist es, in der Vorlesung eine Verbindung zwischen Schul- und Hochschulmathematik herzustellen, um dadurch die *doppelte Diskontinuität* zu überwinden (vgl. hierzu Kapitel 1.4). Es kann angenommen werden, dass Klein mit dem Terminus *höherer Standpunkt* in erster Linie seine in Kapitel 7 beschriebene – und auf ihren Nutzen für den Schulunterricht befragte (vgl. hierzu Kapitel 7.4) – *fachmathematische Perspektive* im Sinn hat.

In den Kapiteln 8 und 9 wurde dargelegt, dass Klein in der Vorlesung ganz bewusst auch eine *mathematikhistorische* und eine *mathematikdidaktische Perspektive* einnimmt, die ebenfalls in den zukünftigen Schulunterricht der Hörer direkt oder indirekt als Hintergrundwissen einfließen können. Alle drei Perspektiven – die fachmathematische, die mathematikhistorische und die mathematikdidaktische – tragen jede für sich und auf unterschiedliche Weise zur Bildung eines höheren Standpunkts zur Elementarmathematik bei.

In der englischen Übersetzung spricht man nicht von einem *höheren* sondern von einem *erweiterten* (oder *fortgeschrittenen*) Standpunkt¹³. Versteht man den höheren Standpunkt zur Elementarmathematik ausschließlich als ‚Elementarmathematik aus hochschulmathematischer Perspektive‘, scheint die englische Übersetzung mit Blick auf die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit tatsächlich passender. Im Folgenden spreche ich daher von einem *erweiterten Standpunkt zur Elementarmathematik*, der durch die Perspektiven Kleins spezifiziert werden kann:

Die fachmathematische Perspektive. Klein stellt aus fachmathematischer Perspektive einen Zusammenhang zwischen Schulmathematik und höherer Mathematik her, indem er eine ganz spezifische fachmathematische Perspektive auf die Themen der Schulmathematik einnimmt. Die Hochschulmathematik wird bei Klein zum Hilfsmittel für eine präzise, aussagekräftige Darstellung und Durchdringung

¹³„Elementary mathematics from an advanced Standpoint“

der Schulmathematik, umgekehrt inspiriert die Schulmathematik zu weiterführenden in der Hochschulmathematik behandelten Fragestellungen. (vgl. hierzu Kapitel 7).

Die mathematikhistorische Perspektive. Die fachmathematischen Darlegungen werden ergänzt durch historische Exkurse und Bemerkungen, die den behandelten Gegenstand in einen größeren Zusammenhang einordnen und im Sinne des historisch-genetischen Prinzips einerseits den Verlauf der Vorlesung mitbestimmen und andererseits Material und Hintergrundwissen für einen genetisch orientierten Schulunterricht liefern sollen (vgl. hierzu Kapitel 8).

Die mathematikdidaktische Perspektive. Weiter fließen in Kleins fachmathematische Darstellungen durchgehend Berichte und Erörterungen mit konkretem Bezug zur Schulpraxis ein, in denen eine kritische Haltung bezüglich schulcurricularer Fragen darlegt wird und der mathematische Gegenstand auf seinen für die Schule relevanten mathematischen Kern – im Sinne einer quasi stoffdidaktischen Sachanalyse – befragt wird (vgl. hierzu Kapitel 9).

Die mathematikphilosophische Ergänzung. Neben den drei in Kapitel 7 bis 9 vorgestellten Perspektiven lassen sich Ansätze einer mathematikphilosophischen Sicht entdecken. Klein setzt sich mit Fragen der Erkenntnistheorie sowie Fragen zum Wesen der Mathematik und zur mathematischen Arbeitsweise auseinander. Dies geschieht jedoch weder systematisch noch ausführlich, so dass nicht von einer eigenständigen und gleichberechtigten Perspektive gesprochen werden kann: Lediglich im Kapitel zu den *logischen Gesetzen des Rechnens mit ganzen Zahlen* (Klein EvhS 1, S. 11–17, vgl. hierzu auch Kapitel 7) und im *Zwischenstück* (Klein EvhS 1, S. 82–92, vgl. hierzu auch Kapitel 6) nimmt sich Klein dieser Fragen etwas ausführlicher an. Meist begnügt er sich mit kurzen Randbemerkungen, die die Hörer für weiterführenden Fragen sensibilisieren können, und überlässt eine detaillierte Erörterung explizit anderen:

„Was zunächst den *Zahlbegriff selbst* angeht, so ist seine Wurzel äußerst schwer aufzudecken. Am glücklichsten fühlt man sich vielleicht noch, wenn man sich entschließt, von diesen allerschwierigsten Dingen ganz die Hand zu lassen. Für nähere Angaben über diese von den Philosophen stets sehr lebhaft erörterten Fragen verweise ich wieder auf den bereits genannten Artikel der französischen Enzyklopädie und beschränke mich auf einige ganz kurze Bemerkungen.“ (Klein EvhS 1, S. 11)

Merkmale des *erweiterten Standpunkts* zur Elementarmathematik bei Klein sind damit aus der *fachmathematischen Perspektive* ein erhöhter Abstraktionsgrad, eine

formale Fachsprache, Rechtfertigung und Fundierung. Hinzu kommen aus *mathematikhistorischer Perspektive* die Einordnung in den Gesamtzusammenhang und Kenntnisse über die Entstehungsgeschichte der einzelnen mathematischen Gegenstände. Aus *mathematikdidaktischer Perspektive* wird eine reflektierte Haltung zu Fragen des Schulcurriculums und des schulrelevanten mathematischen Gehalts der einzelnen Gegenstände gefördert. Dies wird ergänzt durch eine Sensibilisierung für weiterführende erkenntnistheoretische und mathematikphilosophische Fragen. Damit ist beschrieben, in welchem Sinne die Kleinsche Vorlesung einen *höheren* (bzw. *erweiterten*) *Standpunkt* zur Elementarmathematik vermittelt.

Der vergangenen und aktuellen hochschuldidaktischen Diskussion liegt in Bezug auf das Kleinsche Vorlesungskonzept meist ein eher intuitives Verständnis des Begriffs *höherer Standpunkt* zugrunde. Die Verweise auf Kleins Vorlesung erfolgen meist unreflektiert, ohne dass auf die eigentlichen Inhalte oder die Vorgehensweise eingegangen und das Konzept hinterfragt wird. Auch Courant und Robbins (1962) und Kirchgraber (2008) stellen das Kleinsche Konzept nicht in Frage, behaupten aber beide es durch eine komplementäre Sichtweise zu ergänzen:

Kirchgraber greift in seinem Vorlesungskonzept der *fachwissenschaftlichen Vertiefung mit pädagogischem Fokus* an der ETH Zürich den Kleinschen Gedanken auf und ergänzt ihn durch eine, wie er sagt, dazu „symmetrische Sichtweise“ (Kirchgraber 2008, S. 149):

„Die Blickrichtung geht – metaphorisch gesprochen – nicht nur von oben nach unten, sondern auch von unten nach oben. Es wird demnach unterschieden zwischen

- Elementarmathematik vom höheren Standpunkt ähnlich wie bei Klein, und
- Mathematik vom elementaren Standpunkt.“ (Kirchgraber 2008, S. 148f)

Eine ähnliche Unterscheidung stellen auch Courant und Robbins (1962) in ihrem Buch *Was ist Mathematik?* auf:

„Das Buch wendet sich an einen weiten Kreis: an Schüler und Lehrer, an Anfänger und Gelehrte, an Philosophen und Ingenieure. Es mag vielleicht als Ergänzung zu Felix Kleins klassischem Werke ‚Elementarmathematik vom höheren Standpunkte‘ betrachtet werden, indem es ‚höhere Mathematik‘ von einem elementaren Standpunkte behandelt.“ (Courant und Robbins 1962, S. X)

Mit Blick auf die Analyse in der vorliegenden Arbeit kann diese Interpretation der Kleinschen Vorgehensweise verwundern: Die Inhalte des Werks *Was ist Mathematik?* – von den Autoren als höhere Mathematik bezeichnet – überschneiden sich zu großen Teilen mit den Inhalten der Kleinschen Vorlesung. Dies steht im Einklang mit den Ergebnissen aus Kapitel 7. Dort wurde herausgearbeitet, dass Klein

in seiner Vorlesung an vielen Stellen Themen behandelt, die weit über die Schul- bzw. Elementarmathematik hinausgehen. Die Darstellung der Inhalte erfolgt dabei mithilfe der in den Kapiteln 2 bis 5 beschriebenen Prinzipien so, dass „alles ein ganz elementares, leicht faßliches Aussehen“ (Klein EvhS 1, S. 241) erhält. Nimmt damit nicht auch Klein selbst einen *elementaren Standpunkt zur höheren Mathematik* ein?

Mithilfe der Analyseergebnisse können Argumente angeführt werden, die diese These stützen. Als Bezugsrahmen wähle ich die von Kirsch (1977) vorgestellten *Aspekte des Vereinfachens*, da dieser – analog zu Klein – das Vereinfachen bzw. das Elementarisieren in diesem Zusammenhang mit *Zugänglich-machen* identifiziert (vgl. Kirsch 1977, S.87).¹⁴

Kirsch stellt vier verschiedene Aspekte des Vereinfachens vor: *Zugänglich-machen* durch *Hinzunahme des Umfeldes der Mathematik*, durch *Konzentration auf den mathematischen Kern des Gegenstandes*, durch *Anerkennen und Aktivieren von Vorwissen* und durch *Wechsel der Repräsentationsform*. Er selbst bezieht sich dabei ausschließlich auf den Schulunterricht (vgl. Kirsch 1977, S. 89). Meines Erachtens lassen sich diese Aspekte aber auch nahezu direkt auf hochschulmathematische Vorlesungen übertragen und vor allem in der Kleinschen Vorlesung entdecken:

Hinzunahme des „Umfeldes“ der Mathematik. Beim ersten Aspekt des Vereinfachens soll, so Kirsch, dem Lernenden durch das Einbeziehen von Realitätsbezügen und Begriffsgenese der Zugang erleichtert werden (Kirsch 1977, S. 92). In diesem Sinn zieht auch Klein das Umfeld der Mathematik hinzu – einerseits durch das Prinzip der Anwendungsorientierung (vgl. hierzu Kapitel 4) andererseits durch das genetische Prinzip (vgl. hierzu Kapitel 5) bzw. durch die historische Perspektive (vgl. hierzu Kapitel 8).

Konzentration auf den mathematischen Kern des Gegenstandes. Scheinbar komplementär zum vorangegangenen Aspekt ist die Idee der Konzentration auf den mathematischen Kern durch „Abstreifen aller genetischen Elemente und Realitätsbezüge“ (Kirsch 1977, S. 90). Im Rahmen seiner quasi stoffdidaktischen Analysen strebt auch Klein die Konzentration auf den mathematischen Kern an, dies geschieht aber nicht völlig losgelöst von der Genese des Gegenstands (vgl. hierzu Kapitel 9.2).

¹⁴Zur Erinnerung: Klein versteht all das als elementar, was sich „ohne lang fortgesetztes besonderes Studium für einen Knaben mittlerer Begabung zugänglich“ (Klein 1904, S. 9) machen lässt (vgl. Kapitel 1.3).

Anerkennen und Aktivieren von Vorwissen. Zusätzlich geht es Kirsch darum, „daß die Schüler im Unterricht ermutigt werden, vorhandenes Vorwissen, auch aus anderen Bereichen als der Mathematik, einzubringen und zu mobilisieren“ (Kirsch 1977, S. 93). Klein aktiviert in der Vorlesung Vorwissen – nämlich aus vorangegangenen Veranstaltungen –, aber nicht unbedingt im Verständnis von Kirsch, bei dem vorhandenes Wissen genutzt wird um *neue* Inhalte zu erschließen. In Kleins *Elementarmathematik* wird das Vorwissen aus den vorangegangenen Vorlesungen nicht an neue höhere, sondern an zugrunde liegende Inhalte angebunden: Es geht um eine Einbettung der Schulmathematik in die Hochschulmathematik. Klein schaut damit, anders als von Kirsch verstanden, in den meisten Fällen tatsächlich – in der Sprechweise von Kirchgraber (2008) – ‚von oben nach unten‘.

Wechsel der Repräsentationsform. Das auffälligste Mittel des Elementarisierens bei Klein ist die Veranschaulichung (vgl. hierzu Kapitel 3). Mathematische Gegenstände können, so Kirsch, durch Veranschaulichung oder allgemeiner durch einen „Wechsel des Darstellungsmediums“ (vgl. Kirsch 1977, S. 99) zugänglich gemacht werden. Nach Bruner (1973) kann dabei zwischen *enaktiven*, *ikonischen* und *symbolischen* Repräsentationen unterschieden werden. Klein nutzt mit seinen geometrischen Veranschaulichungen hauptsächlich ikonische Repräsentationen. Hinzu kommen verbale und damit symbolische Repräsentationen in Form von Metaphern (vgl. hierzu Kapitel 3.1).

Insgesamt kann die aufgestellte These, Klein nehme einen elementaren Standpunkt zur höheren Mathematik ein, plausibilisiert werden. Kleins Vorlesung können damit zwei Komponenten zugesprochen werden, die sich symmetrischer Sichtweisen bedienen. Klein nimmt sowohl einen *höheren* bzw. *erweiterten Standpunkt zur Elementarmathematik* ein als auch einen *elementaren Standpunkt zur höheren Mathematik*.

Kapitel 10

Vergleich mit alternativen zeitgenössischen Konzepten

Über die Notwendigkeit *elementarmathematischer Vorlesungen* bestand zu Kleins Zeit breiter Konsens: Kleins Haltung zur Lehrerbildung wurde auch von anderen renommierten Mathematikern seiner Zeit eingenommen. Ende des 19. Jahrhunderts hielt daher nicht nur Felix Klein elementarmathematische Vorlesungen, die die Kluft zwischen Schul- und Hochschulmathematik verkleinern und eine Art ‚höheren Standpunkt‘ zur Schulmathematik vermitteln sollten. Zwei weitere Beispiele hierfür sind

- die *Enzyklopädie der Elementarmathematik* von Heinrich Weber und Josef Wellstein, die sich durch einen systematischen Aufbau und einen hauptsächlich fachmathematischen Blick auf die schulmathematischen Gegenstände auszeichnet, und
- das *Repetitorium zur Elementarmathematik* von Franz Wilhelm Meyer, das im Gegensatz zur Kleinschen Vorlesung, bereits am Anfang des Studiums von der Schulmathematik ausgehend, zur höheren Mathematik hinführen will.

Ungefähr dreißig Jahre nach Veröffentlichung der Weberschen *Enzyklopädie* und der Kleinschen *Elementarmathematik* stellt Toeplitz das Konzept einer Vorlesung, die einen höheren Standpunkt entwickeln soll, generell in Frage. Ihm zufolge kann ein solcher Standpunkt nur dann beim Studenten erzeugt werden, wenn er ein Bestandteil jeder einzelnen Veranstaltung im Studium ist. Er wirft beiden Vorlesungen vor, einen zu stark *enzyklopädischen Charakter* zu haben. Bezüglich der *Elementarmathematik vom höheren Standpunkt* von Klein kann diese Einschätzung mit Hilfe der vorangegangenen Analyse relativiert werden, zumal Toeplitz bei der Entwicklung ‚seines höheren Standpunkts‘ ähnliche Prinzipien und Perspektiven mitdenkt, wie sie für Klein in den vorausgegangenen Kapiteln herausgearbeitet wurden. Die Tragfähigkeit einer einzelnen Überblicksvorlesung ohne geeignete Vorarbeit während des Studiums kann jedoch mit Toeplitz hinterfragt werden.

Das vorliegende Kapitel verfolgt mehrere Ziele. Einerseits wird die Vorlesung Kleins in die damalige Diskussion eingeordnet. Der Vergleich mit alternativen Vorlesungskonzepten eröffnet eine Bandbreite an zusätzlichen Facetten eines höheren Standpunkts, die auch in die aktuelle Diskussion um ein lehramtsgerechtes Mathematikstudium einbezogen werden können. Andererseits wird die *Elementarmathematik vom höheren Standpunkt*, von einer Außenperspektive aus, einer kritischen Reflexion bezüglich ihrer Intention und ihrer Tragfähigkeit unterzogen und schließlich zeigen insbesondere die Abschnitte zu Webers *Enzyklopädie der Elementarmathematik* und Meyers *Repetitorium zur Elementarmathematik*, inwiefern die in den beiden Hauptteilen der vorliegenden Analyse herausgearbeiteten *Kleinschen Prinzipien und Perspektiven* als Folie für einen systematischen Vergleich lehramtsspezifischer elementarmathematischer Vorlesungen genutzt werden können.

10.1 Zur Notwendigkeit elementarmathematischer Vorlesungen

Bereits ab Mitte des 19. Jahrhunderts begann man von Seiten der Universität, eine wachsende Kluft zwischen Schule und Hochschule zu beklagen. Diese machte sich auf unterschiedlichen Ebenen bemerkbar, die sich gegenseitig bedingen:

- Es existierten zunehmend weniger *inhaltliche Überschneidungen* zwischen Schul- und Hochschulmathematik. Die Universität geriet in die Gefahr, speziellere Themen zu behandeln und den Bezug zur Realität zu verlieren (vgl. Lorey 1916, S.525).
- Auch das *methodische Vorgehen* unterschied sich immer stärker: Während in der Schule die Anschauung großen Raum einnahm¹, gewann in der Forschung die logische Begründung und Deduktion an Bedeutung. Man sprach von der ‚Krise der Anschauung‘ (vgl. Volkert 1986).
- Lehrer der höheren Schulen nahmen immer weniger am wissenschaftlichen Diskurs der Universitäten teil. Eigene Forschungsaktivität wurde selten (vgl. Lorey 1916, S. 252).
- Umgekehrt verlor die Universität die Lehrer und deren Bedürfnisse aus dem Blick: Der Hochschulunterricht richtete sich an die zukünftigen Forscher; „daß

¹Klein schreibt dazu beispielsweise: „Bei den Lehrern unserer Gymnasien wird die Notwendigkeit eines an Anschauung anschließenden mathematischen Unterrichts im Augenblick vielfach so stark betont, daß man gezwungen ist, zu widersprechen und umgekehrt die Notwendigkeit eingehender logischer Entwicklungen zu betonen.“ (Klein 1921, S. 239)

die Mehrzahl der Studierenden später an höheren Schulen die Elemente zu lehren haben wird, [trat] [...] scheinbar ganz in den Hintergrund.“ (Stäckel 1905, S. 524)

Bemühungen um inhaltliche und methodische Verbindungen.

Diese Kluft begann man, wie Klein in seiner Elementarmathematik berichtet (vgl. Klein EvhS 1, S. 1), Ende des 19. Jahrhunderts von beiden Seiten her zu verkleinern.

Auf der *inhaltlichen Ebene* einerseits, indem man das mathematische Schulcurriculum anpasste und zumindest auch für die Hochschule relevante Themen einfließen ließ – die Einführung der Differential- und Integralrechnung ist ein typisches Beispiel –, andererseits indem man von Seiten der Universitäten Elementarmathematik als Forschungsobjekt unter aktueller hochschulmathematischer Perspektive würdigte (vgl. Stäckel 1905, S. 525f).

Die *methodische Frage* nach Wert und Bedeutung der Anschauung wurde zumindest als hochschuldidaktische Frage in Bezug auf die Anfängervorlesungen stark diskutiert. Pringsheim und Klein gelten als Vertreter der beiden extremen Positionen, die sie in den Jahresversammlungen der deutschen Mathematikvereinigung vertraten (vgl. Pringsheim 1897, 1899; Klein 1899). Pringsheim betonte in diesen Vorträgen den „arithmetischen Standpunkt und lehnt[e] grundsätzlich die auf lebhafter Anschauung beruhenden pädagogischen Tendenzen ab“ (Lorey 1916, S. 273). Klein hingegen war der Meinung, dass, ohne der Logik und abstrakten Deduktion ihre Bedeutung absprechen zu wollen, erst durch die Anschauung, der „Sinn und Zweck der mathematischen Behandlungen“ (Klein 1899, S. 132) deutlich wird. Die Diskussion wurde von weiteren Mathematikern aufgegriffen, die unterschiedliche, zum Teil weniger absolute Meinungen vertraten. So äußerte Meyer beispielsweise, eine Vorlesung sei nur dann erfolgreich, wenn das Verhältnis von Anschauung und Strenge der Entscheidung des jeweiligen Dozenten obliegt:

„Auf die zur Zeit actuelle Frage, welches Maß von Abstractkeit einerseits, von Anschaulichkeit andererseits der Hochschulunterricht in den Elementen der höheren Analysis aufweisen soll, will ich hier nicht eingehen und höchsten bemerken, daß man zum günstigen Durchschnittsresultat gelangen wird, wenn jeder Docent (innerhalb natürlicher Grenzen) seiner ausgesprochenen Individualität folgen darf.“ (Meyer 1899, S. 147)

Bemühungen um ein lehramtsgerechtes Mathematikstudium.

Insbesondere rang man um ein Mathematikstudium, welches die Bedürfnisse der Lehramtsstudenten einbezog. Man ging von der auch damals anerkannte These

aus, „daß der Lehrer [...] auf einem wesentlich höheren Standpunkte [zu] stehen“ (Meyer 1899, S. 148) habe als der Schüler. Der Lehrer muss, so beispielsweise Killing, nicht nur das wissen, was er seinem Schüler beibringt, sondern jede mathematische Frage von der wissenschaftlichen Seite beurteilen können (vgl. Killing 1913, S. 30), damit er einerseits dieses Wissen produktiv forschend einsetzen, andererseits einen reflektierten und angemessenen Unterricht halten kann:

„Er soll volles Verständnis von allem dem besitzen, was er im Unterricht behandelt. Erst dann kann er beurteilen, wieweit es möglich ist, auch bei seinen Schülern ein tieferes Verständnis anzubahnen.“ (Killing 1913, S. 30)

Die Erfahrung zeigte jedoch, dass der Student und zukünftige Lehrer diesen höheren Standpunkt nicht von alleine entwickeln konnte und es daher notwendig war, „der großen Menge der Studierenden der Mathematik bei dem Brückenbau behilflich zu sein“ (Lorey 1916, S. 267) – eine universitäre Aufgabe, auf die Lorey zufolge erstmals Klein bei der Göttinger Versammlung des Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts hinwies (vgl. Klein 1921, S. 1).

Elementarmathematische Vorlesungen als entscheidendes Element. Mit diesem Ziel wurden ab Ende des 19. Jahrhunderts einerseits zahlreiche Lehrbücher veröffentlicht, die die Elementarmathematik in angemessener Weise aufzubereiten versuchten (vgl. bspw. Killing und Hoverstadt 1910; Enriques 1907; 1911; Färber u. a. 1909–1915), andererseits werden spezielle elementarmathematische Vorlesungen implementiert.

Prinzipiell war die Idee, elementarmathematische Inhalte ins Studium zu integrieren, nicht neu. Elementarmathematische Vorlesungen waren bereits im 18. Jahrhundert an vielen Universitäten mit kurzen Unterbrechungen fester Bestandteil des Mathematikstudiums. In Münster wurden sie sogar fest in der Prüfungsordnung für Lehramtskandidaten verankert:

„Der Kandidat soll nicht allein in den höheren Teilen der Mathematik [...] zu Hause sein, sondern er soll auch in den verschiedensten Teilen der Elementarmathematik, soweit sie in den Bereich des Gymnasialunterrichts fallen, völlig gegenwärtig sein.“ (zitiert nach Lorey 1916, S. 263)

Dahingehende Bestrebungen bestanden jedoch meist aus einzelnen Veranstaltungen oder Übungen und gaben damit den Studenten weder „einen guten Überblick über das später von ihnen zu lehrende Gebiet“ (Lorey 1916, S. 267), noch lieferten sie „die Erkenntnis von der Bedeutung der Höheren Mathematik für die Elementare Mathematik“ (Lorey 1916, S. 267).

Mit seiner Vorlesung zur *Enzyklopädie der Elementarmathematik* und das zugehörige dreibändige Werk ging Weber über diese „vereinzelten Unternehmungen“ (Lorey 1916, S. 264) deutlich hinaus und leistete damit, so Lorey, einen entscheidenden Beitrag zur Überbrückung der beanstandeten Kluft zwischen Schule und Hochschule (vgl. Lorey 1916, S. 264f). Weitere Beispiele solcher Vorlesungskonzepte präsentierten beispielsweise Meyer (1899) und Stäckel (1905).²

Beispiel eines Vorlesungskonzepts: Paul Stäckel. In einem Vortrag *Über die Notwendigkeit elementarmathematischer Vorlesungen an deutschen Universitäten* stellte Stäckel ein Konzept vor, das auf den ersten Blick viele Gemeinsamkeiten mit dem in dieser Arbeit herausgearbeiteten Vorgehen Kleins aufweist:

Auch er plädiert dafür, Vorlesungen dieser Art am Ende des Studiums einzuplanen, da sie die „Reife des Urteils voraussetzen“ (Stäckel 1905, S. 527). Zudem benennt er wichtige Kriterien einer solchen Vorlesung, die sich in Kleins fachmathematischer und mathematikhistorische Perspektive widerspiegeln – das *spezifisch-mathematische* sowie das *historisch-literarische* Moment. Die in einer solchen Vorlesung betrachteten Gegenstände sollen, vergleichbar mit Klein, nicht direkt im Unterricht angewendet werden, sondern „einen guten Teil zur Vertiefung und Bereicherung des Unterrichts beitragen [...], indem sie sozusagen dessen potentielle Energie steigern“ (Stäckel 1905, S. 530).

Ein *pädagogisches Moment*, etwa im Sinne der didaktischen Perspektive bei Klein, ist in diesem Vorlesungskonzept hingegen nicht erkennbar (vgl. Lorey 1916, S. 268); höchstens ansatzweise, wenn man annimmt, dass das *literarisch-historische Moment* im Sinne des historisch-genetischen Prinzips in die Schule einfließen kann:

„Geschichtliche Einsicht hat aber für den Lehrer noch höheren Wert. Was uns jetzt als selbstverständlich erscheint, ist das Ergebnis langer Entwicklungen. Daher gibt das Studium der Geschichte Verständnis für die Schwierigkeiten, die überwunden werden mußten, damit auch nur die allereinfachsten mathematischen Wahrheiten errungen wurden. Der historisch gebildete Mathematiker wird deshalb die Nöte des Schülers begreifen und mitfühlen, der in die Elemente einzudringen sich müht.“ (Stäckel 1905, S. 529)

Stäckel lehnt eine „systematische Ausbildung in der mathematischen Pädagogik“ (Stäckel 1905, S. 524) ab. Die Studienzeit sei dem theoretischen Lernen vorbehalten, „ist sie doch für den Lehrer in den meisten Fällen die einzige Zeit seines Lebens, wo er, noch frei von den Fesseln des Amtes, sich in voller Begeisterung allem Guten, Schönen und Wahrem widmen darf“ (Stäckel 1905, S. 524). Ziel von elementarmathematischen Vorlesungen ist es daher, durch inhaltliche Betrachtungen mögliche Überschneidungen zwischen Schul- und Hochschulmathematik zu

²Die Ansätze von Weber und Meyer werden in den Abschnitten 10.2 und 10.3 genauer diskutiert.

beschreiben und Anregungen für mögliche eigene Forschungsgegenstände zu geben, die in enger Verbindung mit den Inhalten des schulischen Unterrichts stehen (vgl. Stäckel 1905, S. 529). Die historischen Passagen eröffnen zudem ein weiteres Forschungsfeld:

„Daß ein vielbeschäftigter Lehrer gleichzeitig mathematisch-produktiv tätig ist, wird leider immer schwieriger [...]. Dagegen bietet die geschichtliche Forschung noch weitere Probleme, deren Lösung von Interesse ist [...]. Für solche geschichtliche Forschungen scheinen mir besonders die Lehrer an den humanistischen Anstalten berufen zu sein [...].“ (Stäckel 1905, S. 530)

Zum pädagogischen Anteil in elementarmathematischen Vorlesungen. Der Meinung Stäckels schlossen sich zu seiner Zeit viele an. Für die pädagogische Ausbildung sei das Seminar verantwortlich. Die Universität habe sich ausschließlich um die fachwissenschaftliche Ausbildung zu kümmern (vgl. Lorey 1916, S. 268f). Eine Besonderheit von Kleins *Elementarmathematik* bestand darin, dass er – wie in Kapitel 9 beschrieben – pädagogische bzw. didaktische Elemente einfließen ließ.

Kleins Vorlesung unterscheidet sich jedoch nicht nur durch ihre didaktischen Elemente von anderen elementarmathematischen Vorlesungen. Im Folgenden wird die *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus* mit zwei typischen zeitgenössischen Vorlesungskonzepten zu dieser Zeit verglichen. Besonders der Vergleich der fachmathematischen Perspektive erweist sich dabei als ertragreich.

10.2 Eine konservative Umsetzung: Heinrich Weber³

Eines der bis heute bekanntesten Beispiele elementarmathematischer, lehramtspezifischer Vorlesungen zu dieser Zeit ist neben Kleins Vorlesungsreihe die *Enzyklopädie der Elementarmathematik*, die von Heinrich Weber zusammen mit dem Lehrer und Kollegen Josef Wellstein als dreibändiges Werk herausgegeben wurde.

10.2.1 Biographische und bibliographische Notiz

„Er ist eine schmiegsame und doch wieder energische Natur und besitzt eine wunderbare Fähigkeit, leicht in ihm zunächst fremde Auffassungen einzudringen, so z.B. in die Riemannsche Funktionentheorie und die Dedekindsche Zahlentheorie. Diese seine Anpassungsfähigkeit hat es ihm ermöglicht, auf fast allen Gebieten

³Eine Kurzfassung dieses Kapitels ist veröffentlicht in Allmendinger (2014).

unserer Wissenschaft in den letzten Dezennien mitzuarbeiten und die umfassenden Lehrbücher, den Weber–Wellstein, den Riemann–Weber, die Algebra zu schaffen, die wir alle kennen und benutzt haben.“ (Klein 1926, S. 275)

Heinrich Martin Weber (1842 – 1913) war ein deutscher Mathematiker. Er studierte in Heidelberg, Leipzig und Königsberg und wirkte ab 1869 an der ETH Zürich, an der Albertus-Universität Königsberg, sowie in Charlottenburg (an der heutigen TU Berlin), Marburg, Göttingen, Gießen und Straßburg. Zudem gehört er zusammen mit Klein zu den Gründungsmitgliedern der deutschen Mathematiker-Vereinigung.

Weber arbeitete auf dem Gebiet der partiellen Differentialgleichungen in der mathematischen Physik und ihren Anwendungen auf Wärmelehre, Hydrodynamik und Elektrizitätstheorie. Weiter veröffentlichte er, unter anderem zusammen mit Dedekind, Ergebnisse zu abelschen, elliptischen und Besselschen Funktionen. Großen Einfluss hatten seine Resultate zur Algebra und Zahlentheorie, insbesondere zur Darstellungstheorie der Gruppen und zur Körpertheorie. (vgl. bspw. Voss 1914).

„Und während bei manchen Mathematikern im Laufe ihrer Entwicklung eine Verschiebung ihrer wissenschaftlichen Interessen [...] stattzufinden scheint, [...] ist Weber in seiner Universalität sich immer gleichgeblieben.“ (Voss 1914, S. 435)

Seine Arbeiten zeichnen sich durch eine große Vielfalt aus, die nicht zuletzt auch durch seine Mitarbeit an der *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften* deutlich wird, die er zusammen mit Klein und Meyer mit dem Ziel einer „Gesamtdarstellung der mathematischen Wissenschaften nach ihrem gegenwärtigen Inhalt an gesicherten Resultaten“ (Arndt 1935, S. 100) initiierte.

Neben seinem forschenden Interesse an der Mathematik beschäftigte sich Weber auch intensiv mit Fragen des Unterrichts an Schulen und Hochschulen. Aus organisatorischer Sicht trat er beispielsweise „im Interesse der Einheit der wissenschaftlichen Ausbildung“ (Voss 1914, S. 443) für die Angliederung der technischen Hochschulen an die Universitäten ein. Zudem veröffentlichte er mehrere Lehrbücher, in denen er es sich, zum Teil mit Kollegen, zur Aufgabe machte, Gegenstände der Universitäts- und Elementarmathematik in systematisch geordneter Form vorzustellen.

Die im Eingangszitat erwähnten Beispiele hierfür stießen bereits zu Webers Zeit auf große Aufmerksamkeit: „die Algebra“ – das *Lehrbuch der Algebra* in zwei Bänden (vgl. Weber 1921), „der Riemann–Weber“ – *Partielle Differentialgleichungen in der mathematischen Physik*, an Riemanns Vorlesungen angelehnt (vgl. Weber und Riemann 1910) und „der Weber-Wellstein“ – die *Enzyklopädie der Elementarmathematik* (vgl. Weber und Wellstein 1909), welche in diesem Kapitel Gegenstand der Untersuchung sein wird.

Alle drei Werke sollen dabei gleichsam in die Grundlagen einführen, „zu höheren Theilen geleiten“ (Weber 1923, Ankündigung) und mögliche Forschungsfragen benennen. Dabei bemüht sich Weber um einen Aufbau, der weitestgehend unabhängig von anderen Lehrbüchern ist (Weber und Wellstein 1909, S. vi) und – aus pädagogischen Gründen – eher konservativ zunächst die aktuellsten Entwicklungen der Forschung umgeht. So wird der abstrakte Gruppenbegriff beispielsweise erst im zweiten Band des *Lehrbuchs der Algebra* eingeführt:

„Par exemple [...] la notion abstraite de groupe n'est introduite dans le Lehrbuch der Algebra qu'au début du deuxième tome.“ (Schappacher und Volkert 2005, S. 5)

Im Folgenden soll nun eine kurze Einführung und ein Überblick über die *Enzyklopädie der Elementarmathematik* gegeben werden. Das Werk wird anschließend auf Grundlage der vorangegangenen Erörterungen mit Kleins *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus* verglichen.

10.2.2 Enzyklopädie der Elementarmathematik

Um das Problem der doppelten Diskontinuität zu überwinden, hielt Weber bereits 1888 in Gießen erstmals Vorlesungen zur Elementarmathematik, die den Lehrer auf seinen zukünftigen Unterricht vorbereiten sollten. Diese Tradition setzte er auch in Göttingen und schließlich Straßburg fort (Schappacher und Volkert 2005, S. 10), wo er von dem Lehrer, Privatdozenten und Mathematikhistoriker Max Simon unterstützt wurde.

An diese Vorlesungen angelehnt entstand zusammen mit dem Lehrer und Straßburger Kollegen Josef Wellstein die *Enzyklopädie der Elementarmathematik*, ein Handbuch für Lehrer und Studierende in drei Bänden:

- *Elementare Algebra und Analysis* (H. Weber und J. Wellstein, 1903)
[oft zitiert als: *Arithmetik, Algebra und Analysis*]
- *Elemente der Geometrie* (H. Weber, J. Wellstein und W. Jacobsthal, 1905)
- *Angewandte Elementarmathematik* (H. Weber, J. Wellstein und R. Weber, 1907)

Die Enzyklopädie war bereits zu Webers Zeit ein großer Erfolg. Alleine vom ersten Band gab es fünf, zum Teil überarbeitete Auflagen – die letzte nach seinem Tod 1934. Das Werk ersetzte beispielsweise *Die Elemente der Mathematik* von Baltzer (1885) und die *Elemente* von Borel (1908) (vgl. Schappacher und Volkert 2005, S. 10) und wurde als Basisliteratur für Lehrer höherer Schulen gepriesen:

„[...] Daß ein Hochschullehrer von der Bedeutung des Verfassers die Elementar-Mathematik von höherer Warte aus behandelt und mustergültig darstellt, ist selbstverständlich. Jeder Lehrer, jeder Studierende muß das Werk, welches nicht nur in methodischer, sondern auch in systematischer Hinsicht von *Bedeutung und daher eine wichtige Erscheinung* der elementaren mathematischen Literatur ist, besitzen und studieren.“ Rezension aus der Zeitschrift für lateinlose höhere Schulen (zitiert nach Weber 1923)

Zur Wahl der Inhalte der Enzyklopädie. Der erste Band der Reihe enthält drei „Bücher“, eines zu den *Grundlagen der Arithmetik*, eines zur *Algebra* und ein letztes zur *Analysis*. Im ersten Buch werden die unterschiedlichen Zahlbereiche, die damit verbundenen Rechenoperationen, lineare und quadratische Gleichungen sowie Permutationen und mögliche Anwendungen behandelt. Im zweiten Buch werden algebraische Gleichungen und Hauptsätze der Algebra vorgestellt. Der Schwerpunkt wird auf das algebraische und numerische Lösen von Gleichungen gelegt. Im Buch zur Analysis werden in den ersten Auflagen zunächst nur unendliche Reihen und Produkte sowie die Transzendenz von π und e thematisiert, in der dritten Auflage kommt ein Kapitel zur Differential- und Integralrechnung hinzu:

„Von bedeutenderen Änderungen habe ich noch den 27^{sten} Abschnitt zu erwähnen, der die ersten Elemente der Differential- und Integralrechnung behandelt. Es hat in der letzten Zeit eine Bewegung in dem mathematischen Unterrichte eingesetzt, die dahin geht, von vorneherein die Begriffe der veränderlichen Größen und der Funktionen zum Verständnis zu bringen [...] Dieser Weg führt naturgemäß zu den Grundbegriffen der Differentialrechnung [...].“ (Weber und Wellstein 1909, S. x)

Der zweite Band beschäftigt sich mit den *Grundlagen der Geometrie*, der *Trigonometrie* und der *analytischen Geometrie und Stereometrie*. Besonderes Augenmerk kann hier auf den ersten Teil des Bandes gelegt werden, in welchem gezeigt wird, „daß hier wirklich ernsthafte [erkenntnistheoretische, H.A.] Fragen vorliegen, die auch den Mathematiker angehen“ (Weber u. a. 1915, S. vf), während der zweite und dritte Teil als Vorbereitung für die im dritten Band behandelten Anwendungen verstanden werden kann (vgl. Weber u. a. 1915, S. v).

Der dritte Band der *Enzyklopädie* widmet sich schließlich den Anwendungen, wobei Weber und Wellstein die Hilfe von Fachleuten der jeweiligen Anwendungen in Anspruch nehmen: Für den ersten Teil zur *mathematischen Physik* ist Webers Sohn und Professor der Physik Rudolph Weber mitverantwortlich und in späteren Ausgaben alleiniger Autor. Im zweiten Teil zur *darstellenden Geometrie, graphischen Statik, Wahrscheinlichkeitsrechnung, politischen Arithmetik* und *Astronomie* arbeiten ab der zweite Auflage der Finanzmathematiker Heinrich Bleichinger und der Astronom Julius Blauschinger mit.

Weber zufolge kann die Festlegung der Inhalte der Elementarmathematik entweder nach dem *wissenschaftlichen Prinzip* oder dem *pädagogischen Prinzip* erfolgen. Mit ersterem wird nach mathematischen Gesichtspunkten individuell für jedes Gebiet entschieden, was zu den Elementen zu gehören hat, was von großem Wert für die Begriffsbildung sein kann (vgl. Kapitel 1.3). Aus pädagogischer Sicht sei diese Einteilung, so Weber, jedoch wertlos. Hier habe man stattdessen alles zur Elementarmathematik zu zählen, was sich im Unterricht verwenden lässt und verwendet werden soll. Damit hängt die Auswahl von den jeweiligen Zielen des Unterrichts ab. Die Entscheidung, was Elementarmathematik ist, haben daher in erster Linie Pädagogen zu treffen, Wissenschaftler bzw. Mathematiker können lediglich unterstützend mitwirken (vgl. Weber 1903, S. 393f). Dieser Haltung folgend entfaltet Weber in seiner *Enzyklopädie* damit, anders als Klein, keine curricularen Reformgedanken, sondern orientiert sich am damaligen Lehrplan der Schule. Besonders deutlich wird dies im ersten Band, in dem er erst nach der Meraner Reform und den damit verbundenen curricularen Änderungen die Differential- und Integralrechnung in sein Werk einarbeitet.

In der Enzyklopädie und Vorlesung vertretene Grundsätze und Ziele. Weber vertritt die Auffassung, dass der Lehrer selbst mit zu entscheiden habe, welche Dinge er im Unterricht behandelt und wie tief er dabei in den Sachverhalt eindringt – abhängig „von der Individualität und wissenschaftlichen Neigung“ (Weber und Wellstein 1909, S. v) sowie „von der Beschaffenheit des Schülermaterials“ (Weber und Wellstein 1909, S. v). Es ist also, Weber zufolge, die Aufgabe eines jeden Lehrers, eine geeignete Stoffauswahl für die jeweilige Klasse zu wählen. Die Enzyklopädie soll als Handbuch Anregungen und Entscheidungshilfen dafür liefern:

„Die Leser, an die wir uns wenden, sind [...] die Lehrer, die, wie wir hoffen, darin Anregung finden mögen, ihren Unterrichtsstoff sachgemäß auszuwählen und, namentlich in den höheren Klassen zu vertiefen[.]“ (Weber und Wellstein 1909, S. v)

Für die Studierenden dient das Buch (genauso wie die unter gleichem Namen gehaltene Vorlesung) als „Auffrischung und Ergänzung erworbener Kenntnisse“ (Weber und Wellstein 1909, S. v) im Bereich der Elementarmathematik und zur Befähigung für die oben beschriebenen Entscheidungen. Um einzusehen, wie die Vorlesung damit als Vorbereitung für die Schule verstanden werden kann, ist es wichtig, Webers Haltung zum Mathematikunterricht und zu den Aufgaben, die er dem Lehrer zuspricht, zu kennen:

Ziel des Mathematikunterrichts soll es sein, neben Fachkenntnissen und Fertigkeiten, die für ein späteres Fachstudium nötig sind, auch eine „tiefere mathematische Bildung und ein feines Gefühl für die Schönheit der Mathematik“ (Weber 1903, S. 399) zu vermitteln. Dabei gilt es gleichermaßen, die begabten Schüler zu

fördern als auch der Allgemeinheit das mathematische Wissen mit auf den Weg zu geben, das sie für ihr Leben und ein mögliches Studium benötigen. In beiden Fällen soll das in spezifischer Weise geschehen:

„Dies geschieht aber nicht dadurch, daß man die [...] Schüler möglichst weit über die Grenzen der Elementarmathematik hinaus [...] führt. Dadurch werden künftige Studien eher gehemmt als gefördert. Viel fruchtbarer, bildender und belebender ist die Vertiefung des Inhalts des elementaren Unterrichts, der innerhalb der Grenzen einen unerschöpflichen Reichtum an Stoff bietet.“ (Weber 1903, S. 400)⁴

Für die fähigeren Schüler bedeutet dies, dass auch im Rahmen der Elementarmathematik die Möglichkeit besteht, mathematisches Denken und abstrakte Ideen kennenzulernen. Aber: „Es soll hier dem Lehrer vollkommene Freiheit gelassen werden, unter dieser Fülle je nach wissenschaftlicher Neigung die Auswahl zu treffen“ (Weber 1903, S. 400).

Generell plädiert er dafür, mathematische Anwendungen in den Unterricht zu integrieren, da sie, so Weber, „zur Belebung des Unterrichts viel beitragen“ (Weber 1903, S. 401), Interesse wecken und zur Sorgfalt und Genauigkeit erziehen. Zudem bietet die Algebra und die Zahlentheorie viele Beispiele, die nicht nur begabten Schülern zugänglich sind (vgl. Weber 1903, S. 401).

Die *Enzyklopädie* dient dazu, dem Lehrer für beide Zielgruppen Vorschläge und Anregungen zu liefern. Weber und Wellstein geben hierzu eine möglichst lückenlose Darstellung der in der Schule behandelten Themen und stellen diese in deduktiv geordneter Weise vor, indem sie den Schwerpunkt auf eine „strenge Entwicklung der logischen Voraussetzungen“ (Weber und Wellstein 1909, S. vii) legen. Dadurch wird der Schulstoff vertieft und vor allem aus hochschulmathematischer Sicht fundiert. In der Veröffentlichung haben sie dabei insbesondere auf solche Beispiele verzichtet, die nur einen beschreibenden Wert haben oder dem „Zweck der Übung dienen“ (Weber und Wellstein 1909, S. viii) und nicht eigene neue Erkenntnisse liefern.⁵

10.2.3 Vergleich mit Kleins Vorlesungsreihe

Ein Vergleich der beiden *Vorlesungskonzepte* ist nur eingeschränkt möglich, da Weber im Gegensatz zu Klein kein autographiertes Manuskript seiner Vorlesung

⁴Dies erinnert an die im Projekt *Mathematik Neu Denken* beschriebene Aufgabe einer Schulmathematik vom höheren Standpunkt (vgl. Beutelspacher u. a. 2011, S. 13).

⁵Ob dies auch für die Vorlesungen galt, auf deren Grundlage die Enzyklopädie entstanden ist, lässt sich nicht nachvollziehen.

veröffentlicht hat, sondern ein Handbuch, das lediglich auf den Inhalten der Vorlesung aufbaut. Viele der in der vorliegenden Arbeit vorgestellten Analyseergebnisse der Kleinschen Vorlesung basieren auf der Erörterung von Randbemerkungen, Exkursen und Beispielen. Inwiefern Weber diese in seiner Vorlesung ebenfalls integrierte, lässt sich anhand der veröffentlichten *Enzyklopädie* nicht erkennen. Durch den Vergleich der Inhalte, des Aufbaus und der im Vorwort beschriebenen Haltung und Intention Webers zur Schulmathematik und Lehrerbildung können jedoch grundlegende Unterschiede und Gemeinsamkeiten herausgearbeitet werden.

Inhaltlicher Vergleich der beiden Werke. Die jeweils ersten Bände von Weber und Wellstein bzw. Klein enthalten auf den ersten Blick viele inhaltliche Überschneidungen: So wird in beiden Werken beispielsweise der *Aufbau des Zahlensystems* thematisiert (vgl. Weber und Wellstein 1909, Erstes Buch). Genau wie Klein legen auch Weber und Wellstein großen Wert auf die Diskussion von *Unmöglichkeitsbeweisen* bei der Konstruktion mit Zirkel und Lineal (vgl. Weber und Wellstein 1909, 19. Abschnitt) und widmen einen Abschnitt den *Kettenbrüchen* (vgl. Weber und Wellstein 1909, 15. Abschnitt).

Klein weist in seiner Autographie auf die *Enzyklopädie* von Weber und Wellstein hin, empfiehlt sie als (Begleit-)Lektüre, hebt aber auch Unterschiede hervor. Eine entscheidende Abweichung sei in der „*Abgrenzung des Inhalts der Schulmathematik*“ (Klein EvhS 1, S. 4) zu erkennen, die auch Auswirkungen auf die Inhalte der Vorlesung hat:

„Weber und Wellstein sind da ‚*konservativ*‘, ich ‚*fortschrittlich*‘ gesinnt. Wir, man nennt uns wohl die ‚*Reformer*‘, wollen in den Mittelpunkt des Unterrichts den *Funktionsbegriff* stellen [...]. Diesen verhältnismäßig neuen Ideen gegenüber hält Weber-Wellstein im wesentlichen an der alten Stoffbegrenzung fest; meine Absicht in dieser Vorlesung ist natürlich die, für die neue Auffassung einzutreten.“ (Klein EvhS 1, S. 5)

Diese Beurteilung wird dadurch gestützt, dass die Differential- und Integralrechnung in den ersten zwei Auflagen (1903 und 1905), auf die sich Klein in diesem Zitat bezieht, nicht Gegenstand der *Enzyklopädie* war. Mit Aufnahme dieser Inhalte in das offizielle Schulcurriculum wird in einer dritten Auflage ein Kapitel hinzugefügt. Damit reagieren Weber und Wellstein zeitnah auf aktuelle Diskussionen in der Schule, jedoch ‚minimal invasiv‘: Während Klein seine Vorlesung vollständig am funktionalen Denken zu orientieren scheint (vgl. Kapitel 9.1), kommt bei Weber-Wellstein dem Begriff der Funktion keine besondere Bedeutung zu. Einen Hinweis dafür liefert die Tatsache, dass sie Logarithmen als Rechenoperationen als eine Grundlage der Arithmetik einführen und die Trigonometrie erst im zweiten Band

zu den Grundlagen der Geometrie zählen. Damit werden die beiden Gegenstände, anders als bei Klein, nicht als Funktionenklassen thematisiert.

Auch an anderen Gegenständen lässt sich feststellen, dass die Art und Weise der Behandlung und die jeweilige Schwerpunktsetzung in den beiden Vorlesungen voneinander abweichen. Diese Unterschiede können mit Hilfe der ‚Kleinschen Prinzipien und Perspektiven‘ als Hintergrund herausgearbeitet werden:

In der Enzyklopädie eingenommene Perspektiven. Auch bei Weber-Wellstein fließen unterschiedliche Perspektiven in das Werk mit ein, wenn auch nicht in dem Umfang und in der Ausgewogenheit, wie es in der *Elementarmathematik* bei Klein der Fall ist. Beide legen einen ausgeprägten Schwerpunkt auf eine **fachmathematische Perspektive**, in der die Gegenstände in deduktiv geordneter Weise in einer fachmathematischen Sprache, wie sie am Ende eines Mathematikstudiums vorhanden sein sollte, präsentiert werden.

Wie auch bei Klein wird großer Wert auf Fundierung der schulmathematischen Gegenstände gelegt. Weber-Wellstein verfolgen bei der Einführung der natürlichen Zahlen einen mengentheoretischen Ansatz und führen die Addition über die heute nach Peano benannten Axiome ein.

Allerdings entscheiden sich Weber und Wellstein meist für einen Zugang, den sie dann ausführlich beschreiben und in der Vorlesung bzw. der Buchreihe entwickeln, während Klein es vorzieht, unterschiedliche Zugänge zu thematisieren, die jedoch nicht im Detail in seiner Vorlesung ausgeführt werden. An vielen Stellen verweist Klein stattdessen sogar auf die *Enzyklopädie*. Ein typisches Beispiel dafür ist die Einführung der rationalen Zahlen:

Weber-Wellstein führen die rationalen Zahlen als formales Begriffssystem ein. Eine rationale Zahl wird dann in der üblichen Weise mit einem Zahlenpaar (a, b) identifiziert, mit dem nach bestimmten Regeln gerechnet wird (für die Addition gilt dann $(a, b) + (c, d) = (ad + bc, bd)$ oder in der vereinbarten Schreibweise: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$). Anschließend wird gezeigt, dass die so definierten Operationen wohldefiniert und konsistent mit den auf \mathbb{Z} definierten Operationen sind (vgl. Weber und Wellstein 1909, S. 50–58). Klein spricht diese Vorgehensweise ebenfalls an, führt sie jedoch nicht vor, sondern verweist auf Weber-Wellstein (vgl. Klein EvhS 1, S. 31). Stattdessen vergleicht er sie mit anderen Herangehensweisen, die wenigstens zum Teil auf einem anschaulichen Begriffsverständnis der rationalen Zahlen beruhen.

Beide Autoren(teams) behandeln im Rahmen dieser mathematischen Untersuchungen Themen, die über den damaligen Schulstoff hinausgehen, wie beispielsweise der Beweis für die Transzendenz von π und e (vgl. Weber und Wellstein 1909, 26.

Abschnitt). Bei Weber-Wellstein findet man jedoch, im Gegensatz zu Klein, nur vereinzelt Hinweise auf aktuelle Forschungsfelder. Der große Fermatsche Satz wird nur in einer Fußnote erwähnt (vgl. Weber und Wellstein 1909, S. 173), während Klein diesem ein ganzes Kapitel widmet (vgl. hierzu Kapitel 7.3). Auch bespricht Klein insgesamt deutlich mehr Themen von hochschulmathematischer Relevanz, die neben der hochschulmathematischen Sprache und Denkweise auch der inhaltlichen Kenntnis weiterführender Theorien bedürfen – wie beispielsweise die funktionentheoretischen Überlegungen zum Logarithmus (vgl. hierzu Kapitel 7.2) –, während Weber und Wellstein ihren Schwerpunkt auf eine hochschulmathematische Durchdringung der Gegenstände im Rahmen der elementarmathematischen Untersuchungen legen.

Bei der Behandlung der imaginären Zahlen wird dieser unterschiedliche Fokus der beiden Werke besonders deutlich. Klein führt \mathbb{C} sofort in der Darstellung $x + iy$ (mit $i = \sqrt{-1}$) ein, bespricht die geometrische Deutung in der Gaußschen Zahlenebene und geht dann zu höheren komplexen Zahlen mit mehr als einer imaginären Einheit über. Ein ganzes Kapitel widmet er den Quaternionen, deren geometrischer Deutung und deren Anwendung in der Physik. Dabei greift er unter anderem auf Inhalte aus der linearen Algebra zurück (vgl. Kapitel 7.3). Weber-Wellstein hingegen thematisieren ausschließlich die ‚einfachen‘ komplexen Zahlen \mathbb{C} . Allerdings führen sie die Zahlen zunächst, wie es auch bei den rationalen Zahlen der Fall war, als bedeutungslose Zahlen ein, mit denen nach vereinbarten Regeln gerechnet wird:

„Wenn also a, b irgend zwei reelle Zahlen sind, so führen wir, diesen entsprechend, ein neues Zahlzeichen (a, b) ein. Diese neuen Zahlengebilde nennen wir imaginäre oder auch komplexe Zahlen. Der Gedanke, der zu Grunde liegt, ist ganz derselbe wie der, durch den die Brüche aus den ganzen Zahlen abgeleitet werden. Die Regeln für das Rechnen mit diesen Zahlen sind aber ganz verschieden, und diese Regeln, die wir willkürlich vorschreiben können, müssen zunächst aufgestellt werden.“ (Weber und Wellstein 1909, S. 133)

Damit legen Weber und Wellstein, anders als Klein, keine hochschulmathematischen Theorien zugrunde und führen keine neuen mathematischen Gegenstände ein. Die Art und Weise der Behandlung des schulischen Inhalts unterscheidet sich jedoch wesentlich von der dort üblichen Vorgehensweise. Durch die abstrahierte Darstellung führt die von Weber angestrebte „Vertiefung des Inhalts des elementaren Unterrichts“ (Weber 1903, S. 400) zu einem *höheren Standpunkt* zur Elementarmathematik.

Weber und Wellstein haben also eine ausgeprägte fachmathematische Perspektive, die sich von der Kleinschen abgrenzen lässt. Im Vordergrund steht eine deduktive, logisch strukturierte Darstellung von höherem Abstraktionsgrad als in der Schule.

Sie gehen jedoch inhaltlich weniger als Klein über die eigentlichen schulmathematischen Inhalte hinaus.

Die anderen Perspektiven, die sich bei Klein ausmachen lassen, sind in der *Enzyklopädie* jedoch nicht oder nur reduziert vertreten. Weber und Wellstein verzichten in der ersten Auflage des ersten Bandes fast vollständig auf eine **historische Perspektive**:

„[Es schien] uns zu genügen, wenn bei jedem vorkommenden Eigennamen, der etwa zur Benennung eines Lehrsatzes dient, in einer kurzen Note auf die Lebenszeit und Lebensumstände des betreffenden Autors hingewiesen ist.“ (Weber und Wellstein 1909, S. viiif)

Auf vielfache Nachfrage wurde die zweite Auflage durch kurze historische Exkurse ergänzt. Diese „historischen Skizzen aus der Geschichte der Mathematik“ (Weber und Wellstein 1909, S. x) sollen mehr leisten als nur die Aufzählung von Büchern und Jahreszahlen – etwa im Sinne der *antiquaristischen Karikatur* (vgl. Nickel 2013, S. 260) –, erheben aber nicht den Anspruch, wie in der *Elementarmathematik* von Klein, im Sinne des historisch-genetischen Prinzips die mathematische Diskussion zu durchdringen:

So schließen Weber und Wellstein beispielsweise das Kapitel zu den Logarithmen mit einem Abschnitt *Historisches über die Logarithmen* (vgl. Weber und Wellstein 1909, S. 123-127), in dem, analog zur Kleinschen *Elementarmathematik*, die Anfänge der Logarithmenlehre bis hin zu Bürgi und Neper beschrieben werden. Dabei wird der Unterschied zwischen der Herangehensweise von Bürgi und Neper – im Gegensatz zu Klein – historisch korrekt angesprochen (vgl. Weber und Wellstein 1909, S. 126). Da Weber-Wellstein den Logarithmus als Rechenoperation und nicht als Funktionenklasse behandeln, verwundert es nicht, dass die neuere Entwicklung (nach Bürgi und Neper) zunächst ausgeschlossen wird. Die Potenzreihenentwicklung des Logarithmus – nach Klein die „*größte Leistung Mercators*“ (Klein EvhS 1, S. 162) – wird jedoch im analytischen Teil der Veröffentlichung ausführlich behandelt (vgl. Weber und Wellstein 1909, Â§ 132).

Während Klein seine historischen Ausführungen zum Logarithmus als notwendig für das Verstehen aller „*inneren Zusammenhänge*“ (vgl. Klein EvhS 1, S. 157) der Theorie ansieht und die Herangehensweise von Bürgi für seine didaktischen Ideen zur Einführung des Logarithmus in der Schule nutzbar macht (vgl. Kapitel 9.2.2), wird bei Weber-Wellstein das historische Kapitel unkommentiert und isoliert von den restlichen Untersuchungen – „ohne zu viel zu tun“ (Weber und Wellstein 1909, S. x) – nachgetragen.

In der Kleinschen Vorlesung spielt die **didaktische Perspektive** eine entscheidende Rolle. Klein stellt immer wieder eine Verbindung zwischen den vom ihm aus einer höheren mathematischen Perspektive aus behandelten Themen zu der

tatsächlichen oder erwünschten Behandlung in der Schule her, die sich besonders durch eine eher anschauliche Darstellung auszeichnet – „Gerade diese ‚psychologischen Momente‘ will ich in meiner Vorlesung mit besonderem Nachdruck stets zur Geltung bringen“ (Klein EvhS 1, S. 4).⁶ Der Student und zukünftige Lehrer soll Kleins Ausführungen Anregungen für den Unterricht entnehmen.

Auch Weber und Wellstein haben im Sinn, Anregungen für den Schulunterricht zu geben. Allerdings stellt Klein zu Recht fest, dass in der *Enzyklopädie* „davon, wie diese Dinge im Schulunterricht wirklich vorkommen, [...] nicht die Rede [ist]“ (Klein EvhS 1, S. 4). Es gibt keine Stelle, an der die aktuelle Situation in der Schule erörtert oder Kritik an der laufenden Schulpraxis geäußert wird. Auch beschreiben Weber und Wellstein nicht, wie sie sich eine Umsetzung auf der Schule wünschen – ganz im Gegensatz zu Klein.

Insbesondere zieht Klein in seiner Autographie explizit eine Grenze zwischen Inhalten, die ihm zufolge in der Schule thematisiert werden können, und Inhalten, die nur als Hintergrundwissen dem Lehrer dienen. Weber und Wellstein machen diese Unterscheidung nicht, sondern überlassen es dem Leser, welche der vorgestellten Inhalte und Darstellungen für ihn und seine Schüler angemessen und geeignet sind (vgl. Weber und Wellstein 1909, S. vii).

Bezüglich der methodischen Umsetzung im Unterricht hat Klein eine dezidierte Meinung, sieht darin aber eine Aufgabe für erfahrene Schulpraktiker (vgl. hierzu Kapitel 9.3.1). Zu curricularen Fragen des Schulunterrichts bezieht er in der Mera-ner Reform und auch in der *Elementarmathematik* Stellung. Es ist anzunehmen, dass auch Weber eine Meinung zu schulmathematischen Inhalten hat. So spricht er sich im Vorwort zur *Enzyklopädie* für mehr Anwendungen im schulischen Mathematikunterricht aus und verfolgt damit weniger studiumsvorbereitende als vielmehr pädagogische Ziele:

„Für die Mehrzahl der Schüler wird es weit nützlicher und anregender sein, wenn der Unterricht nach der Seite der Anwendungen hin ausgebildet wird [...]. Diese Anwendungen können zur Belebung des mathematischen Unterrichts viel beitragen, fördern das Interesse und können auch durch Pflege des Zeichnens und die der Mathematik so wohl anstehende Genauigkeit und Sorgfalt in der Ausführung des Kleinen und Einzelnen den erzieherischen Wert des Unterrichts steigern.“ (Weber und Wellstein 1909, S. viii)

Insgesamt sind jedoch sowohl inhaltliche als auch methodische Fragen des Schulunterrichts aus Webers Sicht vor allem von Pädagogen zu beantworten. Er orientiert sich wie beschrieben am bestehenden Schulcurriculum und gesteht dem einzelnen Lehrer zu, selbst den Unterrichtsinhalt individuell zu bestimmen.

⁶Zur didaktischen Perspektive bei Klein vergleiche insbesondere Kapitel 9.

„Denn nur da kann eine fruchtbare Einwirkung auf den Schüler erwartet werden, wo auf Seite des Lehrers selbst noch Interesse an dem Gegenstand des Unterrichts lebendig ist.“ (Weber und Wellstein 1909, S. vii)

Folglich wird in den einzelnen Kapiteln der *Enzyklopädie*, wie von Klein auch bemerkt, kein direkter Bezug zur Schule hergestellt. Die einzelnen Themen werden nicht aus einer didaktischen Perspektive beleuchtet – weder in kurzen Exkursen noch, wie es bei Klein der Fall ist, in speziellen Kapiteln (vgl. Klein EvhS 1, bspw. Kapitel I.1 oder IV.4). Ob Weber in der dem Handbuch zugrunde liegenden Vorlesung diesbezüglich zumindest Randbemerkungen einfließen ließ, kann und soll hier nicht geklärt werden.

Schließlich kann bezüglich der von Klein nur beiläufig eingenommenen **philosophischen Perspektive** festgehalten werden, dass Weber und Wellstein sich erkenntnistheoretischer Fragen und deren Bedeutung für die Mathematik bewusst sind, diese jedoch zumindest im ersten Band nicht gezielt thematisieren, wie es bei Klein der Fall ist. Eine Ausnahme bildet allenfalls der Abschnitt zur Geschichte der Zahlen (vgl. Weber und Wellstein 1909, § 7). Anders im zweiten Band der *Enzyklopädie*, der hier jedoch nicht näher untersucht wird: Wellstein kündigt in der Vorrede zu diesem Band an, auch philosophische Fragen zu berühren, ohne jedoch den Anspruch zu verfolgen, dezidiert philosophische Debatten zu führen:

„Nicht ohne Sorge übergebe ich das erste Buch der Öffentlichkeit, das die Grundlagen behandelt, also jenes Zwischengebiet, das außer mathematischem auch philosophischen Sinn beansprucht. Bei dem allgemeinen Tiefstande unserer philosophischen Bildung, den wir uns wohl ruhig eingestehen dürfen, und der großen Abneigung weiter Kreise gegen alle Fragen, die in dieses Gebiet schlagen, kam es vor allem darauf an zu zeigen, daß hier wirklich ernsthafte Fragen vorliegen, die auch den Mathematiker angehen.“ (Weber u. a. 1915, S. vf)

Der Abgleich mit den Kleinschen Perspektiven hat damit gezeigt, dass Weber und Wellstein den Fokus auf eine fachmathematische Perspektive legen, die sich jedoch von der Kleinschen grundlegend unterscheidet. Dies liegt unter anderem daran, dass die von Klein verwendeten Prinzipien bei Weber wenig oder zumindest anders akzentuiert einfließen:

Die Kleinschen Prinzipien bei Weber und Wellstein. In Kapitel 2 wurde gezeigt, dass das Hervorheben von Gemeinsamkeiten der Fragestellungen, die Erschließung von Zusammenhängen zwischen unterschiedlichen Sachverhalten und die Verwendung gebietsfremder Methoden – kurz: die **innermathematische Vernetzung** – in der Kleinschen Vorlesung eine herausragende Rolle spielen. In der *Enzyklopädie* wird dieses Prinzip nicht in besonderem Maße deutlich und wird auch nicht, wie es

bei Klein der Fall ist, als angestrebtes Ziel formuliert. Allenfalls bezüglich der Geometrie gibt es einige wenige Beispiele: Es wird die *Geometrische Darstellung der imaginären Zahlen* sowie die *Geometrische Darstellung von Funktionen* behandelt (vgl. Weber und Wellstein 1909, Å§ 54 und Å§ 145).

Diese Kapitel haben zudem die Funktion der **Veranschaulichung**, die aber ebenfalls insgesamt nur eine untergeordnete Rolle in der *Enzyklopädie* spielt. Hierin zeichnet sich meines Erachtens der grundlegende Unterschied zwischen Webers und Kleins Auffassung ab. Während Klein die Aufgabe des Mathematikunterrichts in erster Linie in der Vermittlung von Anschauung sieht (vgl. bspw. Klein EvhS 1, S. 4), scheint sie bei Weber nur ein wünschenswertes Ziel, „eine Quelle reichsten Genusses“ (Weber 1903, S. 399). Um diese zu vermitteln und damit „einen im höchsten Sinne erfolgreichen mathematischen Unterricht“ zu halten, braucht es eine Begabung, die nicht jedem zuteil wird. Das Minimalziel des Unterrichts bestünde daher lediglich darin, „normal begabten Schülern ein mathematisches Wissen und Verstehen in gewissem Umfang zu gewähren“ (Weber 1903, S. 399), welches auf logischem Denken aufbaut. Anders als Klein, der der Anschauung gerade für den Schulunterricht die höchste Bedeutung zumisst, stellt Weber damit das logische Denken in den Vordergrund, welches sich in der deduktiv geordneten Präsentation der Gegenstände in seiner Vorlesung widerspiegelt.

Die Motivation und das Interesse, welches Klein zufolge im Unterricht nur durch eine „*anschaulich faßbare Form*“ (Klein EvhS 1, S. 4) erhalten werden kann, werden aus Webers Sicht stattdessen durch eine Stärkung der **Anwendungen** erreicht (Weber 1903, S. 401).⁷ Im Gegensatz zu Klein fließen in der *Enzyklopädie* Hinweise auf Anwendungen nicht beiläufig und nur exkursartig immer wieder ein. Im ersten Band gibt es zunächst nur vereinzelte spezifische Abschnitte zu Anwendungen, die als solche explizit ausgewiesen werden – der Abschnitt zur *Zins- und Rentenrechnung* (vgl. Weber und Wellstein 1909, § 64) ist ein solches Beispiel. Im dritten Band schließlich widmen sich Weber und Wellstein ausdrücklich und umfassend den Anwendungen. Unterstützt werden sie dabei von Coautoren aus den jeweiligen Gebieten.

Wie bereits bei der Erörterung über die historische Perspektive bei Weber und Wellstein festgestellt, verfolgt die *Enzyklopädie* kein **genetisches Prinzip** im Sinne eines historischen Zugangs. Auch findet man keine Metabemerkungen zur Arbeitsweise des Mathematikers, und der streng deduktiv geordnete Aufbau des Handbuchs unterscheidet sich von dem bei Klein angestrebten induktiven Vorgehen (vgl. hierzu Kapitel 5). Es zeichnet sich zumindest teilweise ein genetischer Aufbau der Inhalte ab, den man problemorientiert nennen kann:

⁷Dem würde Klein nicht widersprechen, insbesondere auch weil Anwendungen als Mittel der Veranschaulichung verstanden werden können (vgl. hierzu 4.1).

Im Teil zur Arithmetik motivieren Weber und Wellstein die einzelnen Zahlbereichserweiterungen schrittweise inhaltlich über die mathematische Reichweite von Operationen: Die Subtraktion zweier natürlichen Zahlen lässt sich im Allgemeinen nur durch die Einführung von negativen Zahlen uneingeschränkt ausführen. Bei Division entstehen nicht notwendig wieder ganze Zahlen, die daraus entstehende „neue Zahlenart“ (Weber und Wellstein 1909, S. 50), die Brüche, gibt Anlass zu einer erneuten Zahlbereichserweiterung. Die Behandlung von Quadratwurzeln führt zu den irrationalen Zahlen. Um die „Disharmonie, die sich darin zeigt, daß gewisse quadratische Gleichungen keine Wurzeln haben“ (Weber und Wellstein 1909, S. 145), zu beheben, ist es notwendig, die imaginären Zahlen einzuführen.

Zusammenfassung und Zwischenbilanz

Insgesamt lässt sich festhalten, dass die *Enzyklopädie der Elementarmathematik* sich durch eine fundierte und deduktiv ausgerichtete fachmathematische Perspektive auszeichnet. Nur wenige ausgewählte Abschnitte erweitern den Blick auf die historische Entwicklung und (im zweiten Band) auf philosophische Fragen. Der Aufbau des Handbuchs lässt auf ein in gewissem Sinne genetisches Vorgehen schließen, was jedoch stark an mathematische Inhalte gebunden ist und explizit weder von historischen, pädagogischen oder lernpsychologischen Ideen getragen wird. Weber und Wellstein nehmen zudem keine didaktische Perspektive ein und beziehen nur bedingt Stellung zu curricularen und methodischen Fragen. Sie stellen in ihrem Handbuch Inhalte zusammen, die in der Schule thematisiert werden, präsentieren Vorschläge für eine Vertiefung, die entweder als Hintergrundwissen oder tatsächliches Unterrichtsmaterial verwendet werden kann, überlassen dem Lehrer jedoch selbst die Entscheidung, wie er das Buch im Unterricht einsetzt.

Der von Weber und Wellstein eingenommenen fachmathematischen Perspektive folgt auch Klein passagenweise, jedoch nicht in der auskristallisierten und detaillierten Form, wie es in der *Enzyklopädie* der Fall ist. Vielmehr belässt er es bei Andeutungen und Verweisen, ohne die Resultate explizit auszuführen. Zudem fällt auf, dass er die schulmathematischen Inhalte an wesentlich voraussetzungsstärkere fachmathematische Theorien anbindet, als es im ‚Weber-Wellstein‘ der Fall ist. Somit behandelt Klein deutlich mehr Hochschulmathematik und ist damit oft weiter von dem entfernt, was in der Schule direkt nutzbar gemacht werden kann, als Weber und Wellstein.

Insgesamt ist Kleins Zugang deutlich facettenreicher, was sowohl durch den vielfachen Perspektivwechsel als auch die unterschiedlichen Prinzipien, die bei Weber-Wellstein nicht ausgeprägt vorhanden sind, entsteht. Diese Einschätzung wird von Weber selbst im Vorwort zur dritten Auflage bestätigt. Er entscheidet sich jedoch gegen eine Umgestaltung der Enzyklopädie in diesem Sinne:

„Zu einer erheblichen Weiterführung, etwa im Sinne, wie er von F. Klein in dem kürzlich erschienenen autographierten Band ‚Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus‘ entworfen ist, konnte ich mich nicht entschließen.“ (Weber und Wellstein 1909, S. x)

10.3 Eine alternative Orientierung: Wilhelm Franz Meyer⁸

Wie von Stäckel bereits angesprochen kann eine Verbindung von Schul- und Hochschulmathematik nicht nur durch eine Vorlesung am Ende des Studiums erfolgen. Zusätzlich wären auch Veranstaltungen denkbar und wünschenswert, die von der Schulmathematik am Anfang des Studiums zur Hochschulmathematik hinführen. Ein Beispiel hierfür ist das *Repetitorium zur Elementarmathematik* von Wilhelm Franz Meyer.

10.3.1 Biographische und bibliographische Notiz

„Auch die Redekunst beherrschte er meisterhaft; überraschende Vergleiche, originelle Wendungen und ein feiner Humor [...] würzten den von unnachahmlichen Gesten begleiteten Vortrag. So gelang es ihm, seine eigene Begeisterung für die Schönheiten und Feinheiten mathematischer Entwicklungen auf seine Hörer zu übertragen[.]“ (Arndt 1935, S. 102)

Wilhelm Franz Meyer (1856–1934) studierte Mathematik in Leipzig und München, unter anderen auch bei Felix Klein. Nach seiner Habilitation über *rationale Kurven*, die er mit 24 Jahren in Tübingen einreichte, waren seine bedeutendsten Wirkungsstätten die Bergakademie in Clausthal, wo er als Ordinarius angestellt war, und die Albertus-Universität in Königsberg, an der er bis zu seiner Emeritierung als Professor tätig war.

Er arbeitete hauptsächlich auf dem Gebiet der algebraischen Geometrie, der Invariantentheorie und der Differentialgeometrie. Bis heute ist er durch seine Verdienste als „Sammler und Ordner mathematischer Erkenntnisse um die Entwicklung der Mathematik“ (Fritsch 1994, S. 336) bekannt: So beispielsweise durch den *Bericht über den gegenwärtigen Stand der Invariantentheorie* in den Jahresberichten und sein Buch über die *Theorie benachbarter Geraden und einen verallgemeinerten Krümmungsbegriff* (1911). Insbesondere gilt er als „geistiger Vater“ (Arndt 1935, S. 100) der *Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*, die er zusammen mit Klein und Weber ins Leben gerufen hat. Er war mit den Vorarbeiten

⁸Eine Kurzfassung dieses Kapitels ist veröffentlicht in Allmendinger (2014).

betrault, übernahm die Redaktion des ersten und dritten Bandes und lieferte auch eigene Beiträge. Meyer beschäftigte sich auch mit der Frage nach dem Wesen der Mathematik. Seine Auffassung dazu formulierte er in einem Beitrag *Kant und das Wesen des Neuen in der Mathematik* (vgl. Meyer 1905):

„[D]ie Mathematik [ist] auf der einen Seite in ihren deduktiven Beweisen eine logische *Wissenschaft*; andererseits aber ist sie im induktiven Aufbau der Beweise, im Herausgreifen der wesentlichen Momente, in der Gestaltungsfähigkeit der Formen ebenso sehr eine *ästhetische Kunst*. Wollte man aber fragen, was denn in einer einzelnen Kunstschöpfung, sei sie ein Gemälde oder eine Statue oder ein Bauwerk, als ‚neu‘ zu erklären wäre, so würde sich schwerlich eine befriedigende Antwort erteilen lassen; der subjektive künstlerische Geschmack, die gestaltende Phantasie wird immer ein Imponderabile bleiben.“ (Meyer 1905, S. 299)

Wie Klein und Weber nahm auch Meyer Stellung zu Fragen des schulischen Mathematikunterrichts, wenn auch nicht so ausführlich und konkret, wie es beispielsweise Klein tat. Er vertrat die Meinung, die Mathematik habe einen deutlich höheren Stellenwert im Schulunterricht generell einzunehmen, so wie es in Frankreich der Fall sei. Dazu seien grundlegende Änderungen im Schulsystem nötig:

„Ein wirklich bildender Erfolg des mathematischen Unterrichts an unseren höheren Schulen ist erst dann zu erwarten, wenn man sich höheren Orts entschließt, von den bisherigen Bahnen abzuweichen.“ (Meyer 1912, S.)

Dabei gelte es, dem Lehrer selbst mehr Freiheit bei der Auswahl und Art der Behandlung der einzelnen Inhalte zu lassen. Indem er die Entscheidungen diesbezüglich in andere Hände legt, nimmt Meyer einen Standpunkt zu curricularen Fragen ein, der dem Webers sehr ähnlich ist. Seinen Einfluss auf den Schulunterricht macht er durch seine Lehrtätigkeit geltend, eine weitere „bedeutungsvolle Seite seines Wirkens“ (Arndt 1935, S. 102) – „[h]at er doch die meisten heutigen Mathematiklehrer Ostpreußens ausgebildet und ihnen seinen Stempel aufgedrückt“ (Arndt 1935, S. 102). Besonderes Augenmerk legte er dabei auf elementarmathematische Fragen, die er auch in Ferienkursen für praktizierende Lehrer und in Vorträgen präsentierte (vgl. bspw. Meyer 1922), und er bemühte sich um die Behebung der Kluft zwischen Schul- und Hochschulmathematik, indem er sich für ein solches *Repetitorium zur Elementarmathematik* am Anfang des Studiums aussprach (vgl. Meyer 1899).

10.3.2 Das Repetitorium zur Elementarmathematik

Wilhelm Franz Meyer hielt ab 1898 ein *Repetitorium zur Elementarmathematik*. Es handelte sich dabei um eine Veranstaltung – wöchentlich einstündig –, die Studenten bereits zu Beginn ihres Studiums hören sollten. In dieser Lehrveranstaltung

wurde der Kenntnisstand des heterogenen Hörerkreises auf ein möglichst einheitliches Niveau gehoben, und gegebenenfalls wurden in der Schule nicht ausreichend behandelte Themen eingeführt und vertieft.⁹ Damit hat das Repetitorium augenscheinlich den Charakter eines Vorkurses, wie er heute an vielen Universitäten vor Beginn eines Mathematik- oder Ingenieurstudiums angeboten wird, um in erster Linie mathematische Fertigkeiten und Sprachgewohnheiten einzuführen. Jedoch verbindet Meyer damit auch die Idee eines höheren Standpunkts, der durch spiralförmiges Aufarbeiten des Stoffes (ähnlich dem Spiralprinzip nach Bruner 1973) zur Elementarmathematik eingenommen werden soll (vgl. Meyer 1899, S. 148).

In der damaligen Diskussion um ein lehramtsgerechtes Mathematikstudium wird Meyer (mit seinem *Repetitorium*) in einer Reihe mit Klein und Weber zu den Mathematikern gezählt, die sich besonders für die Überwindung der *doppelten Diskontinuität* eingesetzt haben (vgl. bspw. Stäckel 1905; Lorey 1905). Die Ausrichtung des *Repetitoriums* setzt im Gegensatz zu den Vorlesungen von Klein und Weber an der ‚ersten Unstetigkeitsstelle‘ zwischen Schul- und Hochschulmathematik an, die in der heutigen hochschuldidaktischen Diskussion stärker im Fokus ist (vgl. bspw. Ableitinger u. a. 2013). Damit ist sein Vorlesungskonzept auch im Rahmen der vorliegenden Arbeit trotz spärlicher Literaturlage von Interesse.

Meines Wissens existiert keine Veröffentlichung eines Manuskriptes dieser Vorlesung. Da Meyer dafür bekannt war, Vorlesungen frei und ohne Manuskript in der Hand zu halten, verwundert dies nicht:

„Niemand hat man ihn mit einem sauber ausgearbeiteten Manuskript hinter dem Katheder gesehen. Was er an die Tafel schrieb und zeichnete, schien beim Ringen mit den Problemen im Augenblick geschaffen. So führte er den Hörern die Mathematik nicht als eine trockene Wissenschaft, sondern als eine lebendige Kunst vor.“ (Arndt 1935, S. 102)

Außer einem einzelnen Artikel *Zur Ökonomie des Denkens in der Elementarmathematik* (vgl. Meyer 1899), in dem Meyer die Idee der Vorlesung darstellt und am Beispiel der Dreiecksgeometrie illustriert, existieren keine Aufsätze von Meyer oder anderen, die näher auf Inhalte und Vorgehen der Veranstaltung eingehen. Eine echte Vergleichsgrundlage ist damit nicht gegeben. Aus Meyers Darlegungen *zur Ökonomie des Denkens* können aber zumindest Ziele und Intentionen abgeleitet werden, die sich in drei Punkten zusammenfassen lassen und den Erkenntnissen zum Kleinschen höheren Standpunkt gegenübergestellt werden können:

⁹Die Universität stand bereits zu diesem Zeitpunkt vor dem Problem, Studenten mit unterschiedlicher Vorbildung aus den unterschiedlichen Schultypen gleichermaßen zu unterrichten (vgl. Kapitel 1.1).

Grundlagen und Rechenfertigkeit. Mit dem *Repetitorium* verfolgt Meyer vordergründig einen „praktischen Zweck“ (Meyer 1899, S. 148), nämlich das Ziel, die Grundlagen für die höheren Vorlesungen bereitzustellen und die Rechenfertigkeit der jungen Studenten zu schulen, die häufig gerade zu Beginn des Studiums zu fehlen scheinen:

„Praktische Rechner, wie die Astronomen, klagen häufig über das Unvermögen jüngerer Studenten, auch nur die einfachsten trigonometrischen Rechnungen zu erledigen.“ (Meyer 1899, S. 148)

Im Falle der Trigonometrie wird die Definition von Sinus, Cosinus, Tangens und Cotangens am rechtwinkligen Dreieck eingeführt bzw. wiederholt, und die vier Aufgaben, „aus einem der vier Ausdrücke jeweils die drei anderen zu berechnen“ (Meyer 1899, S. 148), werden geübt.

Entwicklung „höherer Erkenntnisse“. Auf diese Grundlagen aufbauend wird der Gegenstandsbereich erweitert und, mit einer zunehmend abstrakteren Sprache, an hochschulmathematische Themen angebunden.

„[Grundgedanke der Vorlesung ist,] daß man bei häufiger Durcharbeitung des Elementarstoffes nicht nur eine wesentliche Ersparnis an Gedanken- und Rechnungsarbeit erzielt, sondern in enger Verbindung damit höhere Gesichtspunkte fast von selbst einführt.“ (Meyer 1899, S. 148)

Im Falle der Trigonometrie weitet Weber zunächst die grundlegenden Definitionen auf allgemeine Dreiecke aus. Mit dem Ziel der *vollständigen Auflösung von Dreiecken* führt er die Winkelsätze sowie die Neper'schen und Mollweide'schen Formeln ein und beweist sie. Anschließend fragt er „nach den gegenseitigen Zusammenhängen“ (Meyer 1899, S. 149) der verschiedenen Satzgruppen. Hat man schließlich einen beweglichen und verständigen Umgang mit dem Thema entwickelt, nimmt Meyer den „Standpunkt der Umkehrung“ (Meyer 1899, S. 150) ein: Statt nach den konkreten Werten der trigonometrischen Funktionen in einem fest vorgegebenen Dreieck zu fragen, untersucht man, welche Angaben nötig sind, um ein Dreieck vollständig zu beschreiben. Daran ließen sich noch weitere, über die Trigonometrie hinausgehende Erkenntnisse gewinnen. Letzteres sollte, so Meyer, dann in den Fachvorlesungen geschehen.

Der höhere Standpunkt zur Elementarmathematik, den Meyer in seinem *Repetitorium* entwickeln möchte, zeichnet sich im Wesentlichen durch drei Komponenten aus:

- Abstraktion, Verallgemeinerung und Erweiterung
- Fundierung und Begründung

– Reflektion und Variation

Die in der Schule eingeführten Definitionen werden zunächst in einer *abstrakten Form* wiederholt und *verallgemeinert*. Im vorliegenden Fall erfolgt die *Erweiterung* erst in der Fachvorlesung, indem beispielsweise der Begriff der Invarianten eingeführt und mit den Untersuchungen der Vorlesung in Verbindung gebracht wird. Sachverhalte und Sätze, die bereits in der Schule festgehalten oder erst im Rahmen der Vorlesung erarbeitet werden, werden *bewiesen*. Damit werden insbesondere auch die schulmathematischen Inhalte hochschulmathematisch *fundierte*. Meyer stellt dabei Zusammenhänge zwischen einzelnen Satzgruppen und Sachverhalten her und hinterfragt ‚auf dem Standpunkt der Umkehrung‘ aufgestellte Voraussetzungen, wodurch die Themen aus einer anderen Perspektive *reflektiert* und mögliche *Variationen* vorgestellt werden.

Respekt für Elementarmathematik. Neben diesen beiden inhaltlichen Zielen liegt dem *Repetitorium* auch ein psychologisches Ziel zugrunde. Meyer zufolge ist ein wesentliches Problem der mathematischen Lehrerbildung, dass der Student im Laufe seines Studiums mit Mathematik konfrontiert wird, die weit über den eigentlichen Schulstoff hinausgeht. Die schulmathematischen Inhalte werden daher oft als trivial angesehen:

„Wenn man sich auf den Boden der Wirklichkeit stellt, nimmt man häufig wahr, wie der mathematische Student im Laufe von rund vier Studienjahren mit den schwierigsten und subtilsten Gebieten der höheren Mathematik bekannt gemacht wird, wodurch sich bei ihm ein gewisser ‚Hochmut‘ entwickelt[.]“ (Meyer 1899, S. 148)

Der Lehrer verliert dadurch nicht nur den Respekt vor den schulmathematischen Gegenständen und möglichen Verstehenshürden der Schüler. Vielmehr wird er im Unterricht dem „Schulbuch blindlings“ (Meyer 1899, S. 148) folgen, ohne die Inhalte selbst vollständig durchdrungen zu haben (vgl. Meyer 1899, S. 148). Um dies zu umgehen, scheint es Meyer notwendig, dieses *Repetitorium* regelmäßig bereits am Anfang des Studiums, aber im Idealfall das gesamte Studium begleitend anzubieten, um die Aufmerksamkeit auf die später zu unterrichtenden Inhalte zu erhalten (vgl. Meyer 1899, S. 147f).

Ich verstehe das Meyersche *Repetitorium* damit als eine Vorlesung, die Schulmathematik nicht trivialisiert, sondern als ein Stück authentische Mathematik darstellt, die die Studenten auch auf eigene kognitive Hürden hinweist und – anders als auch heute in vielen Anfängervorlesungen üblich – den Schulstoff zum Ausgangspunkt nimmt, die Mathematik als Wissenschaft von dort aus zu entwickeln. Es werden – von Bekanntem ausgehend – höhere Dinge entwickelt.¹⁰

¹⁰Dies erinnert an das in Beutelspacher u. a. (2011) vorgestellte Konzept einer *Schulanalysis vom höheren Standpunkt* (vgl. Danckwerts 2013).

10.3.3 Vergleich der Orientierungen von Klein und Meyer

Aufgrund der spärlichen Literaturlage ist ein detaillierter Vergleich der Konzepte anhand der Perspektiven und Prinzipien nicht möglich, auch wenn es einige Hinweise darauf gibt, dass Meyer die unterschiedlichen Perspektiven, die in Kleins Vorlesung ausgemacht wurden, zumindest in Teilen für die Lehrerbildung im Allgemeinen mitdenkt:

Meyer nimmt alleine dadurch schon eine didaktische Perspektive ein, dass er sich um Veranstaltungen bemüht, die den Lehrer auf sein späteres Berufsleben in der Schule vorbereiten. Auch spielt eine historische Perspektive in der Lehrerbildung für ihn – vergleichbar mit Weber – insofern eine Rolle, als dass er sein Lehrbuch zur *Differential- und Integralrechnung* mit historischen Notizen abschließt (vgl. Meyer 1901, S. iv). Sein Artikel zu *Kant und das Wesen der Mathematik* (vgl. Meyer 1905) lässt erkennen, dass er sich intensiv mit erkenntnistheoretischen Fragen auseinandergesetzt hat und damit auch eine philosophische Perspektive auf die Mathematik einnimmt.

Im Beitrag Meyers zur *Ökonomie des Denkens in der Elementarmathematik* wird beispielhaft jedoch ausschließlich eine fachmathematische Perspektive beschrieben. Ob und inwiefern auch andere Perspektiven im *Repetitorium* zum Tragen kommen, lässt sich nicht abschließend klären. Auch kann bezüglich der konkreten Umsetzung der damit verbundenen möglichen Prinzipien keine Aussage getroffen werden. Aufgrund der insgesamt unterschiedlichen Ausrichtung und Verortung der Vorlesungen im Studienplan ist ein Vergleich auf dieser Ebene prinzipiell nur schwer möglich.

Im Falle der Trigonometrie zeigt ein expliziter Vergleich, dass Klein einerseits einen globaleren Blick einnimmt. Er stellt die Theorie der trigonometrischen Funktionen¹¹ als fertiges Produkt vor, um es anschließend mit der Theorie der Logarithmen zu vergleichen und Anwendungen zu diskutieren. Er setzt aber andererseits grundlegende Begriffe und Definitionen voraus, ohne diese lokal – wie es bei Meyer der Fall ist – zu untersuchen und zu reflektieren.

Die Andersartigkeit der beiden Vorlesungen hängt erkennbar an den unterschiedlichen Orientierungen zum Verhältnis von Elementar- und Hochschulmathematik. Klein blickt aus der Hochschulmathematik heraus – ‚von oben‘ – auf die Elemente und stellt einzelne Bezüge her. Seine Erörterungen in den einzelnen Kapiteln lassen sich an vielen Stellen sowohl begrifflich als auch stofflich der Hochschulmathematik zuordnen (vgl. Kapitel 7). Meyer hingegen blickt von der Elementarmathematik aus – ‚von unten‘ – zunächst auf diese selbst und fundiert diese hauptsächlich aus

¹¹Er selbst spricht von goniometrischen Funktionen, um zu betonen, dass diese Funktionenklasse nicht nur bei der Dreiecksberechnung Anwendung findet (vgl. Klein 1933, S. 175).

begrifflicher Sicht. Stofflich bleibt er, anders als Klein, in der Schulmathematik verankert:

„[Meyer] will zu Beginn der Studien durch eine einstündige Vorlesung eine zusammenfassende Wiederholung der Elemente herbeiführen und Lücken ausfüllen, die der Schulunterricht gelassen habe, weniger in stofflicher als in begrifflicher Hinsicht.“ (Lorey 1916, S. 267).

Zusammenfassung und Zwischenbilanz

Lorey bezieht bezüglich beider Vorlesungskonzepte Stellung. Er bezweifelt, dass ein Student am Anfang des Studiums bereits in der Lage ist, die Untersuchungen und Darlegungen Meyers in ihrer vollen Bandbreite zu begreifen und wertzuschätzen. Seiner Auffassung nach sind die von Klein und Stäckel vorgelegten Vorlesungskonzepte oder zumindest deren Verortung im Studienverlauf passender und wertvoller (vgl. Lorey 1916, S. 267):

„Der junge Student, der eben von der Schule kommt, hat in seiner glücklichen Naivität im allgemeinen noch gar nicht das Verständnis für gewisse begriffliche Feinheiten, die in den Elementen liegen; ihn hungert nach ganz neuem Wissensstoff [. . .]. Gerade solche psychologisch-pädagogischen Erwägungen lassen Vorlesungen über Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus für gereifte Studenten angebracht erscheinen.“ (Lorey 1916, S. 267f)

Das Urteil fällt insofern vergleichsweise hart aus, als Meyer sein *Repetitorium* als Ergänzung zu Vorlesungen versteht, die die von Lorey geforderte stoffliche Erweiterung des Schulstoffs leisten, und Meyer die begriffliche Durchdringung als einen Prozess darstellt, der auch in höheren Vorlesungen aufgenommen werden soll (vgl. Meyer 1899, S. 154). Die Entwicklung eines *höheren Standpunkts* schreibt er damit nicht alleine seinem Repetitorium zu. Da sich Meyers Perspektive auf die Schulmathematik und die Art der Verbindung dieser mit der Hochschulmathematik bereits in der Anlage grundlegend von Klein unterscheidet, ist daher anzunehmen, dass sich beide Veranstaltungen gewinnbringend gegenseitig ergänzen:

Während Meyer eher lokal begriffsbildend arbeitet, versteht Klein seine Vorlesung als verbindendes Element mit dem Blick auf die Mathematik als Ganzes. Es hat daher den Anschein, als sei sie an einzelnen Stellen bezüglich der begrifflichen Auseinandersetzung oberflächlicher bzw. nicht explizit, jedoch auf der anderen Seite vermutlich facettenreicher. Zudem blickt Meyer von der Schulmathematik aus in Richtung Hochschulmathematik – er kann am Anfang des Studiums auch auf keine hochschulmathematischen Vorkenntnisse zurückgreifen –, während eine abschließende Überblicksvorlesung, wie sie Klein, Weber oder auch Stäckel im Sinn

haben, von der Hochschulmathematik ausgehend Schul- bzw. Elementarmathematik reflektiert, wodurch der Übergang von der Hochschule zum praktischen Unterricht an der Schule erleichtert werden soll. Vorlesungen dieser Art setzen damit an der zweiten Bruchstelle zwischen Universität und Schule an, die auf dem Weg zurück an die Schule existiert. Meyers *Repetitorium* soll zwar ebenfalls Einfluss auf die spätere Lehrtätigkeit der Studenten haben¹², es soll aber auch Lücken füllen, die durch die Kluft zwischen Schul- und Hochschulmathematik zu Beginn des Studiums – der ersten ‚Unstetigkeitsstelle‘ – entstehen.

So unterstützt beispielsweise auch Stäckel die Idee, dass einer Überblicksvorlesung am Ende des Studiums eine Veranstaltung am Anfang des Studiums gegenüberzustellen sei, welche ähnlich dem Meyerschen *Repetitorium* den Übergang von der Schule an die Universität ebnet soll (vgl. Stäckel 1905, S. 527).

10.4 Zur Tragfähigkeit elementarmathematischer Vorlesungen

Bis heute wird auf Kleins *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus* als eine Art Prototyp einer lehramtsspezifischen Fachvorlesung Bezug genommen (vgl. bspw. Krauss u. a. 2008, S. 238). Die in den vorangegangenen Kapiteln herausgearbeiteten Prinzipien und Perspektiven illustrieren die Stärken des Kleinschen Konzeptes, beschreiben aber auch Grenzen, die sich aus fachlicher, historischer und didaktischer Sicht bezüglich der Wirksamkeit für den Unterricht ergeben. Die Tragfähigkeit elementarmathematischer Vorlesungen kann zudem auch generell in Frage gestellt werden. Mit dieser Frage setzte sich Otto Toeplitz in einem Bericht über *das Problem der Elementarmathematik vom höheren Standpunkt* (vgl. Toeplitz 1932) kritisch auseinander.

Im Folgenden wird Toeplitz' Kritik an Kleins und Webers Vorlesung systematisch aufgearbeitet. Hieraus lassen sich – bereits von Schubring (1978) angesprochene – Unterschiede zwischen Klein und Toeplitz bezüglich einer impliziten mathematikdidaktischen Konzeption – und eng damit verbunden – bezüglich der Auffassung eines höheren Standpunkts zur Elementarmathematik ableiten. Mit Rückgriff auf die *Kleinschen Prinzipien und Perspektiven* zeichnen sich aber auch grundlegende Gemeinsamkeiten ab. Dadurch wird abschließend die vorgelegte Charakterisierung der Kleinschen Vorlesungsreihe von einer Außenperspektive aus reflektiert.

¹²Vergleiche hierzu die formulierten Ziele des Repetitoriums in Kapitel 10.3.2

10.4.1 Kritik an den Vorlesungen von Weber und Klein

„Damit aber der Lehrer das alles seinen Schülern so eindrucksvoll und lebendig vermitteln kann, dass für das ganze Leben etwas davon in ihnen zurückbleibt, muss [...] ein so aktives, helles Licht von Klarheit über diese Sachen von ihm ausströmen, dass die vielfältigen Brechungen und Reflexionen, mit denen solche Lichtstrahlen in die Seele des Schülers gelangen, noch einige Helligkeit übrig lassen.“ (Toeplitz 1932, S. 7)

Auch Toeplitz vertritt die Meinung, der Lehrer solle einen höheren Standpunkt zu der von ihm zu unterrichtenden Mathematik einnehmen, und richtet seine gesamte hochschulmathematische Lehre danach aus. Anders als beispielsweise Stäckel hat er dabei vornehmlich den Mathematikstudenten in seiner Rolle als zukünftiger Lehrer im Blick. Fragen bezüglich möglicher Forschungsleistungen der Lehrer berührt er dabei nicht (vgl. auch Schubring 1978, 272f).

In diesem Zusammenhang setzt er sich rund dreißig Jahre nach Veröffentlichung von Webers *Enzyklopädie zur Elementarmathematik* und Kleins *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus* kritisch mit dem Konzept der ‚elementarmathematischen Vorlesung‘ auseinander. Er bezweifelt, dass Veranstaltungen, wie Weber oder Klein sie gehalten haben, „ein ausreichendes Mittel [sind], um in dem, der auf der Universität Mathematik studiert und dann auf der Schule Mathematik unterrichtet, ein einheitliches Bewusstsein dieser beiden Mathematiken zu erzeugen.“ (Toeplitz 1932, S. 1), also eine tragfähige Verbindung zwischen Schul- und Hochschulmathematik herzustellen.

Die Kritik an Weber und Klein bezieht sich dabei nicht auf die konkreten Ausführungen beider Autoren. Er würdigt den systematischen Zusammenhang, den beide zwischen den schulmathematischen Inhalten und der Hochschulmathematik herstellen, und würdigt ihre Rolle in der Diskussion um ein lehramtsgerechtes Hochschulstudium. Die Darstellung der einzelnen Themen bezeichnet er in beiden Fällen als „didaktisch genau durchgearbeitet“ (Toeplitz 1932, S. 4), die Inhalte als erkenntnisreich und den hochschulmathematischen Kanon erweiternd (vgl. Toeplitz 1932, S. 4f). Das Konzept der elementarmathematischen Vorlesung im Allgemeinen habe jedoch Schwächen, die sich nicht lokal beheben ließen (vgl. Toeplitz 1932, S. 1). Diese Schwächen illustriert Toeplitz an konkreten Beispielen. Sie lassen sich unterschiedlichen Kategorien zuordnen: der *Auswahl der Themen*, der *horizontale und vertikale Vernetzung*, dem *Verhältnis von Inhalt und Methode* sowie der *mathematischen Aktivität und Forschungserfahrung im Kleinen*.

Auswahl der Themen. In Kapitel 7 wurde bereits diskutiert, welchen Nutzen bestimmte Themen in der *Elementarmathematik* für den Schulunterricht haben können. Toeplitz beanstandet, dass viele der von Weber und Klein behandelten

Themen keinen direkten Einfluss in der Schule haben, da sie weder Bestandteil des Lehrplans seien noch einen methodischen Nutzen oder Mehrwert darstellen.

Der Begriff der Transzendenz beispielsweise gehört, so Toeplitz, nicht in den Schulunterricht. Bei Fragen zur Konstruktion mit Zirkel und Lineal habe der Lehrer, wenn überhaupt, nur in einem historischen Exkurs anzudeuten, dass bestimmte Probleme der antiken Mathematik erst in der Neuzeit gelöst werden konnten und die Erkenntnis, dass π und e eine besondere Eigenschaft – die Transzendenz – besitzen, wesentlich zur Lösung beigetragen habe (vgl. Toeplitz 1932, S. 2f).

Der Beweis der Transzendenz von π und e sei auf der anderen Seite ein leicht einzugrenzendes Beispiel, das kein weitreichendes oder tief liegendes Hintergrundwissen beansprucht, sondern mit Mitteln der elementaren Zahlentheorie und Analysis bewiesen werden kann. Benötigt werden lediglich ein paar „zauberhafte“ (Toeplitz 1932, S. 2) Ideen. Es gehe im Schulunterricht aber nicht in erster Linie darum, das Zauberhafte und Überraschende der mathematischen Produktion zu enthüllen (vgl. Toeplitz 1932, S. 2).

Horizontale und vertikale Vernetzung. Aber auch jene Inhalte der Weberschen und Kleinschen Vorlesung, deren Begriffe oder Methoden aus der Schule bekannt sind, stellen Toeplitz zufolge nur einen kleinen Ausschnitt des gesamten Schulcurriculums dar. Und es wird im Rahmen einer solchen Vorlesung nicht möglich sein, den gesamten schulmathematischen Inhalt abzudecken (vgl. Toeplitz 1932, S. 8).

Die Toeplitzsche Kritik nimmt darüber hinaus die fehlende horizontale und vertikale Vernetzung in den Blick: Als Beispiel führt er etwa die Behandlung der Unmöglichkeitsbeweise bei der Konstruktion mit Zirkel und Lineal auf. Hier könnten bereits bei der Einführung der Buchstabenrechnung oder im Geometrieunterricht propädeutische Erfahrungen gemacht werden. Dies wird jedoch in den entsprechenden Kapiteln bei Weber oder Klein nicht entfaltet (vgl. Toeplitz 1932, S. 8).

Die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit stützen Toeplitz' Kritik: In Kapitel 9.1 wurde gezeigt, dass die Idee des funktionalen Denkens in der Kleinschen Vorlesung in verschiedenen Facetten aufgegriffen wird. Propädeutische Erfahrungen werden hier aber auch ausgeklammert. Weiter kann Toeplitz' Kritik durch die in Kapitel 2 beschriebene Beobachtung gestützt werden, dass Klein zwar großen Wert darauf legt, innermathematische Vernetzungen hochschulmathematischer Teilgebiete aufzuzeigen, allerdings innerhalb des Werkes selbst und damit bezogen auf die gewählten schulmathematischen Inhalte nur wenig Verknüpfungen herstellt.

Verhältnis von Inhalt und Methode. Toeplitz' Hauptkritik bezieht sich auf das Verhältnis von Inhalt und Methode in den elementarmathematischen Veranstaltungen: Toeplitz zufolge haben die Vorlesungen eher enzyklopädischen Charakter; sie vermitteln Wissen und Inhalt, beschäftigen sich aber nur zweitrangig mit methodischen Fragen (vgl. Toeplitz 1932, S. 1f).

Auch dies kann am Beispiel der Konstruktion mit Zirkel und Lineal verdeutlicht werden. Sowohl Weber als auch Klein behandeln die Nichtkonstruierbarkeit eines regelmäßigen Siebenecks bzw. die Unmöglichkeit der Dreiteilung eines (allgemeinen) Winkels mit Zirkel und Lineal. In beiden Fällen wird der geneigte Leser, so Toeplitz, von diesen Ausführungen eine Erkenntnis mitnehmen können, die in den Fachvorlesungen des Studiums nicht angebahnt wurde. Sowohl Weber als auch Klein gelinge es dabei aber nicht, die Schwierigkeit – begrifflicher und methodischer Natur – zu überwinden, die beiden Beweise durch die Verwendung der „schwierigsten Begriffe der höchsten Algebra“ (Toeplitz 1932, S. 5f) innewohnen. In einer Überblicksvorlesung, wie Kleins *Elementarmathematik* oder Webers *Enzyklopädie*, könne man die Studenten nicht „methodisch auf solche Gedankengänge vorbereite[n]“ (Toeplitz 1932, S. 6) – anders als in den regulären Fachvorlesungen:

„Die Algebravorlesung kann langsam und planmäßig diese Begriffe vorbereiten und einüben, sie eingehend definieren und in aller Ausführlichkeit unzweideutig herausarbeiten. Eine aphoristische Darstellung kann das, so genial sie sein mag, nie erreichen.“ (Toeplitz 1932, S. 6)

Klein und Weber behelfen sich damit, diese Grundlagen als aus Fachvorlesungen bekannt vorauszusetzen. Dem widerspricht Toeplitz: Zu der Zeit, in der Klein und Weber lehrten, habe eine Algebravorlesung durch ihren systematischen Aufbau und ihre abstrakte Einführung der Begriffe und Theorien keine Vorarbeit zu den in den elementarmathematischen Vorlesungen entwickelten Gedanken geleistet, so dass die notwendigen Verknüpfungen mit bereits Gelerntem nicht abrufbar wären (vgl. Toeplitz 1932, S. 8f).

„Erfahrung Mathematik“. Ideen und Inhalte, wie sie Weber und Klein in ihren Vorlesungszyklen bearbeiten, beanspruchen eine besondere Reife und einen besonders beweglichen Umgang mit der Mathematik (vergleiche hierzu bspw. Kapitel 7). Eine bloße Mitteilung eines Sachverhaltes reicht daher in Toeplitz' Augen nicht aus, um den Sachverhalt zu verinnerlichen (vgl. Toeplitz 1932, S. 6).

Für die Idee eines *Nichtkonstruierbarkeitsbeweises* ist es wichtig, dass der Lernende selbst auf das Problem gestoßen ist, um es nachvollziehen und in der Lehrerrolle auch vermitteln zu können. Geschieht dies nicht, so überzeugt der Beweis selbst nicht notwendig. Aussprüche folgender Art bilden dann keine Seltenheit: „Dass die

Gelehrten behaupten, das Problem sei unlösbar, ist mir wohlbekannt.“ (Toeplitz 1932, S. 7) Der zukünftige Lehrer muss also bestimmte Aufgaben selbst bearbeiten, um ein tieferes Verständnis der Sachverhalte zu entwickeln und auch eigene Forschungserfahrung im Kleinen machen.¹³ Ähnlich verhält es sich mit der Theorieentwicklung:

Sowohl bei Weber als auch bei Klein werden *Grundfragen der Arithmetik* behandelt. In beiden Fällen, wenn auch in unterschiedlicher Weise (vgl. hierzu Kapitel 10.2), erfährt man, dass die Grundlegung der Rechengesetze schwieriger ist als erwartet und Fragen der Philosophie der Mathematik berührt. Weber und Klein präsentieren Vorschläge einer Fundierung, eine Souveränität mit Begriffen und der Begriffsbildung werde dadurch jedoch nicht erzeugt (vgl. Toeplitz 1932, S. 11).

Grundlagen einer Theorie können nicht in einem einzelnen Kapitel, wie bei Klein oder Weber angelegt, vermittelt werden. Der Student muss sie über das Durchdringen und Erarbeiten einer einzelnen Disziplin erlernen. Erst wenn er sich selbst mit einer Theorie in ihrem Gefüge auseinandersetzt, kann er die „auswechselbare Natur der Axiome“ (Toeplitz 1932, S. 12) und ihren Einfluss auf die Theoriebildung nachvollziehen.¹⁴

Zusammenfassend kritisiert Toeplitz an Veranstaltungen vom „Typ *Elementarmathematik vom höheren Standpunkt*“ eine zu starke Orientierung an den Inhalten und eine zu schwache Ausrichtung an den Methoden. Weber und Klein vermitteln Toeplitz zufolge *Wissen*, der wünschenswerte höhere Standpunkt zeichne sich jedoch durch eine *Einstellung* zur Mathematik bzw. ein erreichtes *Denkniveau* aus.

10.4.2 Toeplitz' Alternative

Ein tragfähiger höherer Standpunkt zur Elementarmathematik entsteht, Toeplitz zufolge, durch eine Einstellung zur Mathematik, die im Schulunterricht wirksam wird, und geht mit speziellen Fähigkeiten einher, die in einer Überblicksvorlesung nicht geschult werden:

Aus Toeplitz' Sicht sind das in erster Linie reproduktive Fähigkeiten wie das *Handhaben von Kalkülen und Verfahren* und die *Theorieentwicklung ,im Kleinen‘* (vgl.

¹³Diese Auffassung wird auch in der heutigen hochschuldidaktischen Diskussion der Lehrerbildung im Fach Mathematik vielfach vertreten (vgl. bspw. Beutelspacher u. a. (2011) oder Nickel (2013)).

¹⁴So sei es, Toeplitz zufolge, eine gute Idee, ein und dieselbe Vorlesung wiederholt bei unterschiedlichen Dozenten zu hören, um zu erleben, welche unterschiedlichen Zugänge zu einem Thema zu gleichen Ergebnissen führen können.

Toeplitz 1932, S. 14): Der Lehrer soll die Kalküle und Verfahren, die er im Unterricht lehrt, sicher beherrschen und nicht nur ihre Grenzen theoretisch kennen, sondern sie selbst erlebt haben. Die Stärke einer mathematischen Theorie kann der Lehrer zudem nur dann vermitteln, wenn er selbst geprüft hat, welche Schritte eine Theoriebildung beinhaltet – „Er muss [...] ein kleineres mathematisches Ganzes darzustellen geübt haben“ (Toeplitz 1932, S. 14). Ein verständiger Umgang mit Mathematik von einem höheren Standpunkte aus besteht weiter darin, dass der Lehrer nicht nur in der Lage ist, die Aussagen und Ideen seiner Schüler mit wahr oder falsch zu bewerten, sondern aus dem Stehgreif ein *Gegenbeispiel zu erzeugen*, welches „die Unrichtigkeit [der] Vorstellung [den Schülern] drastisch dartut“ (Toeplitz 1932, S. 14).

Die förderliche Einstellung zur Mathematik erfordert zwar keine eigenständigen Forschungsleistungen im engeren Sinn, der Lehrer muss aber zumindest insofern produktiv sein, als dass er Aufgaben in angemessenem Schwierigkeitsgrad und mit erwünschtem Lerneffekt erzeugen soll. Auch dies wird, so Toeplitz, in elementarmathematischen Vorlesungen, wie sie Weber oder Klein vorschlugen, genauso wenig erprobt wie in den restlichen Veranstaltungen des Studiums (vgl. Toeplitz 1932, S. 14).

Ein höherer Standpunkt, wie Toeplitz ihn sieht, generiert sich daher nicht alleine aus der Präsentation von Beispielen, Ideen und Wissen, sondern entwickelt sich vor allem durch selbstständiges Erkunden und Üben. Da die beschriebenen Fähigkeiten im Einklang sind mit den Grundsätzen des wissenschaftlichen Arbeitens – es bestehe, so Toeplitz, „eine prästabilierte Harmonie [...] zwischen den Erfordernissen der Wissenschaft und denen des Lehrens“ (Toeplitz 1932, S. 15) –, ließen sich diese studienbegleitend in die Fachvorlesungen integrieren. Dadurch wird eine Verbindung zwischen Schul- und Hochschulmathematik nicht nur berichtend hergestellt, sondern kann von den Studenten selbst erkundet und erprobt werden:

„Die einzelnen Bestandteile einer Elementarmathematikvorlesung werden erst dann im Schulunterricht eigentlich wirksam, wenn im Rahmen der mathematischen Vorlesungen, denen jede einzelne angehört, der Hörer das Niveau erlangt, von dem aus er sie innerlich beherrschen kann.“ (Toeplitz 1932, S. 13)

Toeplitz illustriert beispielhaft eine *Algebravorlesung*, in der nicht deduktiv-systematisch von den allgemeinen Begriffen ausgegangen wird, sondern auch in der Schule berührte Probleme, wie die Trisektion eines Winkels, die Konstruktion eines gleichmäßigen Siebenecks oder die Lösung von Gleichungen 5. Grades, die „Hauptleitmotive“ (Toeplitz 1932, S. 10) bilden, von denen aus die abstrakte Theorie entwickelt wird. Als weitere Anknüpfungsmöglichkeiten nennt er die *Idealtheorie* mit dem Zusammenhang zur Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung, die *Theorie der elliptischen Funktionen*, die die Grundlagen der Trigonometrie berührt, und schließlich *das Studium der angewandten Mathematik*, das den Lehrer dazu

befähigen kann, „die Differential- und Integralrechnung nicht als bloßen Rechenformalismus zu unterrichten, sondern in dem Geist, in dem Felix Klein ihn gemeint hat“ (Toeplitz 1932, S. 13).

Wird die Einstellung zur Mathematik in diesem Sinne in Fachvorlesungen angebahnt, verlieren elementarmathematische Vorlesungen, wie die *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*, ihre Notwendigkeit:

„Eine solche Wendung des Kollegs würde eine Sondervorlesung über Elementarmathematik in diesem Punkte überflüssig machen, würde sehr, sehr viel mehr leisten, als jene jemals leisten kann, vom Standpunkt der Schulmathematik.“ (Toeplitz 1932, S. 10)

Die beschriebenen Grundzüge des Toeplitzischen Lehrerbildungskonzepts unterscheiden sich somit von Webers und Kleins Vorlesung durch ihren starken Fokus auf *selbstständige mathematische Erfahrung* sowie eine stärkere *methodische Orientierung*. Für diese Zielsetzung spielt die Auswahl des konkreten Inhalts keine entscheidende Rolle.

Es soll hier nicht in Frage gestellt werden, dass eine tragfähige Einstellung zur Mathematik wesentlich von eigenen Erkundungen und praktischen Übungen beeinflusst werden kann. Da Vorlesungen wie die Kleinsche dies zunächst nicht in den Vordergrund stellen, scheint Toeplitz' diesbezügliche Kritik am Kleinschen Vorlesungskonzept gerechtfertigt. Toeplitz' Einschätzung, die Kleinsche Vorlesung hätte vornehmlich enzyklopädischen Charakter, wird jedoch im Folgenden kritisch hinterfragt.

10.4.3 Zum Verhältnis von Inhalt und Methode bei Klein und Toeplitz

Aus der formulierten Kritik am Kleinschen Vorlesungskonzept könnte begründet abgelesen werden, dass Klein und Toeplitz bezüglich des Verhältnisses von Inhalt und Methode, bzw. von Wissen und Einstellung, grundlegend verschiedene Haltungen einnehmen. Schubring bekräftigt dies indirekt, wenn er herausstellt, dass Toeplitz zufolge die Kluft zwischen Schule und Hochschule „auf der inhaltlichen Seite nicht zu überbrücken“ (Schubring 1978, S. 273) und lediglich durch eine „Ausbildung der methodischen Einstellung“ (Schubring 1978, S. 280) zu verringern sei. Klein hingegen begegnet dieser Kluft nun insbesondere durch den Versuch einer Angleichung des schulischen Lehrplans an die Studieninhalte sowie einer Orientierung an der fundamentalen *inhaltlich-ordnenden* Idee des funktionalen Denkens (vgl. hierzu bspw. Kapitel 1.2 und 9.1).

Diese Einschätzung kann auf der Grundlage der in dieser Arbeit herausgearbeiteten Charakteristika der Kleinschen Vorlesung relativiert werden: Die *Kleinschen Perspektiven* spiegeln sich zu großen Teilen in der von Toeplitz beschriebenen geeigneten Einstellung zur Mathematik. Zudem lassen sich die *Kleinschen Prinzipien* in gewissem Sinne als methodische Leitideen ansehen:

Von Toeplitz eingenommene Perspektiven. Eine Anbindung von Schulmathematik an die Hochschulmathematik – durch fachmathematische Fundierung, Verallgemeinerung und Einblick in aktuelle Forschung –, wie sie in der von Klein eingenommenen **fachmathematischen Perspektive** praktiziert wird (vgl. hierzu Kapitel 7), erfolgt auch bei Toeplitz, nämlich dadurch, dass er in die fachmathematische Vorlesung, die diese angesprochenen Facetten naturgemäß enthält, schulrelevante Themen als „Hauptleitmotive“ einbindet.

Toeplitz ist einer der Hauptvertreter der *historisch-genetischen Methode* in universitären Vorlesungen. Er unterscheidet zwischen dem direkten Zugang, in dem man „den Studenten direkt die Entdeckung in ihrer ganzen Dramatik vorführt“ (Toeplitz 1927, S. 93), und dem indirekten Zugang, bei dem man als Dozent aus der historischen Entwicklung „Folgerungen für das Lehren“ (Toeplitz 1927, S. 93) zieht. Damit nimmt Toeplitz selbst eine **historische Perspektive** ein. Im Falle der indirekten Methode lässt sich die Perspektive, die Toeplitz’ Studenten auf die behandelten Gegenstände einnehmen sollen, eher als *historisch-orientiert* bezeichnen, da hier die Geschichte selbst – anders als bei Klein (vgl. Kapitel 8) – nicht Gegenstand der Vorlesung ist.

Unterrichtsinhalte und Struktur des Schulsystems stellen für Toeplitz – ähnlich wie es auch bei Weber erkennbar ist – eine Invariante dar (vgl. Schubring 1978, S. 274). Es ist damit nicht zu erwarten, dass Toeplitz eine **didaktische Perspektive** im Sinne einer Diskussion des schulischen Curriculums, wie sie Klein in seiner *Elementarmathematik* führt (vgl. Kapitel 9.1), einnimmt. Auch äußert er sich beispielsweise nur vereinzelt zum Bildungsauftrag von Mathematik (vgl. Toeplitz 1929, S. 13f).

Ähnlich wie in Kapitel 9.2 für Klein herausgearbeitet kann auch Toeplitz dem Sprachgebrauch Griesels folgend eine stoffdidaktische Orientierung zugesprochen werden. Den Sachanalysen in Vorlesungen, wie sie Toeplitz vorschweben, geht eine didaktische Vorentscheidung voraus. Diese These wird gestützt durch Schubrings Analyse des Lehrwerkes *Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung* (vgl. Toeplitz 1972):

„Da er Inhalt und Organisation des Unterrichts als nicht beeinflussbare Voraussetzung nimmt, wird die Unterrichtsmethodik zum zentralen, implizit steuernden Moment der gegenstandslogischen Analyse.“ (Schubring 1978, S. 299)

Die Kleinschen Prinzipien als methodische Leitideen. Die Prinzipien bei Klein nehmen in der *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus* eine zweifache Rolle ein. Einerseits können sie als Leitmotive für die von Klein gewählte Darstellung der einzelnen Themen angesehen und daher als Methode der Vorlesungskonzeption bezeichnet werden (vgl. hierzu Kapitel 6), andererseits liefern sie Anhaltspunkte zur unterrichtspraktischen Umsetzung in der Schule (vgl. 9.3.1, Forderung 1). Den Prinzipien wohnt daher eine methodische Dimension inne.

Während das *Prinzip der innermathematischen Vernetzung* und das *Prinzip der Anwendungsorientierung* dabei – mit Toeplitz’ Auslegung der Kleinschen Vorlesung konform – eher inhaltlich-orientierte Prinzipien darstellen, ist das *genetische Prinzip*, welches Toeplitz selbst vertritt, ein methodisches Prinzip. Auch dem *Prinzip der Veranschaulichung* kann ein methodischer Charakter zugeschrieben werden.

Damit kann Toeplitz zwar bezüglich seines Urteils, die Kleinsche Vorlesung orientiere sich am Inhalt, nicht widersprochen werden. Umgekehrt kann Klein eine methodische Orientierung aber auch nicht vollständig abgesprochen werden. Inhalt und Methode scheinen bei Klein in enger Verbindung zu stehen. Den „Antagonismus von Stoff und Methode“ (Toeplitz 1929, S. 2), den Toeplitz beschreibt, bestätigt Klein in seiner Vorlesung so nicht.

Insgesamt kann festgehalten werden, dass Kleins und Toeplitz’ Auffassung bezüglich eines höheren Standpunkts zur Elementarmathematik nicht soweit auseinander liegen, wie es Toeplitz’ Kritik an der Kleinschen Vorlesung erwarten lässt. Beide Konzepte sind getragen von vielfältigen Perspektivwechseln, die zu einem beweglichen Umgang mit den mathematischen Gegenständen führen sollen. Eine Einstellung, wie sie Toeplitz beschreibt, entsteht dabei im Wesentlichen unabhängig von speziellen Inhalten. Sie kann in jeder beliebigen Fachvorlesung angestrebt werden; im Idealfall trägt jede einzelne Vorlesung des Studiums dazu bei. Ähnlich dazu strebt Klein – anders als Weber – keine vollständige enzyklopädische Darstellung der schulmathematisch relevanten Themen an, sondern versteht seine Vorlesungsreihe als eine Sammlung exemplarischer Exkurse (vgl. Klein EvhS 1, S. v). Auch wenn er dabei methodische Fragen im oben beschriebenen Sinne mitdenkt, orientiert sich sein höherer Standpunkt aber deutlich erkennbar an den Inhalten.

Zusammenfassung und Bilanz

In diesem Kapitel wurde gezeigt, dass zu Kleins Zeit große Einigkeit bezüglich der Notwendigkeit elementarmathematischer Vorlesungen bestand.

Anhand zweier zeitgenössischer Vorlesungskonzepte wurden weitere Facetten eines höheren Standpunktes beschrieben, die die *Kleinschen Prinzipien und Perspektiven* ergänzen. So bewegen sich Weber und Wellstein in ihrer *Enzyklopädie der Elementarmathematik* zwar vornehmlich auf der fachmathematischen Ebene. Dafür bleiben sie in ihren fachmathematischen Analysen insgesamt dichter am eigentlichen Schulstoff – was den Nutzen für die Schule erhöhen kann. Mit seinem *Repetitorium zur Elementarmathematik* verfolgt Meyer eine grundlegend andere Konzeption. Statt am Ende des Studiums rückblickend die Schulmathematik in die Hochschulmathematik einzubetten, knüpft er zu Beginn des Studiums an die Schulerfahrungen an und entwickelt dadurch – ‚von unten‘ – einen höheren Standpunkt, der wesentlich dazu beitragen soll, den Respekt für die Elementarmathematik aufrecht zu erhalten.

Mit Toeplitz wurde das Konzept elementarmathematischer Vorlesungen generell hinterfragt. Dieser schreibt den Vorlesungen von Weber-Wellstein und Klein einen primär enzyklopädischen Charakter zu und gibt zu bedenken, dass die Präsentation von Wissen die intendierte Einstellung zur Mathematik nicht nachhaltig prägen kann. Derartige Vorlesungen könnten daher nicht wirksam den Unterricht beeinflussen. Stattdessen plädiert er dafür, die notwendigen Bezüge zur Schulmathematik in jeder einzelnen Fachvorlesung herzustellen. Damit verbunden ist ein höherer Standpunkt, der vornehmlich methodisch ausgerichtet ist und studentische Eigenerfahrungen in den Vordergrund stellt.

Bezüglich der *Elementarmathematik vom höheren Standpunkt* konnte Toeplitz' Einschätzung auf der Grundlage der vorangegangenen Analysen des Kleinschen Ansatzes teilweise relativiert werden. Der Abgleich mit den *Kleinschen Perspektiven* zeigte, dass sich Kleins und Toeplitz' Auffassung bezüglich der Einstellung zur Mathematik und auch bezüglich des erwünschten höheren Standpunktes weniger unterscheiden, als es die Kritik Toeplitz' erwarten lässt. Zudem konnten Argumente dafür angeführt werden, dass Kleins Vorlesung trotz ihrer primär inhaltlichen Ausrichtung nicht nur zufällig methodische Komponenten enthält.

Durch den Vergleich mit unterschiedlichen zeitgenössischen Vorlesungskonzepten konnten die in den vorangegangenen Kapiteln herausgearbeiteten Charakteristika der Kleinschen Vorlesung durch weitere Facetten eines *höheren Standpunktes* ergänzt werden. Zudem erwiesen sich die *Kleinschen Prinzipien und Perspektiven* als brauchbares Hilfsmittel für einen systematischen Vergleich elementarmathematischer Vorlesungen und deren zugrunde liegender Intentionen.

Fazit und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wurde Felix Kleins *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus* vorgestellt und analysiert. Einerseits konnten dabei der Vorlesung *zugrunde liegende Prinzipien* benannt und spezifiziert werden, andererseits stellte sich heraus, dass Klein spezifische *Perspektiven* auf die Elementarmathematik einnimmt. Die Prinzipien und die Perspektiven können gleichermaßen zur Verbindung von Schul- und Hochschulmathematik und damit zur Überwindung der doppelten Diskontinuität beitragen:

Die *fachmathematische*, die *historische* und die *didaktische Perspektive* strukturieren den höheren bzw. erweiterten Standpunkt¹⁵ zur Elementarmathematik. Die Vorlesung erhält durch die didaktische Perspektive eine quasi stoffdidaktische Ausrichtung, wodurch sie sich von den alternativen zeitgenössischen Vorlesungen abgrenzen lässt. Weiter setzt Klein bewusst und aus einer didaktischen Motivation heraus die Prinzipien der *Vernetzung*, der *Veranschaulichung*, der *Anwendungsorientierung* und das *genetische Prinzip* ein. Mit Blick auf diese Prinzipien und die damit verbundene Vorgehensweise in der Vorlesung wird eine weitere Komponente deutlich: Klein nimmt nicht nur einen *höheren Standpunkt zur Elementarmathematik* ein, sondern auch einen *elementaren Standpunkt zur höheren Mathematik*.

Durch den Vergleich mit unterschiedlichen Vorlesungskonzepten seiner Zeit konnten die in dieser Arbeit herausgearbeiteten Charakteristika der Kleinschen Vorlesung durch weitere Facetten eines *höheren bzw. erweiterten Standpunktes* ergänzt werden: Meyers *Repetitorium zur Elementarmathematik* ist beispielsweise Teil der Studieneingangsphase und bringt die Idee des Anknüpfens an vorangegangene Schulerfahrungen ins Spiel.

Zudem erwiesen sich die *Kleinschen Prinzipien und Perspektiven* als brauchbares Hilfsmittel für einen systematischen Vergleich (zeitgenössischer) elementarmathematischer Vorlesungen und deren zugrunde liegender Intentionen. Darin liegt das intendierte Potential der vorliegenden Arbeit: Die Kleinschen Prinzipien und Perspektiven können auch für heutige Vorlesungen als Analyseinstrument genutzt werden und möglicherweise bei der Konstruktion und Entwicklung neuer Konzepte helfen.

¹⁵Falls man das Adjektiv ‚höher‘ mit Hochschulmathematik und damit der fachmathematischen Perspektive identifiziert, scheint die Bezeichnung *erweiterter Standpunkt* in Bezug auf Kleins Vorlesung passender.

Ausblick

Sowohl aus mathemathikhistorischer und mathematikphilosophischer als auch aus mathematikdidaktischer und hochschuldidaktischer Sicht ergeben sich weitere Fragen und mögliche Anknüpfungspunkte für weiterführende Untersuchungen:

In der vorliegenden Arbeit habe ich mich in erster Linie mit dem ersten Band der Kleinschen Vorlesungsreihe auseinandergesetzt. Aus mathemathikhistorischer Sicht wäre zu untersuchen, ob und inwiefern die herausgearbeiteten Merkmale auch den zweiten und dritten Band der *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus* prägen.

Anschauung wird in der Vorlesung, wie beschrieben, zu einem wesentlichen Leitmotiv. Dabei unterscheidet Klein mit Bezug auf Kant zwischen einer inneren und einer äußeren Anschauung und thematisiert das Verhältnis von Anschaulichkeit und Strenge. Eine detaillierte Analyse des Kleinschen Anschauungsbegriffs, die vor allem den dritten Band der Vorlesungsreihe zur *Präzisions- und Approximationsmathematik* und Kleins fachmathematische Veröffentlichungen mit in den Blick nimmt, scheint einerseits aus mathemathikhistorischer und mathematikphilosophischer Sicht von Interesse.¹⁶ Andererseits ließen sich hieraus Perspektiven für die Rolle der Anschauung im Lehramtsstudium gewinnen.

Die Wahl der Sprache im Mathematikunterricht wird heute insbesondere mit Blick auf die Primarstufe und Sekundarstufe I diskutiert (vgl. bspw. Gallin und Ruf 1998; Maier 2004). In der Sekundarstufe II sowie im Studium wird das Augenmerk in erster Linie auf die Beherrschung der Fachsprache gelegt (vgl. etwa Bildungsstandards 2012, S. 28). Meines Erachtens kann aber gerade eine von Metaphern geprägte Sprache, wie sie Klein verwendet, in Abgrenzung zur heute etablierten Fachsprache eine besondere Rolle für die Entwicklung der Anschauung einnehmen. Diese These gilt es zu belegen.

Angrenzend an das in dieser Arbeit behandelte Thema ist das Problem eines geeigneten Begriffsverständnisses von *Elementarmathematik*. In Kapitel 1.3 wurden verschiedene Arbeitsdefinitionen für den Begriff der Elementarmathematik mit jeweils anderem Begriffsumfang vorgestellt. Eine tiefere Analyse kann einerseits zur Klärung der Begriffsbildung beitragen und andererseits den Diskurs über lehramtsgerechte Fachvorlesungen versachlichen. Hierzu gibt es bisher nur wenige wissenschaftliche Arbeiten.

¹⁶Francseca Biagoli aus Paderborn befasst sich gegenwärtig mit diesem Thema aus mathematikphilosophischer Sicht. Erste Idee sind bereits in vorangegangenen Arbeiten veröffentlicht (vgl. bspw. Biagoli 2013).

Thesen für eine heutige Umsetzung der Kleinschen Ideen

Abschließend formuliere ich Thesen für eine heutige Umsetzung der Kleinschen Vorlesung, die die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit aufgreifen:

These 1: Eine Umsetzung von Kleins Ideen heute sollte nicht nur auf eine einzelne Vorlesung beschränkt sein und muss mit konkreten Anleitungen und ‚Übungsaufgaben‘ einhergehen.

Toeplitz' Argumente (vgl. Kapitel 10.4) überzeugen: Der höhere Standpunkt darf nicht alleine als zu vermittelndes Wissen angesehen werden, sondern impliziert eine spezifische Einstellung zur Mathematik, die sich über das gesamte Studium zu entwickeln hat. Dies gilt heute umso mehr, da die vorgegebenen Rahmenbedingungen des Studiums die Eigenständigkeit der Studierenden erheblich einschränken.

These 2: Es gilt den Respekt für die Schulmathematik zu erhöhen und den beweglichen Umgang mit dieser zu stärken. Dies kann insbesondere durch das explizite Anknüpfen an schulische Vorerfahrungen gelingen.

In der von Klein eingenommenen fachmathematischen Perspektive wird nachdem die Studenten umfassende hochschulmathematische Erfahrungen gemacht haben, die Schulmathematik in den erworbenen Wissenskanon fachlich eingebettet. Dadurch entsteht die Gefahr, schulmathematische Gegenstände als triviale Spezialfälle innerhalb hochschulmathematischer Theorien zu identifizieren. Eine (ergänzende) Orientierung in Richtung Franz Meyer (vgl. Kapitel 10.3) kann helfen, den Respekt für die Schulmathematik zu erhöhen und den beweglichen Umgang mit dieser zu stärken. Diesen Weg verfolgen viele aktuelle Initiativen bei der Neuorientierung des gymnasialen Lehramtsstudiums.

These 3: Die Kleinsche Auffassung des höheren Standpunkts ist auch aus heutiger Sicht lohnend, kann jedoch mit unserem heutigen mathematikdidaktischen Wissen präziser und differenzierter kommuniziert und ausgestaltet werden.

In der vorliegenden Arbeit wurden – bezogen auf die Kleinschen Ideen – Verbindungen und Anknüpfungspunkte zur aktuellen mathematikdidaktischen Diskussion benannt. Naturgemäß sind viele Unterschiede erkennbar. Insgesamt kann festgehalten werden, dass eine Orientierung an Kleins Prinzipien und Perspektiven heute genauer gefasst und gezielter genutzt werden kann.

Literaturverzeichnis

- Ableitinger, Christoph und Herrmann, Angela (2011): *Lernen aus Musterlösungen zur Analysis und Linearen Algebra*. Wiesbaden: Vieweg + Teubner.
- Ableitinger, Christoph; Kramer, Jürg und Prediger, Susanne (2013): *Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung*. Wiesbaden: Springer Spektrum.
- aCampo, Arnold; Weigand, Hans-Georg und Ziegler, Günter M. (2008): *Standards für die Lehrerbildung im Fach Mathematik. Empfehlungen von DMV, GDM, MNU*. URL <http://www.mathematik-schule-hochschule.de/stellungnahmen>. (Abgerufen: 02.12.2013).
- Allmendinger, Henrike (2014): „Über die Notwendigkeit regelmäßiger Vorlesungen zur Elementar-Mathematik“. Lehramtsspezifische Vorlesungen Anfang des 20. Jahrhunderts. In: Jantowski, Andreas; Tobies, Renate; Fothe, Michael und Schmitz, Michael (Hgs.): *Mathematik und Anwendungen. Von der Antike bis zur Gegenwart*. Bad Berka: Thillm, S. 146–152.
- Allmendinger, Henrike und Spies, Susanne (2013): Über die moderne Entwicklung und den Aufbau der Mathematik überhaupt. In: Rathgeb, Martin; Helmerich, Markus; Krömer, Ralf; Legnink, Katja und Nickel, Gregor (Hgs.): *Mathematik im Prozess. Philosophische, Historische und Didaktische Perspektiven*. Wiesbaden: Springer Spektrum, S. 177–194.
- Arndt, Bruno (1935): Wilhelm Franz Meyer zum Gedächtnis. In: *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 45, S. 99–113.
- Baltzer, Richard (1885): *Die Elemente der Mathematik*. 7. Auflage. Leipzig: G. Hirzel. (2 Bände).
- Bauer, Thomas (2013): Schnittstellen bearbeiten mit Schnittstellenaufgaben. In: Ableitinger, Christoph; Kramer, Jürg und Prediger, Susanne (Hgs.): *Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung*. Wiesbaden: Springer Spektrum, S. 39–56.
- Beutelspacher, Albrecht; Danckwerts, Rainer und Nickel, Gregor (2010): „*Mathematik Neu Denken*“. *Empfehlungen zur Neuorientierung der universitären Lehrerbildung im Fach Mathematik für das gymnasiale Lehramt*. Bonn: Deutsche Telekom Stiftung.

- Beutelspacher, Albrecht; Danckwerts, Rainer; Nickel, Gregor; Spies, Susanne und Wickel, Gabriele (2011): *Mathematik Neu Denken – Impulse für die Gymnasiallehrerbildung an Universitäten*. Wiesbaden: Vieweg.
- Biagioli, Francesca (2013): Between Kantianism and Empiricism: Otto Hölder's Philosophy of Geometry. In: *Philosophia Scientiae*, 17(1), S. 71–92.
- Biermann, Heike R. (2010): *Praxis des Mathematikunterrichts 1750-1930. Längsschnittstudie zur Implementation und geschichtlichen Entwicklung des Mathematikunterrichts am Ratsgymnasium Bielefeld*. Berlin: Logos Verlag.
- Biermann, Heike R. und Jahnke, Hans N. (2014): How 18th Century Mathematics was Transformed into 19th Century School Curricula. In: Rezat, Sebastian; Hattermann, Mathias und Peter-Koop, Andrea (Hgs.): *Transformation. A Fundamental Idea of Mathematics Education*. Wiesbaden: Springer Spektrum, S. 5–28.
- Bildungsstandards (2012): *Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife (Beschluss der KMK vom 18.10.2012)*. URL <http://www.kmk.org/bildung-schule/allgemeine-bildung/faecher-und-unterrichtsinhalte/mathematik-naturwissenschaften-technik.html>. (Abgerufen: 02.12.2013).
- Bjarnadóttir, Kristín; Furinghetti, Fulvia und Schubring, Gert (Hgs.) (2009): „*Dig where you stand*“. *Proceedings of the conference on On-going research in the History of Mathematics Education*, Bd. 1. Reykjavik: University of Iceland – School of Education.
- Blum, Werner (1975): Ein Grundkurs in Analysis. In: *Didaktik der Mathematik*, 3, S. 163–184.
- Blum, Werner (1985): Anwendungsorientierung im Mathematikunterricht in der didaktischen Diskussion. In: *Semesterberichte zur Pflege des Zusammenhangs von Universität und Schule aus den mathematischen Seminaren*, 22, S. 195–232.
- Borel, Émile (1908): *Die Elemente der Mathematik*. Leipzig: B. G. Teubner.
- Brinkmann, Astrid (2008): *Über Vernetzungen im Mathematikunterricht. Eine Untersuchung zu linearen Gleichungssystemen in der Sekundarstufe I*. Saarbrücken: VDM Publishing.
- Bruner, Jerome S. (1973): *Der Prozeß der Erziehung*. Berlin: Berlin Verlag.
- Bühler, Axel (Hg.) (2003): *Hermeneutik. Basistexte zur Einführung in die wissenschaftstheoretischen Grundlagen von Verstehen und Interpretation*. Heidelberg: Synchron Wissenschaftsverlag.

- Burscheid, Hans Joachim (2005): Zur Entwicklung der Disziplin Mathematikdidaktik in den alten Bundesländern. In: *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 35(4), S. 146–152.
- Clark, Kathleen M. und Montelle, Clemency (2012): Priority, parallel discovery, and pre-eminence – Napier, Bürgi and the early history of the logarithm relation. In: *Revue d'histoire des mathématiques*, 18, S. 223–270.
- Courant, Richard (1925): Felix Klein. In: *Die Naturwissenschaften*, 13, S. 765–771.
- Courant, Richard (1926): Felix Klein. In: *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 34, S. 197–213.
- Courant, Richard und Robbins, Herbert (1962): *Was ist Mathematik?* Berlin u.a.: Julius Springer.
- Curdes, Beate; Jahnke-Klein, Sylvia; Langfeld, Barbara und Pieper-Seier, Irene (2003): Attribution von Erfolg und Misserfolg bei Mathematikstudierenden: Ergebnisse einer quantitativen empirischen Untersuchung. In: *Journal für Mathematik-Didaktik*, 24, S. 3–17.
- Danckwerts, Rainer (2013): Angehende Gymnasiallehrer(innen) brauchen eine „Schulmathematik vom höheren Standpunkt“! In: Ableitinger, Christoph; Kramer, Jürg und Prediger, Susanne (Hgs.): *Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung*. Wiesbaden: Springer Spektrum, S. 77–94.
- Enriques, Federigo (1907; 1911): *Fragen der Elementargeometrie*. Leipzig, Berlin: B. G. Teubner. (ins Deutsche von Thieme, H. (Teil 1, 1911) und Fleischer, H. (Teil 2, 1907)).
- Euler, Leonhard (1748): *Introductio in analysin infinitorum*. Lausanne: apud Marcum-Michaellem Bousquet & socios.
- Euler, Leonhard (1755): *Institutiones Calculi differentialis*. Petersburg: impensis Academiae imperialis scientiarum.
- Färber, Carl; Netto, Eugen; Thieme, Herrman und Meyer, Wilhelm Franz (1909–1915): *Grundlehren der Mathematik für Studierende und Lehrer*. Leipzig: B. G. Teubner.
- Félix, Lucienne (1969): *Elementarmathematik in moderner Darstellung*. Braunschweig: Vieweg.
- Freudenthal, Hans (1973): *Mathematik als pädagogische Aufgabe*. Stuttgart: Ernst Klett.

- Fritsch, Rudolf (1994): Wilhelm Franz Meyer. In: Aretin, Karl Otmar Frhr. v. (Hg.): *Neue Deutsche Biographie*, Bd. 17. Berlin: Duncker & Humblot, S. 336–337.
- Gallin, Peter und Ruf, Urs (1998): *Sprache und Mathematik in der Schule - auf eigenen Wegen zur Fachkompetenz*. Stuttgart: Kallmeyer. (Illustriert mit sechzehn Szenen aus der Biographie von Lernenden.).
- Griesel, Heinz (1971): Die mathematische Analyse als Forschungsmittel in der Didaktik der Mathematik. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht*. Franzbecker, S. 72–81.
- Gutzmer, August (1904): Über die auf die Anwendung gerichteten Bestrebungen im mathematischen Unterricht der deutschen Universitäten. In: *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 13, S. 517–523.
- Hefendehl-Hebeker, Lisa (2013): Doppelte Diskontinuität oder die Chance der Brückenschläge. In: Ableitinger, Christoph; Kramer, Jürg und Prediger, Susanne (Hgs.): *Zur doppelten Diskontinuität in der Gymnasiallehrerbildung*. Wiesbaden: Springer Spektrum, S. 1–15.
- Heymann, Hans Werner (1984): Mathematikdidaktik zwischen Stoffdidaktik und interdisziplinärer Wissenschaft. In: Heymann, Hans Werner und Busmann, Hans (Hgs.): *Mathematikdidaktik zwischen Tradition und neuen Impulsen*. Köln: Aulis-Verlag, S. 1–7.
- Hilbert, David (1905): Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik. In: Kratzer, Adolf (Hg.): *Verhandlungen des 3. Internationalen Mathematiker-Kongresses*. Leipzig: B. G. Teubner, S. 174–185.
- Hinrichs, Gerd (2008): *Modellierung im Mathematikunterricht*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.
- Höfler, Alois (1909): *Didaktik des mathematischen Unterrichts*, Bd. 1 von *Didaktische Handbücher für den realistischen Unterricht an höheren Schulen*. Leipzig und Berlin: B. G. Teubner.
- Holzmüller, Gustav (1905): Bemerkungen über den Unterricht und die Lehramtsprüfung in der Angewandten Mathematik. In: *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 14, S. 249–274.
- Husserl, Edmund (1986): *Die Idee der Phänomenologie*. Hamburg: Meiner Verlag. (Fünf Vorlesungen, Text nach Husserliana).
- Jahnke, Hans-Niels (1990): *Mathematik und Bildung in der Humboldtschen Reform*. Studien zur Wissenschafts-, Sozial- und Bildungsgeschichte der Mathematik 8. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

- Jahnke, Thomas (1998): Zur Kritik und Bedeutung der Stoffdidaktik. In: *mathematica didactica*, 2, S. 61–74.
- Killing, Wilhelm (1913): Bemerkungen über die Ausbildung der Gymnasiallehrer. In: *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 22, S. 20–34.
- Killing, Wilhelm und Hoverstadt, Heinrich (1910): *Handbuch des mathematischen Unterrichts*. Leipzig: B. G. Teubner.
- Kirchgraber, Urs (2008): Zur Mathematiklehrpersonenausbildung fürs Gymnasium an der ETH Zürich. In: *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 110, S. 143–159.
- Kirsch, Arnold (1976): Eine „intellektuell ehrliche“ Einführung des Integralbegriffs in Grundkursen. In: *Didaktik der Mathematik*, 4(2), S. 87–105.
- Kirsch, Arnold (1977): Aspekte des Vereinfachens im Mathematikunterricht. In: *Didaktik der Mathematik*, 2, S. 87–101.
- Klein, Felix (1884): *Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade*. Leipzig: B. G. Teubner.
- Klein, Felix (1890): *Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen*. Leipzig: B. G. Teubner. (Ausgearbeitet und vervollständigt von Robert Fricke).
- Klein, Felix (1894): Lecture XII The Study of Mathematics at Göttingen. In: Klein, Felix (Hg.): *Lectures on Mathematics: The Evanston Colloquium*. New York: Macmillan, S. 94–98.
- Klein, Felix (1895): Über den mathematischen Unterricht an der Göttinger Universität im besonderen Hinblick auf die Bedürfnisse der Lehramtskandidaten. In: *Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht*, 26, S. 382–388.
- Klein, Felix (1897): Riemann und seine Bedeutung für die Entwicklung der modernen Mathematik. In: *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 4, S. 71–87.
- Klein, Felix (1899): Aufgabe und Methode des mathematischen Unterrichts an den Universitäten. In: *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 7, S. 126–138.
- Klein, Felix (1902): Über den mathematischen Unterricht an den höheren Schulen. In: *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 11, S. 128–141.

- Klein, Felix (1904): Über eine zeitgemäße Umgestaltung des mathematischen Unterrichts an höheren Schulen. In: Klein, Felix und Rieke, Eduard (Hgs.): *Neue Beiträge zur Frage des Mathematischen und Physikalischen Unterrichts an den höheren Schulen*. Leipzig und Berlin: B. G. Teubner, S. 1–32.
- Klein, Felix (1905a): Bericht an die Breslauer Naturforscherversammlung über den Stand des mathematischen und physikalischen Unterrichts an den höheren Schulen. In: *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 14, S. 33–47.
- Klein, Felix (1905b): Probleme des mathematisch-physikalischen Unterrichts. In: *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 14, S. 477–492.
- Klein, Felix (1907): *Vorträge über den mathematischen Unterricht an den höheren Schulen*. Stuttgart: B. G. Teubner.
- Klein, Felix (1921): über die Arithmetisierung der Mathematik. In: Klein, Felix (Hg.): *Gesammelte mathematische Abhandlungen*, Bd. 2. Berlin: Julius Springer, S. 232–240.
- Klein, Felix (1926): *Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert*, Bd. 1. Berlin: Julius Springer.
- Klein, Felix (1974): *Das Erlanger Programm. Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen*. Berlin: Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig.
- Klein, Felix (EvhS 1): *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*, Bd. I: Arithmetik, Algebra, Analysis. 4. Auflage. Berlin: Julius Springer 1933.
- Klein, Felix (EvhS 2): *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*, Bd. II: Geometrie. 3. Auflage. Berlin: Julius Springer 1925.
- Klein, Felix (EvhS 3): *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*, Bd. III: Präzisions- und Approximationsmathematik. 3. Auflage. Berlin: Julius Springer 1929.
- Klein, Felix und Schimmack, Rudolph (1907): *Der mathematischen Unterricht an den höheren Schulen*, Bd. 1. Leipzig: B. G. Teubner.
- Klein, Felix und Sommerfeld, Arnold (1910): *Über die Theorie des Kreisels*. Leipzig: B. G. Teubner.
- KMK-Beschluss (2013): *Vereinbarung zur Gestaltung der gymnasialen Oberstufe in der Sekundarstufe II (Beschluss der KMK vom 07.07.1972 i. d. F. vom 06.06.2013)*. URL <http://www.kmk.org/bildung-schule/allgemeine-bildung/sekundarstufe-ii-gymnasiale-oberstufe.html>. (Abgerufen: 02.12.2013).

- Krauss, Stefan; Neubrand, Michael; Blum, Werner; Baumert, Jürgen; Brunner, Martin; Kunter, Mareike und Jordan, Alexander (2008): Die Untersuchung des professionellen Wissens deutscher Mathematik-Lehrerinnen und -Lehrer im Rahmen der Coaktiv-Studie. In: *Journal für Mathematik-Didaktik*, 29(3-4), S. 223–258.
- Krüger, Katja (2000): *Erziehung zum funktionalen Denken. Zur Begriffsgeschichte eines didaktischen Prinzips*. Berlin: Logos-Verlag.
- Lehmann, Christine und Maurer, Bertram (2006): *Karl Culmann und die graphische Statik: Zeichnen, die Sprache des Ingenieurs*. Berlin: Wilhelm Ernst & Sohn.
- Lenz, Hanfried (1975): *Grundlagen der Elementarmathematik*. Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften.
- Lieb, Ingo (2010): Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus. Bemerkungen zu Kleins Vorlesung. (Unveröffentlicht).
- Lietzmann, Walther (1919): *Methodik des mathematischen Unterrichts*. Leipzig: B. G. Teubner.
- Lorenz, Jens Holger (1992): *Anschauung und Veranschaulichungsmittel im Mathematikunterricht*. 2. unveränd. Auflage. Göttingen: Hogrefe.
- Lorey, Wilhelm (1905): Über die Organisation des mathematischen Hochschulunterrichts. In: *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 21, S. 292–308.
- Lorey, Wilhelm (1916): *Das Studium der Mathematik an den deutschen Universitäten seit Anfang des 19. Jahrhunderts*. Leipzig: B. G. Teubner.
- Maier, Hermann (2004): Zu fachsprachlicher Hyper- und Hypotrophie im Fach Mathematik oder: Wie viel Fachsprache brauchen Schüler im Mathematikunterricht? In: *Journal für Mathematik-Didaktik*, 25(2), S. 153–166.
- Malle, Günther (1993): *Didaktische Probleme der elementaren Algebra*. Braunschweig: Vieweg Verlag.
- Manegold, Karl-Heinz (1970): *Universität, Technische Hochschule und Industrie. Ein Beitrag zur Emanzipation der Technik im 19. Jahrhundert unter besonderer Berücksichtigung der Bestrebungen Felix Kleins*. Berlin: Duncker & Humblot.
- Mattheis, Martin (2000a): Die Entwicklung des höheren Schulwesens in Preußen von 1871 bis 1900. In: *Der Mathematikunterricht*, 46(3), S. 5–21.
- Mattheis, Martin (2000b): Felix Kleins Gedanken zur Reform des mathematischen Unterrichtswesen vor 1900. In: *Der Mathematikunterricht*, 46(3), S. 41–61.

- Meraner Lehrplan (1905): Bericht betreffend den Unterricht in der Mathematik an den neunklassigen höheren Lehranstalten. In: Gutzmer, August (Hg.): *Die Tätigkeit der Unterrichtskommission der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte. Gesamtbericht*. Leipzig und Berlin: B. G. Teubner, S. 104–114.
- Meyer, Wilhelm Franz (1899): Zur Ökonomie des Denkens in der Elementarmathematik. In: *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 7(7), S. 147–154.
- Meyer, Wilhelm Franz (1901): *Differential- und Integralrechnung*. Leipzig: G. J. Göschen. (2 Bände).
- Meyer, Wilhelm Franz (1905): Kant und das Wesen des Neuen in der Mathematik. In: *Archiv der Mathematik und Physik: mit besonderer Rücksicht auf die Bedürfnisse der Lehrer an höheren Unterrichtsanstalten*, 8, S. 287–305.
- Meyer, Wilhelm Franz (1912): Über Vergangenheit und Gegenwart der Mathematikss. In: *Internationale Monatsschrift für Wissenschaft, Kunst und Technik*, 6, S. 927–944.
- Meyer, Wilhelm Franz (1922): Ergänzungen zur Elementarmathematik. In: *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 31, S. 35–50.
- Meyer, Wilhelm Franz und Mohrmann, Hans (1914): *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaft mit Einschluss ihrer Anwendungen*, Bd. 3, Teil 1, Heft 2. Leipzig: B. G. Teubner.
- Mischau, Anina und Blunck, Andrea (2006): Mathematikstudierende, ihr Studium und ihr Fach: Einfluss von Studiengang und Geschlecht. In: *Mitteilungen der DMV*, 14(1), S. 46–52.
- Nickel, Gregor (2013): Vom Nutzen und Nachteil der Mathematikgeschichte für das Lehramtsstudium. In: Allmendinger, Henrike; Lengnink, Katja; Vohns, Andreas und Wickel, Gabriele (Hgs.): *Mathematik verständlich unterrichten – Perspektiven für Schule und Hochschule*. Wiesbaden: Springer Spektrum, S. 253–266.
- Pfeifer, Wolfgang (1997): *Etymologisches Wörterbuch des Deutschen*. München: Deutscher Taschenbuch Verlag.
- Pieper-Seier, Irene (2002): Lehramtsstudierende und ihr Verhältnis zur Mathematik. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht*. S. 195–398.
- Pringsheim, Alfred (1897): Über den Zahl- und Grenzbegriff im Unterricht. In: *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 6, S. 73–83.
- Pringsheim, Alfred (1899): Zur Frage der Universitäts-Vorlesungen über Infinitesimalrechnung. In: *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 7, S. 138–145.

- Reiss, Kristina und Hammer, Christoph (2013): *Grundlagen der Mathematikdidaktik. Eine Einführung für den Unterricht in der Sekundarstufe*. Berlin: Springer Verlag.
- Schappacher, Norbert und Volkert, Klaus (2005): Heinrich Weber, un mathématicien à Strasbourg 1895 – 1913. In: Crawford, Elisabeth und Olf-Nathan, Josiane (Hgs.): *La science sous influence. L'université de Strasbourg, enjeu des conflits franco-allemands 1872 – 1945*. Straßburg: La Nuée Bleue, S. 37–47.
- Schellbach, Karl (1860): *Mathematische Lehrstunden: Aufgaben von der Lehre vom Größten und Kleinsten*. Berlin: G. Reimer. (Bearbeitet und herausgegeben von A. Bode und E. Fischer).
- Schubring, Gert (1978): *Das genetische Prinzip in der Mathematikdidaktik*. Stuttgart: Klett-Cotta.
- Schweiger, Fritz (1992): Fundamentale Ideen. Eine geistesgeschichtliche Studie zur Mathematikdidaktik. In: *Journal für Mathematik-Didaktik*, 13, S. 199–214.
- Seiffert, Helmut (1970): *Einführung in die Wissenschaftstheorie. Band 2. Phänomenologie, Hermeneutik und historische Methode, Dialektik*. München: Beck.
- Simon, Maximilian (1901): *Methodik der elementaren Arithmetik in Verbindung mit algebraischer Analysis*. Leipzig: B. G. Teubner.
- Sommer, Julius (1914): Elementare Geometrie vom Standpunkte der neueren Analysis aus. In: Meyer, Wilhelm Franz und Mohrmann, Hans (Hgs.): *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen*, Bd. 3, Teil 1, Heft 2. Leipzig: B. G. Teubner, S. 771–854.
- Stäckel, Paul (1904): Angewandte Mathematik und Physik an den deutschen Universitäten. In: *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 13, S. 313–341.
- Stäckel, Paul (1905): Über die Notwendigkeit regelmäßiger Vorlesungen über elementare Mathematik an den Universitäten. In: Krazer, Adolf (Hg.): *Verhandlungen des 3. Internationalen Mathematiker-Kongresses*. B. G. Teubner, S. 608–614.
- Tobies, Renate und König, Fritz (1981): *Felix Klein*. Leipzig: B. G. Teubner.
- Toepell, Michael (2003): Rückbezüge des Mathematikunterrichts und der Mathematikdidaktik in der BRD auf historische Vorentwicklungen. In: *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 35(4), S. 177–181.
- Toeplitz, Otto (1927): Das Problem der Universitätsvorlesungen über Infinitesimalrechnung und ihre Abgrenzung gegenüber der Infinitesimalrechnung an den höheren Schulen. In: *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 36, S. 88–99.

- Toeplitz, Otto (1929): Spannungen zwischen den Aufgaben und den Zielen des Hochschulunterrichts und des Unterrichts an den höheren Schulen in der Mathematik. In: *Schriften des DAMNU*, 2(10), S. 1–26.
- Toeplitz, Otto (1932): Das Problem der „Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus“. In: *Semesterberichte zur Pflege des Zusammenhangs von Universität und Schule aus den mathematischen Seminaren*, 1, S. 1–15.
- Toeplitz, Otto (1972): *Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung*, Bd. 1. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Julius Springer.
- Tropfke, Johannes (1903): *Geschichte der Elementarmathematik in systematischer Darstellung*. Berlin: Veit & Comp.
- Vohns, Andreas (2007): *Grundlegende Ideen und Mathematikunterricht. Entwicklung und Perspektiven eines fachdidaktischen Prinzips*. Norderstedt: Books on Demand.
- Volkert, Klaus Th. (1986): *Die Krise der Anschauung: eine Studie zu formalen und heuristischen Verfahren in der Mathematik seit 1850*. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.
- Voss, Aurel (1914): Heinrich Weber. Nachruf. In: *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 23, S. 431–444.
- Wagenschein, Martin (1999): *Verstehen lehren. Genetisch, Sokratisch, Exemplarisch*. 2. Auflage. Langensalza: Beltz.
- Weber, Christof (2013): Grundvorstellungen zum Logarithmus – Basis für einen verständlichen Unterricht. In: Allmendinger, Henrike; Lengnink, Katja; Vohns, Andreas und Wickel, Gabriele (Hgs.): *Mathematik verständlich unterrichten – Perspektiven für Unterricht und Lehrerbildung*. Wiesbaden: Springer Spektrum, S. 79–98.
- Weber, Heinrich (1903): Über die Stellung der Elementarmathematik in der mathematischen Wissenschaft. In: *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, 12, S. 398–401.
- Weber, Heinrich (1921): *Lehrbuch der Algebra*. Braunschweig: Vieweg Verlag.
- Weber, Heinrich und Riemann, Bernhard (1910): *Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik: nach Riemanns Vorlesungen*. Braunschweig: Vieweg.
- Weber, Heinrich und Wellstein, Josef (1909): *Encyklopädie der Elementarmathematik: Ein Handbuch für Lehrer und Studierende*, Bd. 1: Elementare Algebra und Analysis. 3. Auflage. Leipzig: B. G. Teubner.

- Weber, Heinrich; Wellstein, Josef und Jacobsthal, Walther (1915): *Encyklopädie der Elementar-Mathematik: Ein Handbuch für Lehrer und Studierende.*, Bd. 2: Grundlagen der Geometrie. 3. Auflage. Leipzig: B. G. Teubner.
- Weber, Rudolf H. (1923): *Encyklopädie der Elementar-Mathematik: Ein Handbuch für Lehrer und Studierende*, Bd. 3: Angewandte Elementarmathematik, Teil 1. Mathematische Physik mit einem Buch über Maxima und Minima von H. Weber und J. Wellstein. 3. Auflage. Leipzig: B. G. Teubner.
- Weigand, Hans-Georg (2009): Das Klein-Projekt. Eine Aktualisierung der Mathematik vom höheren Standpunkt aus. In: *Mitteilungen der Deutschen Mathematiker Vereinigung*, 17, S. 172–173.
- Wirtinger, Wilhelm (1919): Klein und die Mathematik der letzten fünfzig Jahre. In: *Die Naturwissenschaften*, 7, S. 287–288.
- Wittmann, Erich Christian (1981): *Grundfragen des Mathematikunterrichts*. Wiesbaden: Vieweg + Teubner.
- Wolff, Christian (1778): Mathematisches Lexikon. In: Wolff, Christian (Hg.): *Gesammelte Werke*, Bd. 11 von *Deutsche Schriften*. Hildesheim, New York: Georg Olms Verlag, S. 578. (Herausg. und bearb. v. Joseph E. Hofmann).
- Wußing, Hans (2008): *Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik*. Frankfurt am Main: Wissenschaftlicher Verlag Harri Deutsch.

SieB

Siegener Beiträge zur Geschichte und Philosophie der Mathematik

Ralf Krömer, Gregor Nickel (Hrsg.)

Bisher erschienen

Band 1 (2013), 155 S., kart, 13,- Euro

Mit Beiträgen von Gregor Nickel, Ingo Witzke, Anna-Sophie Heinemann, Matthias Wille, Philipp Karschuck, Ralf Krömer & David Corfield

Band 2 (2013), 278 S., kart., Preis: 22,- Euro

Susanne Spies:

Ästhetische Erfahrung Mathematik: Über das Phänomen schöner Beweise und den Mathematiker als Künstler

ISSN 2197-5590 *universi* – Universitätsverlag Siegen | www.uni-siegen.de/universi

Preis: 13,- Euro (Doppelnummer 22,- Euro)

Über **SieB**

- Erscheinungsweise: ein bis zweimal jährlich.
- Hauptziel: die Beförderung des fachlichen Diskurses; die Aufsätze werden nicht referiert, daher ist eine relativ schnelle Publikation möglich.
- Publikationssprachen: Deutsch (vorzugsweise), Englisch, Französisch, Italienisch.
- Die Siegener Beiträge sind als Präpublikationsreihe konzipiert; alle Publikationsrechte verbleiben beim jeweiligen Autor.
- Neben den regulären Ausgaben ist die Publikation von monographischen Bänden geplant.